









Modelarea piețelor financiare

Capitolul 12: Opțiuni și suprafața de volatilitate



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București
IDA Institute Digital Assets
Blockchain Research Center
AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance
Academia Română, Institutul de Prognoză Economică
MSCA Digital Finance

Ce dezvăluie prețurile opțiunilor despre distribuția viitoare?



Fischer Black. **Foto: Dalmatine at English Wikipedia (încărcată 2009); domeniu public; Wikimedia Commons**

"If options are correctly priced in the market, it should not be possible to make sure profits by creating portfolios of long and short positions in options and their underlying stocks."

— *Black & Scholes (1973)*

- Black–Scholes: din replicare rezultă o singură volatilitate implicită pe activ
  - acoperire zilnică prin delta (*delta hedging*), call pe trei luni: abaterea standard a erorii, 9,5% din primă
- Zîmbetul (*smile*): volatilitatea implicită pe o lună obținută din distribuția istorică a S&P 500 (*Standard & Poor's*)
  - 30,6% la $K/S = 0{,}8$, față de 13,9% la bani
- Bitcoin, 38 de zile: probabilitatea neutră la risc a unei scăderi de peste 30%
  - 1,24%, față de 0,14% sub reperul log-normal
- S&P 500, 1990–2026: VIX (*CBOE Volatility Index*, indicele de volatilitate Cboe) are media 19,4, volatilitatea realizată 15,3
  - prima de risc a variației: 4,09 puncte de volatilitate, pozitivă în 86% din zile

▸ **Graficul central: volatilitatea implicită față de cea realizată**

Ideea capitolului

- O opțiune plătește doar în anumite stări: prețul ei este un pariu pe **distribuție**
  - nu doar pe direcție
  - deci reflectă așteptările pieței privind volatilitatea și crahurile
- Partea I, evaluarea prin replicare
  - paritatea, replicarea statică, arborele binomial
  - ecuația Black–Scholes, senzitivitățile și eroarea hedging-ului discret
- Apoi volatilitatea implicită, zîmbetul și o suprafață Bitcoin completă, cu densitatea neutră la risc
- Partea a II-a, volatilitatea implicită ca informație
  - swap-urile de variață
  - VIX (indicele Cboe al volatilității implicite pe 30 de zile a S&P 500)
  - prima de risc a variației și opțiunile 0DTE (cu zero zile pînă la scadență)
- Studii de caz: limitele primei de risc obținute din opțiuni și reacția VIX la șocurile de volatilitate
- Inteligența artificială (AI, *artificial intelligence*) pentru descoperire științifică
- **Rezultatele învățării**
  - derivați paritatea put–call, prețul din arborele binomial și ecuația Black–Scholes
  - calculați senzitivitățile, eroarea hedging-ului discret și o suprafață SVI (*Stochastic Volatility Inspired*, parametrizarea inspirată de volatilitatea stocastică) fără arbitraj, cu densitatea ei și benzi de încredere
  - interpretați prognozele din opțiuni (VIX, prima de risc a variației) cu erorile standard adecvate
  - Aprofundări și Anexa: lectură pentru familiarizare

Chicago, 1973: începe tranzacționarea opțiunilor listate



Sala de tranzacționare a Chicago Board of Trade în 2006;
membrii ei au fondat Cboe în 1973

Foto: Richie Diesterheft (2006); CC BY 2.0; Wikimedia Commons

- Chicago Board Options Exchange (Cboe) s-a deschis în 1973 MacKenzie & Millo (2003)
  - prima bursă pentru opțiuni standardizate, listate
  - Înainte: opțiunile se negociau una cîte una, în afara bursei
- În același an: articolele de evaluare Black–Scholes și Merton Black & Scholes (1973), Merton (1973)
- Curînd, operatorii foloseau formula în sala de tranzacționare MacKenzie & Millo (2003)
  - teoria a schimbat piața pe care o descria

Formula și autorii ei



Fischer Black (1938–1995)

Foto: Dalmatine at English Wikipedia; domeniu public; Wikimedia Commons



Myron Scholes (2008)

Foto: Nobellaureatesphotographer (2008); CC BY-SA 3.0; Wikimedia Commons



Robert C. Merton (2006)

Foto: Digarnick (2006); domeniu public; Wikimedia Commons

- Ideea-cheie: un portofoliu din acțiune și numerar poate **replica** opțiunea Black & Scholes (1973)
  - deci prețul ei rezultă din absența arbitrajului
- Scholes și Merton au primit Premiul Nobel pentru Economie în 1997, iar Black murise în 1995

Paritatea put–call: ce impune doar absența arbitrajului?

- Două portofolii cu aceeași plată la T (opțiuni europene, același K și T, fără dividende):
  - A: un call + numerar $Ke^{-r\tau}$ (valorează K la T) $\Rightarrow \max(S_T, K)$
  - B: un put + o acțiune $\Rightarrow \max(K, S_T)$
- Aceeași plată în orice stare, deci același preț azi, altfel ar exista un arbitraj:
  - $C_t - P_t = S_t - Ke^{-r\tau}$ (cu randament de dividend δ: $S_t e^{-\delta\tau}$ în locul lui S_t)
- Nu este nevoie de un model pentru S: paritatea folosește doar absența arbitrajului Merton (1973)
- Consecință: un call și un put cu același K și T au **aceeași** volatilitate implicită

Replicarea statică: orice plată dintr-o obligațiune, un forward și opțiuni

- Formula Carr–Madan, pentru orice plată de două ori derivabilă $f(S_T)$ și orice punct F
  - dezvoltare Taylor cu rest integral, demonstrația în ▸ Anexă
  - $f(S_T) = f(F) + f'(F)(S_T - F) + \int_0^F f''(K)\,(K - S_T)^+ dK + \int_F^\infty f''(K)\,(S_T - K)^+ dK$
  - Interpretarea: o obligațiune, un forward și o **bandă** de opțiuni (*strip*): cîte $f''(K)\,dK$ put-uri sub F și call-uri peste F
- Evaluat azi (F forward-ul) Bakshi, Kapadia & Madan (2003):
  - $V_0 = e^{-r\tau} f(F) + \int_0^F f''(K)\,P(K)\,dK + \int_F^\infty f''(K)\,C(K)\,dK$
  - $P(K)$, $C(K)$: prețurile de azi ale put-ului și call-ului
  - Fiecare componentă are azi un preț de piață (obligațiunea $e^{-r\tau}$ pe unitate, forward-ul 0), deci V_0 nu cere nici un model pentru S, nici o măsură de evaluare
  - Măsura Q (Secțiunea 3) este necesară doar pentru a citi prețurile opțiunilor ca medii, ca la densitatea de pe slide-ul următor

Replicarea statică: trei rezultate folosite mai departe

- „Neutră la risc": prețul este media actualizată a plății sub măsura de evaluare Q
  - nu sub probabilitățile reale
  - Q este construită în Secțiunea 3
- **Varianța**: $f(S) = -2\ln(S/F)$ are $f''(K) = 2/K^2$
  - banda de opțiuni cu ponderile $1/K^2$ este swap-ul de variață și VIX (Secțiunea 8)
  - Prețurile de exercitare mici au ponderile cele mai mari, deci o aripă scumpă a put-urilor face varianța scumpă
- **Densitatea**: un butterfly dă densitatea neutră la risc Breeden & Litzenberger (1978)
  - $[C(K-h) - 2C(K) + C(K+h)]/h^2 \to \partial^2 C/\partial K^2 = e^{-r\tau} q(K)$
  - h: pasul dintre prețurile de exercitare
  - Densitatea neutră la risc este deci un preț (Secțiunea 7)
- Straddle-urile, spread-urile și put-urile de protecție sînt benzi finite de opțiuni
  - cu f'' concentrată în unul sau două prețuri de exercitare
- Momentele și SVIX (simple VIX, indicele de varianță al lui Martin (2017)): ▸ Anexa

Arborele binomial: cum evaluăm o opțiune prin replicare?

- O perioadă de lungime Δt: $S \to uS$ sau dS, cu $d < R = e^{r\Delta t} < u$
  - u, d: factorii de creștere și de scădere
  - R: randamentul brut fără risc
- Replicăm call-ul cu Δ acțiuni și numerarul B
  - $\Delta uS + RB = C_u$ și $\Delta dS + RB = C_d$
  - C_u, C_d: valorile call-ului după o creștere și după o scădere
  - Soluția: $\Delta = \dfrac{C_u - C_d}{(u-d)S}$, iar prețul este $C = \Delta S + B = \dfrac{q\,C_u + (1-q)\,C_d}{R}$
  - $q = \dfrac{R-d}{u-d} \in (0,1)$ (probabilitatea neutră la risc, analogul discret al densității $q(K)$) este unica probabilitate sub care S_t/R^t este martingal
- Probabilitatea reală a unei creșteri nu intervine
  - preferințele față de risc sînt deja încorporate în prețul S
- **Teorema fundamentală**: absența arbitrajului $\Leftrightarrow$ există o măsură de martingal echivalentă Q Harrison & Pliska (1981), Delbaen & Schachermayer (1994)
  - Q este unică exact cînd piața este completă; cu salturi sau volatilitate stocastică există multe Q, iar prețurile opțiunilor conțin prime de risc (Secțiunea 8)

Arborele CRR: N pași și convergența la Black–Scholes

- De ce N pași: o perioadă are doar două stări finale
  - cu N pași, cele $N+1$ stări finale aproximează distribuția lui S_T
- Arborele CRR (Cox–Ross–Rubinstein) Cox, Ross & Rubinstein (1979): $\Delta t = T/N$, $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$, $d = 1/u$
  - Această alegere dă randamentului logaritmic pe un pas varianța $\sigma^2\Delta t$ (pînă la termeni de ordinul Δt^2), deci arborele converge la mișcarea browniană geometrică din modelul Black–Scholes
  - $q = (e^{r\Delta t} - d)/(u - d)$ este aceeași în fiecare nod
- Call european: $C_0 = e^{-rT} \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} q^j (1-q)^{N-j} \left(S_0 u^j d^{N-j} - K\right)^+$
  - j: numărul de creșteri; suma este media neutră la risc a plății, actualizată
- Opțiunile americane: evaluare înapoi de la T
  - în fiecare nod se ia max(valoarea de continuare, valoarea exercitării)

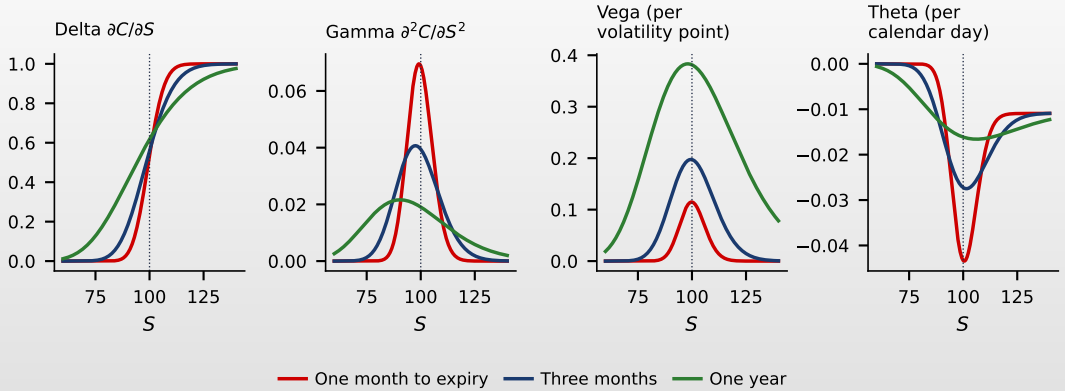
Ecuația Black–Scholes: ce preț rezultă din replicarea continuă?

- Mișcarea browniană geometrică $dS_t = \mu S_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t$
  - cu σ și r constante
  - tranzacționare continuă, fără costuri și cu vînzare în lipsă permisă
- Replicăm valoarea opțiunii $V(S,t)$ cu un portofoliu **autofinanțat** Π
  - din Δ_t acțiuni și numerarul B_t la r
  - $d\Pi = \Delta\,dS + rB\,dt$
- Lema lui Itô, cu V_t, V_S, V_{SS} derivatele parțiale:
  - $dV = \left(V_t + \mu S V_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS}\right)dt + \sigma S V_S\,dW_t$
- Alegem $\Delta = V_S$ și pornim de la $\Pi = V$ ($B = V - SV_S$)
  - $d(V-\Pi) = \left(V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} - rB\right)dt$
  - dispar atît dW_t, cît și μ
- O poziție fără risc care nu costă nimic nu poate cîștiga nimic
  - de unde **ecuația Black–Scholes** Black & Scholes (1973), Merton (1973):
  - $V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - rV = 0$, cu $V(S,T) =$ plata
- Faptul că μ nu intervine este un rezultat, nu o ipoteză
  - formula Feynman–Kac: $V = e^{-r\tau} E^Q[\text{plata}]$
  - sub Q, S are driftul r

Formula Black–Scholes

- Call și put europene, fără dividende (cu randament δ: înlocuim S cu $Se^{-\delta\tau}$):
  - $C = S\,\Phi(d_1) - Ke^{-r\tau}\,\Phi(d_2)$, $\quad P = Ke^{-r\tau}\,\Phi(-d_2) - S\,\Phi(-d_1)$
  - $d_1 = \dfrac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$, $\quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$, cu Φ funcția de repartiție a distribuției Normale standard
- Interpretarea celor doi termeni:
  - $\Phi(d_2)$ = probabilitatea neutră la risc ca un call să fie în bani la scadență
  - $\Phi(d_1)$ = numărul de acțiuni din portofoliul de replicare (delta)
- Cinci date de intrare
  - S, K, τ și r sînt observabile
  - σ trebuie estimată sau dedusă din prețuri

Senzitivitățile: o identitate, toate derivatele (1/2)



MFM_ch12_greeks ▶ Interactiv

Senzitivitățile: o identitate, toate derivatele (2/2)

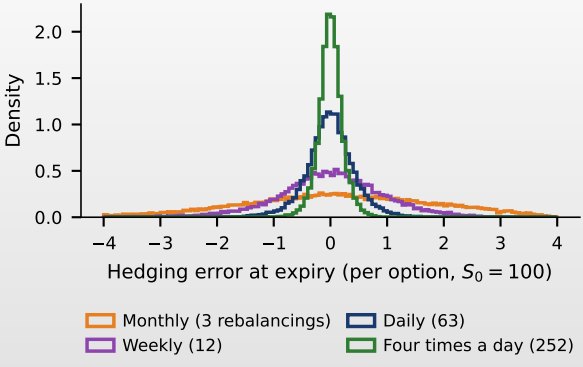
- Senzitivitățile: derivatele parțiale ale prețului
  - $\Delta = \partial C/\partial S$, $\Gamma = \partial^2 C/\partial S^2$
  - vega $\mathcal{V} = \partial C/\partial \sigma$, $\Theta = \partial C/\partial t$, rho $= \partial C/\partial r$
- Delta: $\Delta = \Phi(d_1)$ pentru call și $\Phi(d_1) - 1$ pentru put
- Gamma: $\Gamma = \varphi(d_1)/(S\sigma\sqrt{\tau})$, unde φ este densitatea distribuției Normale standard
- Identitatea-cheie: $S\varphi(d_1) = Ke^{-r\tau}\varphi(d_2)$
- Vega $= S\varphi(d_1)\sqrt{\tau} = \Gamma S^2\sigma\tau$
  - pentru o scadență dată, gamma și vega sînt proporționale
  - Seminarul 12, A1, A7
- Theta: $\Theta = rC - rS\Delta - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\Gamma$
- Rho: $K\tau e^{-r\tau}\Phi(d_2)$
- Graficul: un call cu $K = 100$
  - scadențele scurte concentrează gamma și theta în jurul prețului de exercitare
  - cele lungi au cea mai mare vega
- Unități: vega pe punct de volatilitate, theta pe zi calendaristică

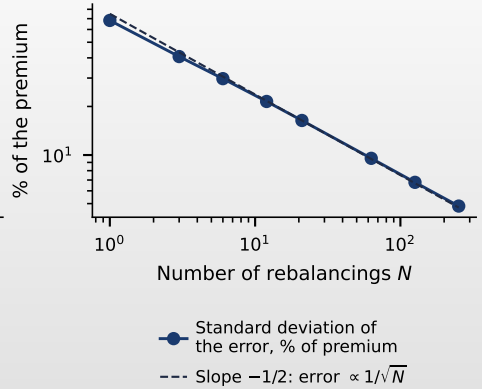
MFM_ch12_greeks

Acoperirea discretă prin delta: cît risc rămîne cînd reechilibrăm de N ori?

- Acoperirea prin delta: Δ acțiuni pe opțiune; replicarea Black–Scholes cere reechilibrare continuă
  - în practică portofoliul se ajustează de N ori, la momentele $t_i = iT/N$
- La $t_0 = 0$: vindem call-ul la prețul Black–Scholes C_0
  - cumpărăm $\Delta_0 = \Phi(d_1)$ acțiuni
  - păstrăm numerarul $B_0 = C_0 - \Delta_0 S_0$
- La t_i, $i = 1, \dots, N-1$, portofoliul este autofinanțat
  - $\Delta_i = \Phi\big(d_1(S_{t_i}, T - t_i)\big)$
  - $B_i = B_{i-1} e^{rT/N} - (\Delta_i - \Delta_{i-1}) S_{t_i}$
- **Eroarea de acoperire** la scadență: $\varepsilon_N = \Delta_{N-1} S_T + B_{N-1} e^{rT/N} - (S_T - K)^+$
- Simularea: mișcare browniană geometrică cu $\mu = 8\%$ și $\sigma = 20\%$
  - $S_0 = K = 100$, $r = 4\%$, $T = 0{,}25$
  - 20 000 de traiectorii; $N = 3, 12, 63, 252$
- De ce $\mu \neq r$: replicarea nu folosește μ
  - un drift real diferit de r arată că eroarea rămîne centrată în 0

Acoperirea discretă prin delta: algoritm și eroare (1/2)





MFM_ch12_hedge_error ▶ Interactiv

Acoperirea discretă prin delta: algoritm și eroare (2/2)

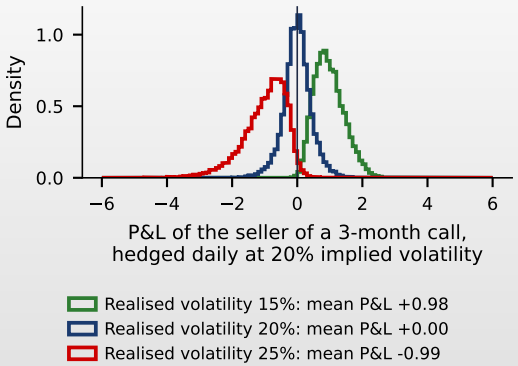
- Stînga: distribuția erorii ε_N pentru patru frecvențe de reechilibrare
  - dreapta: abaterea standard a erorii, în % din primă, față de N, pe axe logaritmice
- Prima Black–Scholes este 4,49 ($d_1 = 0{,}15$), iar eroarea medie este aproape de 0
- Abaterea standard a erorii, în % din primă
  - 40,8% la reechilibrare lunară, 21,5% săptămînală
  - 9,5% zilnică și 4,8% de patru ori pe zi
- Cuantila de 1% a erorii, în unități monetare pe opțiune
  - $-2{,}68$ la reechilibrare săptămînală
  - $-1{,}17$ la reechilibrare zilnică
- Panta dreptei log(abatere standard) față de log N este $-0{,}48$
  - teoria (Anexa) dă abaterea standard $\approx \sqrt{\pi/4}\,\mathcal{V}\sigma/\sqrt{N}$
  - $\mathcal{V}$: vega
- Teorie față de simulare
  - 1,01 și 0,96 la $N = 12$
  - 0,44 și 0,43 la $N = 63$
  - 0,22 și 0,22 la $N = 252$
- Costurile de tranzacționare depind de modelul de cost
  - cu un cost fix pe reechilibrare, costul total crește proporțional cu N
  - cu costuri proporționale cu valoarea tranzacționată, în cadrul difuziei standard, costul așteptat crește aproximativ ca $\sqrt{N}$

MFM_ch12_hedge_error

Derivare: rezultatul ponderat cu gamma

- Vindem opțiunea la σ_{imp} și deținem $\Delta = \partial_S V^{imp}$
  - V^{imp}: valoarea ei Black–Scholes la σ_{imp}
  - prețul urmează $dS = \mu S\,dt + \sigma_{real} S\,dW_t$
- Itô pentru V^{imp}: $dV = V_t\,dt + \Delta\,dS + \frac{1}{2}\Gamma\sigma_{real}^2 S^2 dt$
  - ecuația Black–Scholes la σ_{imp} dă $V_t = rV - rS\Delta - \frac{1}{2}\sigma_{imp}^2 S^2\Gamma$
- Opțiune vîndută + Δ acțiuni + numerar la r, autofinanțat
  - rezultatul (P&L, *profit and loss*) urmează $d\,\mathrm{P\&L} = r\,\mathrm{P\&L}\,dt + \frac{1}{2}\Gamma_t S_t^2\left(\sigma_{imp}^2 - \sigma_{real}^2\right)dt$
  - Pe toată durata: $\mathrm{P\&L} = \int_0^T e^{r(T-t)}\,\frac{1}{2}\Gamma_t S_t^2\left(\sigma_{imp}^2 - \sigma_{real,t}^2\right)dt$, dependent de traiectorie și mare aproape de K și de T
- Un swap de varianță vîndut primește $\sigma_{imp}^2 - \sigma_{real}^2$ cu ponderi constante
  - o opțiune acoperită prin delta este un pariu pe varianță cu ponderi aleatoare
- Ordinul întîi: vega $\times$ (implicită $-$ realizată), verificat pe slide-ul următor
  - Deoarece vega $= \Gamma S^2\sigma\tau$ (Secțiunea 4): $\frac{1}{2}\Gamma S^2(\sigma_{imp}^2 - \sigma_{real}^2)\tau = \frac{1}{2}\Gamma S^2(\sigma_{imp} + \sigma_{real})(\sigma_{imp} - \sigma_{real})\tau \approx \text{vega} \times (\sigma_{imp} - \sigma_{real})$

Vînzarea volatilității la 20%: trei rezultate



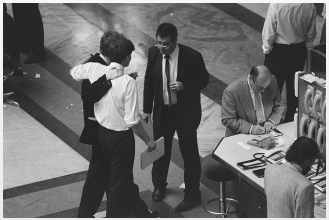
- Call pe trei luni vîndut la volatilitatea implicită de 20%, acoperit zilnic prin delta
  - volatilitatea realizată este 15%, 20% sau 25%
- Volatilitate realizată de 15%: rezultatul mediu este $+0{,}98$, pozitiv pe 99,8% dintre traiectorii
- Volatilitate realizată de 20%: rezultatul mediu este $+0{,}00$
  - rămîne doar zgomotul hedging-ului discret (abatere standard 0,43)
- Volatilitate realizată de 25%: rezultatul mediu este $-0{,}99$, pozitiv doar pe 2,2% dintre traiectorii
- Fiecare medie este aproape de vega $\times$ 5 puncte de volatilitate
  - $= 0{,}197 \times 5 \approx \pm 0{,}99$
  - un pariu pur pe volatilitate

MFM_ch12_vol_mismatch ▶ Interactiv

Volatilitatea implicită: ce σ explică prețul de piață?

- **Volatilitatea implicită** σ_{imp}: acel σ pentru care prețul Black–Scholes este egal cu prețul de piață
  - $BS(S, K, \tau, r, \sigma_{imp}) = C^{market}$, unde $BS(\cdot)$ este formula Black–Scholes, iar C^{market} prețul observat
  - Soluția este unică, deoarece vega > 0: prețul crește în σ
  - Nu există o formulă explicită: σ apare în $\Phi(d_1)$ și în $\Phi(d_2)$, deci ecuația se rezolvă numeric
- Operatorii cotează opțiunile în volatilitate implicită, nu în unități monetare
  - este comparabilă între prețuri de exercitare, scadențe și active
- Dacă Black–Scholes ar fi corect, toate opțiunile pe un activ ar avea **aceeași** volatilitate implicită

După octombrie 1987: apare zîmbetul



Bursa din Amsterdam după crah, 21 octombrie 1987

Foto: Bart Molendijk / Anefo (1987); CC0; Wikimedia Commons

- Înainte de 1987, opțiunile pe indici aveau o volatilitate implicită aproape constantă pe prețuri de exercitare Rubinstein (1994)
  - De la crah, put-urile cu preț de exercitare mic sînt mult mai scumpe: **asimetria** (*skew*)
- Octombrie 1986 – august 1987: prețurile opțiunilor reflectau teama de un crah Bates (1991)
  - Teama nu era puternică în cele două luni dinaintea crahului
- **Zîmbetul**: volatilitatea implicită ca funcție de K
  - **Structura la termen**: volatilitatea implicită ca funcție de T
  - **Suprafața**: ca funcție de K și de T
- Riscul de crah la Bursa de Valori București: Pele & Mazurencu-Marinescu (2012)

Cauzele zîmbetului și modelele care îl reproduc (1/2)

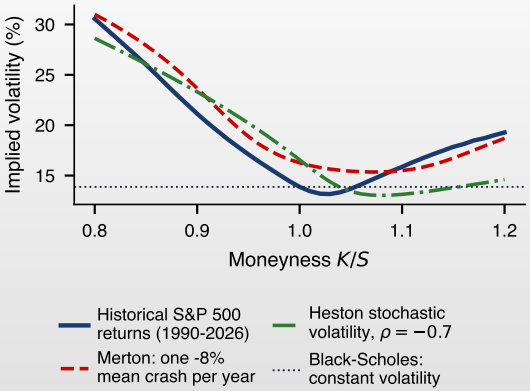
- **Cozi groase**: mișcările mari sînt mai frecvente decît permite distribuția Normală (Capitolul 1)
  - deci opțiunile adînc OTM (în afara banilor, *out-of-the-money*: azi nu ar aduce nimic) valorează mai mult decît indică formula Black–Scholes
- **Efectul de levier** (*leverage effect*) **și retroacțiunea volatilității** (*volatility feedback*): cînd prețurile scad, volatilitatea crește Christie (1982)
  - asimetria negativă astfel apărută face put-urile cu preț de exercitare mic mai scumpe
- **Teama de crah**: piața evaluează un risc de salt negativ, vizibil în prețul put-urilor Bates (1991)
- **Cererea de asigurare**: investitorii cumpără put-uri Gârleanu, Pedersen & Poteshman (2009)
  - intermediarii, care nu pot acoperi complet riscul, cer o primă pentru ele

Cauzele zîmbetului și modelele care îl reproduc (2/2)

Model	Ideea	Caracteristica reprodusă cel mai bine
Salturi Merton (1976)	salturi Poisson adăugate mișcării browniene	zîmbete abrupte pe termen scurt
Volatilitate stocastică Heston (1993), Hull & White (1987)	varianța urmează propriul proces cu revenire la medie, corelat cu S	asimetria și structura la termen
Volatilitate locală Gatheral (2006)	$\sigma(S,t)$ extrasă din întreaga suprafață (formula din Dupire (1994))	pentru scadențe mai lungi reproduce toate prețurile cotate azi, opțiuni exotice
Zîmbet parametric SVI (stochastic volatility inspired) Gatheral & Jacquier (2014)	cinci parametri pe scadență, fără dinamică	interpolare și cotare (Secțiunea 7)

- Procesele sînt descrise în Capitolul 11
  - suprafața de volatilitate implicită, în detaliu, în Franke, Härdle & Hafner (2019), Čížek, Härdle & Weron (2011)

Zîmbetul din date și din două modele (1/2)



MFM_ch12_smile_models ▶ Interactiv

Zîmbetul din date și din două modele (2/2)

- Volatilitatea implicită pe o lună din trei surse
  - distribuția istorică a S&P 500
  - un model cu salturi și unul cu volatilitate stocastică
- Istoric: 9 225 de randamente lunare suprapuse
  - asimetria $-1{,}27$, excesul de kurtosis 6,8
  - excesul de kurtosis presupune moment de ordin patru finit, pus sub semnul întrebării în Capitolul 1
  - rescalate la un martingal ($r = 0$, fără ajustare pentru risc)
  - 30,6% la $K/S = 0{,}8$, 13,9% la bani (ATM) și 19,3% la $K/S = 1{,}2$
- Modelul Merton cu salturi: 31,0% la $K/S = 0{,}8$, față de 16,3% la bani
  - un crah de aproximativ -8% pe an
- Modelul Heston (corelația preț–varianță $\rho = -0{,}7$)
  - 28,6% la $K/S = 0{,}8$, 16,6% la bani și 14,6% la $K/S = 1{,}2$
- Distribuțiile neutre la risc sînt mai asimetrice la stînga decît cele realizate Jackwerth (2000)
  - riscul de crah evaluat de piață accentuează și mai mult zîmbetele

MFM_ch12_smile_models

Suprafața Bitcoin: cum descriem zîmbetul fără arbitraj?

- Deribit listează opțiuni europene pe Bitcoin, tranzacționate non-stop Deribit DVOL
  - Opțiunile sînt **inverse**: prima și plata se exprimă în bitcoin (BTC), nu în dolari americani (USD)
  - Fiecare scadență are propriul forward F
  - DVOL: indicele Deribit de volatilitate implicită pe 30 de zile
- Cotațiile folosite: 22 septembrie 2026, 07:51 UTC (*Coordinated Universal Time*, timpul universal coordonat)
  - 9 scadențe care au cel puțin două zile rămase
  - 375 de opțiuni OTM cu cotație de cumpărare pozitivă
- De ce Bitcoin: singurul activ din datele cursului cu un lanț complet de opțiuni
  - pe toate prețurile de exercitare și scadențele
- Riscul cripto: Pele et al. (2023)
- Hedging-ul opțiunilor Bitcoin: Matic, Packham & Härdle (2023)

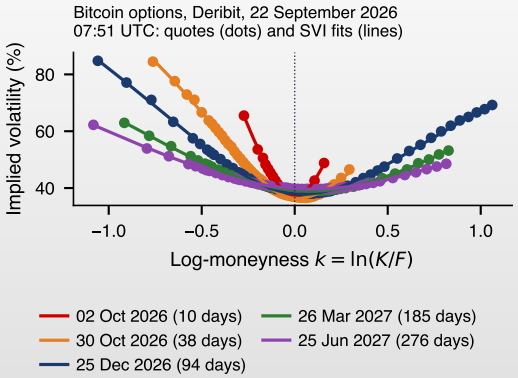
Zîmbetul SVI: forma, parametrii și estimarea

- Parametrizarea SVI Gatheral & Jacquier (2014) a variației implicite totale $w(k) = \sigma^2_{imp}(k)\,\tau$, cu $k = \ln(K/F)$:
  - $w(k) = a + b\left(\rho\,(k-m) + \sqrt{(k-m)^2 + s^2}\right)$
- Parametrii: a nivelul, b panta aripilor
  - ρ înclinarea (negativ = asimetrie spre put-uri)
  - m deplasarea, s curbura la bază
- Pantele aripilor: $b(1-\rho)$ la stînga și $b(1+\rho)$ la dreapta
- De ce w și k: condițiile de absență a arbitrajului (slide-ul următor) se scriu direct în $w(k)$
  - scadențele diferite devin comparabile
- De ce SVI: cînd $|k| \to \infty$, w devine liniar în k
  - forma pe care formula lui Lee (2004) o permite pentru aripi
- Cinci parametri pe scadență, estimați din 24–58 de cotații
- Estimarea: cele mai mici pătrate pe w, pentru fiecare scadență
  - $\min \sum_j \left(w(k_j) - \sigma^2_{imp,j}\tau\right)^2$
  - cu margini pentru parametri și șase puncte de pornire

Constrîngerile de absență a arbitrajului asupra zîmbetului

- **Aripile**: Lee (2004) limitează panta asimptotică, $\limsup_{|k|\to\infty} w(k)/|k| \le 2$
  - pentru SVI este necesar $b(1+|\rho|) \le 2$
  - $w \ge 0$ cere $a + bs\sqrt{1-\rho^2} \ge 0$
  - O aripă mai abruptă înseamnă cozi mai groase ale lui S_T sub Q (formula momentelor: Anexa)
- **Butterfly**: prețurile call convexe în K, densitatea $q \ge 0$ Gatheral & Jacquier (2014)
  - cu $w' = \partial_k w$, $w'' = \partial_k^2 w$
  - $g(k) \ge 0$ înseamnă exact o densitate nenegativă
  - $g(k) = \left(1 - \frac{kw'}{2w}\right)^2 - \frac{w'^2}{4}\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{4}\right) + \frac{w''}{2} \ge 0$ pentru orice k, plus $d_+(k) = -k/\sqrt{w} + \sqrt{w}/2 \to -\infty$ cînd $k \to \infty$ (Gatheral & Jacquier (2014), Lema 2.2)
- **Calendar**: $\partial_\tau w(k,\tau) \ge 0$ pentru orice k: varianța totală nu poate scădea cu scadența
- Estimarea separată pe fiecare scadență nu impune niciuna dintre ele
- SSVI (*surface SVI*), versiunea SVI pentru întreaga suprafață, are condiții suficiente simple (Gatheral & Jacquier (2014), Teoremele 4.1–4.2)

Zîmbetul Bitcoin



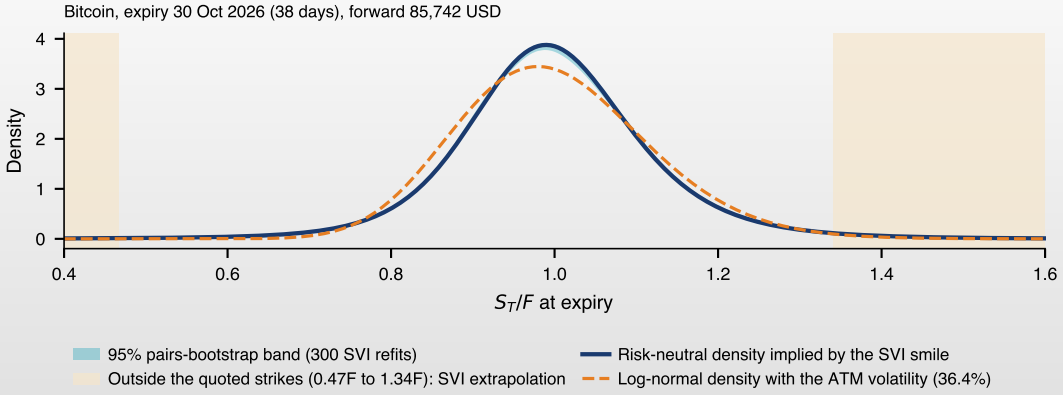
- Puncte: opțiunile OTM, la volatilitatea implicită de referință a bursei (*mark IV*); linii: estimările SVI, cinci scadențe
- Un **zîmbet** adevărat: ambele aripi cresc, spre deosebire de asimetria unilaterală a acțiunilor
  - Bitcoin poate avea salturi în sus și în jos Zulfiqar & Gulzar (2021)
- Scadențele scurte au aripile cele mai abrupte
  - un salt în cîteva zile are o pondere mai mare în raport cu $\sigma\sqrt{\tau}$
- Rădăcina erorii medii pătratice SVI: cel mult 0,70 puncte de volatilitate
- Put-urile sînt mai scumpe decît call-urile la același $|k|$: asimetria este negativă la toate cele 9 scadențe
- Tipul de dovadă: descriere (arată ce s-a întîmplat în date, fără un test al cauzei)

MFM_ch12_btc_smile ▶ Interactiv

Densitatea neutră la risc: de la prețuri la densitate

- Din Breeden & Litzenberger (1978) (Secțiunea 2): $q(K) = e^{r\tau}\,\partial^2 C(K)/\partial K^2$
  - condiția $q \geq 0$ este condiția butterfly de mai sus
- Din cotații discrete și zgomotoase, aceasta este o problemă inversă incorect pusă
  - derivarea de două ori amplifică zgomotul
  - Soluția: estimăm un zîmbet neted (SVI), apoi derivăm (alți estimatori: Anexa)
- Incertitudinea: bootstrap pe perechi de cotații, reestimare și derivare
  - de unde benzi de încredere punctuale pentru q
  - și intervale pentru probabilitățile din cozi
- Dincolo de ultimul preț de exercitare cotat, coada este o extrapolare
  - raportăm unde se termină cotațiile
- q amestecă probabilitățile cu aversiunea la risc Aït-Sahalia & Lo (1998), Grith, Härdle & Park (2013)
  - nucleul de evaluare (*pricing kernel*) $\propto q/p$
  - p: densitatea fizică
  - Forma lui nemonotonă este cunoscută drept „enigma nucleului de evaluare” (*pricing kernel puzzle*) Jackwerth (2000)

Distribuția neutră la risc a Bitcoin (1/2)



MFM_ch12_btc_rnd ▶ Interactiv

Distribuția neutră la risc a Bitcoin (2/2)

- Densitatea din zîmbetul SVI al scadenței celei mai apropiate de 30 de zile
  - 38 de zile, forward-ul 85 742 USD
  - volatilitatea ATM 36,4%
- Banda de încredere: bootstrap pe perechi, 95%; reperul: o densitate log-normală
  - zona hașurată: în afara intervalului cotat, $0{,}47F - 1{,}34F$ (56 de cotații)
- Probabilitățile: $F_Q(K) = 1 + e^{r\tau}\,\partial C/\partial K$, analitic din SVI (masa 1, media F)
  - reestimările bootstrap cu arbitraj butterfly ($g(k) < 0$) sînt respinse: 5 din 305
- Probabilitatea unei scăderi de peste 30%: 1,24% (interval $[1{,}16; 1{,}27]$)
  - față de 0,14% sub reperul log-normal
  - de aproximativ 9 ori mai mare
  - Din cei 1,24%, 0,16 puncte procentuale provin din zona de sub cel mai mic preț de exercitare cotat
- Scădere de peste 20%: 4,35%, față de 3,27% log-normal
  - creștere de peste 20%: 5,3% în ambele cazuri
- Banda de încredere este îngustă: $\pm 2{,}0\%$ în centru, $\pm 7\%$ la $0{,}7F$
  - volatilitățile de referință sînt deja netezite
  - deci ea reflectă zgomotul de estimare, nu incertitudinea cotațiilor
- Prețuri ale asigurării, nu prognoze: includ prima pentru riscul de crah
- Tipul de dovadă: descriere

MFM_ch12_btc_rnd

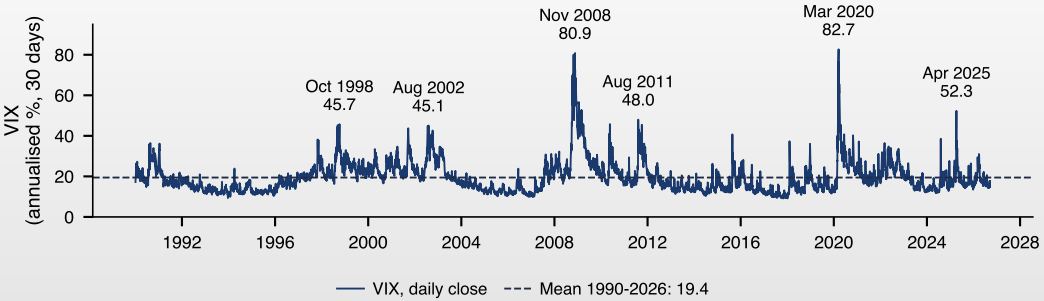
Swap-ul de variață: cît costă varianța viitoare?

- Un **swap de variață** plătește la T:
  - valoarea noțională $\times$ (varianța realizată $-$ prețul de exercitare K_{var})
  - Varianța realizată $\frac{252}{n}\sum r_t^2$, r_t: cele n randamente logaritmice zilnice pînă la T
  - Prețul de exercitare corect: varianța așteptată neutră la risc Demeterfi, Derman, Kamal & Zou (1999)
  - $K_{var} = \frac{2e^{r\tau}}{\tau}\left(\int_0^F \frac{P(K)}{K^2}\,dK + \int_F^\infty \frac{C(K)}{K^2}\,dK\right)$ (replicarea cu $f = -2\ln(S/F)$, Secțiunea 2)
- Justificarea: lema lui Itô pentru $\ln S$ (traiectorii continue, $r = \delta = 0$) Britten-Jones & Neuberger (2000)
  - $-2\ln(S_T/F) = \int_0^T \sigma_t^2\,dt - 2\int_0^T dS_t/S_t$
  - ultimul termen este un martingal sub Q
  - „Fără model" înseamnă fără un model pentru σ_t, nu fără continuitate: cu salturi de tip crah banda de opțiuni subestimează varianța realizată așteptată Carr & Wu (2009) (Anexa)
- Cumpărătorul de variață se asigură împotriva turbulențelor Carr & Wu (2009)
  - vînzătorul încasează o primă și plătește în crahuri

Indicele VIX: formula Cboe

- Versiunea discretă a benzii de opțiuni K_{var} de pe slide-ul anterior Cboe (2025):
  - $\sigma^2 = \frac{2}{T}\sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{RT} Q(K_i) - \frac{1}{T}\left(\frac{F}{K_0} - 1\right)^2$
  - T: timpul pînă la scadență, în ani
  - R: rata fără risc
  - K_i: prețurile de exercitare
  - K_0: primul preț de exercitare egal cu nivelul forward F al indicelui sau imediat sub el
  - $Q(K_i)$ (notația Cboe, nu măsura Q): media cotațiilor de cumpărare și de vînzare: a put-ului pentru $K_i < K_0$, a call-ului pentru $K_i > K_0$ și media celor două la K_0
  - Termenul al doilea corectează faptul că banda de opțiuni se desparte la K_0, nu exact la F

VIX, 1990–2026



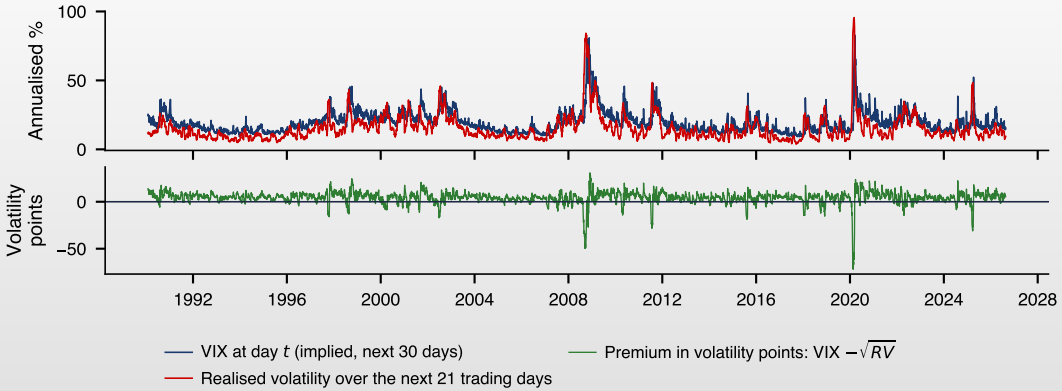
- Închiderea zilnică; sînt marcate cele mai înalte șase vîrfuri, aflate la cel puțin 500 de zile unul de altul
- Media este 19,4, adică aproximativ 5,6% pe lună, iar intervalul 9,1–82,7 (maximul pe 2020-03-16, COVID-19)
- VIX depășește 30 în 7,9% din zile
  - salturi bruște și scădere lentă, ca în modelele GARCH (Capitolul 5)

MFM_ch12_vix_history ▶ Interactiv

Prima de risc a variației

- Prima de risc a variației (VRP, *variance risk premium*): trei versiuni care nu trebuie confundate Carr & Wu (2009), Bollerslev, Tauchen & Zhou (2009)
  - **Economică (ex ante)**: $E_t^Q[RV_{t,t+\mathbf{21}}] - E_t^P[RV_{t,t+\mathbf{21}}]$, unde $VIX_t^{\mathbf{2}}$ estimează primul termen, iar al doilea necesită o prognoză
  - **Ex post** (folosită aici): $VIX_t^{\mathbf{2}} - RV_{t,t+\mathbf{21}}$, rezultatul realizat al vînzătorului unui swap de variață, cunoscut abia la $t+21$
  - **Aproximarea ex ante**: $VIX_t^{\mathbf{2}} - RV_{t-\mathbf{21},t}$, cu varianța trecută ca prognoză pentru E_t^P; cunoscută la t, poate servi ca predictor (Secțiunea 11)
- Varianța realizată (RV, *realised variance*): $RV_{t,t+\mathbf{21}} = \frac{\mathbf{252}}{\mathbf{21}} \sum_{i=\mathbf{1}}^{\mathbf{21}} r_{t+i}^{\mathbf{2}}$, anualizată, în $\%^{\mathbf{2}}$
  - r_{t+i}: randamentele logaritmice zilnice în %
  - aproximativ aceeași lună ca cele 30 de zile calendaristice ale VIX
- Pozitivă în medie dacă investitorii au aversiune față de stările cu volatilitate mare
  - acestea sînt și stări rele pentru avuție
- Ferestrele suprapuse de 21 de zile sînt autocorelate
  - Newey–West cu cel puțin 21 de lag-uri Newey & West (1987): acoperă suprapunerea, nu și persistența volatilității
  - eroarea standard a primei, în puncte de volatilitate: 0,27 cu 21 de lag-uri, 0,31 cu 42, 0,32 cu 63, 0,33 cu 126

Volatilitatea implicită față de cea realizată, S&P 500 (1/2)



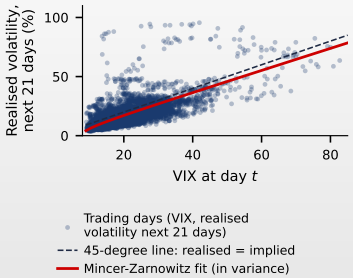
MFM_ch12_vrp ▶ Interactiv

Volatilitatea implicită față de cea realizată, S&P 500 (2/2)

- Sus: VIX și volatilitatea realizată în următoarele 21 de zile de tranzacționare
  - jos: diferența lor VIX − RV, 1990–2026
  - aici RV $= \sqrt{RV_{t,t+\mathbf{21}}}$, volatilitatea realizată, în puncte de volatilitate
- 9 203 zile: VIX are media 19,4, iar volatilitatea realizată 15,3
  - Prima: 4,09 puncte de volatilitate, cu eroarea standard (SE) Newey–West 0,27; în varianță, 113 %^{2}, cu $t = 5{,}5$
  - statistica t în varianță presupune moment de ordin patru finit, pus sub semnul întrebării în Capitolul 1
- Prima este pozitivă în 86% din zile, iar excepțiile sînt crahurile
  - Cea mai rea valoare: −72,0 puncte, pentru fereastra care începe la 2020-02-20 (COVID-19)
- Același mesaj ca opțiunea acoperită prin delta: vînzătorii de volatilitate sînt plătiți în medie și pierd în crize
- Tipul de dovadă: descriere
  - o primă ex post; prima economică cere o prognoză pentru E_t^P (slide-ul *Prima de risc a variației*)

MFM_ch12_vrp

Calitatea VIX ca prognoză



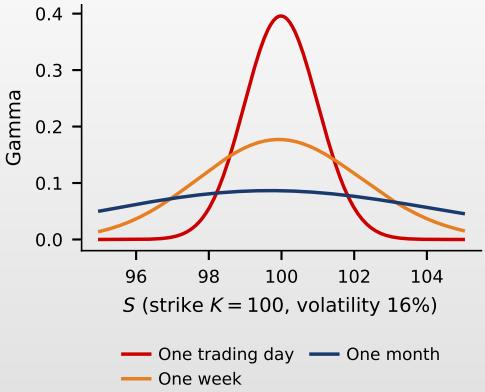
- Mincer–Zarnowitz Mincer & Zarnowitz (1969): $RV_{t,t+\mathbf{21}} = \alpha + \beta\, VIX_t^{\mathbf{2}} + \varepsilon_t$
  - Prognoză nedeplasată: $\alpha = 0$ și $\beta = 1$
  - Erori standard Newey–West (în paranteze, mai jos), cu 21 de lag-uri
  - inferența cere $E\|x_t\varepsilon_t\|^{\mathbf{2}} < \infty$ (x_t: regresorii) și dependență slabă: în varianță, momente de ordin opt (Capitolul 1)
- $\hat{\alpha} = -51{,}9$ (34,4), $\hat{\beta} = 0{,}860$ (0,105), $R^{\mathbf{2}} = 0{,}37$
  - Testați separat, nici $\hat{\alpha}$ nu diferă de 0, nici $\hat{\beta}$ de 1: $t = -1{,}51$, respectiv $t = -1{,}34$
- Dar estimările au corelația $-0{,}90$
  - testul Wald comun, $\chi^{\mathbf{2}}_{\mathbf{2}} = 41{,}7$, $p = 8{,}9 \cdot 10^{\mathbf{-10}}$, respinge prognoza nedeplasată
- Axele graficului sînt în volatilitate (%)
  - relația estimată în varianță este redesenată în volatilitate
  - majoritatea punctelor sînt sub dreapta de 45 de grade
- Varianța realizată trecută singură: $R^{\mathbf{2}} = 0{,}29$
  - Cu ambii regresori: VIX își păstrează ponderea (coeficient 0,77), iar varianța trecută adaugă puțin (coeficient 0,08, eroare standard 0,13)

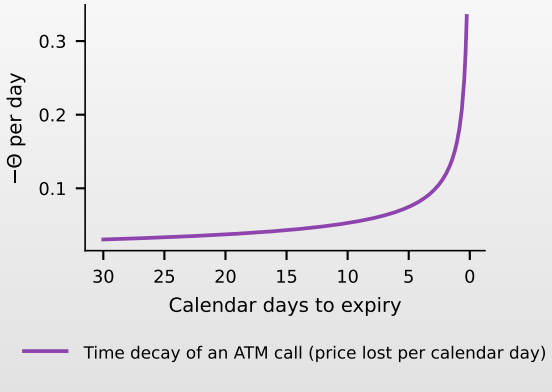
MFM_ch12_vix_rv_mz ▶ Interactiv

Opțiunile 0DTE: ce se schimbă cînd scadența este azi?

- Opțiunile **0DTE** (*zero days to expiry*) se tranzacționează în ziua în care expiră Cboe (2023)
  - opțiunile pe S&P 500 expiră acum în fiecare zi de tranzacționare
- Peste 75% din tranzacțiile investitorilor individuali în opțiunile pe S&P 500 sînt 0DTE Beckmeyer, Branger & Gayda (2023)
  - investitorii individuali pierd bani pe ele
- Opțiunile 0DTE reprezentau 48% din tranzacțiile cu opțiuni pe indici în august 2023 Brogaard, Han & Won (2023)
- Mai multe tranzacții 0DTE sînt urmate de o volatilitate mai mare a indicelui Brogaard, Han & Won (2023)
  - mai ales prin tranzacțiile speculative ale investitorilor individuali
- Evaluarea pe termen ultrascurt necesită corecții de asimetrie și kurtosis Bandi, Fusari & Renò (2023)
- Din Secțiunea 4: cînd $\tau \to 0$, gamma și theta cresc nelimitat pentru opțiunile la bani

Gamma și erodarea în timp aproape de scadență (1/2)





MFM_ch12_0dte_gamma ▶ Interactiv

Gamma și erodarea în timp aproape de scadență (2/2)

- Stînga: gamma unui call cu $K = 100$ cu o zi, o săptămînă și o lună înainte de scadență
  - dreapta: erodarea zilnică a unui call ATM
- $S = K = 100$, $\sigma = 16\%$, $r = 0$
  - gamma folosește zile de tranzacționare ($\tau = 1/252$ și $21/252$)
  - erodarea folosește zile calendaristice ($\tau = 1/365$ și $30/365$), ca pe cele două axe
- Gamma ATM este 0,396 cu o zi înainte de scadență și 0,086 cu o lună înainte
  - de 4,6 ori mai mare ($= \sqrt{21}$)
  - O mișcare de 1% în ultima zi schimbă delta cu aproximativ 0,4
- Erodarea zilnică: 0,167 în ultima zi, față de 0,030 cu 30 de zile rămase
  - de aproximativ 5,5 ori mai mare
  - Valoarea ATM cu o zi rămasă, aproximativ $0{,}4\, S\sigma\sqrt{\tau} = 0{,}33$, se pierde integral în acea zi: de două ori rata de erodare de la începutul zilei (0,167)
- Vînzătorul cîștigă din erodarea rapidă, dar își asumă un risc gamma mare

MFM_ch12_0dte_gamma

Studiu de caz: întrebarea de cercetare (1/2)

- **Întrebările** Back, Crotty & Kazempour (2022): prețurile opțiunilor oferă limite inferioare pentru prima de risc a acțiunilor
  - Sînt aceste limite valide condiționat?
  - Coincid ele cu prima condiționată?
  - Ajută ele la prognoza randamentelor în afara eșantionului (*out-of-sample*)?
- Motivație: dacă limita coincide cu prima condiționată, ea oferă o prognoză în timp real
  - fără estimarea unor parametri
  - Martin (2017): în regresia randamentului realizat pe limită, $\alpha = 0$, $\beta = 1$ nu este respinsă pe 1996–2012, însă testul are putere mică

Studiu de caz: întrebarea de cercetare (2/2)

- **Limita Martin** (ec. 3)
  - $R_{t,T}$: randamentul brut al pieței; $R_{f,t,T}$: randamentul brut fără risc
  - var^*_t: varianța neutră la risc ($\mathrm{SVIX}^{\mathbf{2}}_{t,T}$ neanualizat aici)
  - $E_t[R_{t,T}] - R_{f,t,T} \geq R_{f,t,T}\,\mathrm{SVIX}^{\mathbf{2}}_{t,T}, \qquad \mathrm{SVIX}^{\mathbf{2}}_{t,T} = \mathrm{var}^*_t(R_{t,T}/R_{f,t,T})$
  - Validă dacă $\mathrm{cov}_t(M_{t,T}R_{t,T}, R_{t,T}) \leq 0$ ($M_{t,T}$: factorul stocastic de actualizare)
  - Strînsă dacă această covarianță este zero, de exemplu pentru un investitor cu utilitate logaritmică ce deține piața
- **Limita Chabi-Yo–Loudis** Chabi-Yo & Loudis (2020): construită din primele patru momente neutre la risc
  - fără parametri de preferință în forma restricționată
- **Legătura cu acest capitol**: SVIX este banda de replicare statică cu $f = S^{\mathbf{2}}$
  - Secțiunea 2 și Anexa
  - Marja realizată $s_{t,T} = R^e_{t,T} - b_{t,T}$ (randamentul în exces minus limita): validă înseamnă $E_t[s_{t,T}] \geq 0$, strînsă înseamnă $E_t[s_{t,T}] = 0$

Studiu de caz: date, momente și prognoză

- **Datele** (Secțiunea 3 și Anexa C a lucrării; filtrele: Anexa)
  - Limitele zilnice Martin și Chabi-Yo–Loudis, ianuarie 1990 – decembrie 2020, din opțiunile pe indicele S&P 500, interpolate la 30, 90, 180 și 360 de zile
  - Randamentele în exces ale S&P 500 pe 21, 63, 126 și 252 de zile de tranzacționare, anualizate, în %
  - compuse ca $\prod(1 + r - r_f) - 1$, convenția codului autorilor; diferă de $\prod(1 + r) - \prod(1 + r_f)$
- **Momentele** (ec. 10): $E[(R^e_{t,T} - b_{t,T})\, z_t] \geq 0$ pentru orice $z_t \geq 0$ cunoscut la t
  - z_t: o constantă și nouă predictori Welch–Goyal Welch & Goyal (2008) (Tabelul 3)
  - predictorii sînt transformați pentru a avea valori pozitive
- **Prognoza**: regresii predictive corectate pentru deplasare Amihud & Hurvich (2004) (Tabelele 5, 6)
  - Corecția Amihud–Hurvich: persistența predictorului deplasează panta OLS (deplasarea Stambaugh), deci se adaugă ca regresor inovația predictorului, estimată dintr-un AR(1) corectat pentru deplasare
- Prognoze lunare în afara eșantionului comparate cu media istorică prin R^2_{OS}
  - coeficientul R^2 în afara eșantionului față de această medie (Tabelul 8)
  - protocolul: Anexa

Studiu de caz: testele Kodde–Palm

- Kodde & Palm (1986) (ec. 11–14): $\bar{\lambda}$ este vectorul celor 10 medii empirice
  - Σ: covarianța lor Hansen–Hodrick Hansen & Hodrick (1980)
  - numărul de lag-uri este egal cu numărul de zile din orizont
  - Covarianța Hansen–Hodrick păstrează, cu ponderi egale, exact autocovariațele create de suprapunerea ferestrelor de randament
- $D_1 = \min_{\lambda \geq 0}(\lambda - \bar{\lambda})^\top \Sigma^{-1}(\lambda - \bar{\lambda})$ testează validitatea
  - H_0: $\lambda_0 \geq 0$
  - distanța pînă la regiunea în care toate momentele sînt ≥ 0
  - nulă dacă toate sînt deja pozitive
- $D_2 = \bar{\lambda}^\top \Sigma^{-1} \bar{\lambda} - D_1$ testează dacă limita este strînsă
  - H_0: $\lambda_0 = 0$ față de $\lambda_0 \geq 0$
  - un D_2 mare respinge ipoteza unei limite strînse
  - Exemplu cu două momente și $\Sigma = I$: $\bar{\lambda} = (0{,}5; -0{,}2)$ dă $D_1 = 0{,}2^2 = 0{,}04$ și $D_2 = 0{,}29 - 0{,}04 = 0{,}25$; cu $\bar{\lambda} = (0{,}5; 0{,}2)$, $D_1 = 0$ și $D_2 = 0{,}29$
- Sub H_0 unele restricții de inegalitate sînt active, altele nu
  - ambele statistici urmează amestecuri ponderate ale $\chi^2_0, \ldots, \chi^2_{10}$
  - limitele valorilor critice sînt tabelate de Kodde & Palm (1986)

Studiu de caz: rezultate, validitate și strîngere (Tabelele 1 și 3)

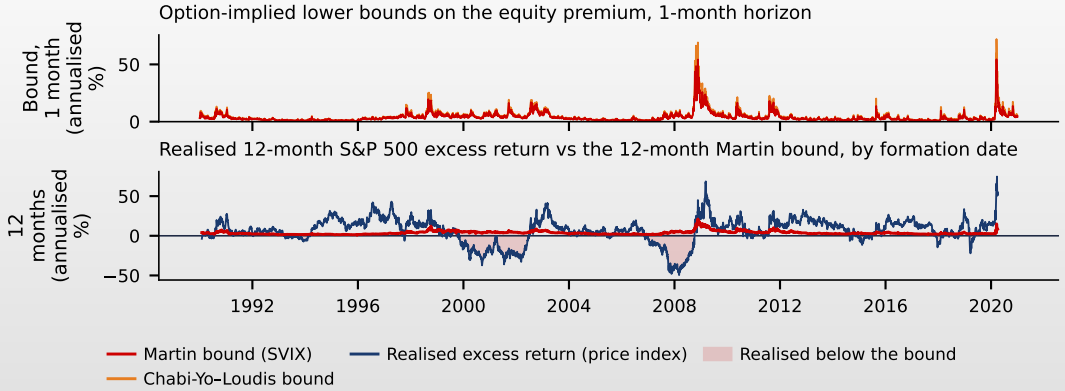
Orizont	Media R^e (%)	Media b (%)	D_1	D_2	$\hat{\beta}$ (SE)	R^2_{OS} (%)
1 lună	8,76	3,81	0,00	29,93	1,36 (1,23)	−1,2
3 luni	8,73	3,86	0,00	39,51	1,39 (1,47)	−1,2
6 luni	8,67	3,83	0,00	49,28	1,78 (0,85)	−0,2
12 luni	8,86	3,68	0,00	71,21	1,04 (0,88)	−3,0

- Sursa: Back, Crotty & Kazempour (2022), *Journal of Financial Economics*, Tabelele 1, 3, 5, 6 și 8
- **Validitatea nu este respinsă**: toate cele 10 momente empirice sînt pozitive
  - deci $D_1 = 0$ și $p = 100\%$ la toate orizonturile
  - Aceasta nu dovedește că limita este validă în fiecare stare
- **Limita nu este strînsă**: la toate orizonturile, D_2 depășește 28,86
  - valoarea critică superioară Kodde–Palm la 0,1% pentru 10 restricții
  - Valorile p (*p-values*) de eșantion finit pe cele patru orizonturi sînt însă 3,6%; 0,4%; 2,6% și 8,3%
  - Marja medie este de 4,8–5,2 puncte procentuale pe an: limita este mai mică decît jumătate din prima realizată
- Tipul de dovadă: descriere
  - marja medie din 1990–2020, nu puterea de prognoză: în afara eșantionului limita pierde în fața mediei istorice (Aprofundări)

Studiu de caz: concordă cele două teste ale limitei strînse?

- Același D_2, două repere
  - valoarea critică asimptotică respinge ipoteza unei limite strînse la toate orizonturile
  - valorile p de eșantion finit o resping la 5% la 1, 3 și 6 luni, dar nu la 12 luni
- Cu corecția Holm pentru patru orizonturi, testul de eșantion finit respinge doar la 3 luni
  - Holm compară cea mai mică valoare p cu 5%/4, următoarea cu 5%/3 (Secțiunea 11)
  - 0,4% $<$ 1,25%, apoi 2,6% $>$ 1,67%: testul se oprește
- Testul asimptotic respinge la toate orizonturile și după corecția Holm
- De ce pot diferi: Σ este imprecisă și valorile critice asimptotice pot fi prea mici
  - 1990–2020 conține doar aproximativ 31 de ferestre de 12 luni fără suprapunere
  - momentele folosesc predictori persistenți
- Valoarea p de eșantion finit este lectura mai prudentă
  - le raportăm pe amîndouă, niciodată doar pe cea care respinge
  - Seminarul 12, C3
- Marja medie de 4,8–5,2 puncte pe an nu depinde de test
  - economic, limita acoperă mai puțin de jumătate din prima realizată la toate orizonturile

Studiu de caz: limita și prima realizată (1/2)



MFM_ch12_bck_bounds ▶ Interactiv

Studiu de caz: limita și prima realizată (2/2)

- Sus: limitele zilnice pe 1 lună publicate de autori, 1990–2020
  - pachetul de replicare
  - jos, datele cursului: randamentul în exces pe 12 luni al indicelui de preț S&P 500 față de limita Martin pe 12 luni
- Limita pe 1 lună are mediana 2,7% și maximul 54,4% (16 martie 2020)
  - limita pe 12 luni are maximul 21,1% (20 noiembrie 2008)
  - Fiind o variantă neutră la risc, limita crește brusc odată cu VIX în crize
- Chabi-Yo–Loudis $\geq$ Martin în 99,99% din zile
  - asimetria negativă și cozile groase o ridică
- Randamentul în exces realizat pe 12 luni este sub limită în 33% din date (2000–2002 și 2007–2008)
  - Nu este o contradicție: limita restricționează media condiționată $E_t[R^e_{t,T}]$, nu fiecare realizare
- Corelația dintre limită și randamentul realizat, 0,15, este doar descriptivă
  - ferestrele sînt suprapuse
  - zgomotul randamentelor domină limita, de unde pantele imprecise și R^2_{OS} negativ

MFM_ch12_bck_bounds

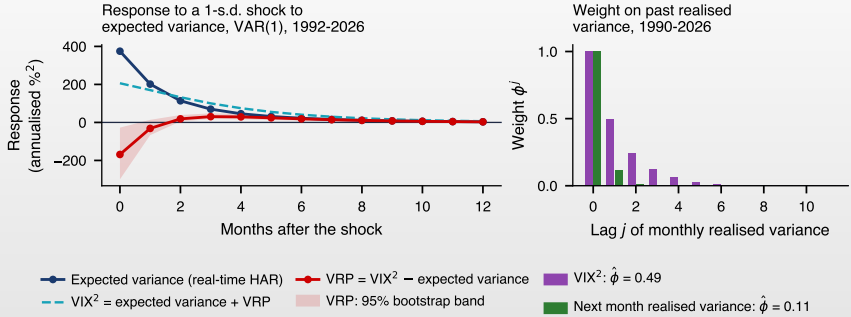
Studiu de caz: replicare și limitări

- **Replicare** (Seminarul 12, C3)
  - seria zilnică a limitelor publicată de autori (pachetul de replicare)
  - închiderile zilnice S&P 500 din datele cursului
  - Rata zilnică fără risc (Kenneth French Data Library) și predictorii Welch–Goyal (pagina de date a lui Amit Goyal)
  - Refaceți Tabelul 1 și statisticile D_1, D_2 din Tabelul 3
- **Limitări menționate de autori**
  - Seria începe abia în 1990, deoarece limitele cer prețuri ale opțiunilor: eșantionul scurt lasă testelor în afara eșantionului o putere mică (lucrarea, Secțiunea 6)
  - Validitatea se menține chiar dacă limita este înlocuită cu media ei în timp, deci nu spune nimic despre puterea predictivă (lucrarea, Secțiunea 4.3)
  - Limitele și formulele mai recente pentru primele de risc nu sînt testate (lucrarea, Introducerea)

Reacționează VIX prea încet la volatilitate?

- Lochstoer & Muir (2022): investitorii își actualizează prea lent așteptările despre volatilitatea pieței
  - după un șoc de volatilitate, întîi o reacție insuficientă (*underreaction*), apoi o reacție excesivă întîrziată (*overreaction*)
- De ce contează: VIX^2 este prețul neutru la risc al variației pe 30 de zile
  - dacă VIX urcă mai puțin decît variația așteptată, VRP (prima de risc a variației) scade exact cînd riscul crește
  - $\text{VRP} = \text{VIX}^2$ minus variația așteptată obiectiv $\hat{\sigma}_t^2$
- Așteptarea pieței ca medie ponderată a trecutului (ecuația 4 din lucrare): $\text{VIX}_t^2 = a + b \sum_{j=0}^{11} \phi^j \, rv_{t-j} + \varepsilon_t$
  - rv_t: variația realizată a lunii t, suma pătratelor randamentelor log zilnice ale S&P 500, anualizată
  - $\phi = 0$: contează doar luna curentă; un ϕ mai mare înseamnă așteptări care se mișcă mai încet
- Cifrele lucrării (Journal of Finance, Secțiunea I): $\phi = 0{,}42$ (eroarea standard 0,12) pentru VIX^2, ianuarie 1990 – aprilie 2020
  - după un șoc al variației așteptate, răspunsul VRP este negativ inițial și își schimbă semnul după a treia lună (Figura 2)
- Consecința propusă de autori: o relație slabă între risc și randament (*risk–return tradeoff*), pentru că prima crește abia după ce volatilitatea a început să scadă

Răspunsul VIX la un șoc al variației așteptate



- **Stînga: răspunsul lunar, în %² anualizate, la un șoc de o abatere standard al lui $\hat{\sigma}^2$, într-un model vector autoregresiv (VAR), 1992–2026**
- **Dreapta: ponderile $\hat{\phi}^j$ ale variației din luna $t-j$, pentru VIX² și pentru varianța realizată a lunii următoare**

MFM_ch12_vol_expectations ▶ Interactiv

Lucrarea și replicarea din curs

- Lucrarea: ϕ estimat din ecuația 4 pentru VIX^2 și, ca reper rațional, pentru varianța realizată ulterior
  - $\hat{\sigma}_t^2$: prognoza în timp real a variației lunii următoare, un model autoregresiv heterogen (HAR, *heterogeneous autoregressive*) pe randamente de 5 minute
  - Tabelul III: regresii pe $\hat{\sigma}_t^2$ și pe media ponderată a ultimelor 6 valori ale lui $\hat{\sigma}^2$, cu ponderi proporționale cu $0{,}5^j$
  - un VAR(1) lunar cu $\hat{\sigma}^2$ ordonat primul (Cholesky) dă răspunsurile la șoc
- Replicarea din curs: S&P 500 și VIX zilnice, ianuarie 1990 – aug. 2026 (440 de luni)
  - $\hat{\sigma}_t^2$: HAR pe randamentele zilnice (ultima zi, ultimele 5 și ultimele 21 de zile), reestimat lunar doar pe datele disponibile
  - primele 24 de luni servesc la inițializare (*burn-in*), deci $\hat{\sigma}^2$ începe în ianuarie 1992
  - VAR-ul are trei variabile: $\hat{\sigma}^2$, VRP și randamentul în exces al indicelui de preț (rata fără risc: Kenneth French)
  - lucrarea adaugă raportul log preț–dividend, absent din datele cursului
- Inferența
  - erorile standard ale lui $\hat{\phi}$: bootstrap pe blocuri mobile (*moving block bootstrap*) de 18 luni, ca cele 6 trimestre din lucrare
  - Tabelul III: erori standard Newey–West cu 12 lag-uri; benzile de încredere VAR: bootstrap pe reziduuri
  - erorile standard HAC (robuste la heteroscedasticitate și autocorelație, *Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent*), precum Newey–West, cer $E\|x_t u_t\|^2 < \infty$ (x_t: regresorii, u_t: erorile) și dependență slabă; în unități de varianță, momente de ordin opt ale randamentelor, puse sub semnul întrebării în Capitolul 1

VIX prezintă o dependență mai persistentă de varianța trecută

- Replicarea: $\hat{\phi}$ pentru VIX²: 0,54 (e.s. 0,08) pe eșantionul lucrării (lucrarea: 0,42), 0,49 (0,08) pînă în 2026
  - pentru varianța realizată a lunii următoare: 0,26 (0,30) și 0,11 (0,20), nesemnificativ diferite de zero
- Tabelul III, 334 de luni, 1992–2020: varianța lunii următoare depinde de $\hat{\sigma}_t^2$ (0,82, e.s. 0,12); coeficientul mediei trecute nu este semnificativ (0,04, e.s. 0,10)
  - în lucrare (panoul A, coloana 6): 1,53 (0,54) și −0,58 (0,46)
- VIX² depinde de amîndouă: 0,56 (0,09) și 0,41 (0,04), $R^2 = 0{,}79$
  - în lucrare (panoul A, coloana 7): 0,30 (0,12) și 0,64 (0,07), $R^2 = 0{,}79$
- VAR: un șoc de 375 %² al lui $\hat{\sigma}^2$ ridică VIX² doar cu 206 %² (55% din șoc)
  - răspunsul VRP: −169 %² la impact (banda de încredere punctuală de 95%: $[-300; -27]$), pozitiv din luna 2, +30 în luna 3
- Tipul de dovadă: descriere compatibilă cu așteptări lente, pe date zilnice în locul celor de 5 minute
  - nu identifică mecanismul: o primă a riscului de varianță care variază rațional ar putea da aceleași semne
- Limitele
  - HAR-ul pe date zilnice prognozează mai slab: $R^2 = 0{,}32$ pentru varianța lunii următoare, față de 0,47 în lucrare
  - o parte din ponderea VIX pe trecut poate fi informație pe care HAR-ul nostru nu o are
  - lunile cu varianță foarte mare (2008, 2020) domină regresiile în nivel; ordonarea Cholesky schimbă semnul inițial (slide-ul următor)

Inferența studiului de caz: ce acoperă benzile

- Diferența $\hat{\phi}_{\mathrm{VIX}} - \hat{\phi}_{RV}$: bootstrap pe aceleași blocuri de 18 luni pentru ambele regresii
  - eșantionul lucrării: 0,29, intervalul de 95% $[-0{,}05; 0{,}91]$, deci diferența nu este semnificativă la 5%
  - pînă în 2026: 0,38, intervalul de 95% $[0{,}08; 0{,}80]$, semnificativă la 5%
- Benzile de încredere VAR sînt condiționate pe seria $\hat{\sigma}^2$ estimată
  - bootstrap-ul reeșantionează reziduurile VAR, fără să reestimeze HAR-ul din prima etapă
  - benzile sînt punctuale, pe fiecare orizont, nu simultane pe toate orizonturile
  - nici erorile Newey–West din Tabelul III nu includ incertitudinea lui $\hat{\sigma}^2$
- Diagnosticul VAR(1)
  - stabil: cea mai mare valoare proprie are modulul 0,73
  - reziduurile randamentului au heteroscedasticitate condiționată (testul Engle cu 12 lag-uri, $p < 0{,}001$)
  - reeșantionarea independentă a reziduurilor este deci doar o aproximare
- Ordonarea Cholesky contează
  - cu $\hat{\sigma}^2$ ordonat ultimul, răspunsul VRP este 0 la impact, prin construcție, și $+33$ %^{2} în luna 1
  - semnul negativ inițial depinde de ipoteza că $\hat{\sigma}^2$ nu răspunde în aceeași lună la șocurile VRP

Întrebarea secțiunii și instrumentele pentru a o testa

- Întrebarea secțiunii: mai prognozează VRP (Secțiunea 8) randamentele acțiunilor după 2007?
- **Hodrick 1B** Hodrick (1992): păstrăm regresia randamentului suprapus pe h luni pe VRP_t
  - se schimbă doar estimatorul covarianței coeficientului
- Scorul folosit: reziduul pe o lună, sub H_0, înmulțit cu suma ultimelor h valori ale regresorului
  - astfel covarianța nu mai cere autocovariațele erorilor suprapuse
- $R^2_{OS} > 0$: modelul predictiv prognozează mai bine decît media istorică
  - adică are o eroare pătratică medie de prognoză mai mică
- **Clark–West** Clark & West (2007) testează aceasta pentru modele incluse unul în altul
  - corectează zgomotul adăugat modelului mai mare de estimarea unei pante care este de fapt zero
- **Corecția Holm** pentru m teste (de exemplu patru orizonturi)
  - ordonăm valorile p, comparăm cea mai mică cu α/m
  - următoarea cu $\alpha/(m-1)$ și așa mai departe
  - ne oprim la prima care nu trece
  - Exemplu: $p = 0{,}01;\ 0{,}03;\ 0{,}04$, $\alpha = 0{,}05$, $m = 3$: $0{,}01 < 0{,}0167$ respinge, $0{,}03 > 0{,}025$ oprește, deci doar o ipoteză este respinsă, deși toate trei au $p < 0{,}05$

O întrebare deschisă: mai prognozează VRP randamentele? (1/2)

- Bollerslev, Tauchen & Zhou (2009), Tabelul 2: pe date lunare 1990–2007
  - regresia randamentului în exces anualizat pe h luni, $y_t^{(h)} = \frac{\mathbf{12}}{h} \sum_{j=\mathbf{1}}^{h} (r_{m,t+j} - r_{f,t+j})$
  - pe $\mathrm{VRP}_t = \mathrm{VIX}_t^{\mathbf{2}}/12 - \mathrm{RV}_t$
  - RV_t: varianța realizată în luna t; ambii termeni sînt în $\%^{\mathbf{2}}$ lunar, neanualizat (de 12 ori sub unitățile din Secțiunea 8)
  - La $h = 3$ luni: panta 0,47, statistica t Hodrick $= 2{,}86$, $R^{\mathbf{2}}$ ajustat $= 6{,}82\%$
  - Valoarea de la 3 luni este maximul unui profil care crește, apoi scade odată cu orizontul
  - statistica t Hodrick pe un regresor de tip varianță presupune moment de ordin patru finit, pus sub semnul întrebării în Capitolul 1
- Goyal, Welch & Zafirov (2024): 29 de predictori ai primei de risc a acțiunilor, propuși după 2008
  - reexaminați cu date pînă în 2021
  - Peste o treime își pierd semnificația în eșantion
  - Jumătate din rest nu mai funcționează în afara eșantionului

O întrebare deschisă: mai prognozează VRP randamentele? (2/2)

- Întrebarea deschisă: ce este predictibilitatea prin VRP?
  - un preț stabil al riscului de variață și de salt?
  - sau o proprietate a perioadei 1990–2007?
  - Eșantionul 2008–2026 adaugă două crahuri și era 0DTE
- Formal: $H_0 : \beta_3 = 0$ față de $H_1 : \beta_3 > 0$ în $y_t^{(3)} = \alpha + \beta_3 \mathrm{VRP}_t + u_t$
  - În afara eșantionului: H_0: prognoza cu VRP nu reduce eroarea pătratică medie de predicție a mediei istorice
  - Statistica de test: Clark–West Clark & West (2007)

Bucla descoperirii și verificările cercetătorului (1/2)

- **Literatura**: cereți unui asistent testele publicate ale predictibilității prin VRP din 2009
  - DOI (digital object identifier), eșantion, tabel
  - Verificare: rezolvați fiecare DOI în Crossref și comparați tabelul citat cu lucrarea, cifră cu cifră
- **Ipoteze**: aversiune la risc variabilă în timp sau compensarea riscului de salt
  - sau un artefact de eșantion mic al regresorilor persistenți și al randamentelor suprapuse
  - Verificare: fiecare trebuie să implice ceva testabil pentru profilul pe orizonturi, pentru 2008–2026 și pentru piețele din afara Statelor Unite (SUA)

Bucla descoperirii și verificările cercetătorului (2/2)

- **Date și cod**: construiți $\text{VIX}^2/12$ și RV lunară
  - din închiderile zilnice VIX și S&P 500 din datele de piață ale cursului
  - reproduceți Tabelul 2 ($h = 3$) înainte de orice extindere
  - Verificare: alinierea în timp (VIX la sfîrșitul lunii t, randamente din $t + 1$) și concordanța cu mediile publicate (implicită 33,23, realizată 14,93)
- **Robustețe și critică**: un plan de analiză datat
  - orizonturi, dată de început, reper, corecția Holm
  - plus un prompt de tip recenzent ostil
  - Verificare: suprapunerea (erori Hodrick Hodrick (1992)), căutarea orizontului și a datei de început (R^2_{OS} în funcție de data de început), ponderea anilor 2008 și 2020
  - Prompturile complete: Anexa

Mini studiu de caz: replicare și extindere (1/2)

- O propunere tipică a unui asistent, testată pe datele cursului
  - „VRP prognozează prima de risc trimestrială a acțiunilor; extinde rezultatul din 2009 pînă azi"
- Replicarea (februarie 1990 – septembrie 2007, $h = 3$, din date zilnice)
  - $\hat{\beta}_{\mathbf{3}} = 0{,}42$, $t_{\mathrm{Hodrick}} = 2{,}25$, $R^{\mathbf{2}}$ ajustat $= 4{,}6\%$
  - Valorile publicate: $\hat{\beta}_{\mathbf{3}} = 0{,}47$, $t_{\mathrm{Hodrick}} = 2{,}86$, $R^{\mathbf{2}}$ ajustat $= 6{,}82\%$
  - Media variației implicite, 33,1, este apropiată de valoarea publicată, 33,23
  - Media variației realizate este 20,6, față de 14,93 publicat: folosim date zilnice de la închidere la închidere

Mini studiu de caz: replicare și extindere (2/2)

- Extinderea până în mai 2026 (436 de luni)
  - $\hat{\beta}_{\mathbf{3}} = 0{,}09$, $t_{\text{Hodrick}} = 1{,}33$, $R^{\mathbf{2}}$ ajustat $= 1{,}0\%$
  - Toate orizonturile, cu patru tipuri de erori standard: Anexa
- În afara eșantionului din ianuarie 2008: 221 de prognoze cu fereastră extinsă
  - $R^{\mathbf{2}}_{OS} = 1 - \sum_t (y_t - \hat{y}_t)^{\mathbf{2}} / \sum_t (y_t - \bar{y}_t)^{\mathbf{2}} = -22{,}2\%$ Campbell & Thompson (2008); $\bar{y}_t$: media istorică până la t
  - Clark–West $t = 0{,}64$ ($p = 0{,}26$): $H_{\mathbf{0}}$ nu este respinsă
  - testul Clark–West pe erorile la pătrat presupune moment de ordin patru finit, pus sub semnul întrebării în Capitolul 1
- Interpretare: semnul și mărimea coeficientului se replică în eșantion
  - dar eșantionul mai lung nu susține o predictibilitate stabilă
  - Rămîne deschis dacă explicația o constituie valorile extreme, erorile de măsurare sau dispariția primei
- Tipul de dovadă: comparație între proceduri (arată care metodă funcționează mai bine pe aceleași date, nu de ce)
  - prognoza cu VRP față de media istorică

MFM_ch12_ai_discovery

Aplicație: un proiect despre VRP după 2008 (1/2)

- Întrebări
  - Prognozează VRP prima de risc a acțiunilor după 2008?
  - Prognozează prima de risc a variației Bitcoin (DVOL, Aprofundări) randamentele Bitcoin?
- Replicați întîi: Bollerslev, Tauchen & Zhou (2009), Tabelul 2, $h = 3$
  - cifrele publicate din întrebarea deschisă
  - explicați orice diferență

Aplicație: un proiect despre VRP după 2008 (2/2)

- Livrabile
  - Un plan de analiză datat
  - Tabelul de replicare
  - Rezultatele în afara eșantionului pentru toate orizonturile, cu corecția Holm
  - Robustețea (subeșantioane, fără 2008 și 2020; opțional, varianța realizată din randamente la 5 minute, dacă aveți date intrazilnice)
  - O critică de tip recenzent și răspunsul dumneavoastră
- Notați în `AI_USE.md` fiecare prompt care a influențat o decizie
- Notați în `AI_ERRORS.md` fiecare eroare a asistentului
  - referință inventată, cifră greșită sau utilizare nepermisă a informațiilor viitoare
  - împreună cu testul care a detectat-o (șabloane)

Ce măsoară prețurile opțiunilor și limitele lor

- Paritatea, limitele și replicarea statică nu necesită un model
  - arborele și ecuația Black–Scholes evaluează prin replicare dinamică
- Hedging-ul discret lasă o eroare de ordinul $1/\sqrt{N}$
  - o opțiune acoperită prin delta este un pariu pe varianța realizată față de cea implicită
- Varianța implicită a depășit în medie varianța realizată, pe S&P 500 și, în Aprofundări, pe Bitcoin
- Suprafața și densitatea neutră la risc sînt estimări
  - verificăm constrîngerile de absență a arbitrajului, respingem estimările care le încalcă și raportăm benzi de încredere
- VIX este un estimator de tip bandă de opțiuni, cu deplasări din salturi și din trunchiere
  - ca prognoză necesită teste comune; logaritmii și comparațiile de pierderi cu erori HAC: în Aprofundări
- Validitatea limitelor primei de risc din opțiuni nu este respinsă pentru momentele și eșantionul testate; limitele nu sînt strînse în 1990–2020
  - dovezile se sprijină pe marja medie, nu pe puterea de prognoză
- „Nu strînse" este robust la testul asimptotic
  - dar mai puțin sigur la testele de eșantion finit după corecția pentru testarea multiplă

Verificarea înțelegerii (1/2)

- Ce restricții asupra prețurilor rezultă doar din absența arbitrajului?
- Care dintre restricțiile folosite în capitol depind de ipotezele Black–Scholes?
- De ce poate pierde bani o opțiune acoperită prin delta, chiar dacă modelul este corect?
- Ce rol are diferența dintre varianța realizată și cea implicită în rezultatul hedging-ului?
- Un zîmbet estimat exclude automat arbitrajul?

Verificarea înțelegerii (2/2)

- Cum verificați restricția butterfly pentru o estimare SVI?
- Prognozează densitatea neutră la risc frecvențele reale ale randamentelor?
- De ce este greșită eroarea standard $s/\sqrt{n}$ pentru media pe ferestre suprapuse de 21 de zile?
- Ce eroare standard o înlocuiește?
- Cum pot coexista două statistici t mici cu o statistică Wald comună mare?

Întrebări deschise în cercetarea opțiunilor (1/2)

- **Frontiera**
  - Andersen, Fusari & Todorov (2015): un factor al cozii stîngi din suprafețele opțiunilor pe indici, neexplicat de volatilitate, prognozează primele viitoare ale acțiunilor și ale variantei
  - Bali et al. (2023): învățarea automată neliniară pe caracteristici ale opțiunilor și acțiunilor prognozează randamentele opțiunilor pe acțiuni în afara eșantionului
  - Întrebare deschisă: suprafețe estimate în ansamblu, fără arbitraj, cu benzi de încredere valide
  - Altă întrebare deschisă: evaluarea opțiunilor 0DTE
- **Urmează**: Capitolul 13, învățarea automată pentru predicții financiare
  - variabilele de volatilitate și din opțiuni sînt printre intrări

Întrebări deschise în cercetarea opțiunilor (2/2)

- **Lecturi suplimentare**
  - Manuale: Franke, Härdle & Hafner (2019), Härdle, Chen & Overbeck (2017), Čížek, Härdle & Weron (2011), Gatheral (2006)
  - Nuclee de evaluare: Aït-Sahalia & Lo (1998), Grith, Härdle & Park (2013)
  - Opțiuni cripto: Matic, Packham & Härdle (2023), Alexander & Imeraj (2020), Pele et al. (2023)
  - Quantinar: XFG (*Quantlet prefix of Applied Quantitative Finance*, prefixul Quantlet-urilor din Applied Quantitative Finance, Härdle, Chen & Overbeck) Advanced Methods in Quantitative Finance, Pricing Kernels and Risk Premia, Hedging Cryptocurrency Options
  - Quantlets: github.com/danpele/MFM/tree/main/Quantlets/Ch_12
- Exemplele detaliate și subiectele avansate sînt în Aprofundări, după Concluzii
  - butonul din subsol duce la ele, iar butonul Înapoi revine la slide-ul de plecare

Decizia practică

- **Ce aleg**
  - pentru acoperire: acoperirea prin delta cu frecvența fixată de eroare și de modelul costurilor; abaterea standard a erorii scade ca $1/\sqrt{N}$ (săptămînal 21,5%, zilnic 9,5% din primă)
  - pentru zîmbet: o estimare SVI pe scadență, acceptată doar după verificările butterfly și calendar; densitatea cu benzi de încredere bootstrap și cu intervalul cotat marcat
  - pentru varianța lunii următoare: VIX^2, citit cu testul Mincer–Zarnowitz comun ($\hat{\beta} = 0{,}86$, nedeplasarea respinsă: $\chi^2_2 = 41{,}7$)
  - nu folosesc VRP ca predictor al randamentelor după 2008: $R^2_{OS} = -22{,}2\%$, Clark–West $p = 0{,}26$
- **În ce condiții**
  - densitatea și VRP sînt neutre la risc: prețuri ale asigurării, nu prognoze ale frecvențelor
  - ferestre de 21 de zile suprapuse: Newey–West cu 21 de lag-uri și sensibilitate la 42, 63 și 126 (eroarea standard a primei: 0,27 – 0,33 puncte)
  - media primei: moment de ordin patru finit al randamentelor; coeficienții și diferențele de pierderi: momentul doi finit al scorului, respectiv al diferenței, și dependență slabă (Capitolul 1)
- **Ce rezultat m-ar face să renunț**
  - la o estimare SVI: $g(k) < 0$ sau o varianță totală care scade cu scadența; atunci trec la SSVI
  - la VIX ca prognoză: varianța trecută care preia ponderea VIX în regresia comună (aici 0,08, eroare standard 0,13, față de 0,77)

Datele: indici de volatilitate și cotațiile opțiunilor Bitcoin

Seria	Conținut	Perioada	Proprietar
S&P 500	indice bursier SUA, închidere zilnică	1990–2026	S&P Dow Jones Indices
SPY	fond tranzacționat la bursă (ETF) pe S&P 500: deschidere și închidere	1993–2026	State Street
VIX	volatilitatea implicită pe 30 de zile a S&P 500	1990–2026	Cboe
VIX9D, VIX3M	aceeași, pe 9 zile și pe 3 luni	VIX9D: 2011–2026; VIX3M: 2007–2026	Cboe
VVIX	volatilitatea implicită a VIX	2006–2026	Cboe
Opțiuni Bitcoin	toate contractele listate, cotații la o singură dată	22 sept. 2026	Deribit
DVOL	volatilitatea implicită pe 30 de zile a Bitcoin	2021–2026	Deribit

- Datele zilnice se opresc la 18 septembrie 2026
  - cotațiile opțiunilor au fost preluate pe 22 septembrie 2026, 07:51 UTC (UTC: timpul universal coordonat)
- Volatilitatea implicită se cotează în % anualizat, iar „punctele de volatilitate" sînt puncte procentuale ale ei

Notații: prețuri, scadență și poziția față de bani (1/2)

- S_t: prețul activului suport la t; K: prețul de exercitare; T: scadența
  - $\tau = T - t$: timpul rămas, în ani
  - r: rata fără risc cu capitalizare continuă; δ: randamentul dividendelor
- C, P: prețurile unui call și ale unui put
  - $(x)^+ = \max(x, 0)$
  - σ_{imp}: volatilitatea implicită (Secțiunea 6)
- Call-ul și put-ul europene plătesc $(S_T - K)^+$ și $(K - S_T)^+$ la T
  - cele americane se pot exercita oricînd pînă la T
- Ambele plăți sînt convexe în S_T
  - deci valoarea opțiunii crește cu volatilitatea (vega > 0, Secțiunea 4)

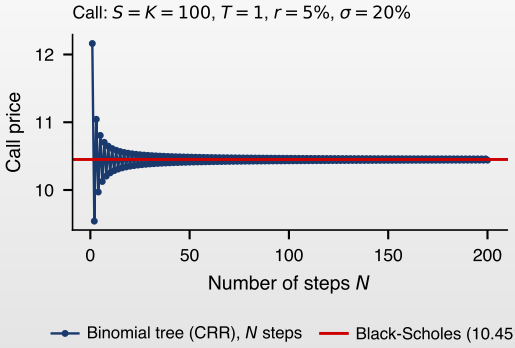
Notații: prețuri, scadență și poziția față de bani (2/2)

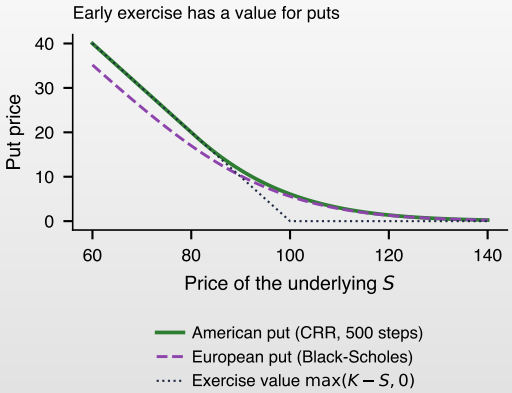
- Volatilitatea σ: abaterea standard anualizată a randamentelor logaritmice
  - randamentele $\ln(S_t/S_{t-1})$ sînt distribuite Normal în modelul Black–Scholes
- Trei mărimi folosite în cea mai mare parte a capitolului
  - forward-ul $F = Se^{(r-\delta)\tau}$
  - log-moneyness $k = \ln(K/F)$
  - varianța implicită totală $w = \sigma_{imp}^2\tau$
- ATM (at the money, la bani): $k \approx 0$
  - OTM (out of the money, în afara banilor): put-urile cu $K < F$ și call-urile cu $K > F$
  - ITM (in the money, în bani): invers

Simboluri cu mai multe sensuri, limite fără model și cunoștințe necesare

- $q(K)$: densitatea neutră la risc a lui S_T (Secțiunile 2 și 7)
  - în arborele binomial, q este probabilitatea neutră la risc a unei creșteri (Secțiunea 3); randamentul dividendelor este δ
- Q: măsura de evaluare; $Q(K_i)$: cotația medie Cboe la prețul de exercitare K_i (Secțiunea 8)
- Limite fără model (fără dividende): $\max(S - Ke^{-r\tau}, 0) \leq C \leq S$ și $\max(Ke^{-r\tau} - S, 0) \leq P \leq Ke^{-r\tau}$
  - Cu $r > 0$, un call american pe o acțiune fără dividende nu se exercită anticipat: valorează cel puțin $S - Ke^{-r\tau} > S - K$
- Reperul poziției față de bani este aici forward-ul F
  - în Seminarul 12 și în graficul zîmbetelor din Secțiunea 6 este spot-ul S
  - call OTM: $K > S$
  - Reperele diferă prin factorul $F/S = e^{(r-\delta)\tau}$, apropiat de 1 la scadențe scurte: doar prețurile de exercitare dintre S și F își schimbă clasa
- Presupunem cunoscute
  - mișcarea browniană, lema lui Itô și martingalele (Capitolul 11)
  - erorile standard HAC (Capitolul 8)
  - HAC: heteroskedasticity and autocorrelation consistent, robuste la heteroscedasticitate și autocorelație

De la arbore la Black–Scholes





MFM_ch12_binomial

Convergența și prima de exercitare anticipată

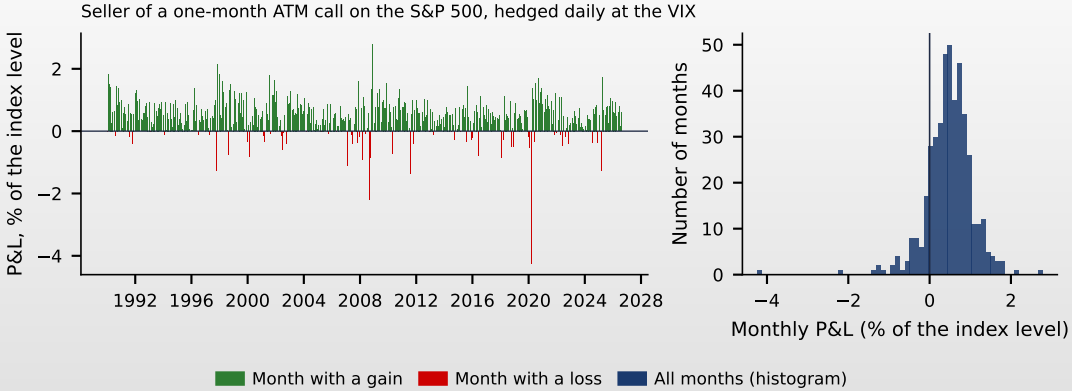
- Stînga: prețul CRR al unui call european față de numărul de pași
  - $S_0 = K = 100$, $T = 1$, $r = 5\%$, $\sigma = 20\%$, pentru $N = 1, \ldots, 200$ pași
  - dreapta: put-ul american față de cel european
- Prețul CRR converge la prețul Black–Scholes, 10,451
  - 10,411 cu $N = 50$, 10,441 cu $N = 200$ și 10,449 cu $N = 1\,000$
  - Eroarea este de ordinul $1/N$ și oscilează (10,253 cu $N = 10$, 10,611 cu $N = 11$), după cum prețul de exercitare cade pe un nod sau între noduri (Seminarul 12, A6)
- La $S = K = 100$, put-ul american valorează 6,090, iar cel european 5,574
  - Diferența, 0,516, este prima de exercitare anticipată: adînc în bani, încasarea imediată a lui K este avantajoasă

MFM_ch12_binomial

Vînzarea volatilității S&P 500: strategia testată

- Întrebarea: este volatilitatea implicită plătită, în medie, peste cea realizată?
  - o opțiune vîndută și acoperită cu delta răspunde direct
- La fiecare 21 de zile de tranzacționare t_0: vindem un call ATM sintetic pe 21 de zile
  - $K = S_{t_0}$
  - evaluat Black–Scholes cu $\sigma = VIX_{t_0}/100$
  - VIX provine dintr-o bandă de opțiuni, nu este volatilitatea implicită cotată a call-ului ATM: prima încasată este impusă de construcție
- Îl acoperim zilnic cu $\Delta_i = \Phi(d_1)$ la aceeași volatilitate
  - dobînda și dividendele sînt ignorate ($r = \delta = 0$)
- Rezultatul lunar, în % din indice:
  - $\text{P\&L} = 100\left[C_0 + \sum_{i=0}^{20} \Delta_i \left(S_{t_{i+1}} - S_{t_i}\right) - \left(S_{t_{21}} - K\right)^+\right] / S_{t_0}$
- De ce VIX: este volatilitatea implicită pe 30 de zile disponibilă zilnic din 1990 în datele cursului
- De ce ATM: vega este maximă aproape de bani, deci rezultatul măsoară mai ales volatilitatea

Treizeci și șase de ani de vînzare a volatilității S&P 500 (1/2)



MFM_ch12_delta_hedged_sp500

Treizeci și șase de ani de vînzare a volatilității S&P 500 (2/2)

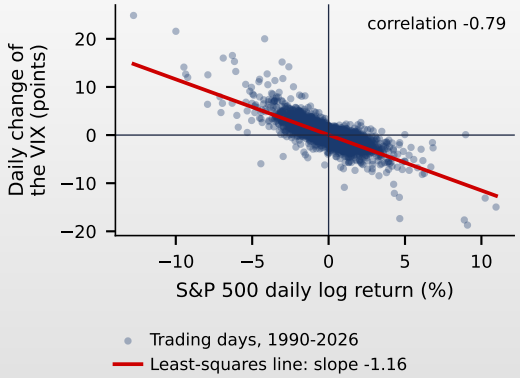
- Stînga: rezultatul fiecărei luni, în % din indice
  - verde: cîștig, roșu: pierdere
  - dreapta: histograma rezultatelor lunare
- 440 de luni începînd cu 1990-01: rezultatul mediu este 0,48% pe lună Newey & West (1987)
  - statistica t Newey–West $= 16{,}0$
- Rezultatul este pozitiv în 86% din luni
- Cea mai rea lună: $-4{,}25\%$ (2020-03)
  - asimetria rezultatelor lunare este $-1{,}46$
  - multe cîștiguri mici, cîteva pierderi mari
- Rezultatul este compatibil cu o **primă de risc a volatilității**
  - Pe cotații reale, cîștigurile din opțiuni acoperite prin delta sînt negative pentru cumpărător Bakshi & Kapadia (2003)
  - aici: un call sintetic evaluat la VIX, fără cotații ATM istorice, bid–ask, dividende și finanțare; nu este rezultatul unei strategii executabile

MFM_ch12_delta_hedged_sp500

Volatilitatea implicită: inversarea prin metoda Newton

- Metoda Newton: $\sigma_{k+\mathbf{1}} = \sigma_k - \dfrac{BS(\sigma_k) - C^{market}}{\mathcal{V}(\sigma_k)}$
  - σ_k: iterația k; $\mathcal{V}(\sigma_k)$: vega la σ_k, panta prețului în raport cu σ
  - De ce Newton: vega este derivata exactă a prețului în σ, deci convergența este pătratică în apropierea soluției
- Exemplu: $S = K = 100$, trei luni, $r = 2\%$, preț de piață 4,50
  - pornim de la $\sigma_{\mathbf{0}} = 20{,}00\%$
  - Primul pas: $BS(\sigma_{\mathbf{0}}) = 4{,}2322$, $\mathcal{V} = 19{,}848 \Rightarrow \sigma_{\mathbf{1}} = 21{,}3495\%$
  - Al doilea pas schimbă σ cu mai puțin de $10^{-\mathbf{6}}$: $\sigma_{imp} = 21{,}3495\%$
- Cînd vega este aproape de zero, pasul Newton poate ieși din intervalul fără arbitraj
  - adînc în bani sau în afara banilor, scadențe foarte scurte
  - atunci folosim un solver cu încadrare

Efectul de levier în date



- Randamentul logaritmic zilnic al S&P 500 (%) față de variația VIX în aceeași zi
  - variația VIX în puncte de indice, 1990–2026
- Corelația $-0{,}79$ pe 9 244 de zile
  - volatilitatea implicită crește cînd piața scade
- Panta: o variație de $-1{,}16$ puncte VIX la un randament de 1%
  - Mai abruptă în zilele de scădere ($-1{,}39$) decît în cele de creștere ($-1{,}01$)
  - Variația medie a VIX: $+0{,}88$ în zilele de scădere, $-0{,}76$ în cele de creștere
- Compatibil cu efectul de levier: motivează Heston cu $\rho < 0$ și GJR-GARCH
  - nu estimează direct ρ sau coeficientul GJR: ΔVIX conține și variații ale primelor de risc
  - GJR: Glosten–Jagannathan–Runkle, Capitolul 5
  - Put-urile cu preț de exercitare mic cîștigă și din scădere, și din creșterea volatilității, de aceea sînt scumpe

MFM_ch12_leverage

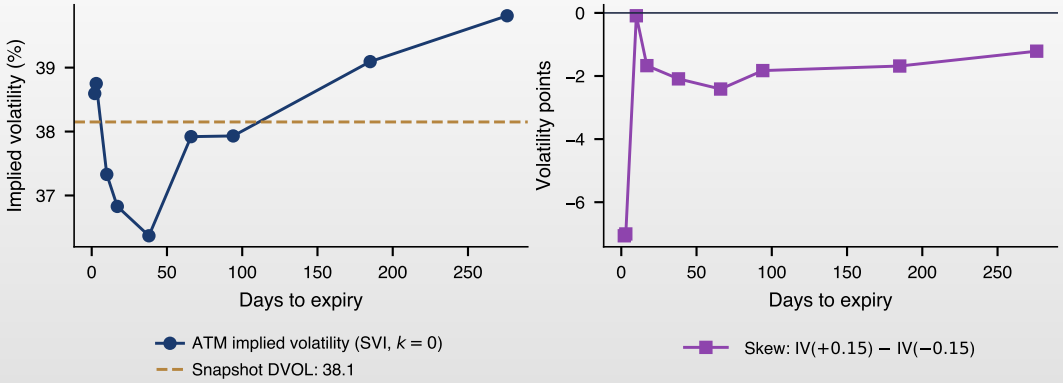
Opțiunile inverse: de ce se aplică formulele în USD

- Un call invers plătește $(S_T - K)^+/S_T$ BTC la T
  - convertită la cursul S_T USD pentru un BTC, plata este exact $(S_T - K)^+$ USD
  - aceasta este plata unui call standard în USD
  - Exemplu: $K = 90\,000$, $S_T = 100\,000$: deținătorul primește $10\,000/100\,000 = 0{,}1$ BTC, adică 10 000 USD
- Aceeași plată, aceeași valoare
  - o primă de p BTC plătită azi costă $p \times S$ USD la indicele de azi S
  - deci $p \times S$ este prețul în USD al call-ului standard
  - De aceea formulele Black–Scholes/Black-76 și mark IV (volatilitatea implicită de referință calculată de bursă) se aplică neschimbate lui $p \times S$; aceasta este conversia folosită în slide-urile despre zîmbet, densitate și VIX
- Rata: Deribit cotează un forward F pentru fiecare scadență
  - în acest capitol folosim $e^{r\tau} = F/S$, costul de finanțare implicat de baza futures
  - în locul unei rate a titlurilor de stat
  - Verificare: un put invers cu $K = 90\,000$ se încheie la $S_T = 75\,000$. Cît plătește în BTC și în USD? (Răspuns: 0,2 BTC, adică 15 000 USD)

Absența arbitrajului în cele nouă estimări Bitcoin

- Pentru 2 octombrie, 9 octombrie și 27 noiembrie, a atinge marginea inferioară (-1)
  - marginea este impusă în optimizare
  - parametrii individuali nu sînt identificați precis
- Aripile: pantele cele mai mari sînt 0,51 (dreapta) și 2,30 (stînga)
  - deci aripa stîngă depășește limita 2 a lui Lee
- Butterfly: $g(k) < 0$ în unele puncte ale grilei pentru 2 din cele 9 scadențe
  - grila: $k \in [-1{,}5; 1{,}5]$
  - minimul, $-0{,}017$, la scadența din 2 octombrie 2026
- Calendar: 1 din cele 8 perechi de scadențe vecine se intersectează
  - varianța totală la 2 octombrie depășește pe cea la 9 octombrie 2026
  - pe 9% din intervalul $k \in [-0{,}5; 0{,}5]$, cu cel mult 0,0018
- Estimările separate, fără constrîngeri, pot încălca aceste restricții
  - curbele nu demonstrează un arbitraj în cotațiile executabile de piață
- Remediul: estimăm suprafața în ansamblu, cu constrîngerile impuse
  - SSVI sau cele mai mici pătrate cu $g \geq 0$, $\partial_\tau w \geq 0$ și restricțiile pentru aripi

Structura la termen și asimetria



MFM_ch12_btc_term

Scadența, asimetria și indicele DVOL

- Stînga: volatilitatea implicită ATM pe scadențe și indicele DVOL
  - dreapta: asimetria IV($k = +0{,}15$)− IV($k = -0{,}15$)
  - IV: volatilitatea implicită la acel log-moneyness
- Volatilitatea ATM variază între 36,4% și 39,8%
  - maximul la cea mai lungă scadență, de 276 de zile
  - curba scade la scadențele scurte, apoi crește după aproximativ o lună
- DVOL este 38,1
  - volatilitățile ATM ale celor două scadențe din jurul a 30 de zile sînt 36,8% și 36,4%
  - un indice construit dintr-o bandă de opțiuni nu trebuie să se afle între ele
- Asimetria este cea mai apropiată de 0 la 10 zile ($-0{,}1$)
  - cea mai negativă la 66 de zile ($-2{,}4$)
  - $-1{,}2$ la 276 de zile
  - La 2 și 3 zile, $k = \pm 0{,}15$ depășește cotațiile (cel mult $k = 0{,}11$, respectiv 0,14): asimetria de aproximativ -7 puncte este acolo o extrapolare SVI
- Limitare: aceste cotații descriu o singură zi

MFM_ch12_btc_term

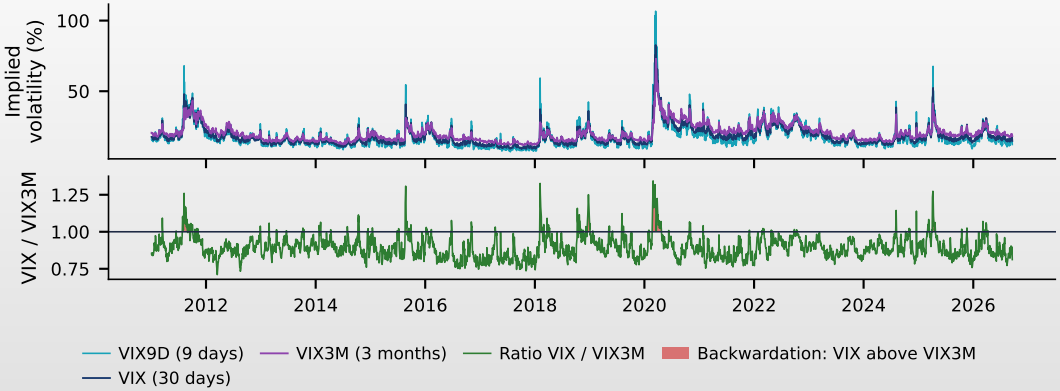
Indicele VIX: regulile de calcul

- Cboe Volatility Index (VIX), publicat din 1993 Cboe (2025)
  - din 2003 calculat din opțiunile pe S&P 500 cu formula Cboe
  - seria după această regulă este calculată retroactiv pînă în ianuarie 1990, începutul graficelor
- $\Delta K_i = (K_{i+1} - K_{i-1})/2$, unilateral la cele două capete
  - la cel mai mic (cel mai mare) preț de exercitare, ΔK este întreaga distanță pînă la următorul preț mai mare (mai mic)
- Opțiunile cu cotația de cumpărare zero se elimină
  - fiecare aripă se oprește după două cotații de cumpărare zero consecutive
- Două scadențe în jurul a 30 de zile, interpolate la exact 30 de zile, iar VIX $= 100\,\sigma$
- Contracte futures pe VIX din 2004 și opțiuni pe VIX din 2006 Cboe (2025)
- VIX este supranumit „barometrul fricii” Whaley (2000)

Exemplu rezolvat: un VIX pentru Bitcoin

- Regulile Cboe pe cotațiile Deribit
  - Q în USD = media cotațiilor în BTC $\times$ indicele S
  - F și $e^{RT} = F/S$ provin din forward-ul Deribit
  - Cboe: F din paritate, R din randamentele titlurilor de stat americane
- Scadența apropiată: 17 zile, 26 de opțiuni OTM, $\sigma = 39{,}5\%$
  - scadența următoare: 38 de zile, 56 de opțiuni OTM, $\sigma = 40{,}2\%$
- Interpolăm liniar în timp variațele totale $\sigma_i^2 T_i$ la 30 de zile:
  - $\sigma_{30}^2 = \frac{1}{30}\left[T_1\sigma_1^2 \frac{T_2 - 30}{T_2 - T_1} + T_2\sigma_2^2 \frac{30 - T_1}{T_2 - T_1}\right]$ (zile)
- VIX-ul nostru pentru Bitcoin este 40,0, DVOL publicat de Deribit în același moment, 38,1 Alexander & Imeraj (2020)
  - ambele depășesc volatilitățile ATM, deoarece swap-ul de variață include și aripile
- Diferența de 1,9 puncte de volatilitate nu poate fi atribuită trunchierii
  - extrapolarea SVI necesară ar încălca restricția Lee pentru aripi
  - Anexa; Seminarul 12, A8

Structura la termen a VIX (1/2)



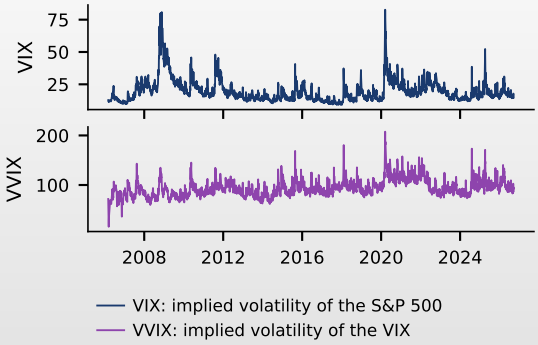
MFM_ch12_vix_term

Structura la termen a VIX (2/2)

- Sus: volatilitatea implicită pe 9 zile, 30 de zile și 3 luni
  - jos: raportul VIX / VIX3M (*Cboe 3-Month Volatility Index*, indicele Cboe de volatilitate implicită pe 3 luni), 2011–2026
- De obicei crescătoare (**contango**)
  - raportul mediu VIX / VIX3M este 0,89
  - VIX9D (*Cboe 9-Day Volatility Index*, indicele Cboe de volatilitate implicită pe 9 zile) este sub VIX în 73% din zile
- Inversată (**backwardation**) în 7,6% din zile, întotdeauna în crize
  - frica se concentrează pe termen scurt
- Pe cele 21 de zile care urmează unei zile de backwardation, comparativ cu una de contango:
  - Randamentul logaritmic al S&P 500 este 2,88% față de 0,80%, iar volatilitatea realizată 26,7% față de 13,6%
  - Risc mare și randament așteptat mare după episoadele de panică Bollerslev, Tauchen & Zhou (2009)
- Comparația este descriptivă
  - ferestrele de 21 de zile se suprapun
  - zilele de backwardation sînt puține și grupate în cîteva crize

MFM_ch12_vix_term

Volatilitatea volatilității



- VIX (sus) și VVIX (jos), închideri zilnice, 2006–2026
- Media VVIX este 93,5, iar media raportului zilnic VVIX/VIX 5,3
  - Ambele sînt volatilități implicite anualizate, ale variațiilor procentuale ale VIX, respectiv ale S&P 500: relativ, VIX se așteaptă să se miște de aproximativ 5,3 ori mai mult decît indicele
- Maximul VVIX: 207,6 pe 2020-03-16, ziua vîrfului VIX
- Variațiile zilnice ale VIX și VVIX au corelația 0,71
- Volatilitatea este ea însăși aleatoare, ideea modelelor cu volatilitate stocastică precum Heston Heston (1993)

MFM_ch12_vvix

Instrumentele de evaluare a prognozelor

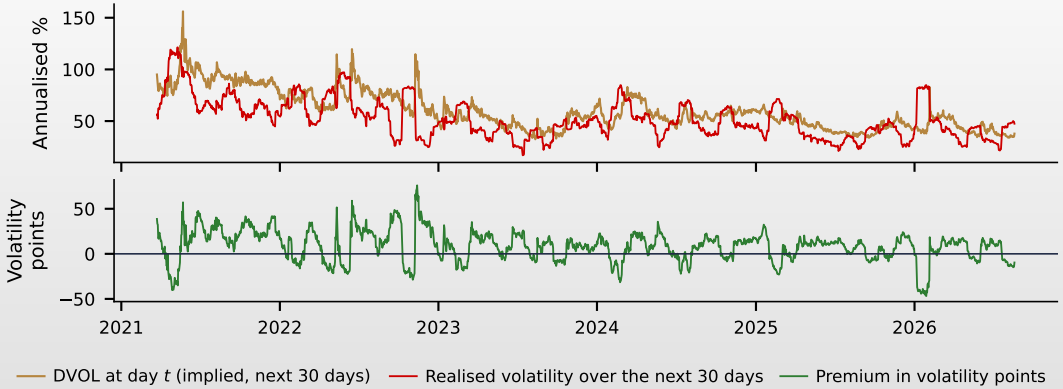
- **Variabile instrumentale**: VIX^2 întîrziat instrumentează VIX^2 măsurat cu eroare
  - o statistică t mare în prima etapă (regresia pe instrument) indică un instrument puternic
- **HAR-RV**: prognozăm varianța realizată a lunii următoare
  - printr-o regresie pe mediile ei din ultima zi, săptămînă și lună
- **Pierderea QLIKE** (*Quasi-LIKElihood*, funcția de pierdere de tip cvasi-verosimilitate) $L = x - \ln x - 1$, cu $x = RV/\hat{\sigma}^2$
  - zero pentru o prognoză perfectă
  - mai severă cu prognozele prea mici decît cu cele prea mari
  - Exemplu: $RV = 100$; prognoza 50 dă $x = 2$, $L = 0{,}31$; prognoza 200 dă $x = 0{,}5$, $L = 0{,}19$
- **Diebold–Mariano**: un test t pentru diferența medie dintre pierderile a două prognoze
  - ipoteza nulă: diferența medie este zero
  - eroare standard HAC, deoarece țintele suprapuse fac diferențele autocorelate

Logaritmi, instrumente și HAR-RV: inferența corectă

Specificația	$\hat{\beta}$	SE	$t(\beta = 1)$	Observație
Niveluri, OLS	0,860	0,105	$-1,34$	Wald comun $p = 8,9 \cdot 10^{-10}$
Logaritmi, OLS	1,06	0,035	1,65	termenul liber $-0,94$, $R^2 = 0,57$
Logaritmi, variabile instrumentale	1,02	0,042	0,60	prima etapă $t = 37,7$

- Regresia în niveluri este dominată de 2008 și 2020
  - în logaritmi panta este aproape de 1
  - prima este o deplasare proporțională (termenul liber < 0)
- VIX^2 măsoară varianța așteptată cu eroare
  - aceasta atenuează panta estimată prin OLS (ordinary least squares, metoda celor mai mici pătrate)
  - Instrumentul, VIX^2 cu 21 de zile în urmă Christensen & Prabhala (1998), schimbă panta foarte puțin
  - Valid doar dacă întîrzierea este necorelată cu eroarea de prognoză (netestabil cu un singur instrument)
- Față de HAR-RV Corsi (2009), în eșantion (*in-sample*) termenii HAR adaugă informație: $\chi^2_3 = 14,2$, $p = 0,003$
  - În afara eșantionului (din 2000): pierderea QLIKE a VIX este cu aproximativ 6% mai mică, dar diferența nu este semnificativă (Diebold–Mariano, $p = 0,35$) Diebold & Mariano (1995)
  - Detaliile testelor: Anexa

Prima de risc a variației pentru Bitcoin (1/2)



MFM_ch12_vrp_btc

Prima de risc a variației pentru Bitcoin (2/2)

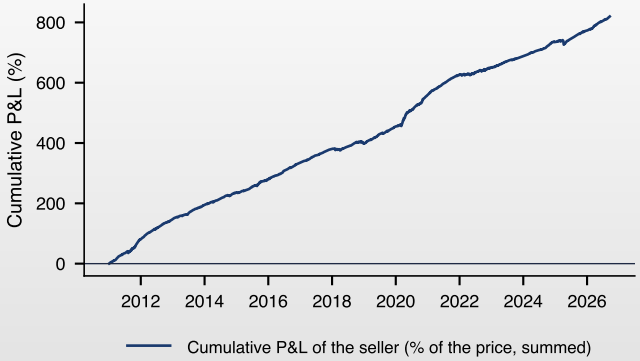
- Sus: DVOL și volatilitatea Bitcoin realizată în următoarele 30 de zile calendaristice
  - Bitcoin se tranzacționează în fiecare zi
  - jos: diferența lor, 2021–2026
- 1 975 de zile: DVOL are media 60,3, iar volatilitatea realizată 51,7
  - Prima: 8,5 puncte de volatilitate (eroare standard 1,6, $t = 5{,}3$)
  - De aproximativ 2,1 ori prima S&P 500 în puncte de volatilitate, dar mai mică raportată la nivel: 14% din media DVOL, față de 21% din media VIX
- Prima este pozitivă în 71% din zile, mai rar decît la S&P 500
  - cea mai rea valoare: $-46{,}9$ puncte (fereastra care începe la 2026-01-28)
- Eșantion scurt: 66 de perioade de 30 de zile fără suprapunere Alexander & Imeraj (2020)

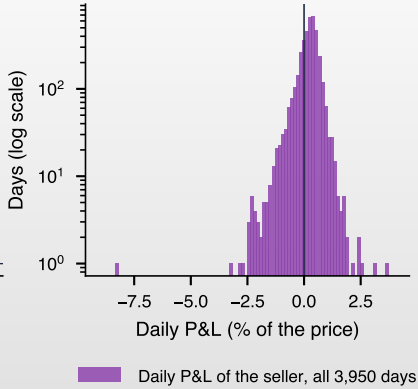
MFM_ch12_vrp_btc

Vînzarea unui straddle în aceeași zi: metoda

- Întrebarea: încasează și vînzătorul unei opțiuni cu scadența azi prima de volatilitate a opțiunilor pe o lună?
- Datele cursului nu conțin prețuri 0DTE, deci construim un test stilizat pe SPY (*SPDR S&P 500 ETF Trust*, fondul tranzacționat la bursă pe indicele S&P 500)
  - 2011–2026 (VIX9D există din 2011)
  - vindem un straddle ATM (un call și un put cu $K = S_t^{open}$) la deschidere
  - îl decontăm la închidere
- Prima: $\Pi_t = \sqrt{2/\pi}\,\sigma_{zi}\,S_t^{open}$
  - valoarea Black–Scholes aproximativă a unui straddle ATM
  - $E|Z| = \sqrt{2/\pi}$ pentru Z normal standard
- $\sigma_{zi} = \dfrac{VIX9D_{t-\mathbf{1}}}{100}\sqrt{\omega/252}$: volatilitatea implicită pe 9 zile din ziua precedentă, scalată la o sesiune
- $\omega = 0{,}74$: ponderea sesiunii (de la deschidere la închidere) în varianța zilnică
  - estimată pe 1993–2010, înaintea perioadei de test
- Rezultatul zilnic al vînzătorului, în % din prețul de deschidere:
  - $100\left(\Pi_t / S_t^{open} - \left|S_t^{close}/S_t^{open} - 1\right|\right)$

Vînzarea unui straddle în aceeași zi: un test stilizat (1/2)





MFM_ch12_0dte_straddle

Vînzarea unui straddle în aceeași zi: un test stilizat (2/2)

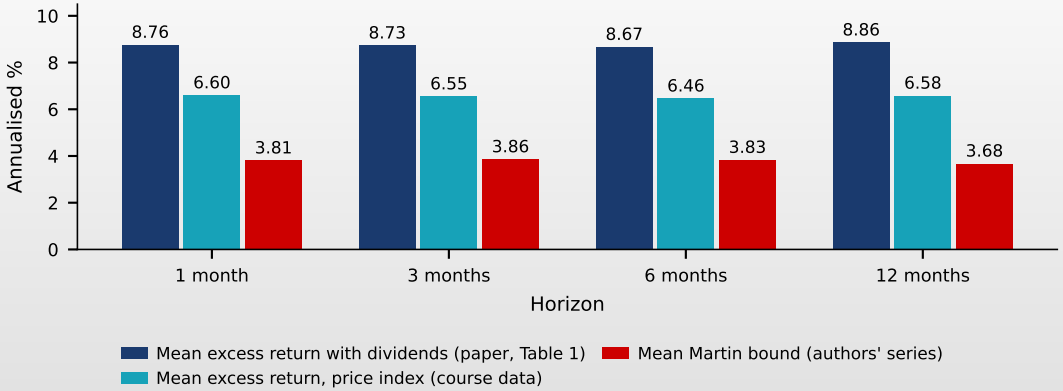
- Stînga: rezultatul cumulat al vînzătorului (suma rezultatelor zilnice, în % din preț)
- Dreapta: histograma tuturor rezultatelor zilnice, cu axa verticală logaritmică
- 3 950 de zile: prima medie este 0,76%, iar mișcarea absolută medie 0,55%
  - Vînzătorul cîștigă în 75% din zile, în medie 20,7 puncte de bază pe zi
- Cea mai rea zi: $-8{,}25\%$ (2025-04-09), de aproximativ 11 ori prima medie
  - Limitare: evaluarea stilizată măsoară prima din VIX9D, nu prețurile 0DTE tranzacționate Bandi, Fusari & Renò (2023), Beckmeyer, Branger & Gayda (2023)

MFM_ch12_0dte_straddle

Studiu de caz: rezultate, prognoza (Tabelele 5, 6 și 8)

- **Prognoza**: pante pozitive, dar imprecise (Tabelul 5)
  - Cu cei nouă predictori drept variabile de control, o creștere cu o abatere standard a limitei pe 12 luni este asociată cu un randament în exces pe 12 luni mai mare cu 6,6 puncte procentuale (Tabelul 6)
  - Valorile p bootstrap: 20,7%; sub 0,1%; 0,2% și 9,5%
  - Cu corecția Holm pentru cele patru orizonturi (Secțiunea 11) rămîn semnificative la 5% doar 3 și 6 luni
- **În afara eșantionului**: limita Martin pierde în fața mediei istorice la toate orizonturile
  - Cel mai bun caz, Chabi-Yo–Loudis la 6 luni, ajunge la $R^2_{OS} = 4{,}3\%$, nesemnificativ (Tabelul 8)
  - O explicație posibilă: puterea redusă a testului

Studiu de caz: prima medie și limita medie (1/2)



MFM_ch12_bck_bounds

Studiu de caz: prima medie și limita medie (2/2)

- Albastru închis: Tabelul 1 din lucrare (S&P 500 cu dividende)
  - roșu: media limitei Martin publicate de autori
- Turcoaz: datele cursului (indicele de preț, aceleași zile de formare)
  - 7 789 zile la 1 lună, 7 598 la 12 luni
- Marja medie pe datele cursului, în puncte procentuale pe an, față de 4,8–5,2 în lucrare
  - 2,79 la 1 lună, 2,69 la 3 luni
  - 2,63 la 6 luni și 2,91 la 12 luni
  - Diferența, de 2,2–2,3 puncte, provine în principal din randamentul dividendelor, absent din indicele de preț
- Limita medie acoperă 41–44% din prima cu dividende
  - și 56–59% din prima calculată pe indicele de preț
- Realizările individuale sînt sub limită în 41% din zile la orizontul de o lună
- Media realizată nu este niciodată sub limita medie (Seminarul 12, C3)

MFM_ch12_bck_bounds

Studiu de caz: o extensie deschisă

- Datele cursului conțin VIX, nu SVIX
  - VIX ponderează opțiunile OTM cu $1/K^2$
  - VIX depășește SVIX cînd coada stîngă este scumpă (Martin (2017), Rezultatul 3)
  - Mai este validă limita Martin pe 2021–2026 (piața în scădere din 2022, era 0DTE din Secțiunea 9)?
  - Este validă o limită bazată pe VIX?
  - Dacă nu este, ar detecta-o testul Kodde–Palm?

Demonstrația replicării statice, momente și SVIX

- Demonstrația pentru $S_T > F$, prin integrare prin părți:
  - $\int_F^{S_T} f''(K)(S_T - K)\,dK = f(S_T) - f(F) - f'(F)(S_T - F)$
  - Integrala put-urilor este nulă
  - Cazul $S_T < F$ este simetric
- Aplicăm $e^{-r\tau}E^Q[\cdot]$, cu F forward-ul (un contract forward costă 0)
  - o obligațiune, un forward și o bandă de opțiuni OTM cu ponderile $f''(K)$ replică orice plată netedă
- **Momentele**: $f = [\ln(S/F)]^n$, $n = 2, 3, 4$ Bakshi, Kapadia & Madan (2003)
  - evaluează momentele necentrate neutre la risc ale randamentului logaritmic
  - prin centrare și standardizare obținem volatilitatea, asimetria și kurtosis-ul
- **SVIX** Martin (2017), din $f = S^2$:
  - $\mathrm{SVIX}_t^2 = \dfrac{2}{\tau R_f S_t^2}\left[\int_0^F P\,dK + \int_F^\infty C\,dK\right] = \mathrm{var}_t^Q(R_T/R_f)/\tau$
  - cu R_T, R_f randamente brute
  - SVIX^2 dă limita inferioară Martin a primei de risc a acțiunilor (studiul de caz, Secțiunea 10)

Înapoi

Rata $1/\sqrt{N}$ a erorii hedging-ului discret

- Pe un interval $\Delta t = T/N$, portofoliul acoperit cîștigă:
  - $\frac{1}{2}\Gamma S^2 \left[\sigma^2 \Delta t - (\Delta S/S)^2\right]$
  - trecerea timpului minus randamentul realizat la pătrat
- Media este 0 sub model, pînă la ordinul principal în Δt
- $\mathrm{Var}[(\Delta S/S)^2] \approx 2\sigma^4 \Delta t^2$, iar termenii sînt aproximativ necorelați
  - deci $\mathrm{Var}(\text{eroare}) \approx \frac{1}{2}\sigma^4 \Delta t \, E\int_0^T \Gamma_t^2 S_t^4 \, dt$
- Call ATM (derivarea): $E[\Gamma_t^2 S_t^4] \approx \dfrac{K^2}{2\pi\sigma^2\sqrt{T^2 - t^2}}$
  - integrala este $K^2/(4\sigma^2)$
  - deci abaterea standard $\approx \sigma K \sqrt{T/(8N)} = \sqrt{\pi/4}\, \mathcal{V}\sigma/\sqrt{N}$
  - Ultima egalitate este exactă pentru vega la $d_1 = 0$, $\mathcal{V}_0 = K\sqrt{T}\,\varphi(0)$; aici $d_1 = 0{,}15$ și $\mathcal{V} = 0{,}989\,\mathcal{V}_0 = 19{,}72$, deci la $N = 12$ cele două forme dau 1,02 și 1,01
- Teoria asimptotică a erorii de replicare: Bertsimas, Kogan & Lo (2000)
  - rata $1/\sqrt{N}$ nu mai este valabilă cu salturi (eroarea nu dispare cînd $N \to \infty$)
  - nici cu volatilitate stocastică (risc vega), nici cu costuri

înapoi

Momentul lui gamma din spatele ratei $1/\sqrt{N}$

- Call ATM, $S_0 = K$, $r = 0$, timp rămas $\tau = T - t$:
  - $\Gamma_t S_t^2 = S_t\,\varphi(d_1)/(\sigma\sqrt{\tau}) \approx K\varphi(d_1)/(\sigma\sqrt{\tau})$
  - cu $d_1 \approx X/(\sigma\sqrt{\tau})$ și $X = \ln(S_t/K) \sim N(0, \sigma^2 t)$
- Integrala gaussiană: $E[\varphi(d_1)^2] = \dfrac{1}{2\pi} E\left[e^{-X^2/(\sigma^2\tau)}\right] = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{\tau}{\tau + 2t}}$, iar $\tau + 2t = T + t$
- Deci $E[\Gamma_t^2 S_t^4] \approx \dfrac{K^2}{2\pi\sigma^2}\,\dfrac{1}{\sqrt{(T-t)(T+t)}} = \dfrac{K^2}{2\pi\sigma^2\sqrt{T^2 - t^2}}$, iar $\displaystyle\int_0^T \frac{dt}{\sqrt{T^2 - t^2}} = \frac{\pi}{2}$ dă integrala $K^2/(4\sigma^2)$

înapoi

Formula momentelor pentru aripi

- Formula momentelor din Lee (2004): $\beta_R = \limsup_{k\to\infty} w(k)/k \in [0,2]$ și $\tilde{p} = \dfrac{1}{2\beta_R} + \dfrac{\beta_R}{8} - \dfrac{1}{2}$
  - $\tilde{p} = \sup\{p : E^Q[S_T^{1+p}] < \infty\}$: o aripă mai abruptă înseamnă cozi mai groase
  - Pentru aripa stîngă se aplică o relație analogă, cu momente negative
- Bitcoin: cea mai mare pantă dreaptă 0,511 dă $\tilde{p} = 0{,}54$
  - Acesta este doar un calcul formal de extrapolare: această secțiune estimată încalcă o condiție butterfly, deci nu identifică un moment neutru la risc valid
- Pentru SVI, o pantă a aripii drepte sub 2 asigură și condiția din coadă $d_+(k) \to -\infty$ din Gatheral & Jacquier (2014), Lema 2.2

înapoi

Estimatori ai densității neutre la risc

- Estimăm un zîmbet (SVI) și derivăm de două ori prețurile call implicite, ca în curs
- Regresie kernel a lui C pe (K, τ) Aït-Sahalia & Lo (1998)
- Aceeași regresie, cu monotonie și convexitate în K impuse Aït-Sahalia & Duarte (2003)
- Arbori impliciți cu penalizarea lipsei de netezime Jackwerth & Rubinstein (1996)
- Pricing kernels cu formă invariantă Grith, Härdle & Park (2013)
- Cozile dincolo de cotații: aripile SVI sau o coadă de valori extreme
  - în ambele cazuri o ipoteză, nu o estimare

Înapoi

Banda de opțiuni în prezența salturilor

- Cu salturi J: banda evaluează $\int \sigma_t^2 dt + 2\sum(e^J - 1 - J)$
  - dar varianța realizată este $\int \sigma_t^2 dt + \sum J^2$
  - Diferența $2E^Q \sum(e^J - 1 - J - J^2/2) \approx E^Q \sum J^3/3$: negativă pentru crahuri, deci banda subestimează varianța realizată așteptată Carr & Wu (2009)
- Modelul Merton din Secțiunea 6 (un salt pe an, în medie -8%)
  - banda 17,82 față de $\sqrt{E^Q[\mathrm{QV}]} = 18{,}00$ puncte de volatilitate
  - $-2{,}0\%$ în varianță
  - QV (quadratic variation): variația pătratică, adică varianța realizată inclusiv salturile

înapoi

Trunchierea și discretizarea indicelui Bitcoin

- Se cotează doar un set finit de prețuri de exercitare Jiang & Tian (2005)
  - trunchierea benzii de opțiuni deplasează indicele în jos
  - o grilă rară îl deplasează în sus
- Indicele Bitcoin pe 30 de zile, din aceleași două scadențe, în trei variante valide:
  - din prețurile cotate: 40,03
  - din prețurile SVI la aceleași prețuri de exercitare: 39,99
  - din SVI pe o grilă densă în intervalul cotat: 39,77
- Diferența de aproximativ 0,26 puncte dintre cele trei variante reflectă netezirea și discretizarea
  - toate folosesc același interval cotat: trunchierea nu este cuantificată aici
  - contribuțiile OTM omise sînt pozitive, deci nu ar coborî indicele spre DVOL (1,9 puncte mai jos)
  - rămîn selecția cotațiilor și metodologia
- Extinderea SVI dincolo de cotații ($k \in [-4, 4]$) nu este o a patra estimare
  - aripa stîngă a scadenței de 17 zile are panta $2{,}30 > 2$ (limita lui Lee)
  - deci prețurile extrapolate nu provin dintr-o densitate validă
  - integrala dă 128,47, o valoare fără sens economic

înapoi

Teste de incluziune și teste în afara eșantionului

- HAR-RV Corsi (2009): regresorii sînt varianța realizată medie pe ultimele 1, 5 și 22 de zile de tranzacționare
  - ținta, $RV_{t,t+\mathbf{21}}$, acoperă următoarele 21 de zile
- Regresia de incluziune în logaritmi Busch, Christensen & Nielsen (2011): panta VIX 0,90 (eroare standard 0,056)
  - $R^{\mathbf{2}}$ este 0,570 doar cu VIX, 0,474 doar cu HAR și 0,575 cu ambele
- În afara eșantionului din 2000: 6 697 de zile
  - coeficienții sînt reestimați la fiecare 21 de zile pe ținte deja observate
- QLIKE ordonează corect prognozele cu un RV zgomotos dacă RV este un proxy condițional nedeplasat al variației Patton (2011)
- Raportul pierderilor VIX$^{\mathbf{2}}$ / HAR: 0,94, Diebold–Mariano $t = -0{,}93$ ($p = 0{,}35$) Diebold & Mariano (1995)
  - VIX corectat prin regresia Mincer–Zarnowitz: 0,95 ($p = 0{,}35$)
  - prognozele în nivel din logaritmi: $\exp(\hat{m} + \hat{s}^{\mathbf{2}}/2)$, corecție log-normală, nu identitate generală
  - cu smearing (media lui $e^{\hat{u}}$ pe datele de formare): 0,95 ($p = 0{,}39$), respectiv 0,94 ($p = 0{,}29$)
- Țintele se suprapun pe 20 din 21 de zile
  - varianța Diebold–Mariano este HAC cu 21 de lag-uri
- Variabilele instrumentale: estimare GMM exact identificată, cu covarianță HAC
  - GMM: generalized method of moments, metoda generalizată a momentelor

înapoi

Puterea predictivă a VRP ex ante și inferența pe orizonturi suprapuse

Orizont	$\hat{b}$	t_{NW}	t_{HH}	$t_{Hodrick}$	p_{boot}	R^2 (%)
$h = 1$	0,07	0,33	0,36	0,41	0,35	0,2
$h = 3$	0,09	0,69	0,67	1,33	0,07	1,2
$h = 6$	0,03	0,49	0,48	0,65	0,26	0,3
$h = 12$	−0,02	−0,64	−0,79	−0,54	0,69	0,2

- Date lunare 1990–2026: $\frac{12}{h}\sum_{j=1}^{h} r^e_{t+j} = a + b\,\mathrm{VRP}_t + u_t$ Bollerslev, Tauchen & Zhou (2009)
  - $\mathrm{VRP}_t = VIX_t^2/12 - RV_t$: aproximarea ex ante, cu RV_t trecută ca prognoză
  - r^e_{t+j}: randamentul în exces S&P 500 din luna $t + j$
  - h: orizontul, în luni
- $VIX_t^2/12$ folosește VIX de la sfîrșitul lunii
  - RV_t însumează pătratele randamentelor logaritmice zilnice (%) din luna t

înapoi

VRP: inferența pe orizonturi suprapuse

- Dacă erorile lunare sînt necorelate serial, suprapunerea face din u_t un MA($h-1$)
  - proces de medie mobilă de ordinul $h-1$
  - Newey–West (t_{NW}, h lag-uri), Hansen–Hodrick (t_{HH}) Hansen & Hodrick (1980), Hodrick 1B ($t_{Hodrick}$) Hodrick (1992): sub ipoteza nulă, mărimea testului este mai apropiată de nivelul nominal
  - Într-un eșantion dat, $t_{Hodrick}$ poate depăși totuși t_{NW}: la $h=3$, 1,33 față de 0,69
  - Aceste lățimi de bandă sînt fixate de noi, deci le verificăm sensibilitatea
- p_{boot}: valoarea p bootstrap unilaterală Stambaugh (1999)
  - VRP urmează un AR(1), autoregresiv de ordinul 1 ($\hat{\phi}=0{,}13$), sub $b=0$
  - reziduurile sînt reeșantionate împreună
- Pe eșantionul complet 1990–2026 niciun orizont nu este semnificativ
  - pe 1990–2007 (Secțiunea 11), $h=3$ este semnificativ

Înapoi

Studiul de caz, filtre și protocolul de prognoză

- Datele opțiunilor: Cboe pentru 1990–1995 și 2020–2021, OptionMetrics pentru 1996–2019
- Filtre: doar opțiuni standard (fără cele săptămînale sau trimestriale)
  - cotație de cumpărare > 0, opțiunea OTM la fiecare preț de exercitare
  - între 7 și 550 de zile, cel puțin 10 prețuri de exercitare pe scadență
- Randamentele: S&P 500 cu dividende minus rata fără risc Fama–French, pînă în martie 2021
- În afara eșantionului (Tabelul 8): prognoze lunare comparate cu media istorică a randamentelor pieței
  - media istorică este calculată din 1926
  - fereastra inițială are 60 de luni și se extinde în timp
  - $R^2_{OS} = 1 - \sum \varepsilon_t^2 / \sum \nu_t^2$, ε_t și ν_t erorile prognozei și ale reperului
  - Teste Diebold–Mariano Diebold & Mariano (1995)

Înapoi

Bucla descoperirii, prompturi reutilizabile (1/2)

- **Literatura**:
  - `"Listează testele publicate ale predictibilității randamentelor prin VRP din 2009 încoace: DOI, eșantion, orizont, tabel, estimarea principală."`
  - Căutați cu Semantic Scholar, Google Scholar sau Elicit
- **Ipoteze**:
  - `"Dă trei explicații concurente ale predictibilității prin VRP și implicația testabilă a fiecăreia pentru profilul pe orizonturi, pentru 2008-2026 și pentru piețele din afara SUA."`
- **Date și cod**:
  - `"Scrie cod Python care construiește VIX la pătrat/12 și varianța realizată lunară din închiderile zilnice VIX și S&P 500 din datele cursului și reproduce Tabelul 2 din Bollerslev, Tauchen și Zhou (2009), h = 3, cu erori standard Hodrick (1992)."`
  - Orice asistent (Claude, ChatGPT, Gemini, GitHub Copilot)

Înapoi

Bucla descoperirii, prompturi reutilizabile (2/2)

- **Robustețea**, fixată înaintea rezultatelor:
  - `"Redactează un plan de analiză: orizonturi, data de început a testului în afara eșantionului, reper, statistica de test și corecția pentru testarea multiplă pe orizonturi."`
  - Placebo: VRP întîrziată cu 12 luni sau permutată pe blocuri
  - Subeșantioane
  - Opțional: varianța realizată din randamente SPY la 5 minute (din 2020), dacă aveți date intrazilnice, absente din datele cursului
- **Critica**:
  - `"Joacă rolul unui recenzent ostil: de ce ar putea acest R2 în afara eșantionului să fie fals sau deplasat și ce test tranșează fiecare obiecție?"`
  - De așteptat: verificările de pe slide-ul principal, plus deplasarea cu regresori persistenți
- **Raportul**: fiecare orizont și specificație încercată, într-un singur tabel
  - cu planul datat înaintea rezultatelor
  - utilizarea AI consemnată în jurnal

Înapoi

Acronime folosite în acest material (1/3)

- **0DTE**: Zero Days To Expiry (options) — *opțiuni cu zero zile până la scadență*
- **AI**: Artificial Intelligence — *inteligență artificială*
- **AR**: AutoRegressive model — *model autoregresiv*
- **ATM**: At-The-Money — *la bani: prețul de exercitare apropiat de forward*, $k = \ln(K/F) \approx 0$
- **BTC**: bitcoin, currency code of the cryptocurrency — *bitcoin, codul criptomonedei*
- **COVID-19**: COronaVIrus Disease 2019 — *boala provocată de coronavirus, 2019*
- **CRR**: Cox–Ross–Rubinstein (binomial tree) — *arborele binomial Cox–Ross–Rubinstein*
- **DVOL**: Deribit Volatility Index — *indicele de volatilitate Deribit (opțiuni Bitcoin, 30 de zile)*
- **ETF**: Exchange-Traded Fund — *fond tranzacționat la bursă*
- **GARCH**: Generalised AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity — *heteroscedasticitate condiționată autoregresivă generalizată*
- **GJR**: Glosten–Jagannathan–Runkle (asymmetric GARCH) — *GARCH asimetric Glosten–Jagannathan–Runkle*
- **GJR-GARCH**: Glosten–Jagannathan–Runkle GARCH — *GARCH asimetric Glosten–Jagannathan–Runkle*
- **GMM**: Generalized Method of Moments — *metoda generalizată a momentelor*

Acronime folosite în acest material (2/3)

- **HAC**: Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent (standard errors) — *erori standard robuste la heteroscedasticitate și autocorelație*
- **HAR**: Heterogeneous AutoRegressive (model) — *model autoregresiv heterogen*
- **HAR-RV**: Heterogeneous AutoRegressive model of Realised Volatility — *model autoregresiv heterogen al volatilității realizate*
- **ITM**: In-The-Money — *în bani: un put cu $K > F$ sau un call cu $K < F$*
- **IV**: Implied Volatility — *volatilitatea implicită (mark IV; eticheta graficului structurii la termen Bitcoin), nu variabile instrumentale*
- **MA**: Moving Average — *medie mobilă*
- **NBER**: National Bureau of Economic Research — *Biroul Național de Cercetări Economice (SUA)*
- **OLS**: Ordinary Least Squares — *metoda celor mai mici pătrate*
- **OTM**: Out-of-The-Money — *în afara banilor: un put cu $K < F$ sau un call cu $K > F$*
- **QLIKE**: Quasi-LIKElihood (loss function) — *funcția de pierdere de tip cvasi-verosimilitate*
- **QV**: Quadratic Variation — *variația pătratică: varianța realizată inclusiv salturile*
- **RV**: Realised Variance — *varianța realizată*
- **SE**: Standard Error — *eroarea standard*

Acronime folosite în acest material (3/3)

- **SSVI**: Surface SVI (Gatheral–Jacquier parameterisation of the whole surface) — *SVI pentru întreaga suprafață (parametrizarea Gatheral–Jacquier)*
- **SUA**: Statele Unite ale Americii
- **SVI**: Stochastic Volatility Inspired (parameterisation) — *parametrizarea inspirată de volatilitatea stocastică*
- **SVIX**: Simple VIX: index of simple variance swaps (Martin, 2017) — *indicele swap-urilor de varianță simple (Martin, 2017)*
- **USD**: US dollar, international currency code — *dolarul american, codul monetar internațional*
- **UTC**: Coordinated Universal Time (Temps Universel Coordonné) — *timpul universal coordonat*
- **VAR**: Vector AutoRegression — *model vector autoregresiv*
- **VIX**: Cboe Volatility Index — *indicele de volatilitate Cboe*
- **VIX3M**: Cboe 3-Month Volatility Index — *indicele Cboe de volatilitate implicită pe 3 luni*
- **VIX9D**: Cboe 9-Day Volatility Index — *indicele Cboe de volatilitate implicită pe 9 zile*
- **VRP**: Variance Risk Premium — *prima de risc a varianței*
- **VVIX**: Cboe VIX of VIX Index — *indicele Cboe al volatilității implicite a VIX*
- **XFG**: Quantlet prefix of Applied Quantitative Finance (Härdle, Chen & Overbeck) — *prefixul Quantlet-urilor din Applied Quantitative Finance (Härdle, Chen & Overbeck)*

Bibliografie (1/5)

- Aït-Sahalia, Y., Duarte, J. (2003). Nonparametric option pricing under shape restrictions. *Journal of Econometrics*, 116(1–2), 9–47.
- Aït-Sahalia, Y., Lo, A.W. (1998). Nonparametric estimation of state-price densities implicit in financial asset prices. *Journal of Finance*, 53(2), 499–547.
- Alexander, C., Imeraj, A. (2020). The Bitcoin VIX and its variance risk premium. *Journal of Alternative Investments*, 23(4), 84–109.
- Amihud, Y., Hurvich, C.M. (2004). Predictive regressions: a reduced-bias estimation method. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 39(4), 813–841.
- Andersen, T.G., Fusari, N., Todorov, V. (2015). The risk premia embedded in index options. *Journal of Financial Economics*, 117(3), 558–584.
- Back, K., Crotty, K., Kazempour, S.M. (2022). Validity, tightness, and forecasting power of risk premium bounds. *Journal of Financial Economics*, 144(3), 732–760.
- Bakshi, G., Kapadia, N. (2003). Delta-hedged gains and the negative market volatility risk premium. *Review of Financial Studies*, 16(2), 527–566.
- Bakshi, G., Kapadia, N., Madan, D. (2003). Stock return characteristics, skew laws, and the differential pricing of individual equity options. *Review of Financial Studies*, 16(1), 101–143.
- Bali, T.G., Beckmeyer, H., Mörke, M., Weigert, F. (2023). Option return predictability with machine learning and big data. *Review of Financial Studies*, 36(9), 3548–3602.
- Bandi, F.M., Fusari, N., Renò, R. (2023). 0DTE option pricing. SSRN Working Paper 4503344.
- Bates, D.S. (1991). The crash of '87: was it expected? The evidence from options markets. *Journal of Finance*, 46(3), 1009–1044.
- Beckmeyer, H., Branger, N., Gayda, L. (2023). Retail traders love 0DTE options... but should they?. SSRN Working Paper 4404704.
- Bertsimas, D., Kogan, L., Lo, A.W. (2000). When is time continuous?. *Journal of Financial Economics*, 55(2), 173–204.

Bibliografie (2/5)

- Black, F., Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637–654.
- Bollerslev, T., Tauchen, G., Zhou, H. (2009). Expected stock returns and variance risk premia. *Review of Financial Studies*, 22(11), 4463–4492.
- Breeden, D.T., Litzenberger, R.H. (1978). Prices of state-contingent claims implicit in option prices. *Journal of Business*, 51(4), 621–651.
- Britten-Jones, M., Neuberger, A. (2000). Option prices, implied price processes, and stochastic volatility. *Journal of Finance*, 55(2), 839–866.
- Brogaard, J., Han, J., Won, P.Y. (2023). Does 0DTE options trading increase volatility?. SSRN Working Paper 4426358.
- Busch, T., Christensen, B.J., Nielsen, M.Ø. (2011). The role of implied volatility in forecasting future realized volatility and jumps in foreign exchange, stock, and bond markets. *Journal of Econometrics*, 160(1), 48–57.
- Campbell, J.Y., Thompson, S.B. (2008). Predicting excess stock returns out of sample: can anything beat the historical average?. *Review of Financial Studies*, 21(4), 1509–1531.
- Carr, P., Wu, L. (2009). Variance risk premiums. *Review of Financial Studies*, 22(3), 1311–1341.
- Cboe Global Indices (2025). Cboe Volatility Index: Methodology. Cboe Global Markets.
- Cboe Global Markets (2023). The evolution of same day options trading, de S. Doar. Cboe Insights, 3 august 2023.
- Chabi-Yo, F., Loudis, J. (2020). The conditional expected market return. *Journal of Financial Economics*, 137(3), 752–786.
- Christensen, B.J., Prabhala, N.R. (1998). The relation between implied and realized volatility. *Journal of Financial Economics*, 50(2), 125–150.
- Christie, A.A. (1982). The stochastic behavior of common stock variances: value, leverage and interest rate effects. *Journal of Financial Economics*, 10(4), 407–432.

Bibliografie (3/5)

- Čížek, P., Härdle, W.K., Weron, R. (Eds.) (2011). Statistical Tools for Finance and Insurance, 2nd ed. Springer.
- Clark, T.E., West, K.D. (2007). Approximately normal tests for equal predictive accuracy in nested models. *Journal of Econometrics*, 138(1), 291–311.
- Corsi, F. (2009). A simple approximate long-memory model of realized volatility. *Journal of Financial Econometrics*, 7(2), 174–196.
- Cox, J.C., Ross, S.A., Rubinstein, M. (1979). Option pricing: a simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7(3), 229–263.
- Delbaen, F., Schachermayer, W. (1994). A general version of the fundamental theorem of asset pricing. *Mathematische Annalen*, 300(1), 463–520.
- Demeterfi, K., Derman, E., Kamal, M., Zou, J. (1999). A guide to volatility and variance swaps. *Journal of Derivatives*, 6(4), 9–32.
- Deribit. DVOL: Bitcoin volatility index. Statistics page.
- Diebold, F.X., Mariano, R.S. (1995). Comparing predictive accuracy. *Journal of Business & Economic Statistics*, 13(3), 253–263.
- Dupire, B. (1994). Pricing with a smile. *Risk*, 7(1), 18–20.
- Franke, J., Härdle, W.K., Hafner, C.M. (2019). Statistics of Financial Markets: An Introduction, 5th ed. Springer.
- Gârleanu, N., Pedersen, L.H., Poteshman, A.M. (2009). Demand-based option pricing. *Review of Financial Studies*, 22(10), 4259–4299.
- Gatheral, J. (2006). The Volatility Surface: A Practitioner's Guide. Wiley.
- Gatheral, J., Jacquier, A. (2014). Arbitrage-free SVI volatility surfaces. *Quantitative Finance*, 14(1), 59–71.
- Goyal, A., Welch, I., Zafirov, A. (2024). A comprehensive 2022 look at the empirical performance of equity premium prediction. *Review of Financial Studies*, 37(11), 3490–3557.
- Grith, M., Härdle, W.K., Park, J. (2013). Shape invariant modeling of pricing kernels and risk aversion. *Journal of Financial Econometrics*, 11(2), 370–399.

Bibliografie (4/5)

- Hansen, L.P., Hodrick, R.J. (1980). Forward exchange rates as optimal predictors of future spot rates: an econometric analysis. *Journal of Political Economy*, 88(5), 829–853.
- Härdle, W.K., Chen, C.Y.-H., Overbeck, L. (Eds.) (2017). Applied Quantitative Finance, 3rd ed. Springer.
- Harrison, J.M., Pliska, S.R. (1981). Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Processes and their Applications*, 11(3), 215–260.
- Heston, S.L. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies*, 6(2), 327–343.
- Hodrick, R.J. (1992). Dividend yields and expected stock returns: alternative procedures for inference and measurement. *Review of Financial Studies*, 5(3), 357–386.
- Hull, J., White, A. (1987). The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *Journal of Finance*, 42(2), 281–300.
- Jackwerth, J.C. (2000). Recovering risk aversion from option prices and realized returns. *Review of Financial Studies*, 13(2), 433–451.
- Jackwerth, J.C., Rubinstein, M. (1996). Recovering probability distributions from option prices. *Journal of Finance*, 51(5), 1611–1631.
- Jiang, G.J., Tian, Y.S. (2005). The model-free implied volatility and its information content. *Review of Financial Studies*, 18(4), 1305–1342.
- Kodde, D.A., Palm, F.C. (1986). Wald criteria for jointly testing equality and inequality restrictions. *Econometrica*, 54(5), 1243–1248.
- Lee, R.W. (2004). The moment formula for implied volatility at extreme strikes. *Mathematical Finance*, 14(3), 469–480.
- Lochstoer, L.A., Muir, T. (2022). Volatility expectations and returns. *Journal of Finance*, 77(2), 1055–1096.
- MacKenzie, D., Millo, Y. (2003). Constructing a market, performing theory: the historical sociology of a financial derivatives exchange. *American Journal of Sociology*, 109(1), 107–145.

Bibliografie (5/5)

- Martin, I. (2017). What is the expected return on the market?. *Quarterly Journal of Economics*, 132(1), 367–433.
- Matic, J.L., Packham, N., Härdle, W.K. (2023). Hedging cryptocurrency options. *Review of Derivatives Research*, 26(1), 91–133.
- Merton, R.C. (1973). Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1), 141–183.
- Merton, R.C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3(1–2), 125–144.
- Mincer, J., Zarnowitz, V. (1969). The evaluation of economic forecasts. In *Economic Forecasts and Expectations*, NBER, 3–46.
- Newey, W.K., West, K.D. (1987). A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix. *Econometrica*, 55(3), 703–708.
- Patton, A.J. (2011). Volatility forecast comparison using imperfect volatility proxies. *Journal of Econometrics*, 160(1), 246–256.
- Pele, D.T., Mazurencu-Marinescu, M. (2012). Modelling stock market crashes: the case of Bucharest Stock Exchange. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 58, 533–542.
- Pele, D.T., Wesselhöfft, N., Härdle, W.K., Kolossiatis, M., Yatracos, Y.G. (2023). Are cryptos becoming alternative assets?. *European Journal of Finance*, 29(10), 1064–1105.
- Rubinstein, M. (1994). Implied binomial trees. *Journal of Finance*, 49(3), 771–818.
- Stambaugh, R.F. (1999). Predictive regressions. *Journal of Financial Economics*, 54(3), 375–421.
- Welch, I., Goyal, A. (2008). A comprehensive look at the empirical performance of equity premium prediction. *Review of Financial Studies*, 21(4), 1455–1508.
- Whaley, R.E. (2000). The investor fear gauge. *Journal of Portfolio Management*, 26(3), 12–17.
- Zulfiqar, N., Gulzar, S. (2021). Implied volatility estimation of bitcoin options and the stylized facts of option pricing. *Financial Innovation*, 7, 67.