

Modelarea piețelor financiare

Capitolul 11: Modele în timp continuu



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București
IDA Institute Digital Assets
Blockchain Research Center
AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance
Academia Română, Institutul de Prognoză Economică
MSCA Digital Finance

Poate un singur model descrie prețurile la orice scară de timp?

> *"It is shown that common-stock prices, and the value of money can be regarded as an ensemble of decisions in statistical equilibrium, with properties quite analogous to an ensemble of particles in statistical mechanics."*
>
> — *Osborne (1959)*

- Logaritmii prețurilor se comportă ca mișcarea browniană
  - mișcarea browniană geometrică (GBM) este modelul de preț din spatele Black & Scholes (1973)
- Randamentele zilnice ale S&P 500 (*Standard & Poor's*), 1990–2026, resping GBM
  - excesul de kurtosis este 10,9, în loc de 0
  - ACF (*AutoCorrelation Function*, funcția de autocorelație) a lui $|r_t|$ este 0,27 la lagul 1 și încă 0,14 la lagul 50, în loc de 0
- Merton reproduce coada, Heston reproduce gruparea volatilității (*volatility clustering*)
  - niciunul nu atinge excesul de kurtosis din date: 3,66 (Merton) și 3,21 (Heston), față de 10,88

▸ Graficul central: Capacitatea modelelor de a reproduce S&P 500

Cum descriem prețurile în timp continuu?

Ce explică modelele

- Le poate descrie un singur model la **orice** scară de timp?
  - prețurile sînt înregistrate zilnic sau la cîteva milisecunde
- Partea I: mișcarea browniană, calculul Itô, simularea, mișcarea browniană geometrică (GBM), revenirea la medie
- Partea a II-a: modele și date
  - estimarea difuziilor, schimbarea măsurii, salturile, volatilitatea stocastică
  - modelele confruntate cu datele și două studii de caz
  - descoperirea asistată de AI (Artificial Intelligence — inteligență artificială)

Rezultatele învățării

- derivați soluții cu lema lui Itô și simulați o ecuație diferențială stocastică cu un ordin de eroare cunoscut
- calculați estimări GBM, Ornstein–Uhlenbeck, Merton și Heston, cu erori standard care reflectă ce identifică eșantionul
- interpretați ce caracteristică a datelor reproduce fiecare model și ce caracteristică nu reproduce niciunul
- interpretați de ce evaluarea opțiunilor (Capitolul 12) și modelele de dobîndă folosesc acest limbaj
- Aprofundări și Anexa: lectură pentru familiarizare

Indicii și sursele de date

- **VIX**: Cboe Volatility Index — indice al volatilității implicite a indicelui S&P 500.
- **BET**: Bucharest Exchange Trading (index) — indicele de referință al Bursei de Valori București.
- **BVB**: Bursa de Valori București.
- **CBOE**: Chicago Board Options Exchange — bursa de opțiuni din Chicago.
- **FRED**: Federal Reserve Economic Data — baza de date economice a Rezervei Federale (St. Louis).
- **DTB3**: 3-Month Treasury Bill: secondary market rate — codul FRED al randamentului titlurilor de stat americane pe 3 luni.

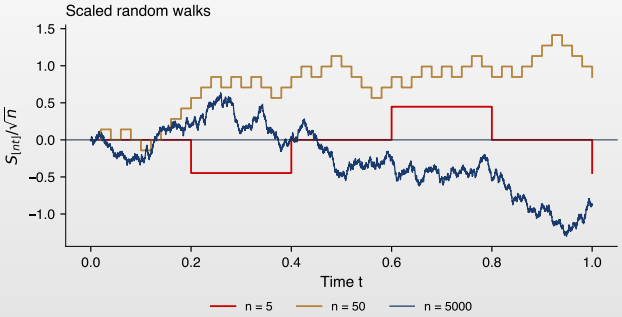
- Exemplele detaliate și subiectele avansate sînt în Aprofundări, după Concluzii
  - butonul din subsol duce la ele, iar butonul Înapoi revine la slide-ul de plecare

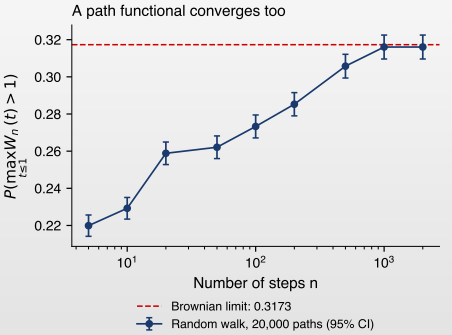
De la mersul aleator la mișcarea browniană: teorema lui Donsker (1/3)

- **Întrebarea**: ce proces obținem cînd pașii devin tot mai mici și tot mai deși?
  - prețurile se modifică în pași discreți
- **Mers aleator** (*random walk*): $S_0 = 0$, $S_k = S_{k-1} + \xi_k = \xi_1 + \cdots + \xi_k$
  - pașii ξ_i sînt i.i.d., de medie 0 și dispersie 1
  - i.i.d.: independent and identically distributed — independente și identic distribuite
  - Este modelul logaritmului prețului din Capitolul 2, cu ξ_k randamentul standardizat al zilei k
- **Mers aleator scalat**: $W_n(t) = S_{\lfloor nt \rfloor}/\sqrt{n}$, cu n pași pe unitatea de timp
  - $\lfloor nt \rfloor$: partea întreagă a lui nt
  - De ce $\sqrt{n}$: $\mathrm{Var}(W_n(t)) = \lfloor nt \rfloor / n \to t$
  - împărțită la n, limita ar fi 0, iar neîmpărțită, dispersia ar exploda
- Teorema limită centrală (CLT): $W_n(t) \to N(0, t)$ pentru fiecare t în parte
- Teorema lui Donsker: $W_n \Rightarrow W$ pentru **întreaga traiectorie** Billingsley (1999)
  - $\Rightarrow$: convergență în distribuție
  - rezultatul are loc oricare ar fi legea pașilor

De la mersul aleator la mișcarea browniană: teorema lui Donsker (2/3)

CI: Confidence Interval.





MFM_ch11_donsker ▶ Interactiv

De la mersul aleator la mișcarea browniană: teorema lui Donsker (3/3)

- Stînga: trei mersuri aleatoare scalate pe $[0, 1]$, cu $n = 5$, 50 și 5 000 de pași
  - axa verticală este $S_{\lfloor nt \rfloor} / \sqrt{n}$
  - Cu n mare, traiectoria în trepte devine continuă și neregulată, ca o traiectorie browniană
- Dreapta: $P(\max_{t \le 1} W_n(t) > 1)$ în funcție de n, pe o axă logaritmică
  - probabilitatea este estimată din 20 000 de traiectorii (CI de 95%)
  - Probabilitatea crește de la 0,220 ($n = 5$) la 0,316 ($n = 2\,000$)
  - limita este valoarea din principiul reflexiei, $2(1 - \Phi(1)) = 0{,}3173$
  - Φ: funcția de repartiție a distribuției Normale standard
- O grilă rară nu surprinde maximul atins între observații
- Convergența este lentă, de ordinul $1/\sqrt{n}$
  - închiderile zilnice subestimează amplitudinea din timpul zilei

MFM_ch11_donsker

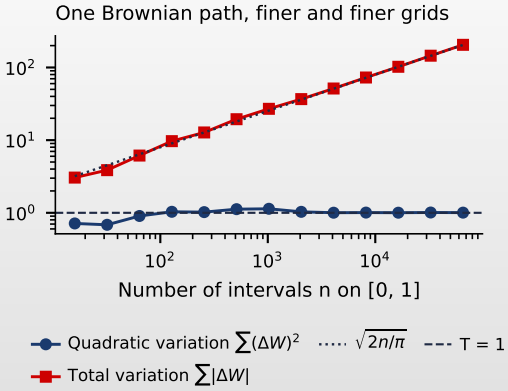
Mișcarea browniană: definiție și proprietăți

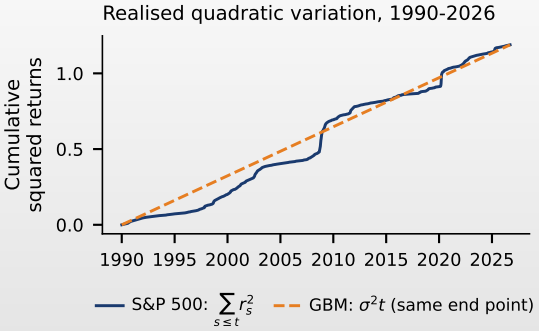
- **Mișcarea browniană standard**: pornește din $W_0 = 0$, cu incremente independente și traiectorii continue
  - incrementele sînt $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$ pentru $s < t$
  - Existența: Wiener (1923)
  - simularea pe o grilă: $W_{t+\Delta t} = W_t + \sqrt{\Delta t}\, Z$, $Z \sim N(0,1)$
- Un proces gaussian cu $\mathrm{Cov}(W_s, W_t) = \min(s,t)$
- Un **martingal**: $\mathbb{E}[W_t \mid \mathcal{F}_s] = W_s$
  - $\mathcal{F}_s$ este informația disponibilă pînă la s
  - este modelul de mers aleator al pieței eficiente din Capitolul 2
- **Autosimilaritate**: $\{c^{-1/2} W_{ct}\}$ este tot o mișcare browniană standard, pentru orice $c > 0$
- Traiectoriile sînt continue, dar **nicăieri derivabile**
  - $(W_{t+h} - W_t)/h$ are abaterea standard $1/\sqrt{h} \to \infty$
  - calculul diferențial clasic nu se aplică

Variația totală și variația pătratică

- **Întrebarea**: de ce nu se aplică calculul diferențial clasic unei traiectorii browniene?
  - și ce îl înlocuiește?
- **Variația totală** $\sum_k |\Delta W_k|$, pe grila $0 = t_0 < \cdots < t_n = T$
  - pasul grilei este $\Delta t = T/n$, iar $\Delta W_k = W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$
  - Media ei este $\sqrt{2nT/\pi} \to \infty$
  - o traiectorie browniană are lungime infinită
- **Variația pătratică** $[W]_T = \lim \sum_k (\Delta W_k)^2 = T$
  - o sumă aleatoare cu o limită **deterministă**
  - $Q_n = \sum_{k=1}^n (\Delta W_k)^2$, $\mathrm{Var}(Q_n) = 2T^2/n$
  - un an de date zilnice dă o eroare relativă de circa 9% ($\sqrt{2/252}$)
  - este principiul variantei realizate (Capitolul 9)
- Scrierea prescurtată din calculul Itô: $(\mathrm{d}W_t)^2 = \mathrm{d}t$

Variația pătratică: simulare și date (1/2)





MFM_ch11_quadratic_variation ▶ Interactiv

Variația pătratică: simulare și date (2/2)

- Stînga: o traiectorie browniană pe grile cu 16 pînă la 65 536 de intervale
  - variația pătratică se stabilizează la 1,006 ($T = 1$)
  - variația totală continuă să crească, 205 față de $\sqrt{2n/\pi} = 204$
- Dreapta: suma cumulată $\sum r_t^2$ pentru S&P 500
  - suma este 1,188 în 36,7 ani (volatilitate medie 18,0%)
  - sub mișcarea browniană geometrică ar urma dreapta $\sigma^2 t$
- Suma crește în trepte
  - septembrie 2008 – martie 2009: 1,6% din zile, dar 15,2% din variația pătratică
  - februarie – aprilie 2020: 0,5% din zile, dar 7,8% din variația pătratică
  - volatilitatea este ea însăși aleatoare (Heston, Secțiunea 10)

MFM_ch11_quadratic_variation

Integrala Itô (1/2)

- Scopul: un sens pentru $\int_0^T H_t \, \mathrm{d}W_t$
  - integrala este cîștigul din deținerea a H_t unități dintr-un activ cu prețul W
  - integrala Riemann–Stieltjes nu se aplică, deoarece variația totală este infinită
- **Integrala Itô**: limita în medie pătratică a sumelor cu integrandul evaluat în capătul **stîng**
  - $\int_0^T H_t \, \mathrm{d}W_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} H_{t_{k-1}} \left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right)$
  - pentru H **adaptat**, cu $\mathbb{E}\left[\int_0^T H_t^2 \, \mathrm{d}t\right] < \infty$
  - H_t folosește doar informația pînă la t: poziția se alege înaintea următoarei mișcări a prețului

Integrala Itô (2/2)

- Media zero și **izometria Itô**
  - media zero: $\mathbb{E}\left[\int_0^T H_t \,\mathrm{d}W_t\right] = 0$
  - izometria: $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T H_t \,\mathrm{d}W_t\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T H_t^2 \,\mathrm{d}t\right]$
  - $t \mapsto \int_0^t H_s \,\mathrm{d}W_s$ este un martingal
  - nicio strategie nu cîștigă în medie (condiții mai slabe: ▸ Anexa)
- Integrandul mediat între capete, $\frac{1}{2}(H_{t_{k-1}} + H_{t_k})$, dă integrala **Stratonovich**, cu altă valoare
  - în finanțe se folosește integrala Itô: integrandul mediat ar folosi prețul de la t_k, necunoscut cînd se alege poziția

Procese Itô și lema lui Itô

- **Proces Itô**: $\mathrm{d}X_t = a_t\,\mathrm{d}t + b_t\,\mathrm{d}W_t$
  - driftul a_t și coeficientul de difuzie b_t sînt ambii adaptați
  - Prescurtare pentru $X_t = X_0 + \int_0^t a_s\,\mathrm{d}s + \int_0^t b_s\,\mathrm{d}W_s$
- **Lema lui Itô**: pentru $f(t,x)$ cu derivate continue, o dată în t și de două ori în x Itô (1944)
  - $\mathrm{d}f(t,X_t) = \left(f_t + a_t f_x + \frac{1}{2}b_t^2 f_{xx}\right)\mathrm{d}t + b_t f_x\,\mathrm{d}W_t$
  - Derivatele parțiale evaluate în (t,X_t): $f_t = \partial f/\partial t$, $f_x = \partial f/\partial x$, $f_{xx} = \partial^2 f/\partial x^2$
- Regulă practică: dezvoltare Taylor de ordinul doi
  - regulile de calcul: $\mathrm{d}t\cdot\mathrm{d}t = 0$, $\mathrm{d}t\cdot\mathrm{d}W = 0$, $\mathrm{d}W\cdot\mathrm{d}W = \mathrm{d}t$
  - Termenul de ordinul doi $\frac{1}{2}b_t^2 f_{xx}\,\mathrm{d}t$ nu dispare
  - aceasta este singura diferență față de calculul clasic

Ecuații diferențiale stocastice și schema Euler–Maruyama

- **Întrebarea**: cum simulăm un model a cărui tranziție (legea lui $X_{t+\Delta t}$ dat fiind X_t) nu este ușor de simulat, ca Heston?
  - și cît de mare este eroarea de discretizare?
  - simularea exactă există, dar este costisitoare: Broadie & Kaya (2006)
- O **ecuație diferențială stocastică** (SDE): $\mathrm{d}X_t = a(t, X_t)\,\mathrm{d}t + b(t, X_t)\,\mathrm{d}W_t$, X_0 dat
  - SDE: stochastic differential equation
  - driftul și difuzia depind de starea curentă
  - GBM, Ornstein–Uhlenbeck și Merton au tranziții exacte: le simulăm fără eroare de discretizare
  - Pentru Heston, doar funcția caracteristică are formă închisă
  - Condițiile de existență a soluției: ▸ Anexa
- **Euler–Maruyama**: a și b sînt menținuți constanți pe fiecare pas Higham (2001)
  - $X_{k+1} = X_k + a(X_k)\,\Delta t + b(X_k)\,\Delta W_k$, $\Delta W_k = \sqrt{\Delta t}\,Z_k$
  - X_k este aproximarea la $t_k = k\Delta t$, iar Z_k sînt i.i.d. $N(0,1)$

Schema Milstein și convergența tare

- **Milstein**: adăugăm următorul termen Itô–Taylor Milstein (1975)
  - $X_{k+1} = X_k + a(X_k)\,\Delta t + b(X_k)\,\Delta W_k + \frac{1}{2} b(X_k)\,b'(X_k)\left[(\Delta W_k)^2 - \Delta t\right]$
  - $b' = \mathrm{d}b/\mathrm{d}x$
  - Corecția are media condiționată zero
  - crește ordinul tare (precizia traiectoriei), nu și ordinul slab (precizia mediilor)
- **Eroarea tare**: $\mathbb{E}|X_T - X_T^{\Delta t}| \leq C\,\Delta t^{\gamma}$
  - măsoară cît de aproape este fiecare traiectorie simulată de cea adevărată
  - X_T este soluția exactă, iar $X_T^{\Delta t}$ soluția schemei cu pasul Δt
  - C este o constantă, iar γ ordinul tare
  - $\gamma = 1/2$ pentru Euler–Maruyama și $\gamma = 1$ pentru Milstein
  - contează pentru mărimile dependente de traiectorie: erori de acoperire a riscului (*hedging*), atingerea unor bariere

Mișcarea browniană geometrică (GBM) din lema lui Itô (1/2)

- **Întrebarea**: ce model de preț rămîne pozitiv?
  - și dă randamente procentuale cu aceeași distribuție la orice nivel al prețului?
- SDE: $\mathrm{d}S_t = \mu S_t \,\mathrm{d}t + \sigma S_t \,\mathrm{d}W_t$
  - variația **procentuală** are drift μ și volatilitate σ constante, pe an
  - Propus de Osborne (1959) și Samuelson (1965)
  - este modelul de preț din spatele Black & Scholes (1973)
- Lema lui Itô pentru $f(x) = \ln x$
  - $f_x = 1/x$, $f_{xx} = -1/x^2$, $a_t = \mu S_t$, $b_t = \sigma S_t$
  - $\mathrm{d} \ln S_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \mathrm{d}t + \sigma \,\mathrm{d}W_t$
  - deci $S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t\right)$
  - Prețurile rămîn pozitive
  - simularea exactă are nevoie doar de extrageri din distribuția Normală

Mișcarea browniană geometrică (GBM) din lema lui Itô (2/2)

- Logaritmul prețului crește cu driftul logaritmic $m = \mu - \sigma^2/2$, nu cu μ
  - volatilitatea reduce creșterea averii investitorului median
  - Cu $\sigma = 18\%$, costul este $\sigma^2/2 = 1{,}6$ puncte procentuale pe an
  - Cu $\sigma = 67\%$ (Bitcoin), costul ajunge la 22 de puncte procentuale pe an
- Implicații testabile: $r_t = \ln(S_t/S_{t-\Delta t})$ i.i.d. $N(m\Delta t, \sigma^2\Delta t)$ la orice frecvență
  - Asimetria și excesul de kurtosis sînt zero
  - Nu există autocorelație în r_t, $|r_t|$ sau r_t^2
  - Dispersia este proporțională cu orizontul

Estimarea GBM prin verosimilitate maximă

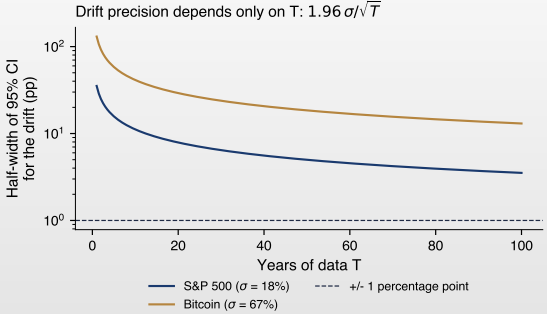
- Estimarea prin verosimilitate maximă (MLE) din n randamente logaritmice la pasul Δt
  - eșantionul acoperă $T = n\Delta t$ ani ($\bar{r}$: randamentul logaritmic mediu)
  - $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n\Delta t}\sum_t (r_t - \bar{r})^2$, $\hat{m} = \bar{r}/\Delta t$, $\hat{\mu} = \hat{m} + \hat{\sigma}^2/2$
  - Sub GBM, eroarea standard (SE, standard error) $\mathrm{SE}(\hat{\sigma}) = \sigma/\sqrt{2n}$ scade cu numărul de observații
  - În schimb, $\mathrm{SE}(\hat{m}) = \sigma/\sqrt{T}$ depinde doar de **durata calendaristică**
  - motivul: $\sum_t r_t = \ln(S_T/S_0)$ folosește doar primul și ultimul preț

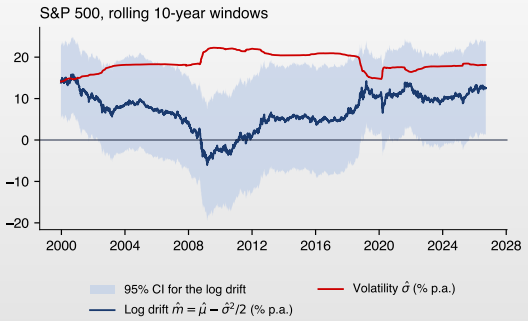
	Ani	$\hat{\sigma}$ (%)	$\mathrm{SE}(\hat{\sigma})$	$\hat{m}$ (%)	$\mathrm{SE}(\hat{m})$
S&P 500	36,7	18,0	0,13	8,3	3,0
BET	26,5	22,2	0,19	16,1	4,3
Bitcoin	12,0	66,6	0,71	43,1	19,2

- Eroarea standard este de 0,1–0,7 puncte procentuale pentru volatilitate
  - dar de 3–19 puncte pentru driftul logaritmic
- Pentru S&P 500: $\hat{\mu} = 8{,}3\% + 1{,}62\% = 10{,}0\%$ pe an
- Aceste SE sînt condiționate de GBM
  - cu excesul de kurtosis k, chiar și randamentele independente cresc $\mathrm{SE}(\hat{\sigma})$ de $\sqrt{(k+2)/2} = 2{,}5$ ori (S&P 500)
  - SE bootstrap pe blocuri: Seminarul 11, B1
  - SE a driftului cere doar varianță finită
  - SE a volatilității cere moment de ordin patru finit, pus sub semnul întrebării în Capitolul 1

Precizia estimării driftului (1/2)

p.p. = puncte procentuale.





MFM_ch11_drift_precision ▶ Interactiv

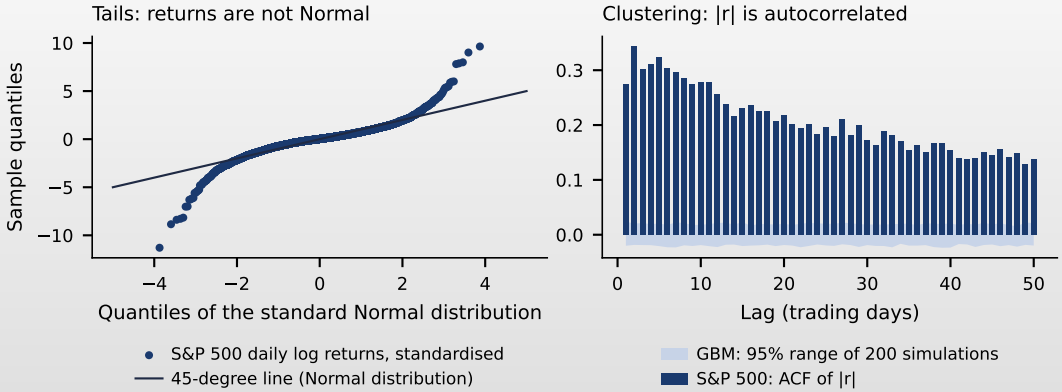
Precizia estimării driftului (2/2)

- Stînga: semilățimea CI de 95% pentru drift, în funcție de numărul de ani de date
- Ani de date necesari pentru o precizie de ± 1 punct procentual
  - S&P 500: $(1{,}96\,\hat{\sigma}/0{,}01)^2 = 1\,243$ de ani de date
  - Bitcoin: 17 028 de ani
- Dreapta: S&P 500 pe ferestre mobile (*rolling*) de 10 ani
  - Driftul logaritmic variază între $-6{,}0\%$ (fereastra încheiată în 2009-03) și 15,8% (2000-09)
  - fiecare fereastră are un CI de circa ± 11 puncte
  - precizia redusă nu permite atribuirea sigură a oscilațiilor unor schimbări ale driftului
  - Volatilitatea rămîne între 14,1% și 22,3%: precisă, dar nu constantă
- Evaluarea opțiunilor din Capitolul 12 evită μ
  - sub măsura neutră la risc intră doar σ (Girsanov, Secțiunea 8)

MFM_ch11_drift_precision

Adecvarea GBM pentru S&P 500 (1/2)

ACF: AutoCorrelation Function.



MFM_ch11_gbm_vs_data ▶ Interactiv

Adecvarea GBM pentru S&P 500 (2/2)

- Stînga: graficul cuantilă–cuantilă (QQ) față de distribuția Normală
  - randamentele logaritmice zilnice sînt standardizate
  - Excesul de kurtosis este 10,9, în loc de 0
  - kurtosis-ul empiric estimează consistent o kurtosis finită doar cu moment de ordin patru finit, pus sub semnul întrebării în Capitolul 1
  - inferența asupra kurtosis-ului cere, de regulă, moment de ordin opt
  - cea mai rea zi se află la $-11{,}3$ abateri standard
  - 62 de zile dincolo de ± 4 abateri standard, față de 0,59 așteptate sub distribuția Normală
  - Statistica Jarque–Bera (JB) testează simultan asimetria 0 și excesul de kurtosis 0
  - JB este 45 805, față de valoarea critică de 5% de 5,99 (χ^2_2)
- Dreapta: funcția de autocorelație (ACF) a lui $|r_t|$
  - ACF este 0,27 la lagul 1 și încă 0,14 la lagul 50
  - Banda de 95% din 200 de eșantioane GBM de aceeași lungime rămîne sub 0,024 în valoare absolută
- GBM nu reproduce niciunul dintre cele două fapte stilizate (cozi groase, gruparea volatilității) din Capitolul 1 Cont (2001)
  - restul capitolului adaugă revenirea la medie, salturile și volatilitatea aleatoare
- Tipul de dovadă: descriere (arată ce s-a întîmplat în date, fără un test al cauzei)
  - datele resping două implicații ale GBM, fără să identifice mecanismul care le produce

MFM_ch11_gbm_vs_data

Procesul Ornstein–Uhlenbeck (OU)

- **Întrebarea**: cum modelăm o variabilă care revine la un nivel normal?
  - Exemple: rata dobînzii sau VIX
  - Spre deosebire de prețul unei acțiuni, variabila nu se îndepărtează de acest nivel
- SDE: $\mathrm{d}x_t = \kappa(\theta - x_t)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W_t$, $\kappa > 0$ Uhlenbeck & Ornstein (1930)
  - Media pe termen lung θ, viteza de revenire la medie κ, volatilitatea σ
  - Deasupra lui θ driftul este negativ, sub θ pozitiv: o forță care readuce x spre θ
  - Folosit pentru dobînzi Vasicek (1977), volatilitate, spread-uri și prețuri ale mărfurilor
- **Timpul de înjumătățire** $\ln 2/\kappa$: timpul în care abaterea așteptată de la θ se reduce la jumătate
  - Cu $\kappa = 0{,}5$ pe an, timpul de înjumătățire este de 1,39 ani

Discretizarea exactă: un AR(1)

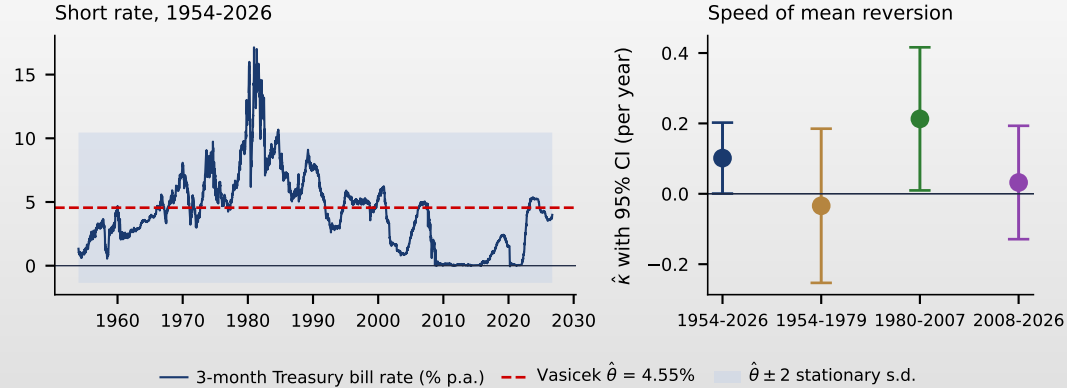
- Eșantionat la pasul Δt, procesul Ornstein–Uhlenbeck (OU) este exact un model autoregresiv de ordinul 1 (AR(1))
  - $x_{t+\Delta t} = a + b\,x_t + \varepsilon_t$, $b = e^{-\kappa \Delta t}$, $a = \theta(1-b)$, $\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1-b^2)$
- Verosimilitatea maximă = metoda celor mai mici pătrate (OLS) a lui $x_{t+\Delta t}$ pe x_t
  - Termenul liber $\hat{a}$, panta $\hat{b}$, abaterea standard reziduală $\hat{s}_\varepsilon$
  - Apoi inversăm relațiile: $\hat{\kappa} = -\ln \hat{b}/\Delta t$, $\hat{\theta} = \hat{a}/(1-\hat{b})$, $\hat{\sigma} = \hat{s}_\varepsilon \sqrt{2\hat{\kappa}/(1-\hat{b}^2)}$
- Erorile standard ale lui $\hat{\kappa}$ și $\hat{\theta}$: metoda delta (liniarizarea transformării), din covarianța OLS a lui $(\hat{a}, \hat{b})$
  - $\hat{\kappa}$ depinde doar de $\hat{b}$: $\partial\kappa/\partial b = -1/(b\Delta t)$
  - Deci este suficientă $\mathrm{Var}(\hat{b})$ (Seminarul 11, A1)
- Cu date zilnice b este foarte aproape de 1
  - κ este estimat imprecis, ca în testele de rădăcină unitară

Modele ale ratei pe termen scurt: Vasicek și CIR

- **Vasicek**: rata pe termen scurt r_t este un proces OU Vasicek (1977)
  - Rata are distribuția Normală
  - Deci ratele negative au probabilitate pozitivă $\Phi(-\theta\sqrt{2\kappa}/\sigma)$ pe termen lung
  - Prețurile și randamentele obligațiunilor în formă închisă (Feynman–Kac, Secțiunea 8)
- **Cox–Ingersoll–Ross** (CIR): $\mathrm{d}r_t = \kappa(\theta - r_t)\,\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{r_t}\,\mathrm{d}W_t$ Cox, Ingersoll & Ross (1985)
  - Volatilitatea scade lîngă zero
  - Rata rămîne pozitivă dacă $2\kappa\theta \geq \sigma^2$ (condiția Feller) Feller (1951)
- Adecvarea fiecărui model la date este o întrebare empirică Chan, Karolyi, Longstaff & Sanders (1992)
  - Testată în Secțiunea 7

Vasicek pe randamentul titlurilor de stat pe 3 luni (1/2)

s.d. = standard deviation (abatere standard).



MFM_ch11_vasicek ▶ Interactiv

Vasicek pe randamentul titlurilor de stat pe 3 luni (2/2)

- Stînga: randamentul zilnic al titlurilor de stat ale Statelor Unite (SUA) pe 3 luni (DTB3), 1954–2026
  - Media Vasicek pe termen lung $\hat{\theta} = 4{,}55\%$
  - Banda: $\hat{\theta}$ plus/minus două abateri standard staționare (s.d.)
  - $\hat{\kappa} = 0{,}101$ (SE 0,051), adică un timp de înjumătățire de 6,8 ani
  - Volatilitatea $\hat{\sigma} = 1{,}33\%$
  - Coeficientul AR(1) zilnic $\hat{b} = 0{,}99960$: aproape o rădăcină unitară
- Dreapta: $\hat{\kappa}$, cu CI de 95%, pe trei perioade
  - $-0{,}034$ în 1954–1979 (exploziv)
  - 0,213 în 1980–2007 și 0,032 în 2008–2026
  - Două dintre cele trei CI includ zero
- Testul ipotezei nule de mers aleator ($\kappa = 0$): bootstrap parametric cu 500 de mersuri aleatoare de aceeași lungime
  - Motivul: sub $\kappa = 0$ distribuția lui $\hat{\kappa}$ nu este Normală și este deplasată în sus
  - valoarea p (*p-value*) $= 0{,}287$
  - Eșantionul nu demonstrează revenirea la medie (Seminarul 11, B2)
- Tipul de dovadă: descriere

MFM_ch11_vasicek

Asimptotica infill: efectul frecvenței de eșantionare

Întrebarea: ce parametri învățăm din observații mai dese și ce parametri doar din mai mulți ani?

Infill (umplerea intervalului): $\Delta \to 0$ pe un $[0, T]$ fix

- $\sum_k (\Delta X_k)^2 \to \int_0^T b_t^2 \, \mathrm{d}t$
- Variația pătratică, deci b_t^2 de-a lungul traiectoriei (sub regularitate): identificată fără eroare la limită
  - dacă procesul Itô este continuu și observat fără zgomot de măsurare
- Întreaga funcție de difuzie sau parametrii ei cer condiții suplimentare
- Eșantionarea mai deasă ajută pentru σ (Secțiunea 5) și $b(x)$ (neparametric, Aprofundări)

Asimptotica pe orizont lung: efectul lungimii eșantionului

Orizont lung: $T \to \infty$

- Driftul nu se poate estima consistent pe un orizont fix
  - Informația Fisher $I(m) = -\mathbb{E}[\partial^2 \ell / \partial m^2]$ (ℓ: log-verosimilitatea) limitează $\mathrm{Var}(\hat{m}) \geq 1/I(m)$
  - Pentru n randamente GBM, $I(m) = n\Delta t/\sigma^2 = T/\sigma^2$
  - Deci $\mathrm{SE}(\hat{m}) = \sigma/\sqrt{T}$
- OU: $\mathrm{Var}(\hat{\kappa}) \approx (e^{2\kappa\Delta} - 1)/(T\Delta) \to 2\kappa/T$ cînd $\Delta \to 0$ (Seminarul 11, A1)
- Deplasarea lui $\hat{\kappa}$ nu scade cu eșantionarea mai deasă Yu (2012)
  - $b = e^{-\kappa\Delta} \to 1$
  - $\hat{\kappa}$ este departe de distribuția Normală cînd κT este mic

- Driftul GBM imprecis și $\hat{\kappa}$ deplasat au aceeași cauză
  - Informația crește cu T, nu cu n

De ce prețurile folosesc altă probabilitate: un exemplu pe o perioadă (1/2)

- O acțiune costă 100 astăzi, iar mîine valorează 120 (creștere) sau 90 (scădere)
  - Rata dobînzii este 0
  - Probabilitatea reală a creșterii este $p = 0{,}6$
- Un activ derivat plătește 1 la creștere și 0 la scădere
  - Îl replicăm cu Δ acțiuni și suma B în numerar
  - $120\Delta + B = 1$ și $90\Delta + B = 0$ dau $\Delta = 1/30$, $B = -3$
  - Replicarea costă $1/3$, iar orice alt preț permite un arbitraj

De ce prețurile folosesc altă probabilitate: un exemplu pe o perioadă (2/2)

- Același preț este valoarea așteptată sub $q = (100 - 90)/(120 - 90) = 1/3$
  - Este singura pondere cu $120q + 90(1 - q) = 100$
  - p nu intervine
- În general: teorema fundamentală a evaluării activelor (Shreve (2004), cap. 5)
  - Absența arbitrajului înseamnă că prețurile actualizate ale activelor tranzacționate sînt martingale sub o măsură echivalentă Q
  - Girsanov construiește Q în timp continuu
- Verificare: cît costă activul derivat dacă $p = 0{,}9$?
  - Răspuns: tot 1/3
- Dar dacă starea de scădere este 80 în loc de 90?
  - Răspuns: cu 80, $q = 20/40 = 1/2$, deci prețul este 1/2

Teorema lui Girsanov (1/2)

- Măsura reală P și o măsură echivalentă Q, legate prin **densitatea Radon–Nikodym**
  - Echivalentă: aceleași evenimente de probabilitate zero
  - $\left.\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\right|_{\mathcal{F}_T} = Z_T = \exp\left(-\int_0^T \Theta_s \,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^T \Theta_s^2 \,\mathrm{d}s\right)$
  - Θ_s este adaptat (mai jos: prețul de piață al riscului)
  - $Z_T > 0$, cu $\mathbb{E}^P[Z_T] = 1$, reponderează probabilitatea fiecărei traiectorii
  - Noua probabilitate: $Q(A) = \mathbb{E}^P[Z_T 1_A]$
- Girsanov (1960): sub Q, $\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \Theta_s \,\mathrm{d}s$ este o mișcare browniană
  - Condiția: $\mathbb{E}\left[e^{\frac{1}{2}\int_0^T \Theta_s^2 \mathrm{d}s}\right] < \infty$ (condiția Novikov)

Teorema lui Girsanov (2/2)

- Pentru $\mathrm{d}X = a\,\mathrm{d}t + b\,\mathrm{d}W$: $\mathrm{d}X = (a - b\Theta)\,\mathrm{d}t + b\,\mathrm{d}\tilde{W}$
  - Pentru procesele Itô continue **se schimbă doar driftul**
  - Difuzia și variația pătratică sînt aceleași sub P și Q
- Cu salturi (Secțiunea 9), Q poate schimba și intensitatea salturilor și distribuția mărimii lor
  - intensitatea salturilor $\hat{\lambda}$, estimată din randamente, nu este cea care evaluează opțiunile
- Cu volatilitate stocastică, P și Q ponderează diferit traiectoriile viitoare ale variației
  - Varianța istorică este un reper, nu o calibrare

Prețul de piață al riscului: P față de Q (1/2)

- GBM: $\Theta = (\mu - r)/\sigma$ este **prețul de piață al riscului**
  - Sub Q, $\mathrm{d}S = rS\,\mathrm{d}t + \sigma S\,\mathrm{d}\tilde{W}$
  - $e^{-rt}S_t$ este un Q-martingal (Seminarul 11, A4)
- S&P 500, 1990–2026: $\hat{\Theta} = (10{,}0\% - 2{,}7\%)/18{,}0\% = 0{,}40$
  - r este media randamentului titlurilor de stat pe 3 luni
  - SE $1/\sqrt{T} = 0{,}17$ sub GBM, la fel de imprecis ca driftul
  - în afara GBM: metoda delta, cu covarianța de lungă durată a momentelor de ordin unu și doi ale randamentelor
  - aceasta cere moment de ordin patru finit, pus sub semnul întrebării în Capitolul 1

Prețul de piață al riscului: P față de Q (2/2)

- Vasicek cu prima de risc $\lambda\sigma$: $\kappa^Q = \kappa$, $\kappa\theta^Q = \kappa\theta - \lambda\sigma$
  - θ, θ^Q: niveluri pe termen lung
  - Nivelul pe termen lung care evaluează obligațiunile diferă de cel estimat pe date (Secțiunea 6)
  - O primă de termen pozitivă înseamnă $\lambda < 0$
  - Atunci $\theta^Q = \theta - \lambda\sigma/\kappa > \theta$, iar randamentele pe termen lung sînt mai mari
- Heston cu prima de risc a volatilității λv_t (alt λ; v_t: varianța, Secțiunea 10): $\kappa^Q = \kappa + \lambda$, $\kappa^Q\theta^Q = \kappa\theta$
  - $\lambda < 0$ (investitorii plătesc pentru protecția față de varianță) dă $\theta^Q > \theta$
  - Aceasta este prima de risc a variației din Capitolul 9

Feynman–Kac: de la valori așteptate la PDE de evaluare

- Dacă $\mathrm{d}X = a(X)\,\mathrm{d}t + b(X)\,\mathrm{d}\tilde{W}$ sub Q Kac (1949)
  - Fie $u(t,x) = \mathbb{E}^Q\left[e^{-\int_t^T r_s\,\mathrm{d}s}\, g(X_T) \mid X_t = x\right]$
  - Funcția satisface ecuația cu derivate parțiale (PDE) $u_t + a\,u_x + \frac{1}{2}b^2 u_{xx} - r\,u = 0$, $u(T,x) = g(x)$
  - u este prețul la t al plății $g(X_T)$ de la T, actualizat cu rata pe termen scurt r_s
- Ideea demonstrației: $e^{-\int_0^t r_s \mathrm{d}s}\, u(t, X_t)$ este un Q-martingal
  - Deci driftul său Itô este zero
  - Pe aceeași cale, Capitolul 12 deduce Black–Scholes
- Obligațiunea Vasicek ($g = 1$, $X = r$): $p(t,r;T) = \exp\left(A(\tau) - B(\tau)\,r\right)$, $\tau = T - t$ (Seminarul 11, A6)
  - $B(\tau) = \frac{1-e^{-\kappa\tau}}{\kappa}$, $A(\tau) = \left(\theta^Q - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}\right)(B(\tau) - \tau) - \frac{\sigma^2 B(\tau)^2}{4\kappa}$
  - Randamentele $y(\tau) = (B(\tau)\,r - A(\tau))/\tau$ tind la $\theta^Q - \sigma^2/(2\kappa^2)$
  - Incertitudinea ratelor reduce randamentele pe termen lung (convexitate)
  - Comparația cu titlurile de stat: ▸ Anexa

Recapitulare: evaluarea sub Q

- Formulele de reținut
  - Girsanov: sub Q, driftul a devine $a - b\Theta$, iar difuzia b rămîne neschimbată
  - GBM: $\Theta = (\mu - r)/\sigma$ transformă driftul μ în r
  - Deci $e^{-rt}S_t$ este un Q-martingal
  - Feynman–Kac: prețul $= \mathbb{E}^Q$[plata actualizată], soluția PDE de evaluare
- Verificare: $\mu = 9\%$, $\sigma = 20\%$, $r = 3\%$. Cît sînt prețul de piață al riscului și driftul lui S sub Q?
  - Răspuns: $\Theta = 0{,}06/0{,}20 = 0{,}30$
  - Driftul: $\mu - \sigma\Theta = 9\% - 6\% = 3\% = r$, cu $\sigma = 20\%$ neschimbat

Difuzia cu salturi a lui Merton (1/2)

- **Întrebarea**: ce model explică zilele de crah, practic imposibile sub GBM?
- Traiectoriile browniene sînt continue, dar prețurile prezintă salturi la publicarea știrilor
  - Pe 19 octombrie 1987, Dow Jones a scăzut cu 22,6%
  - Adică circa 20 de abateri standard sub GBM cu volatilitate de 18%
  - Un salt nu poate fi neutralizat prin hedging cu tranzacționare continuă Merton (1976)
- Logaritmul prețului = mișcare browniană cu drift + salturi **Poisson compuse**
  - $\mathrm{d}\ln S_t = m\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W_t + \mathrm{d}J_t$, $J_t = \sum_{i\le N_t} Y_i$
  - N_t este un proces Poisson cu intensitatea λ
  - Mărimile salturilor $Y_i \sim N(\mu_J, \sigma_J^2)$ sînt i.i.d.
  - W, N și Y sînt independente
  - Modelul are cinci parametri, $(m, \sigma, \lambda, \mu_J, \sigma_J)$

Difuzia cu salturi a lui Merton (2/2)

- Condiționat de k salturi, randamentul pe Δt are distribuția $N\left(m\Delta t + k\mu_J,\ \sigma^2\Delta t + k\sigma_J^2\right)$
- Necondiționat, randamentul este o **mixtură Poisson** de densități Normale, i.i.d. în timp
  - $f(r) = \sum_{k\geq 0} e^{-\lambda\Delta t}\frac{(\lambda\Delta t)^k}{k!}\,\varphi\left(r;\ m\Delta t + k\mu_J,\ \sigma^2\Delta t + k\sigma_J^2\right)$
  - Ponderile sînt probabilitățile Poisson ale celor k salturi
  - $\varphi(r;\text{medie},\text{dispersie})$ este densitatea Normală
- Simulare exactă: extragem $N \sim \text{Poisson}(\lambda\Delta t)$
  - Apoi o variabilă aleatoare cu distribuția Normală și momentele condiționate

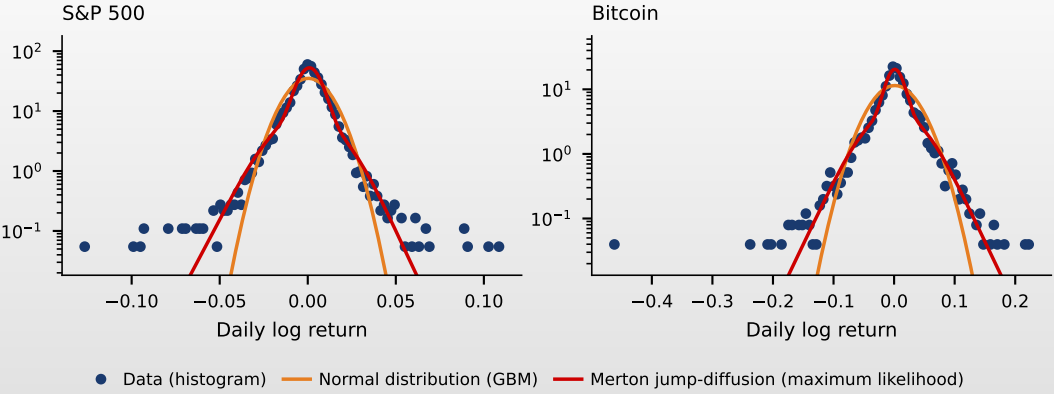
Estimările Merton pentru S&P 500, BET și Bitcoin

LR (Likelihood Ratio): statistica raportului de verosimilitate.

	$\hat{\sigma}$ (%)	$\hat{\lambda}$ (pe an)	$\hat{\mu}_J$ (%)	$\hat{\sigma}_J$ (%)	Ponderea salturilor în dispersie	LR
S&P 500	9,4	102 (11)	−0,16	1,44	71%	2 401
BET	11,3	79 (7)	−0,09	2,07	73%	2 326
Bitcoin	24,6	239 (21)	0,00	3,85	85%	1 357

- Log-verosimilitatea mixturii Poisson este maximizată numeric
  - Cel mult 12 salturi pe zi
  - În paranteze, SE din hessiană: condiționale pe modelul i.i.d., în jurul maximului local
  - SE sandwich pentru $\hat{\lambda}$ (covarianță HAC, robustă la heteroscedasticitate și autocorelare): 28 (S&P 500), 12 (BET), 36 (Bitcoin)
- Verosimilitatea este **nemărginită**, deci MLE este un maxim local Honoré (1998)
  - Cu $m\Delta t$ egal cu un randament observat și $\sigma \to 0$, acea densitate tinde la infinit
  - Testul LR față de GBM ($\lambda = 0$) este definit pe $\sigma \geq 5\%$ și nu are distribuția χ^2_3
  - Motivul: $\lambda = 0$ este pe frontieră, iar μ_J, σ_J nu sînt identificați
  - Valori critice bootstrap: Seminarul 11, B5; testul privește existența salturilor, nu precizia parametrilor
- Estimarea favorizează **multe salturi mici** (circa 80–240 pe an), nu cîteva crahuri

Estimarea Merton pentru distribuția randamentelor (1/2)



MFM_ch11_merton_density ▶ Interactiv

Estimarea Merton pentru distribuția randamentelor (2/2)

- Densitatea randamentelor logaritmice zilnice, pe scară logaritmică
  - Curbele: histograma, distribuția Normală implicată de GBM și mixtura Merton estimată
  - Merton reproduce vîrful și regiunile adiacente mult mai bine
- S&P 500: momentele implicate de modelul Merton, față de cele din date
  - Excesul de kurtosis implicat este 3,7, față de 10,9 în date
  - Asimetria implicată este $-0{,}31$, față de $-0{,}36$
- Zilele cele mai extreme se află dincolo de ambele curbe estimate
- Circa 102 „salturi" pe an
  - Modelul folosește salturile pentru a imita **volatilitatea variabilă**
- Un model i.i.d. nu poate distinge un salt de o perioadă volatilă
  - Deci este nevoie de un test direct
- Tipul de dovadă: descriere

MFM_ch11_merton_density

Recapitulare: ce adaugă salturile

- Formulele de reținut
  - $\mathrm{d}\ln S_t = m\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W_t + \mathrm{d}J_t$
  - Randamentul logaritmic mediu este $m + \lambda\mu_J$ pe an
  - Deci m singur este doar driftul părții de difuzie
  - Cumulanții de ordin superior provin doar din salturi: $c_k = \lambda\Delta t\,\mathbb{E}[Y^k]$ pentru $k \geq 3$
  - Excesul de kurtosis c_4/c_2^2 scade ca $1/\Delta t$ cu orizontul
- Din date: pentru S&P 500, $\hat{m} + \hat{\lambda}\hat{\mu}_J = 24{,}8\% + (-16{,}5\%) \approx 8{,}3\%$
  - La fel ca driftul logaritmic GBM
- Verificare: salturile dau un exces de kurtosis zilnic de 12
  - Cît este pentru randamentele pe 10 zile, dacă randamentele sînt i.i.d.?
  - Răspuns: $12/10 = 1{,}2$
  - Pe 10 zile, atît c_4, cît și c_2 cresc de 10 ori, deci c_4/c_2^2 scade de 10 ori

Modelul Heston

- **Întrebarea**: ce model generează gruparea volatilității și asimetria negativă?
  - aici, asimetria negativă produsă de efectul de levier
  - GBM și Merton cu parametri constanți nu produc gruparea volatilității și nici dependența randament–volatilitate
  - Merton poate produce asimetrie marginală negativă, prin salturi cu $\mu_J < 0$
- Două SDE, pentru logaritmul prețului și pentru varianța instantanee v_t Heston (1993)
  - $\mathrm{d}\ln S_t = \left(\mu - \frac{1}{2} v_t\right)\mathrm{d}t + \sqrt{v_t}\,\mathrm{d}W_t^{(1)}$
  - $\mathrm{d}v_t = \kappa(\theta - v_t)\,\mathrm{d}t + \xi\sqrt{v_t}\,\mathrm{d}W_t^{(2)}$, $\mathrm{Corr}(\mathrm{d}W^{(1)}, \mathrm{d}W^{(2)}) = \rho$
  - varianța este un proces CIR, cu nivelul θ, viteza κ și volatilitatea volatilității ξ
  - Condiția Feller $2\kappa\theta \geq \xi^2$: varianța nu atinge niciodată zero Feller (1951)
- $\rho < 0$: **efectul de levier**
  - o scădere a prețului mărește varianța care scalează mișcările următoare
  - deci randamentele au asimetrie negativă (Secțiunea 11)
- Simulare: două scheme
  - schema Euler cu trunchiere completă $v^+ = \max(v, 0)$ Lord, Koekkoek & van Dijk (2010)
  - sau schema pătratic-exponențială Andersen (2008)
- Randamentele zilnice cer mai mulți pași pe zi
  - cu un singur pas, randamentul zilei are distribuția Normală condiționat de v de la începutul zilei
  - pasul unic elimină mecanismul intrazilnic prin care ρ influențează asimetria; asimetria necondiționată poate fi mică, dar nu obligatoriu zero
  - Secțiunea 11 folosește 390 de pași pe zi, unul pe minut dintr-o sesiune de tranzacționare de 6,5 ore

Parametrii Heston din VIX

- Folosim proxy-ul $y_t = (\mathrm{VIX}_t/100)^2$ în locul lui v_t
  - estimăm regresia CIR discretizată, fără termen liber suplimentar
  - $\frac{y_{t+\Delta t}-y_t}{\sqrt{y_t}} = \kappa\theta\frac{\Delta t}{\sqrt{y_t}} - \kappa\Delta t\sqrt{y_t} + \xi\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_t$
- S&P 500 și VIX, 1990–2026: $\hat{\kappa} = 4{,}13$, $\hat{\xi} = 0{,}56$ și $\hat{\rho} = -0{,}69$
  - timpul de înjumătățire corespunzător: 42 de zile
  - Nivelul pe termen lung din VIX este $\sqrt{\hat{\theta}} = 20{,}9\%$, dar volatilitatea realizată este 18,0%
  - Raportul Feller al proxy-ului este $2\hat{\kappa}\hat{\theta}/\hat{\xi}^2 = 1{,}16$
- Dar y_t **nu** este v_t
  - este valoarea așteptată a variației viitoare sub măsura neutră la risc
  - este afină în v_t, deci $\hat{\xi}$ este atenuat (Aprofundări)
  - Pentru traiectoriile simulate fixăm θ la varianța realizată a S&P 500

Recapitulare: volatilitatea stocastică

- Formulele de reținut
  - Varianța este un proces CIR, $\mathrm{d}v_t = \kappa(\theta - v_t)\,\mathrm{d}t + \xi\sqrt{v_t}\,\mathrm{d}W_t^{(2)}$
  - procesul rămîne pozitiv dacă $2\kappa\theta \geq \xi^2$
  - $\rho = \mathrm{Corr}(\mathrm{d}W^{(1)}, \mathrm{d}W^{(2)}) < 0$ dă efectul de levier și randamente cu asimetrie negativă
  - același semn negativ dă o înclinare descendentă (*skew*) a volatilității implicite
  - $(\mathrm{VIX}/100)^2 = a + b\,v_t$, cu a, b din parametrii Q (nu coeficienții AR(1))
  - κ și ρ se păstrează, iar ξ este atenuat de b
- Verificare: cu $\kappa = 4$ și $\theta = 0{,}04$, care este cel mai mare ξ pentru care este îndeplinită condiția Feller?
  - Răspuns: $\xi \leq \sqrt{2 \cdot 4 \cdot 0{,}04} = \sqrt{0{,}32} \approx 0{,}57$
  - o volatilitate a volatilității mai mare permite varianței să atingă zero

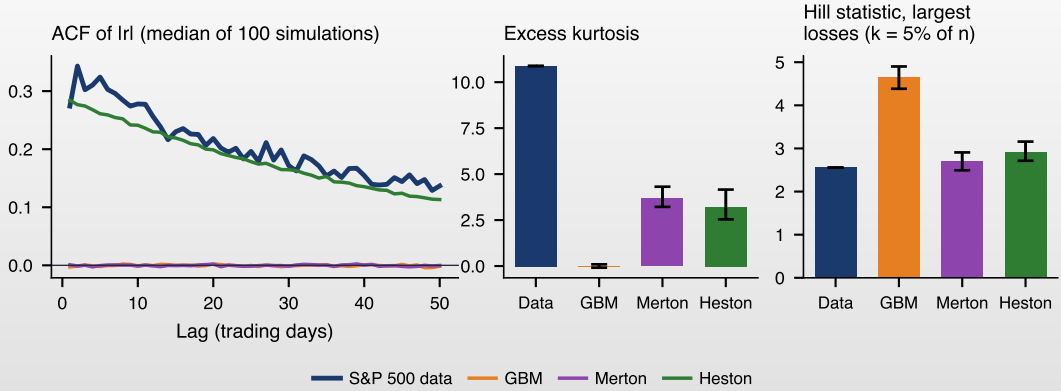
Trei repere pentru randamentele simulate (1/2)

- **Întrebarea**: ce model estimat reproduce randamentele S&P 500?
  - modelele estimate: GBM, Merton, Heston
  - trei repere: forma, gruparea volatilității și coada
- **Forma**: asimetria $c_3/c_2^{3/2}$ și excesul de kurtosis c_4/c_2^2 ale randamentelor zilnice
  - cumulanții: Aprofundări
  - reperul kurtosis estimează consistent o kurtosis finită doar cu moment de ordin patru finit, pus sub semnul întrebării în Capitolul 1
- **Gruparea volatilității**: ACF a lui $|r_t|$ la lagurile 1–20
  - zero pentru orice model i.i.d., inclusiv Merton
- **Coada**: statistica Hill a celor mai mari k pierderi $L_{(1)} \geq \cdots \geq L_{(k+1)}$
  - $\hat{\alpha} = \left[\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \ln\left(L_{(i)}/L_{(k+1)}\right)\right]^{-1}$

Trei repere pentru randamentele simulate (2/2)

- Statistica Hill estimează α din $P(L > x) \approx Cx^{-\alpha}$ pentru x mare
  - $P(L > 2x)/P(L > x) \approx 2^{-\alpha}$, deci un α mai mic înseamnă o coadă mai grea
- Cu $\alpha = 2{,}56$, dublarea pierderii păstrează $2^{-2{,}56} \approx 0{,}17$ din frecvență
  - o coadă Normală păstrează $P(Z > 4)/P(Z > 2) \approx 0{,}0014$
- Estimarea depinde de k: în date, 2,97 pentru $k = 2{,}5\%$ din randamente
  - 2,56 pentru 5% și 2,04 pentru 10% din randamente

Capacitatea modelelor de a reproduce S&P 500 (1/2)



MFM_ch11_models_vs_data ▶ Interactiv

Capacitatea modelelor de a reproduce S&P 500 (2/2)

- 100 de eșantioane simulate de cîte 9 245 de zile din fiecare model estimat
  - mediane, intervale de 90%
  - statisticile comparate: ACF a lui $|r_t|$ și excesul de kurtosis (10,88 în date)
  - și statistica Hill pe $k = 5\%$ din randamente
- Merton reproduce statistica Hill și asimetria, dar nu și gruparea volatilității
  - statistica Hill: 2,70, față de 2,56
  - asimetria: $-0{,}32$, față de $-0{,}36$
- Heston, cu parametrii din VIX, reproduce gruparea volatilității și o parte din asimetrie
  - asimetria: $-0{,}21$, față de $-0{,}36$
  - aproximarea de ordinul principal dă circa $-0{,}20$ la acești parametri (Aprofundări)
  - simularea: 390 de pași Euler cu trunchiere completă pe zi, însumați în randamente zilnice
- Niciun model estimat nu atinge excesul de kurtosis din date (tabelul complet: ▸ Anexa)
  - Andersen, Benzoni & Lund (2002) și Eraker, Johannes & Polson (2003) susțin salturi **și** volatilitate stocastică
  - SVJ (volatilitate stocastică cu salturi, *stochastic volatility with jumps*): Bates (1996)
- Tipul de dovadă: comparație între proceduri (arată care metodă funcționează mai bine pe aceleași date, nu de ce)
  - modelele la parametrii estimați: un Heston cu raport Feller mai mic ar putea atinge kurtosis-ul (Anexa)

MFM_ch11_models_vs_data

Alegerea modelului: caracteristici, identificare și limite

Caracteristica din date	**Modelul**	**Parametri identificați**	**Nerezolvat**
Prețuri pozitive, scalarea cu $\sqrt{t}$	GBM	σ precis; μ doar pe orizonturi foarte lungi	cozi groase, gruparea volatilității
Revenirea la medie a dobînzilor și a VIX	OU, Vasicek, CIR, CKLS	$b(r)$ precis; κ deplasat în sus, necesită un orizont lung	un singur factor, prea simplu pentru VIX
Salturi, cozi groase pe orizonturi scurte	Merton	λ, σ_J doar sub randamente i.i.d.; ponderea salturilor depinde de frecvență	fără gruparea volatilității
Gruparea volatilității, efectul de levier, înclinarea volatilității implicite	Heston	κ, ρ din VIX; ξ atenuat; $\theta^Q \neq \theta^P$	kurtosis-ul datelor
Toate cele de mai sus	Bates (Heston + salturi)	randamentele și suprafețele de opțiuni împreună	stări latente: este nevoie de filtrare

- Niciunul dintre aceste modele cu un factor nu reproduce asperitatea la scară mică (*roughness*) și memoria lungă ale volatilității
  - ambele caracteristici sînt discutate în continuare

Context: mișcarea browniană fracționară și exponentul Hurst (1/2) (aprofundare)

- **Întrebarea**: poate un singur proces descrie volatilitatea la ambele scări?
  - la scară mică, volatilitatea este neregulată
  - la scară mare, este persistentă (ACF a VIX, Secțiunea 6)
- **Mișcarea browniană fracționară** B^H, $0 < H < 1$: un proces gaussian cu $B_0^H = 0$
  - $\mathrm{Cov}(B_s^H, B_t^H) = \frac{1}{2}\left(s^{2H} + t^{2H} - |t-s|^{2H}\right)$
  - $H = 1/2$ dă $\min(s,t)$, adică mișcarea browniană
  - incrementele au dispersia $\mathbb{E}[(B_{t+h}^H - B_t^H)^2] = h^{2H}$
  - $H < 1/2$: incrementele succesive sînt corelate negativ
  - traiectoriile sînt atunci mai neregulate decît mișcarea browniană
  - $H > 1/2$: corelate pozitiv, mai netede

Context: mișcarea browniană fracționară și exponentul Hurst (2/2) (aprofundare)

- **OU fracționar**: ecuația OU cu B^H în locul lui W
  - un singur H fixează ambele capete ale ACF
- Laguri mici: variograma $\mathbb{E}[(x_{t+h} - x_t)^2]$ se comportă ca $h^{2H} = h^{2\alpha+1}$
  - deci indicele de asperitate este $\alpha = H - 1/2$ ($\alpha < 0$: volatilitate aspră, *rough*)
  - aici α nu este indicele cozii din Secțiunea 11
- Laguri mari: ACF scade ca $h^{2H-2} = h^{-\beta}$
  - deci $\beta = 2 - 2H$ ($\beta < 1$: ACF neintegrabilă, memorie lungă)

Întrebarea de cercetare: poate volatilitatea să fie aspră și totuși persistentă?

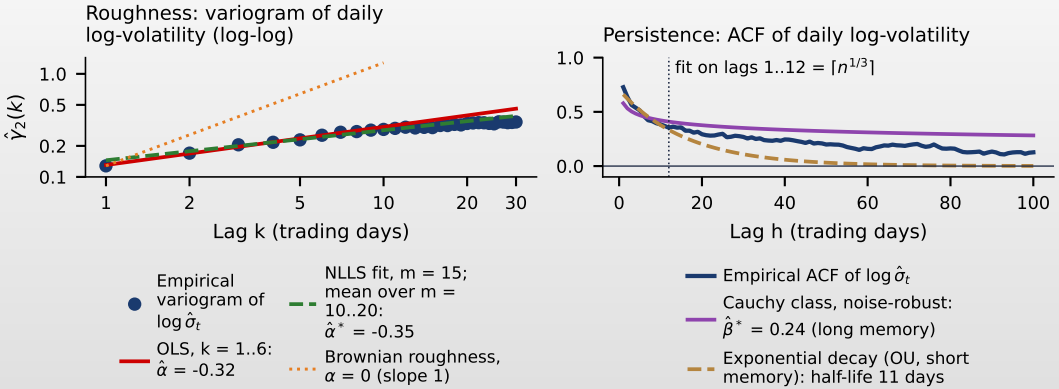
- Verificare: ce H dă $\beta = 0{,}18$? Este acel proces aspru?
  - Răspuns: $H = 1 - \beta/2 = 0{,}91$, deci $\alpha = 0{,}41 > 0$: neted, nu aspru
  - un singur H nu poate reproduce ambele trăsături
- Lucrarea: Bennedsen, Lunde & Pakkanen (2022), *Journal of Financial Econometrics*
  - tratează α și β ca parametri separați
  - pornește de la RFSV (rough fractional stochastic volatility) Gatheral, Jaisson & Rosenbaum (2018)
  - RFSV: logaritmul volatilității ca proces OU fracționar cu $H < 1/2$
  - Modelul cu memorie lungă propus de Comte & Renault (1998) folosește $H > 1/2$
- Întrebarea 1: sînt volatilitățile realizate în același timp aspre și persistente?
- Întrebarea 2: prognozează mai bine modelele care permit valori separate pentru α și β?
  - modelul, estimatorii și rezultatele: ▸ Anexă

Studiu de caz: replicare pe SPY, $\Delta =$ o zi (1/3)

- Date: bare de 5 minute pentru SPY (*SPDR S&P 500 ETF Trust*, fondul tranzacționat la bursă pe indicele S&P 500), 1 468 de zile complete (octombrie 2020 – septembrie 2026)
  - lucrarea studiază contractele futures E-mini S&P 500; SPY replică același indice
- $x_t = \log \hat{\sigma}_t = \frac{1}{2} \log \mathrm{BV}_t$, unde BV_t este variația bipower zilnică
  - calculată din cele 78 de randamente la 5 minute, robustă la salturi Barndorff-Nielsen & Shephard (2004)
- Asperitatea: variograma $\hat{\gamma}_{\mathbf{2}}(k) = \frac{\mathbf{1}}{n-k} \sum_t (x_{t+k} - x_t)^{\mathbf{2}} \approx c\, k^{\mathbf{2}\alpha+\mathbf{1}}$ pentru k mic
  - OLS: panta $\hat{a}_{\mathbf{1}}$ a lui $\log \hat{\gamma}_{\mathbf{2}}(k)$ în funcție de $\log k$, $k = 1, \ldots, 6$, dă $\hat{\alpha} = (\hat{a}_{\mathbf{1}} - 1)/2$
  - NLLS (*Non-Linear Least Squares*, metoda celor mai mici pătrate neliniare) robust la zgomot: $\hat{\gamma}_{\mathbf{2}}(k) = b_{\mathbf{0}} + b_{\mathbf{1}} k^{\mathbf{2}\alpha+\mathbf{1}}$
  - $b_{\mathbf{0}}$ absoarbe zgomotul de măsurare din x_t
- Persistența: ACF din clasa Cauchy, $\rho(h) = (1 + |h|^{\mathbf{2}\alpha+\mathbf{1}})^{-\beta/(\mathbf{2}\alpha+\mathbf{1})}$
  - ajustată pe primele $\lceil n^{\mathbf{1}/\mathbf{3}} \rceil = 12$ laguri
- Reperul de memorie scurtă: un proces OU, cu ACF $e^{-\kappa h}$

Studiu de caz: replicare pe SPY, Δ = o zi (2/3)

NLLS: Non-Linear Least Squares.



MFM_ch11_rough_vol ▶ Interactiv

Studiu de caz: replicare pe SPY, Δ = o zi (3/3)

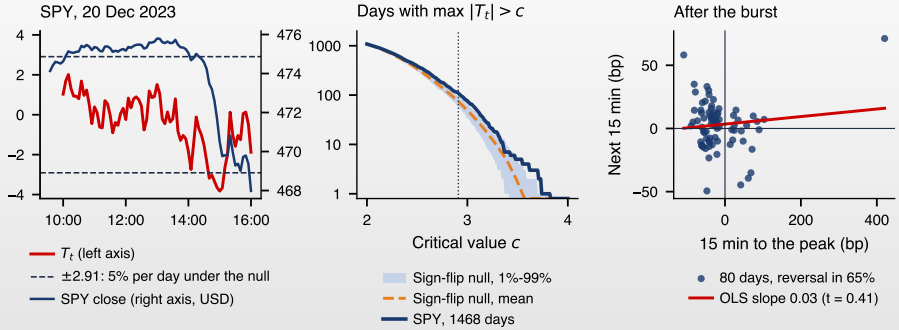
- Stînga, asperitatea: variograma empirică $\hat{\gamma}_2(k)$ în funcție de k, pe axe logaritmice
  - dreapta punctată, cu panta 1, este asperitatea mișcării browniene ($\alpha = 0$)
  - estimatorul OLS, pe $k = 1, \ldots, 6$, dă $\hat{\alpha}_{\text{OLS}} = -0{,}32$
  - estimatorul NLLS robust la zgomot dă $\hat{\alpha}^*_{\text{NLLS}} = -0{,}35$
  - Bennedsen, Lunde & Pakkanen (2022), la o zi: $-0{,}30$ (OLS) și $-0{,}33$ (NLLS)
- Dreapta, persistență: autocorelația este 0,13 la lagul 100
  - modelul Cauchy, estimat pe 12 laguri, dă $\hat{\beta} = 0{,}26$ și $\hat{\beta}^* = 0{,}24$ (robust la zgomot)
  - ambele sub 1: în acord cu memoria lungă, fără a o demonstra
  - bare de 5 minute fără pre-mediere (*pre-averaging*); măsurile realizate estimează varianța integrată, nu pe cea instantanee
  - un model OU (timp de înjumătățire de 11 zile) implică o autocorelație de 0,002 la lagul 100
- În grafic, m este numărul de laguri folosite la ajustarea NLLS, nu driftul logaritmic din GBM
  - 15 pentru curba ilustrată
  - estimarea raportată este media pentru 10–20 de laguri
- Tipul de dovadă: descriere

MFM_ch11_rough_vol

Al doilea studiu de caz (1/6): drift bursts

- Articolul: Christensen, Oomen & Renò (2022), *Journal of Econometrics*, 227(2), 461–497
  - Date: cotațiile a șase contracte futures CME (*Chicago Mercantile Exchange*, Bursa de mărfuri din Chicago), 2012–2017 (E-mini S&P 500 din 2010)
  - contractele: E-mini S&P 500, T-Note pe 10 ani, euro, aur, petrol, porumb
- Întrebarea: poate driftul μ_t să domine volatilitatea timp de cîteva minute?
  - pe orizonturi lungi, driftul este imprecis: ± 11 puncte procentuale pe 10 ani (Secțiunea 5)
  - drift burst: înainte de un moment τ, $|\mu_t|$ crește ca $(\tau - t)^{-a}$, cu $1/2 < a < 1$
  - volatilitatea poate crește și ea, dar mai lent; prețul rămîne continuu, fără salt
  - prăbușirile fulger (*flash crash*) din 6 mai 2010 (acțiuni) și 15 octombrie 2014 (titluri de stat SUA) sînt exemplele din articol
- Afirmația principală (rezumatul articolului)
  - drift bursts apar în medie o dată pe săptămînă, în toate cele patru clase de active
  - cele mai multe sînt urmate de o revenire a prețului
  - revenirea este mai puternică după drift bursts negative cu volum mare

Al doilea studiu de caz (2/6): drift bursts pe SPY, bare de 5 minute



- Stînga: prețul SPY și statistica de test T_t (definită pe slide-ul următor) pe 20 decembrie 2023, ziua cu cel mai mare $|T_t|$ din eșantion ($-3{,}83$ la 15:00)
- Mijloc: numărul de zile cu $\max_t |T_t| > c$, în date și sub ipoteza nulă cu semne aleatoare (fără drift)
- Dreapta: randamentul din cele 15 minute de după vîrful lui $|T_t|$, față de cel din cele 15 minute dinainte, în zilele cu $\max_t |T_t| > 2{,}91$

MFM_ch11_drift_burst ▶ Interactiv

Al doilea studiu de caz (3/6): statistica din articol și adaptarea din curs

- Statistica din articol (ec. 11–14), cu nucleul $K(x) = e^{-|x|}$ pentru $x \leq 0$ (doar trecutul)
  - $\hat{\mu}_t = \frac{1}{h} \sum_i K\left(\frac{t_i - \mathbf{1} - t}{h}\right) \Delta_i X$ și $\hat{\sigma}_t^{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{1}}{h'} \sum_i K\left(\frac{t_i - \mathbf{1} - t}{h'}\right) (\Delta_i X)^{\mathbf{2}}$
  - $T_t = \sqrt{h/K_{\mathbf{2}}}\, \hat{\mu}_t / \hat{\sigma}_t$, cu $K_{\mathbf{2}} = \int K^{\mathbf{2}} = 1/2$
  - fără drift burst, T_t are asimptotic distribuția Normală standard; cu drift burst, $|T_t| \to \infty$
- Articolul: $h = 5$ minute, $h' = 25$ minute, pre-mediere și corecție HAC (heteroskedasticity and autocorrelation consistent) pentru zgomotul de microstructură
  - articolul raportează numărul de drift bursts la praguri fixe, 4–6, și estimează prin simulare alarmele false
- Cursul: o adaptare pe bare de cinci minute, cu sumele pornite de la deschiderea zilei
  - $\hat{s}_j^{\mathbf{2}} = \dfrac{\sum_i u_{ij} r_i^{\mathbf{2}}}{\Delta \sum_i u_{ij}}$ și $T_j = \dfrac{\sum_i w_{ij} r_i}{\sqrt{\hat{s}_j^{\mathbf{2}}\, \Delta \sum_i w_{ij}^{\mathbf{2}}}}$
  - ponderile: $w_{ij} = e^{-(t_j - t_i - \mathbf{1})/h}$ și $u_{ij} = e^{-(t_j - t_i - \mathbf{1})/h'}$
  - numitorul este aleator și calculat din aceleași randamente, deci T_j nu are exact distribuția Normală
  - cu $h/\Delta = 3$ bare, aproximația asimptotică nu este garantată: valorile critice se calibrează prin simulare

Al doilea studiu de caz (4/6): replicarea pe SPY

- SPY, 1 468 de zile complete (octombrie 2020 – septembrie 2026)
  - $h = 15$ minute (3 bare), $h' = 75$ de minute: raportul 1:5 din articol
  - 73 de teste pe zi, 10:00–16:00
  - fără pre-mediere și fără HAC: zgomotul este mic la 5 minute
- Ipoteza nulă: randamentele înmulțite cu semne aleatoare ± 1, 200 de replicări
  - păstrează modulele randamentelor și profilul intrazilnic, dar elimină driftul
  - elimină și asimetria salturilor, dependența semnelor și efectul de levier
  - este deci mai restrictivă decît „fără drift burst”; articolul folosește o ipoteză nulă de difuzie cu salturi
- Valorile critice
  - 2,91: cuantila de 95% a lui $\max_t |T_t|$ sub ipoteza nulă
  - aproximarea Gumbel a maximului: 3,50, depășită doar în 0,12% din zilele simulate
  - un singur salt dă cel mult $|T_t| = 2{,}74$ atunci cînd randamentul saltului domină ambele sume ale nucleului, sub pragul de 2,91

Al doilea studiu de caz (5/6): rezultatul

- 109 zile candidate cu $\max_t |T_t| > 2{,}91$, față de 73,84 în medie sub ipoteza nulă
  - nicio replicare din 200 nu ajunge la 109 (maximum 100): $p_{\mathrm{MC}} = 0{,}005$, sub nulul cu semne aleatoare
  - la $c = 3{,}22$ (cuantila de 99%): 23 de zile, față de 14,96 ($p_{\mathrm{MC}} = 0{,}030$)
  - excesul descriptiv, 35,16 zile, nu estimează numărul de drift bursts adevărate
  - articolul, pe E-mini S&P 500: 202 drift bursts cu $|T_t| > 4{,}5$ în 2010–2017, circa unul la două săptămîni
- 73 din cele 109 zile au vîrful negativ (67%); nulul cu semne aleatoare este simetric prin construcție
- Revenirea apare în 65% din cele 80 de zile cu o fereastră completă după vîrf: statistică descriptivă
  - vîrful este ales retrospectiv, pe întreaga zi, deci randamentele de după vîrf influențează alegerea lui
  - sub ipoteza nulă, cu aceeași selecție: 56,5% în medie; cel puțin 65% în 12,4% din 1 000 de replicări: revenirea nu se distinge de nul
  - mărimea: $-43{,}8$ puncte de bază (bp) în 15 minute pînă la vîrf, apoi $+4{,}7$ bp
  - panta regresiei lui R^+ (după vîrf) pe R^- (înainte) (ec. 36): 0,03 (t = 0,41); articolul, E-mini, $|T_t| > 4$: $-0{,}26$ (t $= -12{,}05$)
  - vîrfuri negative, volum peste mediană (raportat la media de la aceeași oră): $-53{,}9$ bp, apoi $+6{,}4$ bp (29 de zile)
  - vîrfuri negative, volum sub mediană: $-34{,}4$ bp, apoi $+3{,}1$ bp (31 de zile)

Al doilea studiu de caz (6/6): validarea procedurii și limitele

- Aceeași procedură pe date simulate fără drift bursts: 50 de eșantioane de 1 468 de zile, bare de 5 minute
  - Heston cu parametrii din VIX, efect de levier ($\rho = -0{,}69$), pași de un minut
  - excesul mediu: 1,2 zile (cuantila de 95%: 14,8); $p_{\mathrm{MC}} \leq 0{,}05$ în 8% din eșantioane
  - plus salturi Merton asimetrice ($\hat{\lambda}$, $\hat{\mu}_J$, $\hat{\sigma}_J$ estimate pentru S&P 500)
  - excesul mediu: 3,8 zile (cuantila de 95%: 17,5); $p_{\mathrm{MC}} \leq 0{,}05$ în 12% din eșantioane
  - revenirea medie după vîrf: 56% fără salturi și 53% cu salturi
- Excesul din date, 35,16 zile, depășește cuantila de 95% din ambele modele simulate
- Tipul de dovadă: o descriere, comparată cu ipoteze nule fără drift
  - nu identifică mecanismul de lichiditate din articol
- Limite
  - puterea testului la 5 minute nu este estimată aici: o putere mică rămîne o limitare anticipată
  - cu 50 de eșantioane, frecvențele de respingere au o eroare Monte Carlo de circa ± 4 puncte procentuale
  - 29 de zile au vîrful în ultimele 15 minute ale ședinței și nu au fereastră după vîrf

O întrebare deschisă: ce parte din variația prețului provine din discontinuități?

- Modelul: $\mathrm{d}X_t = \mu_t\,\mathrm{d}t + \sigma_t\,\mathrm{d}W_t + Y_t\,\mathrm{d}N_t$
  - X_t: logaritmul prețului
  - N_t: numărul de salturi, cu intensitatea λ
  - Y_t: mărimea saltului
- Răspunsul depinde de frecvența de eșantionare și de model
  - Estimarea Merton pe date zilnice (acest capitol): salturile explică 71% din varianța S&P 500
  - Testul bipower la 5 minute (Capitolul 9): salturile explică 2,8% din varianța SPY
  - Christensen, Oomen & Podolskij (2014): date la frecvența tranzacție cu tranzacție
  - majoritatea salturilor detectate la eșantionare mai rară dispar
  - aceste „salturi" sînt mișcări rapide, dar continue
  - Christensen, Oomen & Renò (2022): **drift bursts** apar ca salturi în datele eșantionate rar
  - drift burst: o tendință explozivă scurtă în μ_t
- Întrebarea formală: H_0: $\lambda = 0$ față de H_1: $\lambda > 0$
  - ipoteza nulă: traiectorie continuă cu volatilitate stocastică
  - un test nestandard, cu aceeași problemă de frontieră ca testul LR pentru Merton (Secțiunea 9)

Bucla descoperirii cu un asistent AI

Bucla cu un asistent AI

Asistentul: un LLM (Large Language Model — model lingvistic mare) precum Claude, ChatGPT sau Gemini.

- **1. Literatura**: ponderile publicate ale salturilor, pe frecvențe
  - verificăm fiecare Digital Object Identifier (DOI) pe Crossref
- **2. Ipoteze**: salturi Merton, volatilitate Heston, drift bursts
  - fiecare cu o implicație testabilă distinctă
- **3. Replicăm întîi** estimările din capitol
- **4. Robustețe**: filtrele și testele sînt fixate înainte de prima rulare
- **5. Critica**: asistentul contestă inferența, ca un recenzent
- **6. Raportul**: toate specificațiile, codul, jurnalul AI
- Prompturi reutilizabile: Anexa

Verificările cercetătorului: eroare și test

Verificări: eroare și test

- Frontieră, parametri neidentificați: bootstrap parametric sub H_0
- Deplasarea de anticipare (*look-ahead bias*) în filtrul de volatilitate: standardizăm doar cu $\mathcal{F}_{t-1}$
- Frecvențe diferite: ponderile salturilor la fiecare frecvență, pe un eșantion comun
- Verosimilitate multimodală: multe puncte de start și profilul în λ
- Cifre inventate: orice afirmație necesită un tabel și un DOI

Mini studiu de caz: salturi sau volatilitate stocastică deghizată?

- O propunere tipică a asistentului: „71% din varianță provine din salturi”
- Ipoteza rivală: mixtura Poisson absoarbe volatilitatea variabilă în timp
  - atunci standardizarea cu volatilitatea EWMA, cunoscută la $t-1$, elimină salturile
  - EWMA: Exponentially Weighted Moving Average, medie mobilă ponderată exponențial
  - $\lambda_{\mathrm{EWMA}} = 0{,}94$, valoarea RiskMetrics pentru date zilnice

	Randamente nestandardizate	Standardizate EWMA
Excesul de kurtosis	11,0	2,9
LR, Merton față de distribuția Normală	2 403	619
$\hat{\lambda}$ pe an (SE)	100 (10)	124 (53)
Ponderea salturilor în varianță	71%	51%

- Același eșantion: 8 995 de zile, fără primele 250 (inițializarea EWMA)
- Standardizarea reduce excesul de kurtosis de la 11,0 la 2,9, dar $\hat{\lambda}$ crește de la 100 la 124 pe an
  - EWMA nu elimină neapărat heteroscedasticitatea și nu separă mecanic salturile de volatilitatea stocastică
- Interpretare: intensitatea și ponderea salturilor depind puternic de specificarea volatilității
- Acest exercițiu nu identifică structural discontinuitățile
- Tipul de dovadă: comparație între proceduri
  - același model Merton, estimat pe randamente nestandardizate și pe randamente standardizate EWMA

Un punct de plecare pentru proiect

- Întrebări
  - ce parte din varianța S&P 500 și Bitcoin provine din salturi?
  - cum depinde această pondere de frecvența de eșantionare?
  - sînt „salturile" detectate drift bursts?
- Date
  - bare de 5 minute pentru toate frecvențele intrazilnice
  - SPY: octombrie 2020 – septembrie 2026, 1 468 de zile complete de tranzacționare
  - Bitcoin: septembrie 2024 – septembrie 2026, 659 de zile UTC (*Coordinated Universal Time*, timpul universal coordonat) cu cel puțin 95% din cele 288 de bare (Capitolul 9)
  - închiderile zilnice S&P 500 și Bitcoin
- Barele Bitcoin acoperă doi ani
  - comparația intrazilnică a celor două active folosește fereastra comună septembrie 2024 – septembrie 2026
- O pre-înregistrare datată înainte de prima rulare
  - conține ipotezele, frecvențele, filtrele, testele și designul bootstrap

Idei principale și ce urmează: Capitolul 12 (1/2)

- Un mers aleator rescalat converge la mișcarea browniană (Donsker)
  - variația pătratică t a mișcării browniene stă la baza calculului Itô
- Lema lui Itô dă soluții exacte (GBM, Ornstein–Uhlenbeck, Merton)
  - celelalte modele se simulează cu Euler–Maruyama sau Milstein, cu ordin de eroare cunoscut
- Eșantionarea deasă identifică volatilitatea
  - driftul și viteza de revenire la medie necesită orizonturi lungi
  - $\hat{\kappa}$ este deplasat în sus
- Absența arbitrajului face din prețuri valori așteptate actualizate sub Q
  - Girsanov schimbă doar driftul
  - Feynman–Kac transformă valoarea așteptată într-o PDE

Idei principale și ce urmează: Capitolul 12 (2/2)

- $(\mathrm{VIX}/100)^2$ este o valoare așteptată sub Q, afină în v_t
- În modelele estimate, salturile explică mai bine cozile
  - volatilitatea stocastică explică gruparea volatilității
  - niciunul nu atinge excesul de kurtosis din date
- Volatilitatea pare aspră la scară mică și persistentă la scară mare
  - un model OU cu un singur factor nu reproduce ambele trăsături
- Urmează Capitolul 12: evaluarea opțiunilor prin replicare și citirea suprafeței de volatilitate

Verificarea înțelegerii

- De ce apare un termen suplimentar la schimbarea de variabilă în calculul Itô?
  - Explicați rolul variației pătratice.
- Observarea mai frecventă a prețurilor face estimarea driftului precisă?
  - Separați frecvența de lungimea perioadei observate.
- Ce caracteristică a datelor cere salturi și ce caracteristică cere volatilitate stocastică?
  - Folosiți comparația cu randamentele observate.
- De ce poate probabilitatea folosită la evaluare să difere de probabilitatea reală?
  - Precizați ce schimbă trecerea la altă măsură.

Decizia practică

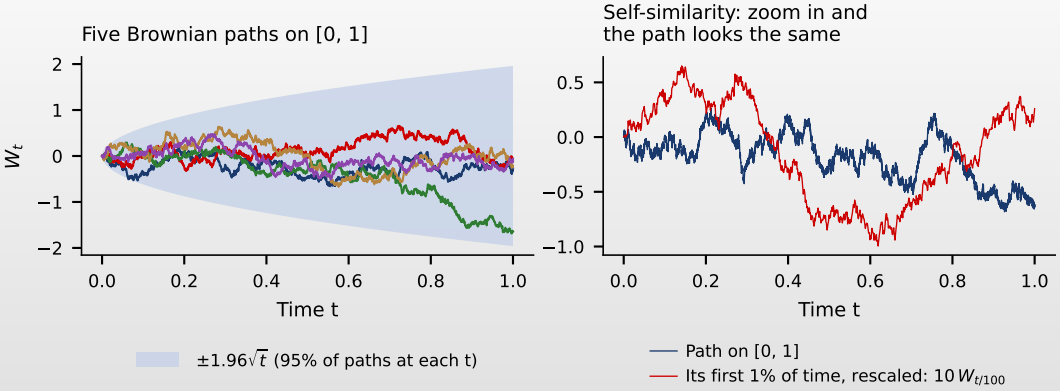
- **Ce aleg**
  - pentru randamentele zilnice S&P 500, Bates (volatilitate stocastică cu salturi), ca următor model de estimat și validat
  - partea Heston reproduce gruparea volatilității: ACF a lui $|r_t|$ la lagul 1 este 0,28, față de 0,27 în date
  - partea Merton reproduce coada: statistica Hill 2,70, față de 2,56
  - $\hat{\lambda}$ descrie cozile groase, nu numărul de discontinuități
  - volatilitatea din eșantionarea deasă; driftul și κ doar din orizonturi lungi, raportate cu CI
- **În ce condiții**
  - parametri sub P pentru risc și sub Q (VIX, suprafețe de opțiuni) pentru evaluare
  - simulare cu mulți pași pe zi (390 pentru Heston): un singur pas elimină efectul lui ρ asupra asimetriei zilnice
- **Ce rezultat m-ar face să renunț**
  - o statistică Hill sau o ACF a lui $|r_t|$ simulată din modelul estimat, departe de valorile din date
  - o autocorelație a volatilității la laguri lungi peste cea a unui singur factor, la orizontul care contează
  - SPY arată deja acest semnal (0,13 la lagul 100, față de 0,002 pentru un model OU): dacă acel orizont contează, aleg un model cu volatilitate aspră și persistentă

Datele folosite în acest capitol

Seria	Tip	Perioada	Observații / frecvență
S&P 500	indice bursier SUA	1990–2026	9 245
BET	indice bursier BVB	2000–2026	6 670
Bitcoin	cripto-activ, 7 zile din 7	2014–2026	4 384
VIX	indicele de volatilitate implicită al S&P 500 (CBOE)	1990–2026	zilnic
DTB3	randamentul titlurilor de stat SUA pe 3 luni (FRED)	1954–2026	zilnic

- Valori zilnice de închidere până la 18 septembrie 2026, fiecare serie pe propriul calendar
  - regulile de curățare: Anexa
  - randamentele logaritmice zilnice sînt $r_t = \ln P_t - \ln P_{t-\mathbf{1}}$
- Timpul este măsurat în ani, cu pasul zilnic $\Delta t = 1/252$ (Bitcoin: $1/365$)
  - drifturile și volatilitățile sînt anualizate
- Date intrazilnice: bare de 5 minute (Capitolul 9)
  - SPY, fond tranzacționat la bursă (ETF) pe S&P 500: octombrie 2020 – septembrie 2026, 1 468 de zile
  - Bitcoin: septembrie 2024 – septembrie 2026, 659 de zile UTC cu cel puțin 95% din cele 288 de bare
- Notații
  - W_t este mișcarea browniană standard, iar S_t (notat și P_t) este prețul
  - v_t este varianța instantanee, iar $\mathcal{F}_t$ este informația (filtrarea) disponibilă până la t
  - $\mathrm{d}S/S$ este randamentul simplu instantaneu, iar $\mathrm{d}\ln S$ variația logaritmică
  - lema lui Itô explică diferența dintre drifturile lor

Traiectorii browniene (1/2)



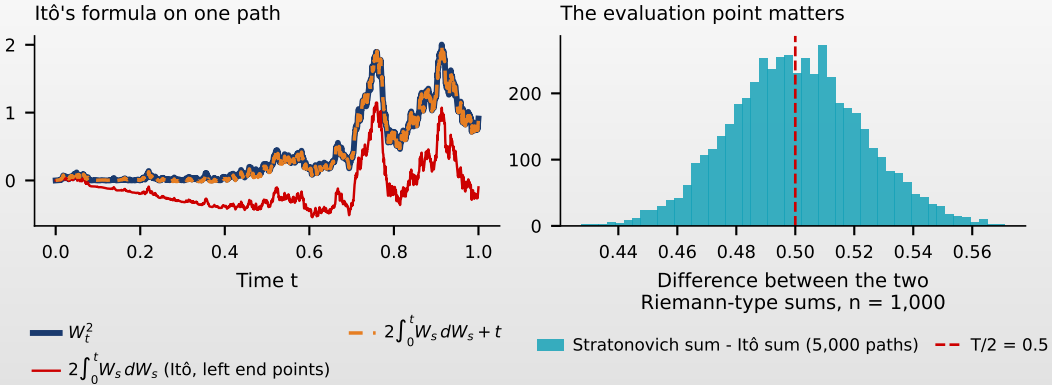
MFM_ch11_bm_paths

Traiectorii browniene (2/2)

- Stînga: cinci traiectorii cu banda punctuală $\pm 1{,}96\sqrt{t}$
  - banda acoperă 95% pentru fiecare t în parte, nu pentru întreaga traiectorie
- Dreapta: o traiectorie și primul ei 1% din timp, mărit
  - mărirea este de 100 de ori pe axa timpului și de 10 ori pe axa valorilor
- Banda se lărgește ca $\sqrt{t}$ (regula rădăcinii pătrate a timpului din Capitolul 7)
- Un segment mărit are același aspect ca întreaga traiectorie
  - Piețele reale încalcă autosimilaritatea
  - cozile groase și gruparea volatilității depind de orizont (Capitolul 1)

MFM_ch11_bm_paths

Exemplu rezolvat: $\int_0^T W_t \, \mathrm{d}W_t$ pe traiectorii simulate (1/2)



MFM_ch11_ito

Exemplu rezolvat: $\int_0^T W_t \,\mathrm{d}W_t$ pe traiectorii simulate (2/2)

- Fiecare termen: $W_{t_{k-1}} \Delta W_k = \frac{1}{2}(W_{t_k}^2 - W_{t_{k-1}}^2) - \frac{1}{2}(\Delta W_k)^2$
  - însumate după k, primele părți dau $\frac{1}{2}(W_T^2 - W_0^2) = \frac{1}{2} W_T^2$, deoarece termenii intermediari se anulează
  - părțile a doua tind la $\frac{1}{2} T$
- Rezultatul: $\int_0^T W_t \,\mathrm{d}W_t = \frac{1}{2} W_T^2 - \frac{1}{2} T$
  - Calculul obișnuit ar da $\frac{1}{2} W_T^2$
  - termenul suplimentar $-\frac{1}{2} T$ este variația pătratică
  - media este $\frac{1}{2}(T - T) = 0$
- Stînga: pe o traiectorie cu 2 000 de pași, $2 \int_0^t W \,\mathrm{d}W + t$ se suprapune aproximativ peste W_t^2 (abaterea maximă 0,038)
  - identitatea exactă pe grilă: $W_t^2 = 2 \sum_i W_{t_i} \Delta W_i + \sum_i (\Delta W_i)^2$; t este doar limita variației pătratice discrete
- Dreapta: diferența dintre sumele Stratonovich și sumele Itô pe 5 000 de traiectorii
  - diferența are media 0,500 și abaterea standard 0,022
  - teoria dă $T/2 = 0{,}5$
- Sumele Itô au media 0,007 (teoria: 0)
  - dispersia lor este 0,520 (teoria, prin izometrie: $\int_0^1 t \,\mathrm{d}t = 1/2$)

MFM_ch11_ito

Covariația pătratică și formula Itô multivariată (1/2)

- **Covariația pătratică** $[X, Y]_t = \lim \sum_k \Delta X_k \, \Delta Y_k$
  - dacă $\mathrm{Corr}(\mathrm{d}W^{(1)}, \mathrm{d}W^{(2)}) = \rho$, atunci $\mathrm{d}[W^{(1)}, W^{(2)}]_t = \rho \, \mathrm{d}t$
  - Regula produsului: $\mathrm{d}(X_t Y_t) = X_t \, \mathrm{d}Y_t + Y_t \, \mathrm{d}X_t + \mathrm{d}[X, Y]_t$
- **Formula Itô multivariată** pentru $X_t \in \mathbb{R}^d$ și $f(t, x)$ cu derivate continue, o dată în t și de două ori în x
  - $\mathrm{d}f(t, X_t) = f_t \, \mathrm{d}t + \sum_i f_{x_i} \, \mathrm{d}X_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} f_{x_i x_j} \, \mathrm{d}[X^i, X^j]_t$
  - X_t^i este componenta i

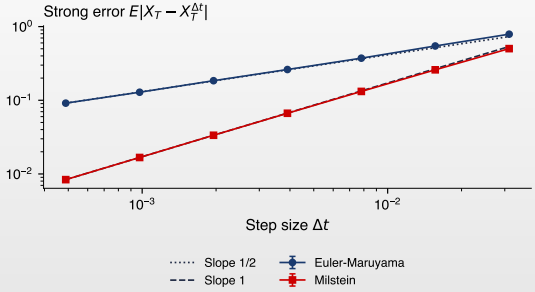
Covariația pătratică și formula Itô multivariată (2/2)

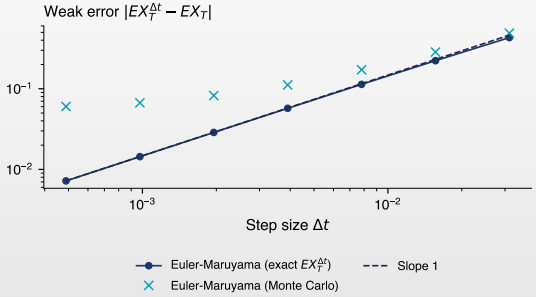
- Exemplu (Heston, Secțiunea 10)
  - $\mathrm{d}S = \mu S\,\mathrm{d}t + \sqrt{v}\,S\,\mathrm{d}W^{(1)}$
  - $\mathrm{d}v = \kappa(\theta - v)\,\mathrm{d}t + \xi\sqrt{v}\,\mathrm{d}W^{(2)}$
- Parametrii
  - v este rata instantanee a variației pătratice a lui $\ln S$ (varianța instantanee a randamentului), nu $\mathrm{Var}(S_t)$
  - κ este viteza de revenire la medie
  - θ este varianța pe termen lung, iar ξ volatilitatea variației
- $\mathrm{d}(S_t v_t) = S_t\,\mathrm{d}v_t + v_t\,\mathrm{d}S_t + \rho\,\xi\,v_t S_t\,\mathrm{d}t$
  - ρ intră în driftul produsului

Convergența slabă

- **Eroarea slabă**: $|\mathbb{E}[g(X_T^{\Delta t})] - \mathbb{E}[g(X_T)]| \leq C\,\Delta t^{\beta}$
  - măsoară cît de apropiată este distribuția simulată de cea adevărată
  - g este o funcție de valoarea finală (de exemplu payoff-ul unei opțiuni), iar β este ordinul slab
  - Ambele scheme au $\beta = 1$, suficient pentru prețurile opțiunilor europene și alte valori așteptate
  - Condiții: coeficienți netezi cu derivate mărginite și g netedă Kloeden & Platen (1992)
  - Pot converge mai lent coeficienții de tip radical (CIR (Cox–Ingersoll–Ross), Heston)
  - la fel, cuantilele precum Value-at-Risk (VaR) și atingerea barierelor
- Ecuația de test Higham (2001): $\mathrm{d}X = \lambda X\,\mathrm{d}t + \mu X\,\mathrm{d}W$
  - $\lambda = 2$, $\mu = 1$, $X_0 = 1$, $T = 1$, cu soluția exactă ca reper
  - Pe un grafic log-log, ordinul este panta erorii în funcție de pas (slide-ul următor)

Convergența schemelor (1/2)





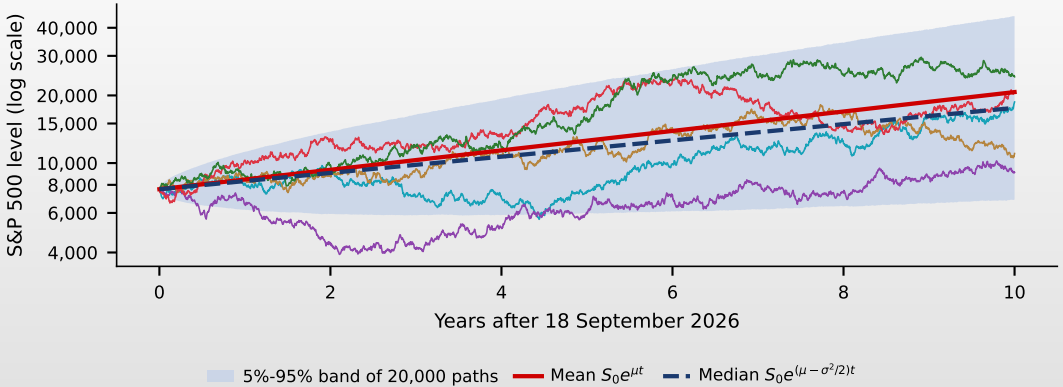
MFM_ch11_convergence

Convergența schemelor (2/2)

- 20 000 de traiectorii browniene pe o grilă fină de 2^{11} pași, rărită la pași de la 2^{-11} la 2^{-5}
  - Ordinele tari: panta regresiei log-log, cu CI de 95% prin reeșantionarea traiectoriilor întregi
  - Euler–Maruyama 0,518 [0,512; 0,525], Milstein 0,986 [0,984; 0,987]
  - CI înguste măsoară doar zgomotul Monte Carlo
  - mica diferență față de 1/2 și 1 este curbura la pași finiți, nu un alt ordin
  - Înjumătățirea lui Δt înjumătățește eroarea Milstein, dar reduce eroarea Euler doar cu 29%
- Ordinul slab al schemei Euler–Maruyama este 0,985: o pantă deterministă
  - ordinul este calculat din media exactă a schemei, $(1+\lambda\Delta t)^{T/\Delta t}$
  - Curba estimărilor Monte Carlo devine plată la pași mici
  - eroarea lor standard, circa 0,068, depășește deplasarea
  - Mărimea eșantionului, nu pasul, este adesea constrîngerea decisivă Glasserman (2003)

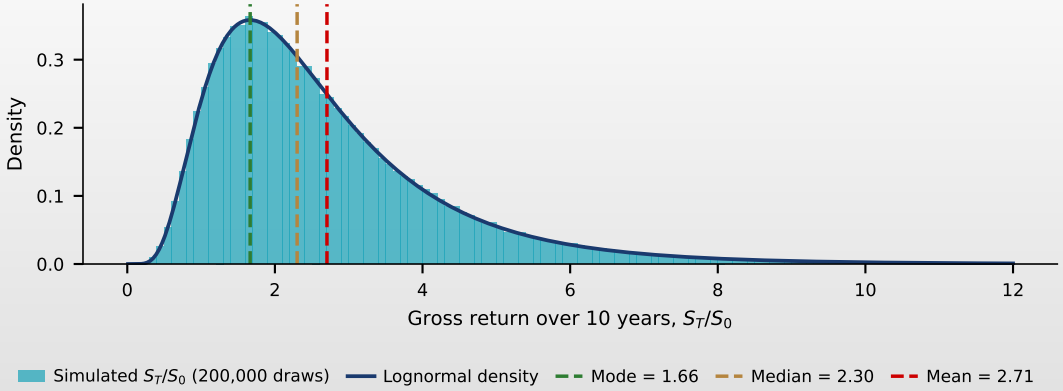
MFM_ch11_convergence

Rezultate lognormale: zece ani de traiectorii S&P 500 simulate (1/3)



MFM_ch11_gbm_fan

Rezultate lognormale: zece ani de traiectorii S&P 500 simulate (2/3)



MFM_ch11_lognormal

Rezultate lognormale: zece ani de traiectorii S&P 500 simulate (3/3)

- GBM cu $\hat{\mu} = 10{,}0\%$ și $\hat{\sigma} = 18{,}0\%$ (1990–2026), pe $T = 10$ ani
  - media $\mathbb{E}[S_T] = S_0 e^{\mu T}$, mediana $S_0 e^{mT}$, moda $S_0 e^{(m-\sigma^2)T}$
  - Densitatea: 200 000 de extrageri
  - raportul S_T / S_0 este 2,71 pentru medie, 2,30 pentru mediană și 1,66 pentru modă
- Graficul în evantai (*fan chart*): 20 000 de traiectorii exacte care pornesc de la $S_0 = 7\,650$ (18 septembrie 2026)
  - 90% dintre traiectorii se termină între 6 878 (cuantila de 5%) și 45 017 (cuantila de 95%)
  - Probabilitatea unei pierderi pe 10 ani: $P(S_T < S_0) = \Phi(-m\sqrt{T}/\sigma) = 7{,}1\%$
- $P(S_T < \mathbb{E}[S_T]) = \Phi(\sigma\sqrt{T}/2) = 61{,}2\%$: majoritatea investitorilor ajung sub medie
  - deci raportați mediana și cuantilele
- Graficul în evantai este prea îngust în crize
  - GBM nu are cozi groase și nici gruparea volatilității (testat pe S&P 500)

MFM_ch11_gbm_fan

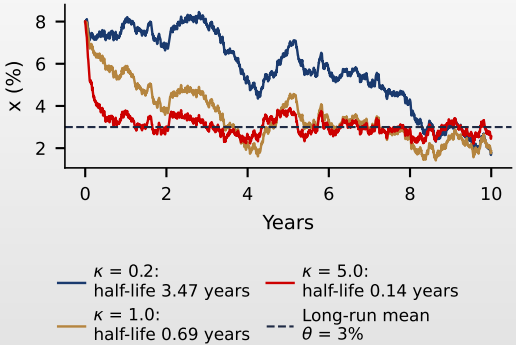
Recapitulare: creștere, lognormalitate și precizia driftului

- Formulele de reținut
  - $\ln(S_T/S_0) \sim N(mT, \sigma^2 T)$, cu $m = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$
  - mediana crește cu rata m, media $\mathbb{E}[S_T]$ cu rata μ
  - $\mathrm{SE}(\hat{\sigma}) = \sigma/\sqrt{2n}$ scade cu numărul de randamente
  - $\mathrm{SE}(\hat{m}) = \sigma/\sqrt{T}$ scade doar cu numărul de ani acoperiți
- Verificare: cu $\sigma = 20\%$, cît este SE a driftului logaritmic după 10 ani de date și după 40 de ani?
  - Răspuns: $0{,}20/\sqrt{10} = 6{,}3$ și $0{,}20/\sqrt{40} = 3{,}2$ puncte procentuale
  - un orizont de patru ori mai lung doar înjumătățește eroarea, oricare ar fi frecvența de eșantionare

Rezolvarea ecuației OU în trei pași

- Pasul 1: lema lui Itô pentru $f(t,x) = e^{\kappa t}x$ ($f_{xx} = 0$)
  - Rezultatul: $\mathrm{d}(e^{\kappa t}x_t) = \kappa\theta e^{\kappa t}\,\mathrm{d}t + \sigma e^{\kappa t}\,\mathrm{d}W_t$
  - Termenii în x_t se anulează
- Pasul 2: integrăm de la 0 la t și înmulțim cu $e^{-\kappa t}$
  - $x_t = \theta + (x_0 - \theta)e^{-\kappa t} + \sigma \int_0^t e^{-\kappa(t-s)}\,\mathrm{d}W_s$
- Pasul 3: integrala Itô are media 0 și, prin izometrie, dispersia $\sigma^2 \int_0^t e^{-2\kappa(t-s)}\,\mathrm{d}s$
  - Deci x_t este Normală, cu media $\mathbb{E}[x_t \mid x_0] = \theta + (x_0 - \theta)e^{-\kappa t}$
  - și dispersia $\mathrm{Var}(x_t \mid x_0) = \frac{\sigma^2}{2\kappa}\left(1 - e^{-2\kappa t}\right)$
  - Distribuția staționară: $N\left(\theta, \sigma^2/(2\kappa)\right)$
  - Dispersia crește cu orizontul, dar, spre deosebire de mișcarea browniană, rămîne sub limita $\sigma^2/(2\kappa)$
- Verificare: $x_0 = 8\%$, $\theta = 3\%$, $\kappa = 0{,}5$, $\sigma = 1\%$: cît sînt media și abaterea standard ale lui x_1?
  - Răspuns: $3\% + 5\% \cdot e^{-0{,}5} = 6{,}03\%$ și $1\% \cdot \sqrt{1 - e^{-1}} = 0{,}80\%$
  - După un an rămîne 61% din diferența inițială $x_0 - \theta$

Trei viteze de revenire la medie



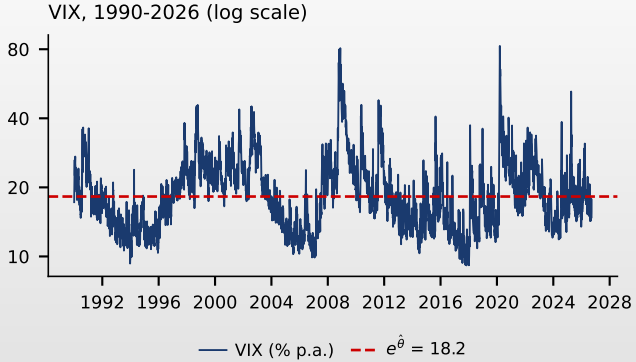
- Traiectorii OU cu aceleași șocuri, pornind de la 8%
  - $\theta = 3\%$, $\sigma = 1\%$
  - Viteza de revenire: $\kappa = 0{,}2$ (lentă), $\kappa = 1$ sau $\kappa = 5$ (rapidă)
  - Simulare exactă, cu pași zilnici
- Timpii de înjumătățire
  - 3,47 ani pentru $\kappa = 0{,}2$
  - 0,69 ani pentru $\kappa = 1$ și 0,14 ani pentru $\kappa = 5$
  - Cu $\kappa = 5$, diferența de la 8% la 3% dispare aproape complet în cîteva luni
- Abaterile standard staționare $\sigma/\sqrt{2\kappa}$
  - 1,58% pentru $\kappa = 0{,}2$
  - 0,71% pentru $\kappa = 1$ și 0,32% pentru $\kappa = 5$
  - O revenire lentă nu se poate distinge de un mers aleator timp de mai mulți ani
- Prognozele pe termen lung converg la θ

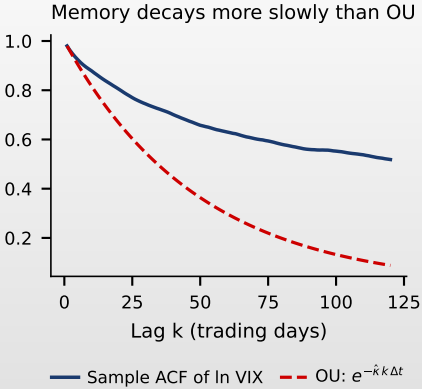
MFM_ch11_ou_paths

De ce revenirea la medie estimată pare prea rapidă

- În eșantioane finite $\hat{\kappa}$ supraestimează κ cu aproximativ $4/T$ (T în ani) Tang & Chen (2009)
  - Simulare: luăm estimările pe întreaga perioadă drept valori adevărate
  - Generăm 500 de eșantioane de 72 de ani
  - Media lui $\hat{\kappa}$ este 0,164, deci deplasarea este 0,063
  - Aproximarea $4/T = 0{,}055$ este apropiată de această deplasare
  - 78% dintre estimări depășesc valoarea adevărată (Seminarul 11, B2)
- Sursa deplasării: panta OLS $\hat{b}$ este deplasată spre zero într-un eșantion scurt și persistent
  - Panta lui $x_{t+\Delta t}$ în funcție de x_t
  - $\hat{\kappa} = -\ln \hat{b}/\Delta t$ transformă un $\hat{b}$ prea mic într-un $\hat{\kappa}$ prea mare
  - Deplasarea depinde de orizontul T, nu de numărul de observații
  - Eșantionarea zilnică în locul celei lunare nu o elimină (Secțiunea 7)

Revenirea la medie a volatilității: VIX (1/2)





MFM_ch11_vix_ou

Revenirea la medie a volatilității: VIX (2/2)

- Stînga: VIX 1990–2026 pe scară logaritmică
  - Nivelul OU pe termen lung: $e^{\hat{\theta}} = 18{,}2$
  - OU pentru $\ln \mathrm{VIX}$: $\hat{\kappa} = 5{,}10$ (SE 0,53)
  - Timpul de înjumătățire: 34 de zile de tranzacționare
  - Vîrfuri precum 82,7 (2020-03-16) se estompează în cîteva săptămîni
- Dreapta: ACF empirică a lui $\ln \mathrm{VIX}$, comparată cu ACF implicată de OU, $e^{-\hat{\kappa} k \Delta t}$
  - La lagul 60, autocorelația este 0,63 în date, dar 0,30 sub OU
  - După scăderea rapidă rămîne o componentă lentă
- Un singur factor OU este prea simplu
  - Alternativele: modelele cu doi factori sau cu memorie lungă
  - Volatilitatea aspră (Secțiunea 12) este o opțiune distinctă
- Volatilitatea care revine la medie este elementul de bază al modelului Heston

MFM_ch11_vix_ou

Recapitulare: revenirea la medie în trei formule

- Formulele de reținut
  - Traiectoria așteptată: $\mathbb{E}[x_t \mid x_0] = \theta + (x_0 - \theta)e^{-\kappa t}$
  - Timpul de înjumătățire: $\ln 2/\kappa$
  - Dispersia pe termen lung: abaterea standard staționară $\sigma/\sqrt{2\kappa}$
  - Estimarea: panta AR(1) $b = e^{-\kappa \Delta t}$, deci $\hat{\kappa} = -\ln \hat{b}/\Delta t$
  - Estimatorul este deplasat în sus în eșantioane scurte
- Verificare: datele lunare dau $\hat{b} = 0{,}95$. Cît sînt $\hat{\kappa}$ și timpul de înjumătățire?
  - Răspuns: $\hat{\kappa} = -12 \ln 0{,}95 = 0{,}616$ pe an
  - Timpul de înjumătățire: $\ln 2/0{,}616 = 1{,}13$ ani, circa 13,5 luni

Verosimilitatea pentru difuzii neliniare

- **Pseudo-verosimilitatea Euler**: tranziția gaussiană $r_{t+\Delta} \mid r_t \sim N\left(r_t + a(r_t)\Delta,\ b^2(r_t)\Delta\right)$
  - $a(r)$, $b(r)$: driftul și difuzia ratei r
  - Deplasarea, de ordinul Δ, este mică cu date zilnice
- **CIR exact**: $2c\, r_{t+\Delta} \mid r_t$ are distribuția χ^2 necentrală Cox, Ingersoll & Ross (1985)
  - Gradele de libertate: $4\kappa\theta/\sigma^2$, cu $c = 2\kappa/\left(\sigma^2(1 - e^{-\kappa\Delta})\right)$
  - Parametrul de necentralitate este $2c\, r_t e^{-\kappa\Delta}$
  - Condiția Feller este echivalentă cu cel puțin 2 grade de libertate (Seminarul 11, A7)
- Difuzii generale: dezvoltări Hermite în formă închisă ale densității de tranziție Aït-Sahalia (2002)
- CKLS (Chan–Karolyi–Longstaff–Sanders): $\mathrm{d}r = \kappa(\theta - r)\,\mathrm{d}t + \sigma r^{\gamma}\,\mathrm{d}W$ Chan, Karolyi, Longstaff & Sanders (1992)
  - Include Vasicek ($\gamma = 0$) și CIR ($\gamma = 1/2$)
  - Se estimează prin cvasi-verosimilitate gaussiană (Euler)
  - Testele pentru γ folosesc erori standard sandwich Newey & West (1987)
  - Covarianța scorurilor este robustă la heteroscedasticitate și autocorelație (HAC)

Vasicek, CIR și CKLS pe randamentul titlurilor de stat, 1954–2007

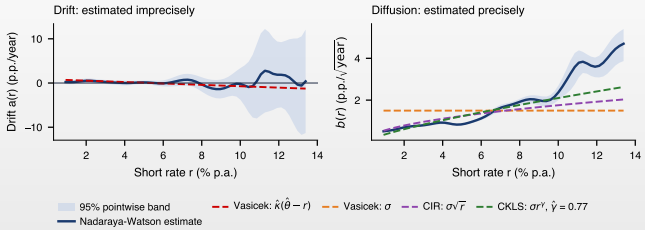
Modelul	$\hat{\kappa}$ zilnic (SE)	$\hat{\kappa}$ lunar (SE)	γ
Vasicek, exact	0,158 (0,073)	0,201 (0,083)	0
Vasicek, Euler	0,158 (0,073)	0,199 (0,082)	0
CIR, exact	0,113 (0,060)	0,153 (0,070)	1/2
CIR, Euler	0,093 (0,060)	0,144 (0,069)	1/2
CKLS, Euler	0,080 (0,057)	0,144 (0,068)	0,77 (0,033) zilnic, 0,60 (0,149) lunar

- Date: DTB3 zilnic ($n = 13\,487$) și valorile de sfîrșit de lună ($n = 647$)
- Perioada 2008–2026 este exclusă
  - Cotațiile exact zero și cele negative sînt în afara domeniului acestor verosimilități (Anexa)
- Estimările exacte și cele Euler diferă cu mai puțin de o eroare standard
  - Eroarea de discretizare este mică față de incertitudinea de orizont lung a lui $\hat{\kappa}$
- Volatilitatea crește cu nivelul
  - Testele Wald HAC resping $\gamma = 0$ la ambele frecvențe
  - Resping $\gamma = 1/2$ cu date zilnice, dar nu și cu date lunare (statisticile: Anexa)

Drift și difuzie neparametrice

- Fără o formă funcțională impusă: medii ponderate cu un nucleu ale incrementelor
  - Mediile se calculează în jurul fiecărui nivel x
  - $\Delta r_t = r_{t+\Delta} - r_t$ este incrementul următor
  - $w_t(x)$ este ponderea zilei t, mare cînd r_t este aproape de x
  - $\hat{a}(x) = \sum_t w_t(x)\,\Delta r_t/\Delta$, $\hat{b}^2(x) = \sum_t w_t(x)\,(\Delta r_t)^2/\Delta$ Stanton (1997)
  - Ponderile Nadaraya–Watson: $w_t(x) = K\left((r_t - x)/h\right) / \sum_s K\left((r_s - x)/h\right)$
  - Nucleul gaussian K și lățimea de bandă h
- $\mathbb{E}[\Delta r \mid r = x]/\Delta = a(x) + O(\Delta)$ și $\mathbb{E}[(\Delta r)^2 \mid r = x]/\Delta = b^2(x) + O(\Delta)$
  - Relațiile sînt exacte doar cînd $\Delta \to 0$
  - Difuzia converge cu rata infill, driftul doar cu rata orizontului lung
  - Rezultatele rămîn valabile pentru procese nestaționare, dar recurente Bandi & Phillips (2003)
- Atenție: testele neparametrice de specificare resping mult prea des cu date persistente Pritsker (1998)

Driftul și difuzia neparametrice ale randamentului titlurilor de stat



- Date: DTB3 zilnic, 1954–2007, cu lățimea de bandă $h = 0{,}44$ puncte procentuale
  - Regula lui Silverman: $h = 1{,}06\,\hat{s}\,n^{-1/5}$, cu $\hat{s}$ abaterea standard a ratei
- Benzile punctuale de 95% sînt robuste la heteroscedasticitate, dar ignoră dependența serială
- Driftul: valoarea zero se află în interiorul benzii la 97% din niveluri
- Difuzia: eroarea standard relativă mediană este 8%
  - $b(r)$ crește de la 0,5% la 4,7% (panta în logaritmi 0,90)
- Nicio formă parametrică nu este compatibilă cu datele la toate nivelurile
  - Curba CKLS se află în interiorul benzii la 35% din niveluri
  - CIR la 7%, iar Vasicek la 5% (ponderi descriptive)

MFM_ch11_np_diffusion

Recapitulare: frecvența de eșantionare și identificarea parametrilor

- Formulele de reținut
  - Infill: $\sum_k (\Delta X_k)^2 \to \int_0^T b_t^2 \, \mathrm{d}t$
  - Deci coeficientul de difuzie se învață din eșantionarea frecventă
  - Orizont lung: $I(m) = T/\sigma^2$ și $\mathrm{Var}(\hat{\kappa}) \approx 2\kappa/T$
  - Deci driftul și viteza se învață doar din mai mulți ani
  - Deplasarea: $\hat{\kappa}$ depășește κ cu aproximativ $4/T$
- Verificare: aceiași 20 de ani sînt eșantionați zilnic în loc de lunar
  - De 21 de ori mai multe observații
- Care eroare standard scade, cea a lui $\hat{\sigma}$ sau cea a lui $\hat{\kappa}$?
  - Răspuns: cea a lui $\hat{\sigma}$, de circa $\sqrt{21} \approx 4{,}6$ ori
  - Cea a lui $\hat{\kappa}$ aproape nu se schimbă, deoarece $2\kappa/T$ nu depinde de pas

Momentele randamentului Merton (1/2)

- Cumulanții c_k ai randamentului pe Δt
  - Definiția: $K(u) = \ln \mathbb{E}[e^{ur}]$ și $c_k = K^{(k)}(0)$
  - c_1 media, c_2 dispersia, c_3 momentul centrat de ordinul trei
  - Cumulanții părților independente se adună
  - O parte Normală are $c_k = 0$ pentru $k \geq 3$

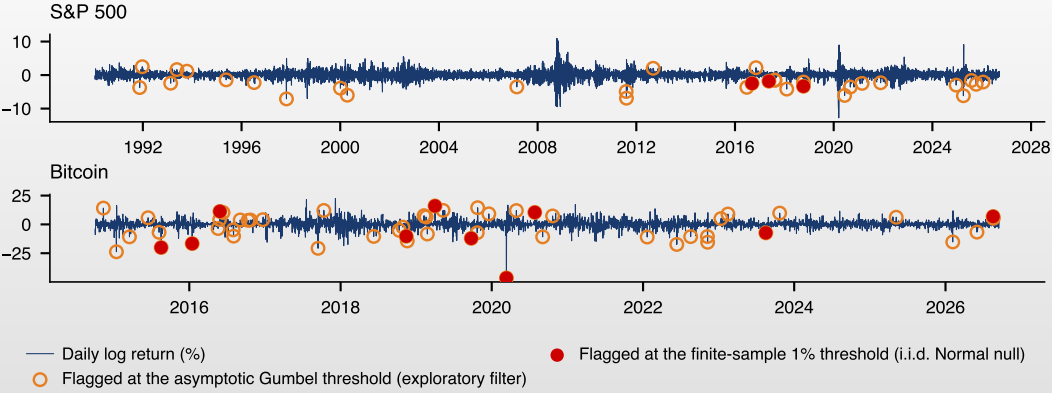
Momentele randamentului Merton (2/2)

- Cumulantul de ordinul k al unei sume Poisson compuse este $\lambda \Delta t \, \mathbb{E}[Y^k]$
  - $c_1 = m\Delta t + \lambda \Delta t \, \mu_J$, $c_2 = \sigma^2 \Delta t + \lambda \Delta t (\mu_J^2 + \sigma_J^2)$
  - $c_3 = \lambda \Delta t (\mu_J^3 + 3\mu_J \sigma_J^2)$, $c_4 = \lambda \Delta t (\mu_J^4 + 6\mu_J^2 \sigma_J^2 + 3\sigma_J^4)$
  - Asimetria $c_3 / c_2^{3/2}$ este negativă cînd $\mu_J < 0$
  - Excesul de kurtosis c_4 / c_2^2 este pozitiv cu orice salt
- Excesul de kurtosis scade ca $1/\Delta t$ cînd orizontul crește
  - Salturile au cel mai mare efect pe orizonturi scurte
  - Exemplu: $\sigma = 15\%$, $\lambda = 5$, $\mu_J = -3\%$ și $\sigma_J = 4\%$
  - Excesul de kurtosis zilnic este 17,6, iar asimetria $-2{,}07$ (Seminarul 11, A3)

Detectarea salturilor: testul Lee–Mykland

- Ideea: un salt este un randament foarte mare **raportat la volatilitatea locală** Lee & Mykland (2008)
  - $L_t = r_t/\hat{\sigma}_t$, $\hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{K-2}\sum_{j=t-K+2}^{t-1} |r_j|\,|r_{j-1}|$
  - Estimatorul volatilității: variația bipower, robustă la salturi
  - Cu date zilnice, fereastra este de $K = 16$ zile, conform recomandării autorilor
- În absența salturilor, maximul lui $|L_t|$ pe n zile are o limită Gumbel
  - Respingem dacă $(|L_t| - C_n)/S_n > -\ln(-\ln(1-\alpha))$
  - Pragul este 4,60 la $\alpha = 1\%$, pentru statistica **normalizată**, nu pentru $|L_t|$
  - $C_n = \frac{\sqrt{2\ln n}}{c} - \frac{\ln\pi + \ln\ln n}{2c\sqrt{2\ln n}}$, $S_n = \frac{1}{c\sqrt{2\ln n}}$
  - $c = \sqrt{2/\pi}$ (media lui $|Z|$, care rescalează estimarea bipower)
  - n = numărul zilelor testate
  - Testul controlează, asimptotic, probabilitatea unui salt fals pe **întregul** eșantion, nu zi de zi

Zile marcate de testul Lee–Mykland în S&P 500 și Bitcoin (1/2)



MFM_ch11_jumps

Zile marcate de testul Lee–Mykland în S&P 500 și Bitcoin (2/2)

	S&P 500	Bitcoin
Zile marcate, prag asimptotic	32	52
Pe an	0,87	4,35
Negative (%)	84	52
Printre primele 10 mișcări	0	5
Peste pragul calibrat de 1%	3	10

- Randamente logaritmice zilnice; pragul asimptotic de 1% funcționează aici ca filtru exploratoriu
- S&P 500: cele mai mari mișcări (2008, 2020), produse în perioade turbulente, nu sînt marcate
  - În schimb, o mișcare de 1,2% într-o piață calmă este marcată (1993-10-14)
- Zilele marcate diferă de intensitatea Merton estimată. Explicații posibile:
  - volatilitatea stocastică
  - drift bursts (episoade scurte de drift exploziv)
  - puterea redusă de detectare în datele zilnice

MFM_ch11_jumps

Pragul Lee–Mykland în eșantion finit

- Pragul asimptotic presupune o volatilitate locală estimată precis; cu $K = 16$ zile, $\hat{\sigma}_t$ este zgomotos
  - în 2 000 de eșantioane i.i.d. cu distribuția Normală, de lungimea S&P 500, pragul 4,60 marchează cel puțin o zi în 96,6% dintre eșantioane
  - în medie 3,43 zile marcate pe eșantion, deși nu există salturi
- Pragul calibrat: cuantila de 99% a maximului statisticii în aceleași eșantioane (același n, același K)
  - S&P 500: 22,93 ($|L_t| > 11{,}6$), față de 4,60 ($|L_t| > 6{,}2$); 3 zile marcate (2016-09-09, 2017-05-17, 2018-10-10)
  - Bitcoin: 19,61 ($|L_t| > 10{,}6$); 10 zile marcate
- Dimensiunea sub volatilitate stocastică fără salturi: 200 de eșantioane Heston (parametrii din VIX, $\rho = -0{,}69$, 390 de pași pe zi)
  - pragul asimptotic este depășit în 100% dintre eșantioane
  - pragul calibrat sub distribuția Normală i.i.d. este depășit în 44% dintre eșantioane
  - cu cuantila de 99% din eșantioanele Heston (48,7), nicio zi S&P 500 nu este marcată
- Cu date zilnice, zilele marcate sînt candidate pentru inspecție, nu salturi detectate la nivelul de 1%

Parametrii identificați de VIX în modelul Heston

- Sub Q: $y_t = \frac{1}{\tau}\mathbb{E}^Q\left[\int_t^{t+\tau} v_s \, \mathrm{d}s \mid \mathcal{F}_t\right] = a + b\, v_t$, $\tau = 30/365$ (Seminarul 11, A8)
  - $b = \frac{1-e^{-\kappa^Q \tau}}{\kappa^Q \tau} < 1$, $a = \theta^Q(1-b)$
  - y_t este **afin** în v_t, cu parametri Q
- Parametrii recuperați de regresia pe y_t
  - κ: viteza sub P, deoarece o transformare afină păstrează dinamica lui v_t
  - ρ: neschimbat (corelația nu depinde de scală)
  - dar este aproximat doar din variațiile zilnice ale proxy-ului
  - ξ este atenuat (derivarea: slide-ul următor)
  - nivelul pe termen lung amestecă θ^Q și θ^P
- O estimare corectă are două variante
  - modelează direct dinamica lui y, cu difuzia proporțională cu $\sqrt{y-a}$
  - sau estimează împreună v_t și ecuația de observație

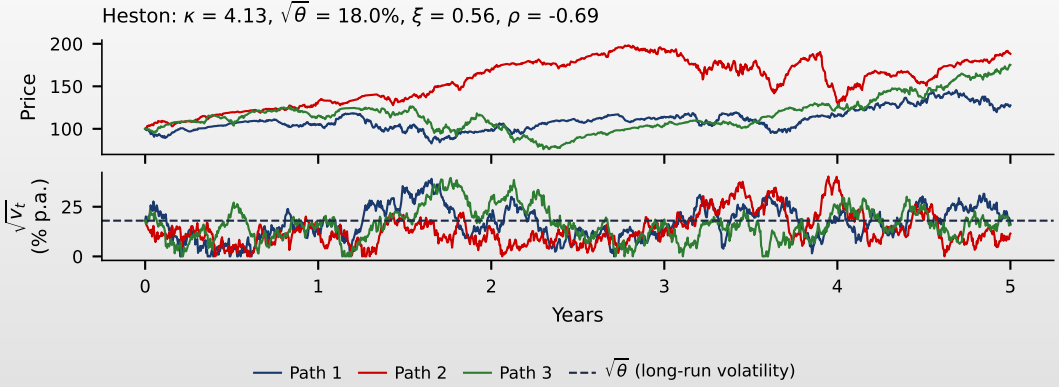
De unde provine atenuarea lui ξ (1/2)

- Pasul 1: $y_t = a + b\,v_t$, cu a și b constante, deci $\mathrm{d}y_t = b\,\mathrm{d}v_t$ sub P
  - $\mathrm{d}y_t = b\kappa(\theta^P - v_t)\,\mathrm{d}t + b\,\xi\sqrt{v_t}\,\mathrm{d}W_t^{(2)}$
- Pasul 2, driftul: $b\kappa(\theta^P - v_t) = \kappa(\theta_y - y_t)$, cu $\theta_y = a + b\,\theta^P$
  - viteza κ rămîne aceeași
  - iar $\theta^P = (\theta_y - a)/b$
- Pasul 3, difuzia: regresia CIR presupune $\xi_y\sqrt{y_t}$
  - egalînd $\xi_y\sqrt{y_t} = b\,\xi\sqrt{v_t}$ obținem $\xi_y = b\,\xi\sqrt{v_t/(a + b\,v_t)}$
  - la $v_t = \theta^Q$, $a + b\,\theta^Q = \theta^Q$, deci $\xi_y = b\,\xi$

De unde provine atenuarea lui ξ (2/2)

- Cifre: cu $\kappa^Q = 5$, $b = 0{,}82$
  - deci $\hat{\xi} = 0{,}56$ corespunde lui $\hat{\xi}/b = 0{,}68$ în jurul lui $v_t = \theta^Q$
  - alte valori κ^Q: Anexa
  - corecția $\hat{\xi}/b$: Anexa
- κ^Q nu se identifică doar din VIX
  - estimare comună P/Q cu prețuri de opțiuni Chernov & Ghysels (2000)
  - sau cu momente ale variației realizate Bollerslev & Zhou (2002)

Traiectorii Heston simulate (1/2)



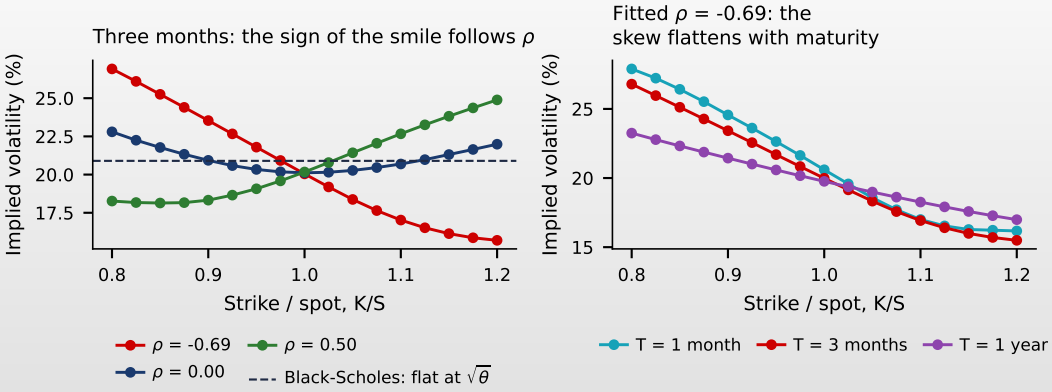
MFM_ch11_heston_paths

Traiectorii Heston simulate (2/2)

- Trei traiectorii simulate pe cinci ani: sus prețul, jos volatilitatea $\sqrt{v_t}$
  - $\hat{\kappa}$, $\hat{\xi}$ (necorectat) și $\hat{\rho}$ provin din VIX
  - θ este varianța realizată a S&P 500
- Gruparea volatilității este acum generată de model
  - Scăderile de preț coincid cu vîrfurile de volatilitate
  - Corelația simulată randament–varianță: $-0{,}69$ (efectul de levier prin ρ)
- Raportul Feller $2\hat{\kappa}\theta/\hat{\xi}^{\mathbf{2}} = 0{,}86 < 1$: varianța poate atinge zero
  - starea Euler latentă $\tilde{v}$ este ≤ 0 la 1,4% din pași
  - trunchierea completă: $\tilde{v}_{k+\mathbf{1}} = \tilde{v}_k + \kappa(\theta - \tilde{v}_k^+)\Delta + \xi\sqrt{\tilde{v}_k^+\,\Delta}\,Z_k$, cu $\tilde{v}^+ = \max(\tilde{v}, 0)$
  - $\tilde{v}^+$ intră în drift, în difuzie și în pasul prețului; se raportează $\tilde{v}^+$

MFM_ch11_heston_paths

Zîmbetul volatilității: introducere în Capitolul 12 (1/3)



MFM_ch11_heston_smile

Zîmbetul volatilității: introducere în Capitolul 12 (2/3)

- **Volatilitatea implicită**: valoarea σ care egalează prețul Black–Scholes cu un preț dat al opțiunii
  - sub GBM, ea este constantă în raport cu prețul de exercitare
- Aici, volatilitățile implicite sînt calculate din prețurile opțiunilor call Heston
  - Monte Carlo, 100 000 de traiectorii antitetice
- Stînga, scadența de trei luni, cu $\hat{\rho} = -0{,}69$: un **înclinare** descendent
  - volatilitatea implicită este 26,9% la un preț de exercitare de 80% din spot
  - 20,0% la spot și 15,7% la 120% din spot
- Cu $\rho = 0$: un **zîmbet** simetric (*smile*)
  - 22,8% la 80% din spot
  - 20,1% la spot și 22,0% la 120% din spot
- Cu $\rho = 0{,}50$: înclinarea se inversează
  - volatilitatea implicită crește cu prețul de exercitare

Zîmbetul volatilității: introducere în Capitolul 12 (3/3)

- Dreapta: înclinarea se aplatizează odată cu scadența
  - la o lună, între 80% și 120% din spot: volatilitatea implicită scade de la 27,9% la 16,2%
  - la un an: doar de la 23,2% la 17,0%
- Este doar o ilustrare
  - evaluarea necesită κ^Q, θ^Q calibrați pe prețurile opțiunilor (Capitolul 12)

MFM_ch11_heston_smile

Difuzii afine cu salturi

Difuzii afine cu salturi Duffie, Pan & Singleton (2000)

- Drift, varianță și intensitate a salturilor afine în starea X_t
  - Vasicek, CIR, Merton, Heston și Bates
- $\mathbb{E}\left[e^{iu^\top X_T} \mid X_t\right] = \exp\left(\alpha(\tau) + \beta(\tau)^\top X_t\right)$
  - $i = \sqrt{-1}$, u: un vector real, $\tau = T - t$
  - α, β: soluții ale unor ecuații diferențiale ordinare Riccati
- Prețurile opțiunilor prin inversare Fourier
  - Cazul cel mai simplu: $A(\tau)$, $B(\tau)$ Vasicek din Secțiunea 8

De la GARCH la difuzii

GARCH (Generalised Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) descrie varianța condiționată din date discrete.

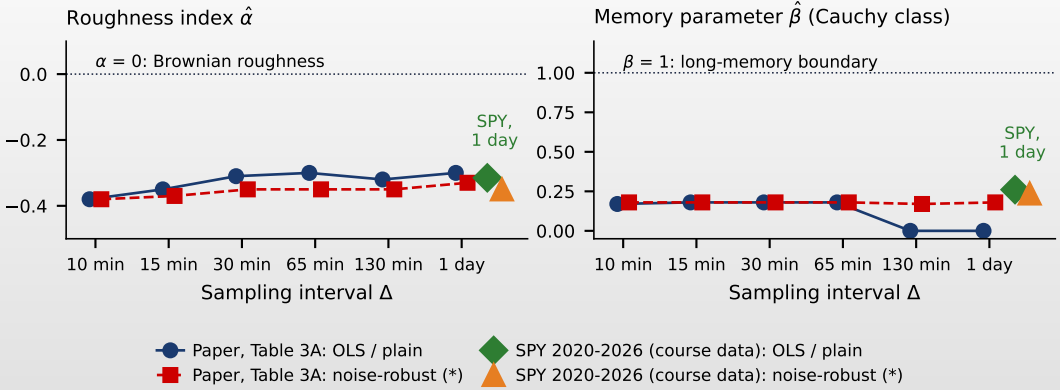
De la volatilitate condiționată la difuzii Nelson (1990)

- Cînd pasul se micșorează, GARCH(1,1) converge la
  - $\mathrm{d}v_t = \kappa(\theta - v_t)\,\mathrm{d}t + \xi v_t\,\mathrm{d}W_t^{(2)}$
  - Ca Heston, cu v_t în loc de $\sqrt{v_t}$
- $\kappa \approx (1-\alpha-\beta)/\Delta t$, cu α, β coeficienții GARCH(1,1)
  - Cu $\alpha+\beta = 0{,}99$ pe date zilnice, $\kappa \approx 2{,}5$ pe an
  - adică un timp de înjumătățire de circa 70 de zile (Capitolul 5)
- GARCH și difuzia-limită nu sînt statistic echivalente asimptotic Wang (2002)
  - inferența poate diferi chiar cînd $\Delta t \to 0$

De ce un ρ negativ face asimetrice randamentele zilnice

- Pe o zi, $h = 1/252$, ignorînd termenii de drift de ordinul h: $R = \int_0^h \sqrt{v_s}\,\mathrm{d}W_s^{(1)}$
  - Lema lui Itô pentru $\sqrt{v}$: $\mathrm{d}\sqrt{v_s} = \frac{1}{2}\xi\,\mathrm{d}W_s^{(2)} + O(\mathrm{d}s)$
  - deci $\sqrt{v_s} \approx \sqrt{v_0} + \frac{1}{2}\xi W_s^{(2)}$
  - $R \approx \sqrt{v_0}\,W_h^{(1)} + \frac{1}{2}\xi \int_0^h W_s^{(2)}\,\mathrm{d}W_s^{(1)}$
- Momentul de ordinul trei: termenul încrucișat dă $\mathbb{E}[R^3] \approx \frac{3}{2}\,\xi\rho\,v_0 h^2$
  - iar $\mathrm{Var}(R) \approx v_0 h$
- Asimetria $\approx \frac{3}{2}\,\rho\xi\sqrt{h}/\sqrt{v_0}$, o aproximare de ordinul principal
  - cu $\hat{\rho} = -0{,}69$, $\hat{\xi} = 0{,}56$ și $\sqrt{v_0} = 18{,}0\%$: circa $-0{,}20$
  - simularea cu 390 de pași pe zi (Secțiunea 11): mediana $-0{,}21$

Studiu de caz: SPY comparat cu Tabelul 3 (1/2)



MFM_ch11_rough_vol

Studiu de caz: SPY comparat cu Tabelul 3 (2/2)

- Liniile: contractul futures E-mini S&P 500, 2011–2014 (Bennedsen, Lunde & Pakkanen (2022), Tabelul 3, Panoul A)
  - Δ de la 10 minute la o zi
- Marcajele: SPY la o zi, 2020–2026, din datele cursului
  - * indică estimatorii robuști la zgomot
- $\hat{\alpha}$ aproape nu depinde de Δ (între $-0{,}38$ și $-0{,}30$)
  - asperitatea este o proprietate a procesului
  - SPY se încadrează în aceeași bandă
- $\hat{\beta}^*$ este 0,17–0,18 la orice Δ, mult sub 1
  - $\hat{\beta}$ fără corecție este instabil
- Limite: alt contract, altă perioadă, alt estimator
  - bare agregate, nu fiecare tranzacție, fără pre-mediere
- Măsurile realizate estimează varianța integrată, nu pe cea instantanee

MFM_ch11_rough_vol

Proiect: replicare și livrabile de bază

- Replicați mai întîi
  - ponderea salturilor în varianță din modelul Merton: 71% (S&P 500, date zilnice)
  - zilele marcate de testul Lee–Mykland cu pragul asimptotic: 0,87 pe an
  - ponderea salturilor din testul bipower: 2,8% (SPY, 5 minute, Capitolul 9)
- Livrabilele de bază, realizabile cu datele cursului
  - SPY, la 5, 15 și 30 de minute: ponderea salturilor din testul bipower
  - SPY, la aceleași frecvențe: zilele marcate de testul Lee–Mykland, cu pragul calibrat prin simulare
  - Standardizarea EWMA din mini studiul de caz, repetată pe SPY la fiecare frecvență

Proiect: drift bursts în Bitcoin și raportul

- Apar drift bursts în Bitcoin, tranzacționat 24 de ore din 24, mai des sau mai rar decît în SPY?
  - a doua întrebare: sînt urmate de o revenire a prețului?
  - Date: bare Bitcoin de 5 minute, septembrie 2024 – septembrie 2026, 659 de zile UTC cu cel puțin 95% din cele 288 de bare (Capitolul 9)
  - barele SPY de 5 minute din aceeași fereastră
  - înainte de prima rulare: pre-înregistrați lățimile de bandă, ipoteza nulă (semne aleatoare) și comparația
  - explicați cum schimbă testul lipsa licitației de închidere și a pauzei peste noapte
- Extensie opțională: un test LR bootstrap Heston (ipoteza nulă, fără salturi) față de Bates
  - Ambele verosimilități necesită filtrarea variației latente
  - de exemplu prin abordarea Markov Chain Monte Carlo (MCMC) din Eraker, Johannes & Polson (2003)
  - planificați timpul de calcul înainte de a vă angaja
- Codul și un raport de două pagini
  - raportul conține toate specificațiile încercate
  - și o critică, în stil de recenzent, a propriului rezultat
- Declarați folosirea AI în `AI_USE.md` și erorile identificate în `AI_ERRORS.md`
  - github.com/danpele/MFM/tree/main/project

De la Brown la Bachelier, Einstein și Wiener



Louis Bachelier (1870–1946)

Foto: autor necunoscut; domeniu public; Wikimedia Commons



Albert Einstein în 1905

Foto: Lucien Chavan / ETH Zürich (1905); domeniu public; Wikimedia Commons

- 1827: botanistul Robert Brown vede particule de polen în zigzag neregulat
  - observația este făcută la microscop
- Bachelier (1900): mers aleator în timp continuu pentru prețuri
  - prețurile vizate: obligațiunile de stat franceze (rente) și opțiunile pe ele
  - abaterea standard a prețurilor crește cu $\sqrt{t}$
  - rezultatul precede cu cinci ani explicația fizică
- Einstein (1905): ciocnirile moleculare explică mișcarea lui Brown
  - deplasarea pătratică medie este liniară în t
- Wiener (1923): mișcarea browniană ca măsură de probabilitate pe traiectorii continue, **procesul Wiener**

Înapoi

Itô, Samuelson, Black, Scholes și Merton



Kiyosi Itô (1915–2008)

Foto: Konrad Jacobs (1970); CC BY-SA 2.0 de; Wikimedia Commons



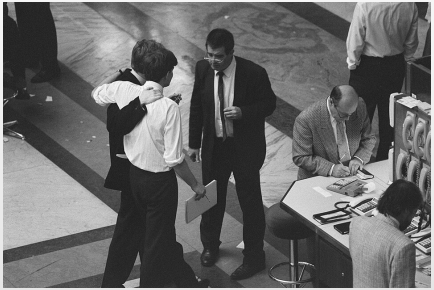
Paul A. Samuelson (1915–2009)

Foto: Bernard Gotfryd (1970–1975); domeniu public; Wikimedia Commons

- Itô (1944): integrala stocastică și regula ei de derivare
  - principalul instrument de lucru al capitolului
- Osborne (1959): logaritmii prețurilor, nu prețurile, se comportă ca mișcarea browniană
- Samuelson (1965): mișcarea browniană geometrică
- Black & Scholes (1973) și Merton (1973): o opțiune poate fi replicată în timp continuu
- Merton (1976) adaugă salturi, Heston (1993) volatilitate aleatoare
  - prezentare în manual: Franke, Härdle & Hafner (2019), Partea I

Înapoi

Un crah în imagini, Amsterdam 1987



Bursa din Amsterdam, 21 octombrie 1987, după crahul din 19 octombrie

Foto: Bart Molendijk / Anefo (1987); CC0; Wikimedia Commons

- Scăderea din 19 octombrie 1987 (Secțiunea 9): 22,6% într-o zi
- Sub o distribuție Normală, o asemenea zi nu ar fi de așteptat nici măcar o dată în vîrsta universului
  - prețurile prezintă salturi
  - modelele continue au nevoie de salturi sau de inovații cu cozi groase

Înapoi

Curățarea datelor și condiții tehnice

- Date: indicii bursieri în zilele lucrătoare, fără cotațiile neactualizate (*stale*)
  - cotație neactualizată: închidere neschimbată și nicio variație în cursul zilei (maxim = minim)
  - randamentele zero reale sînt păstrate
  - Bitcoin: 7 zile din 7
- Integrala Itô: sumele cu capătul stîng converg pentru integranzi regulați
  - de exemplu, integranzi continui și adaptați
  - un H general se obține prin aproximare cu procese simple
  - dacă doar $\int_0^T H_t^2 \,\mathrm{d}t < \infty$ aproape sigur, $\int H \,\mathrm{d}W$ este doar un martingal local
  - media acestui martingal local poate fi nenulă
- SDE: soluție tare unică dacă a, b sînt lipschitziene în x, cu creștere cel mult liniară Kloeden & Platen (1992)
  - coeficienții de tip radical (CIR, Heston) nu sînt lipschitzieni în zero
  - au totuși soluții tari unice (condițiile Yamada–Watanabe)
- Donsker: convergență în distribuție în spațiul traiectoriilor càdlàg Billingsley (1999)
  - spațiul are topologia Skorokhod

înapoi

Rata pe termen scurt, cifre suplimentare (1/2)

- DTB3, 1954–2026: rata a variat între −0,05% (2020-03-26) și 17,1% (1980-12-11)
  - 4,3% din zile au fost sub 0,05%
  - Modelul Vasicek estimat dă o probabilitate pe termen lung de 6,1% pentru o rată negativă
  - În 2008–2026 apar 13 cotații exact zero și 8 negative
  - aceste cotații sînt în afara domeniului verosimilităților CIR și CKLS
  - În această perioadă, 17% din zile formează un regim aproape de zero, sub 0,05%

Înapoi

Rata pe termen scurt, cifre suplimentare (2/2)

- Testele CKLS pentru γ, 1954–2007, Wald HAC cu 11 (zilnic) și 6 (lunar) laguri
  - $\gamma = 0$ este respins: statistica Wald este 545 pe date zilnice și 16 pe date lunare
  - $\gamma = 1/2$ este respins pe date zilnice: statistica 67,0, respectiv 22,1 cu 55 de laguri
  - $\gamma = 1/2$ nu este respins pe date lunare: 0,5, față de valoarea critică 3,84
  - Testul LR gaussian respinge $\gamma = 1/2$ și pe date lunare (statistica 10,1)
  - testul LR ignoră însă gruparea volatilității
  - Chan, Karolyi, Longstaff & Sanders (1992) au găsit $\hat{\gamma} \approx 1{,}5$ pentru 1964–1989

Înapoi

Randamentul Vasicek și rata observată (1/2)

- Obligațiunea Vasicek: randament pe 10 ani de 4,05%
  - cu estimările din Secțiunea 6, $\lambda = 0$ și $r = 3{,}99\%$
- Randamentul observat pe 10 ani (FRED DGS10) pe 2026-09-18: 5,01%
  - DGS10 este un randament la paritate cu cupon semestrial
  - cu compunere continuă: $2\ln(1 + 5{,}01\%/2) = 4{,}95\%$
  - DTB3 este o rată de discont pe 91 de zile: 3,99% înseamnă 4,07% cu compunere continuă
  - cu această rată, randamentul modelului urcă la 4,10%

Înapoi

Randamentul Vasicek și rata observată (2/2)

- Diferența scade doar de la 0,96 la 0,85 puncte procentuale
  - diferența dintre randamentul la paritate și cel zero-cupon nu este ajustată
- Diferența rămasă nu poate fi atribuită unei prime de termen
  - doar rata inițială a fost convertită, nu și parametrii estimați pe serie
  - DTB3 este un proxy cu maturitatea de 3 luni pentru rata instantanee
  - comparația structurală: seria convertită înainte de estimare și randamente zero-cupon la aceeași maturitate
- În model, o primă de termen pozitivă cere $\theta^Q > \hat{\theta}$, adică $\lambda < 0$: o implicație a modelului, nu un rezultat identificat aici
- Estimarea neparametrică: Stanton (1997) estimează și prețul de piață al riscului de dobîndă
- Testul de specificare: Aït-Sahalia (1996)

Înapoi

Corecția VIX în funcție de κ^Q și comparația completă a modelelor

κ^Q	1	2,5	5	10
b	0,96	0,90	0,82	0,68
Corecție locală $\hat{\xi}/b$	0,58	0,62	0,68	0,82

	Date	GBM	Merton	Heston
Exces de kurtosis	10,88	0,00	3,66	3,21
Asimetrie	−0,36	0,00	−0,32	−0,21
Statistica Hill	2,56	4,64	2,70	2,92
ACF a lui $\|r\|$, lagul 1	0,27	0,00	0,00	0,28
ACF a lui $\|r\|$, suma lagurilor 1–20	5,32	0,00	0,00	4,79

- Corecția $\hat{\xi}/b$ este exactă doar la $v_t = \theta^Q$
- Coloanele modelelor sînt mediane din 100 de simulări
- Un model Heston cu un raport Feller mai mic ar putea atinge excesul de kurtosis
  - excesul pe orizont scurt $\approx 3\xi^2/(2\kappa\theta)$
- Coloana Heston: 390 de pași Euler pe zi
  - cu 780 de pași, fiecare mediană se schimbă cu mai puțin de 0,01

înapoi

Procese stocastice: lecturi suplimentare

- Cozi mai grele: procesele Lévy și distribuțiile α-stabile Cont & Tankov (2004), Pele (2014)
  - Cripto-activele formează o clasă distinctă după forma distribuțiilor randamentelor Pele et al. (2023)
  - Informația de înaltă frecvență despre volatilitatea și riscul de coadă (*tail risk*) ale Bitcoin Pele & Mazurencu-Marinescu-Pele (2019)
- Calcul stocastic
  - Shreve (2004), cap. 5–6
  - Franke, Härdle & Hafner (2019), capitolele despre procesul Wiener și integrarea stocastică
- Exerciții rezolvate pentru toate modelele din acest capitol: Borak, Härdle & López-Cabrera (2013)
  - modelul Heston: Čížek, Härdle & Weron (2011)
  - aplicații: Härdle, Chen & Overbeck (2017)
- Metode Monte Carlo: Glasserman (2003)
- SDE numerice: Kloeden & Platen (1992)

înapoi

Studiul de caz, model, date și metodă (1/4)

- **Modelul**: $\sigma_t = \xi e^{X_t}$ (ec. (1.3)), $X_t = \int_{-\infty}^{t} g(t-s)\, v_s \, \mathrm{d}W_s$ (ec. (1.5))
  - X este un proces brownian semistaționar (BSS) cu nucleul g
  - v_s este procesul de volatilitate a volatilității
  - prognozele iau $v_s \equiv 1$, deci un X gaussian (Secțiunea 5)
- Nucleul gamma $g(x) = x^{\alpha} e^{-\lambda x}$ (Exemplul 1.2) dă asperitatea α și memorie scurtă
  - memoria scade exponențial, în ritmul λ
- Nucleul de tip putere $g(x) = x^{\alpha}(1+x)^{-\gamma-\alpha}$ (ec. (1.8)) dă modelul Power-BSS
  - $\beta = \gamma$ dacă $\gamma > 1$ (Observația 1.2)
  - $\beta = 2\gamma - 1$ dacă $\gamma \in (1/2, 1)$
- Alternativa gaussiană: clasa Cauchy (Secțiunea 1.1.1)
  - $\rho(h) = (1 + |h|^{2\alpha+1})^{-\beta/(2\alpha+1)}$: asperitatea α și memoria β sînt fixate separat

înapoi

Studiul de caz, model, date și metodă (2/4)

- **Pasul 1**: α din variograma lui $\log \hat{\sigma}$, prin OLS (ec. (2.1)) și NLLS
  - ca în replicarea pe SPY
  - estimarea NLLS este media pentru $m = 10, \ldots, 20$ laguri (Secțiunile 2.1 și 3.1)
- **Pasul 2**: β, γ sau λ prin ajustarea ACF a modelului la cea empirică
  - pe primele $\lceil n^{1/3} \rceil$ laguri (Secțiunile 2.2 și 4.1)
- **Date**: tranzacțiile cu contractul futures E-mini S&P 500, 2011–2014 (996 de zile)
  - intervalul zilnic: 09:30–16:00 ora New York
- Date zilnice pentru 1 944 de acțiuni americane lichide, 2003–2013 (Secțiunile 4.1 și 4.2)

Înapoi

Studiul de caz, model, date și metodă (3/4)

- $\hat{\sigma}_t^2$: variația bipower cu pre-mediere pe intervalul Δ, împărțită la Δ
  - Δ de la 10 minute la o zi (Secțiunile 4 și 4.1)
- Variația bipower a celor M randamente r_j dintr-un interval: $\mathrm{BV} = \frac{\pi}{2} \sum_{j=2}^{M} |r_j| \, |r_{j-1}|$
  - robustă la salturi Barndorff-Nielsen & Shephard (2004)
- Pre-medierea: randamentele sînt întîi mediate pe ferestre scurte
  - scopul: protecție împotriva zgomotului de microstructură (Anexa A a lucrării)
- Sezonalitatea intrazilnică este eliminată cu forma Fourier flexibilă propusă de Andersen & Bollerslev (1997)

Înapoi

Studiul de caz, model, date și metodă (4/4)

- **Prognoze**: varianța însumată pe următorii $h = 1, 2, 5, 10, 20$ pași
  - estimată pe o fereastră mobilă de 200 de observații
  - perioada în afara eșantionului (*out-of-sample*): 2 ianuarie 2013 – 31 decembrie 2014 (Secțiunea 5.1.1)
  - modele de referință: mers aleator, AR(5), AR(10), ARMA(1,1), log-HAR Corsi (2009), ARFIMA(0,d,0), RFSV
  - log-HAR: model autoregresiv heterogen pentru logaritmul volatilității
- **Obiectul prognozei**: $\mathrm{FO}_t(\Delta, h) = \sum_{k=1}^{h} \mathrm{BV}_{t+k\Delta}$ (ec. (5.3))
  - model gaussian în logaritmi: $\mathbb{E}[e^{X_{t+\Delta}} \mid \mathcal{F}_t] = \exp(m + s^2/2)$ (ec. (5.2))
  - m, s^2: media și dispersia condiționate
- Pierderile pe originile din afara eșantionului
  - $\mathrm{MSE} = \text{media}\,(\widehat{\mathrm{FO}}_t - \mathrm{FO}_t)^2$
  - $\mathrm{QLIKE} = \text{media}\,(\log \widehat{\mathrm{FO}}_t + \mathrm{FO}_t / \widehat{\mathrm{FO}}_t)$
- **Model confidence set** (MCS) Hansen, Lunde & Nason (2011): conține cel mai bun model cu probabilitatea 90% (sau 75%)
  - apartenența nu este un clasament: modelele din MCS nu pot fi deosebite la acel nivel
- Scalarea BV (*Bipower Variation*, variația bipower) cu $M/(M-1)$ (Seminarul 11, C3) deplasează x_t cu o constantă
  - deplasarea: $\frac{1}{2}\ln(78/77) \approx 0{,}006$ pentru $M = 78$
  - constanta se anulează în $\hat{\gamma}_2(k)$ și în ACF

înapoi

Studiul de caz, rezultatele din lucrare (1/2)

$\log \sigma$, E-mini S&P 500 (Tabelul 3, Panoul A)	$\hat{\alpha}_{\mathrm{OLS}}$	$\hat{\alpha}^*_{\mathrm{NLLS}}$	$\hat{\beta}^*_{\mathrm{Cauchy}}$	$\hat{\lambda}^*_{\mathrm{Gamma}}$
$\Delta = 10$ minute	$-0{,}38$	$-0{,}38$	0,18	0,02
$\Delta = 65$ de minute	$-0{,}30$	$-0{,}35$	0,18	0,02
$\Delta = 1$ zi	$-0{,}30$	$-0{,}33$	0,18	0,02

- Volatilitatea este aspră la orice scară și persistentă: memorie lungă împreună cu asperitatea
  - aspră: $\hat{\alpha} < 0$, mult mai aspră decît mișcarea browniană ($\alpha = 0$)
  - persistentă: $\hat{\beta}^* < 1$
  - * indică estimatorii robuști la zgomot
  - comparația cu SPY este în textul principal

înapoi

Studiul de caz, rezultatele din lucrare (2/2)

- Pe 1 944 de acțiuni americane, ambele trăsături par universale (Figurile 4 și 5)
  - $\hat{\alpha}^*$ este în general între $-0{,}45$ și $-0{,}30$
  - $\hat{\beta}^*$ este între 0 și 0,4
  - nu apar diferențe sistematice între sectoare
- Zgomotul poate imita asperitatea (Tabelul 1, Panoul C)
  - simulare: $\alpha = 0$, observat cu raportul zgomot/semnal 0,3 la $\Delta = 0{,}1$
  - estimarea OLS medie este $-0{,}47$
  - estimarea NLLS medie este 0,01
- Prognozele: modelarea persistenței îmbunătățește prognozele intrazilnice și pe orizonturi lungi
  - pași de 15 minute, $h = 20$, MSE ($\times 10^{\mathbf{8}}$): 0,038 log-HAR, 0,020 RFSV, 0,019 Power-BSS (Tabelul 4, Panoul A)
  - la pași zilnici și $h = 1$, RFSV este cel mai bun: 0,493 ($\times 10^{\mathbf{9}}$) (Tabelul 5, Panoul B)

Înapoi

Studiul de caz, aplicație intrazilnică, limite și întrebări deschise (1/3)

- **Aplicație intrazilnică** pe barele SPY de 5 minute din datele cursului
  - este ilustrativă, nu o replicare exactă
  - $\hat{\sigma}_t^2$ este variația bipower a randamentelor la 5 minute din fiecare interval $\Delta = 30$ sau 65 de minute
  - Aceasta este împărțită la Δ și la factorul sezonier Fourier flexibil Andersen & Bollerslev (1997)
- Comparăm $\hat{\alpha}$ OLS și NLLS, $\hat{\beta}^*$ Cauchy și $\hat{\lambda}^*$ Gamma-BSS cu Tabelul 3, Panoul A
- Comparăm prognozele log-HAR, RFSV și BSS cu Tabelul 5
  - pierderile comparate: MSE, QLIKE (*Quasi-LIKElihood*, funcția de pierdere de tip cvasi-verosimilitate) și MCS
- Limită a datelor: bare agregate, nu fiecare tranzacție
  - estimatorul cu pre-mediere (Anexa A a lucrării) nu poate fi calculat
  - zgomotul este mai mare
  - un interval de 65 de minute conține doar 13 randamente

Înapoi

Studiul de caz, aplicație intrazilnică, limite și întrebări deschise (2/3)

Limitele menționate de autori

- Măsurile realizate sînt estimări cu zgomot ale variației integrate
- Concluziile privesc aceste măsuri, nu volatilitatea instantanee latentă (Secțiunile 4.1, 4.2 și 6)
- Nu există o regulă pentru lățimea de bandă m a NLLS (Secțiunile 2.1 și 3.1)
- NLLS este prea costisitor pentru prognozele pe fereastră mobilă
- Aceste prognoze folosesc $\hat{\alpha}$ OLS (Secțiunea 5.1.1)
- Prognozele presupun un X gaussian
- O volatilitate a volatilității negaussiană rămîne în afara lucrării (Secțiunea 5, nota 3)

Înapoi

Studiul de caz, aplicație intrazilnică, limite și întrebări deschise (3/3)

- **Întrebare deschisă**: de ce îmbunătățește memoria lungă chiar și prognozele pe termen scurt?
  - Autorii lasă întrebarea pentru cercetări viitoare (Secțiunea 5.1.2)
  - Estimările $\hat{\alpha}$ pe ferestre mobile indică o volatilitate mai puțin aspră în 2007–2008 și 2011 (Figura 3)
  - ferestrele: 65 de minute, 2005–2014
  - mediana $\hat{\alpha}$ este $-0{,}36$
  - $\hat{\alpha}$ crește cu logaritmul volumului, cu panta 0,0091 (Figura 6)
  - Se încadrează Bitcoin (barele de 5 minute), o piață care nu se închide niciodată, în acest tipar?

Înapoi

Bucla descoperirii, prompturi reutilizabile (1/2)

- Instrumente: un asistent AI (un LLM precum Claude, ChatGPT, Gemini sau GitHub Copilot)
  - căutarea literaturii: Semantic Scholar, Elicit, Google Scholar
- **1. Literatura**: grupăm estimările într-un tabel după frecvență
  - verificăm fiecare DOI pe Crossref (titlul trebuie să coincidă)
  - `Prezintă într-un tabel estimările publicate ale ponderii salturilor în varianța indicilor bursieri, după frecvența de eșantionare (zilnic, 5 minute, tranzacție cu tranzacție) și metodă; dă cifra exactă, tabelul din care provine și DOI-ul.`
- **2. Ipoteze concurente**, cu implicații testabile distincte
  - `Pentru trei procese care dau un exces de kurtosis zilnic în jur de 11 (salturi Merton, volatilitate Heston, drift bursts), derivează implicațiile pentru randamentele standardizate cu volatilitatea ex ante, pentru variația bipower față de varianța realizată și pentru drift chiar înaintea mișcărilor extreme.`
- **3. Date și cod**: replicăm întîi estimarea din capitol
  - `Scrie cod Python care citește închiderile zilnice S&P 500 din datele cursului și estimează modelul Merton prin verosimilitate maximă (mixtură Poisson trunchiată la 12 salturi, mai multe puncte de start).`

Înapoi

Bucla descoperirii, prompturi reutilizabile (2/2)

- **4. Robustețe**, pre-înregistrată
  - `Scrie un plan pre-înregistrat: standardizăm randamentele cu volatilitatea EWMA și GARCH cunoscută la t-1; împărțim 1990-2007 și 2008-2026; testăm Heston (fără salturi, ipoteza nulă) față de Bates (SVJ); valorile critice LR prin bootstrap parametric sub ipoteza nulă Heston.`
- **5. Critica**: cerem asistentului să conteste inferența
  - `Joacă rolul unui recenzent: de ce testul LR pentru lambda = 0 este nestandard, care este distribuția de referință corectă și ar putea o mixtură Poisson cu salturi mici și frecvente să fie doar o inovație cu cozi groase?`
- **6. Raportul**: conținut
  - toate frecvențele și filtrele
  - valorile critice bootstrap
  - codul și jurnalul AI

Înapoi

Studiu suplimentar pe Quantinar

Cursuri avansate pe quantinar.com

- Applied Computational Finance
- XFG (*Quantlet prefix of Applied Quantitative Finance*, prefixul Quantlet-urilor din Applied Quantitative Finance, Härdle, Chen & Overbeck) Advanced Methods in Quantitative Finance

Cod și date

- Quantlets: github.com/danpele/MFM/tree/main/Quantlets/Ch_11

Înapoi

Acronime folosite în acest material (1/4)

- **ACF**: AutoCorrelation Function — *funcția de autocorelație*
- **AI**: Artificial Intelligence — *inteligență artificială*
- **AR**: AutoRegressive model — *model autoregresiv*
- **ARFIMA**: AutoRegressive Fractionally Integrated Moving Average (model) — *model autoregresiv cu medie mobilă, integrat fracționar*
- **ARMA**: AutoRegressive Moving Average (model) — *model autoregresiv cu medie mobilă*
- **BET**: Bucharest Exchange Trading (index) — *indicele de referință al Bursei de Valori București*
- **BSS**: Brownian SemiStationary (process) — *procesul brownian semistaționar*
- **BV**: Bipower Variation — *variația bipower*
- **BVB**: Bursa de Valori București
- **CBOE**: Chicago Board Options Exchange — *bursa de opțiuni din Chicago*
- **CI**: Confidence Interval — *interval de încredere*
- **CIR**: Cox–Ingersoll–Ross (model) — *modelul Cox–Ingersoll–Ross al ratei dobînzii*

Acronime folosite în acest material (2/4)

- **CKLS**: Chan–Karolyi–Longstaff–Sanders (model) — *modelul Chan–Karolyi–Longstaff–Sanders al ratei dobînzii*
- **CLT**: Central Limit Theorem — *teorema limită centrală*
- **CME**: Chicago Mercantile Exchange — *Bursa de mărfuri din Chicago*
- **DGS10**: 10-Year Treasury Constant Maturity Rate (FRED series code) — *randamentul titlurilor de stat americane cu scadența constantă de 10 ani (codul seriei FRED)*
- **DOI**: Digital Object Identifier — *identificatorul digital al unui document*
- **DTB3**: 3-Month Treasury Bill: secondary market rate (FRED series code) — *randamentul titlurilor de stat americane pe 3 luni pe piața secundară (codul seriei FRED)*
- **ETF**: Exchange-Traded Fund — *fond tranzacționat la bursă*
- **EWMA**: Exponentially Weighted Moving Average — *medie mobilă ponderată exponențial*
- **FRED**: Federal Reserve Economic Data — *baza de date economice a Rezervei Federale (St. Louis)*
- **GARCH**: Generalised AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity — *heteroscedasticitate condiționată autoregresivă generalizată*
- **GBM**: Geometric Brownian Motion — *mișcarea browniană geometrică*
- **HAC**: Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent (standard errors) — *erori standard robuste la heteroscedasticitate și autocorelație*
- **HAR**: Heterogeneous AutoRegressive (model) — *model autoregresiv heterogen*

Acronime folosite în acest material (3/4)

- **JB**: Jarque–Bera (test) — *testul de normalitate Jarque–Bera*
- **LLM**: Large Language Model — *model lingvistic mare*
- **LR**: Likelihood Ratio (test) — *testul raportului de verosimilitate*
- **MCMC**: Markov Chain Monte Carlo — *metoda Monte Carlo cu lanțuri Markov*
- **MCS**: Model Confidence Set — *mulțimea de încredere a modelelor*
- **MLE**: Maximum Likelihood Estimation — *estimarea prin metoda verosimilității maxime*
- **MSE**: Mean Squared Error — *eroarea pătratică medie*
- **NLLS**: Non-Linear Least Squares — *metoda celor mai mici pătrate neliniare*
- **OLS**: Ordinary Least Squares — *metoda celor mai mici pătrate*
- **OU**: Ornstein–Uhlenbeck (process) — *procesul Ornstein–Uhlenbeck*
- **PDE**: Partial Differential Equation — *ecuație cu derivate parțiale*
- **QLIKE**: Quasi-LIKElihood (loss function) — *funcția de pierdere de tip cvasi-verosimilitate*

Acronime folosite în acest material (4/4)

- **QQ**: Quantile–Quantile (plot) — *graficul cuantilă–cuantilă*
- **RFSV**: Rough Fractional Stochastic Volatility (model) — *modelul de volatilitate stocastică fracționară aspră*
- **SDE**: Stochastic Differential Equation — *ecuație diferențială stocastică*
- **SE**: Standard Error — *eroarea standard*
- **SPY**: ticker of the SPDR S&P 500 ETF Trust — *simbolul bursier al fondului SPDR S&P 500 ETF Trust*
- **SUA**: Statele Unite ale Americii
- **SVJ**: Stochastic Volatility with Jumps (model) — *model cu volatilitate stocastică și salturi*
- **UTC**: Coordinated Universal Time (Temps Universel Coordonné) — *timpul universal coordonat*
- **VaR**: Value-at-Risk — *valoarea la risc*
- **VIX**: Cboe Volatility Index — *indicele de volatilitate CBOE*
- **XFG**: Quantlet prefix of Applied Quantitative Finance (Härdle, Chen & Overbeck) — *prefixul Quantlet-urilor din Applied Quantitative Finance (Härdle, Chen & Overbeck)*

Bibliografie (1/5)

- Aït-Sahalia, Y. (1996). Testing continuous-time models of the spot interest rate. *Review of Financial Studies*, 9(2), 385–426.
- Aït-Sahalia, Y. (2002). Maximum likelihood estimation of discretely sampled diffusions: a closed-form approximation approach. *Econometrica*, 70(1), 223–262.
- Andersen, L. (2008). Simple and efficient simulation of the Heston stochastic volatility model. *Journal of Computational Finance*, 11(3), 1–42.
- Andersen, T.G., Benzoni, L., Lund, J. (2002). An empirical investigation of continuous-time equity return models. *Journal of Finance*, 57(3), 1239–1284.
- Andersen, T.G., Bollerslev, T. (1997). Intraday periodicity and volatility persistence in financial markets. *Journal of Empirical Finance*, 4(2–3), 115–158.
- Bachelier, L. (1900). Théorie de la spéculation. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 17, 21–86.
- Bandi, F.M., Phillips, P.C.B. (2003). Fully nonparametric estimation of scalar diffusion models. *Econometrica*, 71(1), 241–283.
- Barndorff-Nielsen, O.E., Shephard, N. (2004). Power and bipower variation with stochastic volatility and jumps. *Journal of Financial Econometrics*, 2(1), 1–37.
- Bates, D.S. (1996). Jumps and stochastic volatility: exchange rate processes implicit in Deutsche Mark options. *Review of Financial Studies*, 9(1), 69–107.
- Bennedsen, M., Lunde, A., Pakkanen, M.S. (2022). Decoupling the short- and long-term behavior of stochastic volatility. *Journal of Financial Econometrics*, 20(5), 961–1006.
- Billingsley, P. (1999). Convergence of Probability Measures, 2nd ed. Wiley.
- Black, F., Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637–654.
- Bollerslev, T., Zhou, H. (2002). Estimating stochastic volatility diffusion using conditional moments of integrated volatility. *Journal of Econometrics*, 109(1), 33–65.

Bibliografie (2/5)

- Borak, S., Härdle, W.K., López-Cabrera, B. (2013). Statistics of Financial Markets: Exercises and Solutions, 2nd ed. Springer.
- Broadie, M., Kaya, Ö. (2006). Exact simulation of stochastic volatility and other affine jump diffusion processes. *Operations Research*, 54(2), 217–231.
- Chan, K.C., Karolyi, G.A., Longstaff, F.A., Sanders, A.B. (1992). An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate. *Journal of Finance*, 47(3), 1209–1227.
- Chernov, M., Ghysels, E. (2000). A study towards a unified approach to the joint estimation of objective and risk neutral measures for the purpose of options valuation. *Journal of Financial Economics*, 56(3), 407–458.
- Christensen, K., Oomen, R.C.A., Podolskij, M. (2014). Fact or friction: jumps at ultra high frequency. *Journal of Financial Economics*, 114(3), 576–599.
- Christensen, K., Oomen, R.C.A., Renò, R. (2022). The drift burst hypothesis. *Journal of Econometrics*, 227(2), 461–497.
- Čížek, P., Härdle, W.K., Weron, R. (Eds.) (2011). Statistical Tools for Finance and Insurance, 2nd ed. Springer.
- Comte, F., Renault, E. (1998). Long memory in continuous-time stochastic volatility models. *Mathematical Finance*, 8(4), 291–323.
- Cont, R. (2001). Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*, 1(2), 223–236.
- Cont, R., Tankov, P. (2004). Financial Modelling with Jump Processes. Chapman & Hall/CRC.
- Corsi, F. (2009). A simple approximate long-memory model of realized volatility. *Journal of Financial Econometrics*, 7(2), 174–196.
- Cox, J.C., Ingersoll, J.E., Ross, S.A. (1985). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53(2), 385–407.
- Duffie, D., Pan, J., Singleton, K. (2000). Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions. *Econometrica*, 68(6), 1343–1376.
- Einstein, A. (1905). Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. *Annalen der Physik*, 322(8), 549–560.
- Eraker, B., Johannes, M., Polson, N. (2003). The impact of jumps in volatility and returns. *Journal of Finance*, 58(3), 1269–1300.

Bibliografie (3/5)

- Feller, W. (1951). Two singular diffusion problems. *Annals of Mathematics*, 54(1), 173–182.
- Franke, J., Härdle, W.K., Hafner, C.M. (2019). Statistics of Financial Markets: An Introduction, 5th ed. Springer.
- Gatheral, J., Jaisson, T., Rosenbaum, M. (2018). Volatility is rough. *Quantitative Finance*, 18(6), 933–949.
- Girsanov, I.V. (1960). On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution of measures. *Theory of Probability and Its Applications*, 5(3), 285–301.
- Glasserman, P. (2003). Monte Carlo Methods in Financial Engineering. Springer.
- Hansen, P.R., Lunde, A., Nason, J.M. (2011). The model confidence set. *Econometrica*, 79(2), 453–497.
- Härdle, W.K., Chen, C.Y.-H., Overbeck, L. (Eds.) (2017). Applied Quantitative Finance, 3rd ed. Springer.
- Heston, S.L. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies*, 6(2), 327–343.
- Higham, D.J. (2001). An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations. *SIAM Review*, 43(3), 525–546.
- Honoré, P. (1998). Pitfalls in estimating jump-diffusion models. Working paper, SSRN.
- Itô, K. (1944). Stochastic integral. *Proceedings of the Imperial Academy*, 20(8), 519–524.
- Kac, M. (1949). On distributions of certain Wiener functionals. *Transactions of the American Mathematical Society*, 65(1), 1–13.
- Kloeden, P.E., Platen, E. (1992). Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Springer.

Bibliografie (4/5)

- Lee, S.S., Mykland, P.A. (2008). Jumps in financial markets: a new nonparametric test and jump dynamics. *Review of Financial Studies*, 21(6), 2535–2563.
- Lord, R., Koekkoek, R., van Dijk, D. (2010). A comparison of biased simulation schemes for stochastic volatility models. *Quantitative Finance*, 10(2), 177–194.
- Merton, R.C. (1973). Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1), 141–183.
- Merton, R.C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3(1–2), 125–144.
- Milstein, G.N. (1975). Approximate integration of stochastic differential equations. *Theory of Probability and Its Applications*, 19(3), 557–562.
- Nelson, D.B. (1990). ARCH models as diffusion approximations. *Journal of Econometrics*, 45(1–2), 7–38.
- Newey, W.K., West, K.D. (1987). A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix. *Econometrica*, 55(3), 703–708.
- Osborne, M.F.M. (1959). Brownian motion in the stock market. *Operations Research*, 7(2), 145–173.
- Pele, D.T. (2014). A SAS approach for estimating the parameters of an alpha-stable distribution. *Procedia Economics and Finance*, 10, 68–77.
- Pele, D.T., Mazurencu-Marinescu-Pele, M. (2019). Using high-frequency entropy to forecast Bitcoin's daily value at risk. *Entropy*, 21(2), 102.
- Pele, D.T., Wesselhöfft, N., Härdle, W.K., Kolossiatis, M., Yatracos, Y.G. (2023). Are cryptos becoming alternative assets?. *European Journal of Finance*, 29(10), 1064–1105.

Bibliografie (5/5)

- Pritsker, M. (1998). Nonparametric density estimation and tests of continuous time interest rate models. *Review of Financial Studies*, 11(3), 449–487.
- Samuelson, P.A. (1965). Rational theory of warrant pricing. *Industrial Management Review*, 6(2), 13–39; reprinted in *Henry P. McKean Jr. Selecta* (2015), Birkhäuser.
- Shreve, S.E. (2004). Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models. Springer.
- Stanton, R. (1997). A nonparametric model of term structure dynamics and the market price of interest rate risk. *Journal of Finance*, 52(5), 1973–2002.
- Tang, C.Y., Chen, S.X. (2009). Parameter estimation and bias correction for diffusion processes. *Journal of Econometrics*, 149(1), 65–81.
- Uhlenbeck, G.E., Ornstein, L.S. (1930). On the theory of the Brownian motion. *Physical Review*, 36(5), 823–841.
- Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5(2), 177–188.
- Wang, Y. (2002). Asymptotic nonequivalence of GARCH models and diffusions. *Annals of Statistics*, 30(3), 754–783.
- Wiener, N. (1923). Differential-space. *Journal of Mathematics and Physics*, 2(1–4), 131–174.
- Yu, J. (2012). Bias in the estimation of the mean reversion parameter in continuous time models. *Journal of Econometrics*, 169(1), 114–122.