









Modelarea piețelor financiare

Capitolul 1: Fapte stilizate și randamente



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București
IDA Institute Digital Assets
Blockchain Research Center
AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance
Academia Română, Institutul de Prognoză Economică
MSCA Digital Finance

Ce regularități au randamentele pe toate piețele?



Benoît Mandelbrot. **Foto: Rama (2007); CC BY-SA 2.0 FR; Wikimedia Commons**

"... large changes tend to be followed by large changes—of either sign—and small changes tend to be followed by small changes ..."

— *Mandelbrot (1963)*

- S&P 500 (*Standard & Poor's*), randamente logaritmice zilnice, 1990–2026: autocorelația de lag 1 este $-0{,}08$
  - doar 7 din 100 de laguri ies din banda robustă
- Autocorelația randamentelor absolute $|r_t|$: 0,27 la lagul 1 și încă 0,09 la lagul 100
- Excesul de kurtosis al S&P 500: 10,9 pentru randamentele zilnice, 1,6 pentru cele pe 60 de zile
  - distribuția Normală rămîne respinsă și la 60 de zile ($z = 4{,}1$)
- Parametrul de memorie lungă al lui $|r_t|$, $\hat{d}$: între 0,35 și 0,50 pe toate cele cinci piețe

▸ Graficul central: randamente necorelate, dar dependente

Randamente imprevizibile, volatilitate previzibilă

Rezultatele învățării

- calculați și agregați randamente simple și logaritmice
- calculați momente, cuantile și estimatorul Hill
- interpretați lipsa corelației: nu este independență
- interpretați teste cu distribuții de referință valide
- calculați volatilitatea din deschidere, maxim, minim și închidere
- interpretați o ipoteză a unui asistent de inteligență artificială (AI)
- Aprofundări și Anexa: lectură pentru familiarizare

Definiție

- Un **fapt stilizat** este o regularitate statistică calitativă a **randamentelor**
  - observată pe multe active, piețe și perioade Cont (2001)
- Fiecare fapt stilizat rămîne o ipoteză, testată din nou pe fiecare piață și frecvență Ratliff-Crain, Van Oort, Koehler & Tivnan (2025)
- Ideea centrală: randamentele sînt slab autocorelate liniar
  - dar **mărimea** lor este în mare măsură predictibilă

- Faptele stilizate sînt proprietățile pe care orice model al randamentelor trebuie să le reproducă
  - demonstrațiile: Anexa
  - modelul i.i.d. (independente și identic distribuite) cu distribuția Normală nu reproduce majoritatea lor

Cele unsprezece fapte stilizate

Grupă	Fapte
Distribuție	2. cozi groase; 3. asimetria cîștig/pierdere; 4. gaussianitate prin agregare; 7. cozi groase condiționate
Dependența randamentelor	1. absența autocorelației liniare
Dependența volatilității	5. intermitență; 6. gruparea volatilității (*volatility clustering*); 8. scăderea lentă a autocorelației lui $\|r_t\|$; 11. asimetria scalelor de timp
Legături cu alte variabile	9. efectul de levier (*leverage effect*); 10. corelația volum–volatilitate

- Lista celor unsprezece fapte este cea din Cont (2001)
- Pe cinci piețe, cu date pînă în septembrie 2026, testăm din nou faptele 1–6 și 8–10
  - cu inferența adecvată; faptele 7 și 11 cer un model de volatilitate (Capitolele 5 și 9)
- Primele dovezi empirice: Mandelbrot (1963), Fama (1965)
- În manuale: Taylor (2008), Franke, Härdle & Hafner (2019)
- Exemplele detaliate și subiectele avansate sînt în Aprofundări, după Concluzii
  - butonul din subsol duce la ele, iar butonul Înapoi revine la slide-ul de plecare

Cinci piețe cu reguli de cotare și calendare diferite

Serie	Tip de preț	Tip, monedă	Calendar	Eșantion	T
S&P 500	închidere zilnică (plus deschidere, maxim, minim)	indice de preț, USD	zilele de tranzacționare din SUA	1990–2026	9 245
BET-TR	închidere zilnică	randament total, RON	zilele de tranzacționare ale Bursei de Valori București (BVB)	sept. 2014 – 2026	2 992
Bitcoin	închidere zilnică	preț, USD	în fiecare zi, 24/7	sept. 2014 – 2026	4 384
EUR/RON	cursul de referință al Băncii Naționale a României (BNR)	lei pe euro, managed float	zilele lucrătoare din România	iul. 2005 – 2026	5 352
Aur	închidere zilnică	spot, USD pe uncie	doar zilele lucrătoare	1990–2026	9 559

- Prețuri de închidere zilnice până la 18 septembrie 2026
  - randamente logaritmice, fiecare serie pe propriul calendar
  - T: numărul de randamente
- BET-TR: indicele BET (*Bucharest Exchange Trading*), indicele de referință al BVB (Bursa de Valori București), cu dividendele reinvestite (randament total, *total return*)
- **Managed float** (flotare administrată): cursul se formează pe piață, cu intervenții ale băncii centrale
  - folosim cursul de referință BNR (Banca Națională a României): cotațiile interbancare EUR (moneda euro)/RON (euro/leu) au, în mai mulți ani, o autocorelație de lag 1 între $-0{,}4$ și $-0{,}7$, generată de erori de cotare

Randament simplu sau logaritmic: ce se adună în timp și ce se adună între active

	Randament simplu R_t	**Randament logaritmic r_t**
Definiție	$(P_t + D_t)/P_{t-\mathbf{1}} - \mathbf{1}$	$\ln(\mathbf{1} + R_t) = \ln P_t - \ln P_{t-\mathbf{1}}$ (fără dividend)
Pe k perioade	$\prod_{j=\mathbf{0}}^{k-\mathbf{1}}(1 + R_{t-j}) - \mathbf{1}$	$\sum_{j=\mathbf{0}}^{k-\mathbf{1}} r_{t-j}$: aditiv în **timp**
Agregare între active	$R_{p,t} = \sum_i w_i R_{i,t}$: exactă	doar aproximativă
Domeniu	$R_t \geq -100\%$	$(-\infty, +\infty)$
Utilizare tipică	portofolii, raportarea randamentelor	dinamica unui activ, teorema limită centrală (CLT)

- Notațiile
  - P_t: prețul de închidere al zilei t; D_t: dividendul plătit în $(t-1, t]$
  - k: numărul de perioade agregate, indexate de $j = 0, \ldots, k-1$
  - $R_{i,t}$: randamentul simplu al activului i; w_i: ponderea lui în portofoliu, cu $\sum_i w_i = 1$; $R_{p,t}$: randamentul portofoliului
- Pentru active cu dividende: serii de randament total sau ajustate (BET-TR)

De la zi la an: media anuală și regula $\sqrt{A}$

- A: numărul de perioade de randament dintr-un an
  - 252 pentru acțiuni și EUR/RON (zile de tranzacționare), 365 pentru cripto (tranzacționate în fiecare zi), $\approx$ 260 pentru aur (cotațiile efective din zilele lucrătoare)
- $\mu_{\text{an}} = A\,\bar{r}$, cu $\bar{r} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_t$: media anuală a randamentelor **logaritmice**
  - rata de creștere logaritmică
  - presupune doar o medie constantă
  - raportul Sharpe folosește media anuală a randamentelor **simple**, $A\bar{R}$, mai mare
- $\sigma_{\text{an}} = \sqrt{A}\,\hat{\sigma}$, cu $\hat{\sigma}$ abaterea standard empirică zilnică
  - exactă doar pentru randamente necorelate serial, cu variață constantă
  - atunci variațele zilnice se adună, iar varianța anuală este $A\,\hat{\sigma}^2$
  - cu autocorelație, factorul $\sqrt{A}$ nu mai este exact: dacă $\hat{\rho}_1 = 0{,}17$ al EUR/RON ar fi parametrul unui model autoregresiv de ordinul 1, AR(1), volatilitatea anualizată ar fi de circa 5,3% în loc de 4,4% (Anexă)
  - scalarea empirică cere întreaga structură de autocovariațe: pentru EUR/RON, autocorelațiile negative de la alte laguri compensează lagul 1 (Capitolul 0; Seminarul 1, A7)

CAGR și frîna volatilității: de ce media aritmetică supraestimează creșterea

- **CAGR** (Compound Annual Growth Rate): randamentul anual constant care duce prețul de la P_0 la P_T

$$\text{CAGR} = (P_T/P_0)^{1/Y} - 1$$

  - P_0, P_T: prețul la începutul și la sfîrșitul eșantionului
  - Y: numărul de ani
  - CAGR este media geometrică anuală a factorilor de creștere

- Pe scară logaritmică, rata de creștere compusă este media aritmetică minus jumătate din varianță:

$$\ln(1 + \text{CAGR}) = \tfrac{1}{Y} \ln(P_T/P_0) \approx \mu_{\text{aritm}} - \sigma^2/2$$

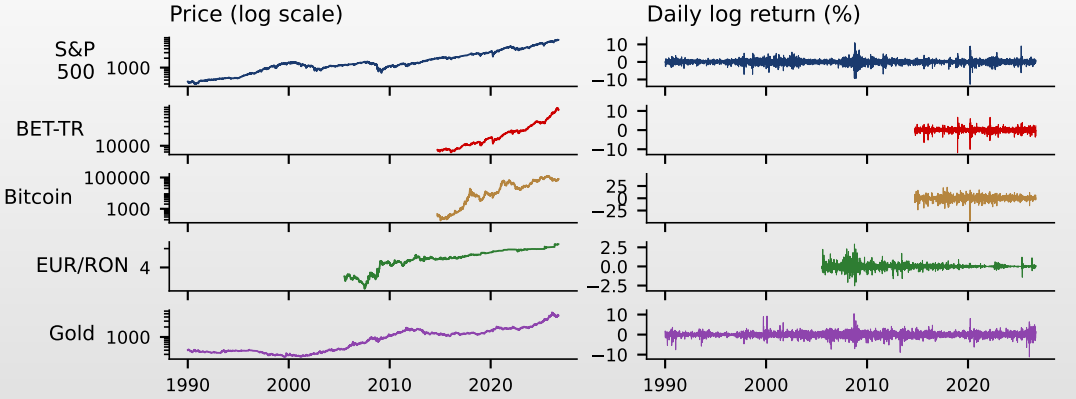
  - μ_{aritm}: media aritmetică anuală a randamentelor simple; σ^2: varianța lor anuală
  - $\ln(1 + \text{CAGR})$: rata de creștere compusă continuu, adică media anuală a randamentelor logaritmice $A\bar{r}$
  - **frîna volatilității** (*volatility drag*): diferența dintre media aritmetică și cea geometrică; pe scară logaritmică este $\approx \sigma^2/2$ și crește cu pătratul volatilității

Frîna volatilității în cifre: S&P 500 și Bitcoin

	μ_{aritm}	σ	$\sigma^2/2$	$\ln(1+\text{CAGR})$	CAGR
S&P 500 1990–2026 ($A = 252$)	9,95%	17,97%	1,61 pp	8,33%	8,69%
Bitcoin 2014–2026 ($A = 365$)	65,2%	66,2%	21,9 pp	43,1%	53,9%

- Frîna pe scară logaritmică, $\mu_{\text{aritm}} - \ln(1+\text{CAGR})$, este apropiat de $\sigma^2/2$
  - 1,62 pp (puncte procentuale) pentru S&P 500
  - 22,1 pp pentru Bitcoin
- Frîna față de CAGR, $\mu_{\text{aritm}} - \text{CAGR}$: 1,26 pp și 11 pp
  - mai mic, deoarece $\text{CAGR} = e^{\ln(1+\text{CAGR})} - 1$ este peste logaritmul său: $e^{0,431} - 1 = 53,9\%$
  - cînd o valoare este numită „frînă", precizați care dintre cele două diferențe este
- **Verificare**: aurul are CAGR 6,7% și $\sigma = 16,3\%$. Estimați μ_{aritm}
  - răspuns: $\ln 1,067 + 0,163^2/2 = 6,5\% + 1,3\% \approx 7,8\%$; cu $r_f = 0$, raportul Sharpe este $\mu_{\text{aritm}}/\sigma$, deci $0,48 \times 16,3\% \approx 7,8\%$ (tabelul din anexă)

Cinci piețe: prețuri și randamente logaritmice zilnice



Prețurile au tendință, randamentele oscilează în jurul unei medii mici

- **Stînga:** prețuri pe scală logaritmică: serii cu tendință, nestaționare
- **Dreapta:** randamentele logaritmice zilnice
  - fluctuează în jurul unei medii mici
  - perioadele calme alternează cu cele agitate
  - valorile extreme apar grupat (2008, martie 2020)
- EUR/RON variază cu peste 1% doar în 1,4% din zile
- Bitcoin, 12 martie 2020: randament logaritmic $-46{,}5\%$
  - prețul se înmulțește cu e^{r_t}, deci scade cu $1 - e^{-0{,}465} = 37{,}2\%$

MFM_ch1_returns

Faptul 2, cozi groase: întrebarea și instrumentele

- **Întrebarea**: sînt zilele extreme mai frecvente decît sub distribuția Normală?
  - distribuția Normală de referință are aceeași medie și aceeași varianță
- **Kurtosisul** $\hat{K}$ (slide-ul următor) și testul de normalitate Jarque–Bera (JB)
  - $\hat{K} > 3$ indică cozi mai groase decît la distribuția Normală
  - inferența despre kurtosis (eroarea standard a lui $\hat{K}$) cere $\mathbb{E}r^8 < \infty$; cu indicele cozii (*tail index*) $\alpha \approx 3$ (mai jos) devine nesigură
  - testul JB (testul de normalitate Jarque–Bera) al ipotezei nule „i.i.d., distribuția Normală" rămîne calibrat: sub H_0 toate momentele există
  - cozile groase ale alternativei duc la respingere, fără să invalideze valorile critice sub H_0
  - pentru normalitatea distribuției marginale, cu dependență în timp, calibrarea trebuie adaptată (Bai & Ng (2005))
- **Graficul cuantilă–cuantilă** (graficul QQ, *Quantile–Quantile plot*): punctele $\left(\Phi^{-1}(p_i),\ z_{(i)}\right)$, cu $p_i \approx (i - \frac{1}{2})/T$, $i = 1, \ldots, T$
  - $z_{(i)}$: a i-a cea mai mică valoare a randamentului standardizat; Φ^{-1}: funcția cuantilă a distribuției Normale standard
  - sub distribuția Normală punctele stau pe dreapta $y = x$; cozile groase le îndepărtează de ea la ambele capete
- **Indicele cozii** α, estimat cu metoda Hill din cele mai mari valori $|r_t|$
  - nu cere momente finite (definiția)

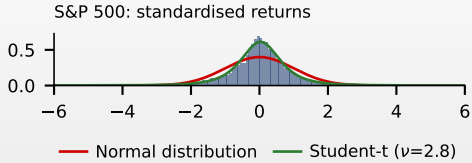
Asimetria și kurtosisul: forma distribuției după standardizare

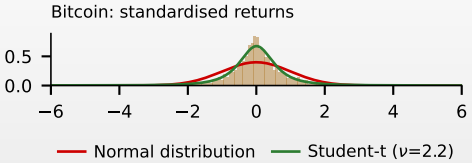
- Asimetria empirică $\hat{S}$ și kurtosisul empiric $\hat{K}$ ale randamentului standardizat z_t

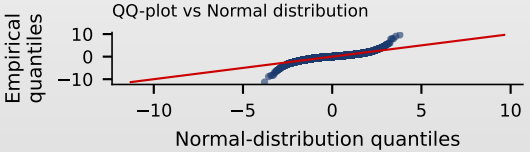
$$z_t = \frac{r_t - \bar{r}}{\hat{\sigma}}, \qquad \hat{S} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} z_t^3, \qquad \hat{K} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} z_t^4$$

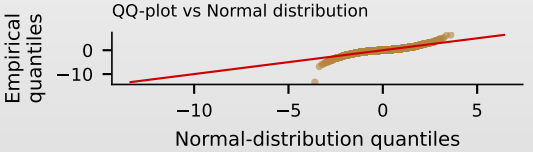
  - $\hat{S} < 0$: coada stîngă este mai lungă, pierderile mari domină
  - $\hat{K} > 3$: mai multă masă în centru și în cozi decît la distribuția Normală
- Distribuția Normală: $S = 0$, $K = 3$, excesul de kurtosis $K - 3 = 0$

Faptul 2, cozi groase: histograme și grafice cuantilă–cuantilă (QQ)









MFM_ch1_heavy_tails ▶ Interactiv

Faptul 2: mai multe zile extreme decît sub distribuția Normală

- Histogramele: randamentele standardizate au un vîrf mai înalt și cozi mai groase decît distribuția Normală
  - distribuția Normală de referință are aceeași variață
- Graficele QQ: punctele se abat de la dreapta $y = x$ în ambele cozi
- O distribuție Student-t descrie centrul distribuției mult mai bine decît distribuția Normală
  - dacă descrie și cozile este o întrebare separată, la care răspunde estimatorul Hill

MFM_ch1_heavy_tails

Noțiuni pentru teste: ARCH, gruparea volatilității, indicele cozii

- **ARCH** (heteroscedasticitate condiționată autoregresivă): varianța de azi depinde de randamentele trecute
- **Volatility clustering**: zilele cu variații mari tind să fie urmate de zile cu variații mari
- **Indicele cozii** α măsoară cît de repede scade probabilitatea valorilor extreme

$$P(|r_t| > x) \approx c\, x^{-\alpha} \quad \text{pentru } x \text{ mare}$$

  - x: un prag pozitiv
  - $c > 0$: o constantă de scală
  - un α mic înseamnă o coadă groasă: probabilitatea scade lent cînd x crește
  - deci $\mathbb{E}|r_t|^p < \infty$ doar pentru $p < \alpha$, unde p este ordinul momentului
  - estimările din acest capitol dau $\alpha \approx 3$

Trei teste clasice: normalitate, autocorelație, efecte ARCH

- **JB** (Jarque–Bera) testează normalitatea: $JB = T\left[\hat{S}^2/6 + (\hat{K}-3)^2/24\right]$
- **LB** (Ljung–Box) testează autocorelația primelor $m = 10$ laguri: $Q(m) = T(T+2)\sum_{k=1}^{m} \hat{\rho}_k^2/(T-k)$
  - $\hat{\rho}_k$: autocorelația empirică dintre r_t și r_{t-k}
- **ARCH-LM** testează dacă pătratele randamentelor sînt predictibile din trecut
  - statistica: TR^2 din regresia lui $\hat{\varepsilon}_t^2$ pe $\hat{\varepsilon}_{t-1}^2, \ldots, \hat{\varepsilon}_{t-q}^2$
  - LM: testul multiplicatorului Lagrange; $\hat{\varepsilon}_t = r_t - \bar{r}$: reziduurile; $q = 5$ laguri
- Distribuțiile de referință sub H_0: χ_2^2, χ_m^2, χ_q^2
  - valorile mari resping H_0
  - valori critice la 5%: $\chi_2^2 = 5{,}99$, $\chi_5^2 = 11{,}1$, $\chi_{10}^2 = 18{,}3$

Statistici descriptive: cinci piețe

	S&P 500	BET-TR	Bitcoin	EUR/RON	Aur
Observații	9 245	2 992	4 384	5 352	9 559
Medie (% pe zi)	0,033	0,077	0,118	0,007	0,025
Abatere standard (% pe zi)	1,13	0,98	3,49	0,28	1,01
Volatilitate anualizată (%)	18,0	15,5	66,6	4,4	16,3
Asimetrie	−0,36	−1,40	−0,70	0,73	−0,23
Exces de kurtosis	10,9	17,8	12,0	15,1	9,3
Randament log min / max (%)	−12,8 / 11,0	−11,9 / 6,7	−46,5 / 22,5	−2,5 / 2,9	−11,1 / 10,4
Jarque–Bera	45 805	40 433	26 482	51 575	34 732
Ljung–Box $Q(10)$, r_t	91,6	70,0	20,2	221,7	32,1
Ljung–Box $Q(10)$, r_t^2	8 018	714	213	2 420	1 049
ARCH-LM (5 laguri)	2 229	371	115	871	483

- Descriptiv: cozi groase pe toate piețele (exces de kurtosis 9,3–17,8)
  - $Q(10)$ pe r_t^2 este de 10–90 de ori mai mare decît pe r_t
  - mărimea randamentelor este mult mai predictibilă decît direcția lor
- Inferențial: toate valorile p (*p-values*) calculate sub ipoteza i.i.d. sînt sub 0,03
  - dar sînt valide doar pentru randamente i.i.d. cu momentele necesare
  - Ljung–Box pe r_t^2 și ARCH-LM presupun cel puțin moment de ordin patru finit, pus sub semnul întrebării de estimările Hill

MFM_ch1_summary_statistics

Estimatorul Hill: indicele cozii din cele mai mari observații

- Indicele cozii α al lui $X = |r_t|$
  - $\alpha > 2$: variață finită
  - $\alpha > 4$: kurtosis finit
  - legile de putere au fost propuse prima dată de Mandelbrot (1963) și Fama (1965)
- **Estimatorul Hill**, Hill (1975): estimează α doar din cele mai mari k observații
  - statisticile de ordine descrescătoare $X_{(1)} \geq X_{(2)} \geq \cdots \geq X_{(n)}$ ale celor n observații
  - k: numărul de observații din coadă; $X_{(k+1)}$ este pragul peste care începe coada
- **Coada Pareto**, $P(X > x) = (x/u)^{-\alpha}$ pentru $x \geq u$, este legea de putere exactă
  - u este pragul

Estimatorul Hill: inversul mediei depășirilor logaritmice

- Estimatorul Hill este inversul mediei depășirilor logaritmice peste prag

$$\hat{\alpha}_k = \left[\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \ln X_{(i)} - \ln X_{(k+1)} \right]^{-1} = \left[\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \ln \frac{X_{(i)}}{X_{(k+1)}} \right]^{-1}$$

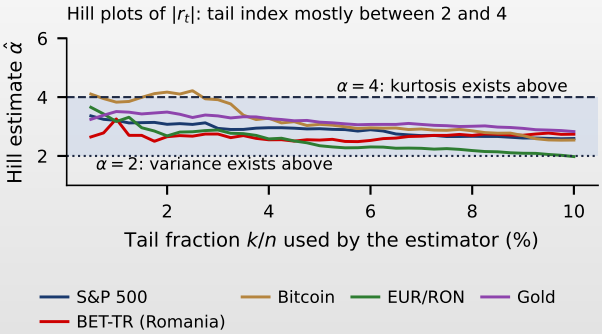
  - $\ln(X_{(i)}/X_{(k+1)})$: cu cît depășește a i-a valoare pragul, pe scară logaritmică
  - pentru o coadă Pareto, aceste depășiri au în medie valoarea $1/\alpha$
  - depășiri mari înseamnă o coadă groasă, deci un $\hat{\alpha}_k$ mic

- Eroarea standard $\mathrm{SE}(\hat{\alpha}_k) \approx \hat{\alpha}_k/\sqrt{k}$
  - intervalul de încredere (CI, *Confidence Interval*) de 95%: $\hat{\alpha}_k \pm 1{,}96\,\mathrm{SE}$
  - presupune observații independente în coadă și o coadă de tip Pareto
  - gruparea valorilor extreme mărește SE (Anexă)

Estimatorul Hill de mînă: un exemplu cu cinci numere

- Date ilustrative: cele mai mari cinci valori $|r_t|$ dintr-un eșantion, în %: 4,0; 3,0; 2,5; 2,2; 2,0
  - luăm $k = 4$, deci pragul este $X_{(5)} = 2{,}0$
- Depășirile logaritmice $\ln(X_{(i)}/X_{(5)})$, $i = 1, \ldots, 4$
  - $\ln 2 = 0{,}693$, $\ln 1{,}5 = 0{,}405$, $\ln 1{,}25 = 0{,}223$, $\ln 1{,}1 = 0{,}095$
  - media $1{,}417/4 = 0{,}354$, deci $\hat{\alpha}_4 = 1/0{,}354 = 2{,}82$
- SE $\approx 2{,}82/\sqrt{4} = 1{,}41$
  - CI de 95%: [0,06; 5,59]
  - cu 4 puncte în coadă estimarea nu spune aproape nimic; de aceea tabelele folosesc k de ordinul sutelor
- **Verificare**: dublați toate valorile (o piață de două ori mai volatilă). Ce se întîmplă cu $\hat{\alpha}_4$?
  - răspuns: nimic; rapoartele $X_{(i)}/X_{(5)}$ nu se schimbă, deci o schimbare de scală nu modifică indicele cozii
- Exercițiu complet pe date de piață: Seminarul 1, A5

Graficele Hill pentru cele cinci piețe



- $\hat{\alpha}$ pentru $|r_t|$ la $k = 2{,}5\%$ din n
  - S&P 500 3,1, BET-TR 2,7, Bitcoin 4,2, EUR/RON 2,8, aur 3,3
- Pentru $k = 1$–5%: $\hat{\alpha}$ între 2,3 și 3,5, cu excepția Bitcoin (3,1–4,2)
- Cozile se modelează cu teoria valorilor extreme (Capitolul 7)

MFM_ch1_heavy_tails ▶ Interactiv

Indicii cozii, cu intervale de încredere

$\lvert r_t \rvert$, $k = 2{,}5\%$ din n	n	k	$\hat{\alpha}$	SE i.i.d.	CI 95% (i.i.d.)	SE bootstrap pe blocuri
S&P 500	9 245	231	3,07	0,20	[2,68; 3,47]	0,33
BET-TR	2 992	74	2,67	0,31	[2,06; 3,28]	0,45
Bitcoin	4 384	109	4,22	0,40	[3,43; 5,01]	0,47
EUR/RON	5 352	133	2,82	0,24	[2,34; 3,30]	0,28
Aur	9 559	238	3,31	0,21	[2,89; 3,73]	0,24

- Bootstrap-ul pe blocuri suprapuse păstrează gruparea valorilor extreme
  - blocuri de 20 de zile, 500 de reeșantionări
  - SE bootstrap sînt de 1,1–1,6 ori mai mari decît cele i.i.d.

MFM_ch1_inference

Estimările pun sub semnul întrebării momentul de ordinul patru

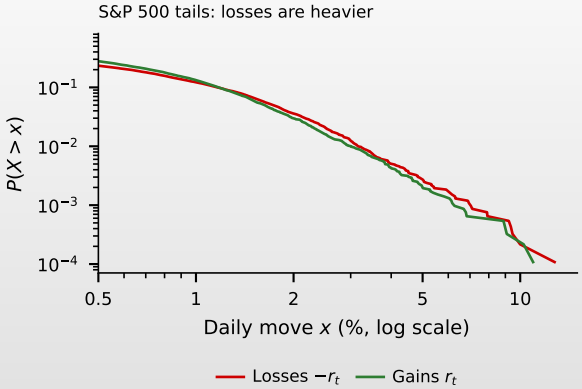
- $\alpha = 4$ este în afara tuturor intervalelor, cu excepția celui pentru Bitcoin
  - inclusiv cînd intervalul se construiește cu SE bootstrap
  - estimările pun sub semnul întrebării existența momentului de ordinul patru
  - concluzia este condiționată de aproximarea Pareto a cozii și de pragul folosit ($k = 2{,}5\%$ din n)
  - consecința: kurtosisul și testele pe r_t^2 nu au inferență standard (tabelul din Aprofundări)
- $\alpha = 2$ este în afara fiecărui interval i.i.d.
  - cu SE bootstrap, doar intervalul BET-TR îl include: limita inferioară $\hat{\alpha} - 1{,}96\,\mathrm{SE} = 2{,}67 - 1{,}96 \times 0{,}45 = 1{,}79$
- Valoarea 4,2 pentru Bitcoin corespunde unui prag la care graficul Hill (*Hill plot*) nu este încă plat
  - la un prag comun, coada pierderilor dă 2,71, iar cea a cîștigurilor 3,36 (Anexă)

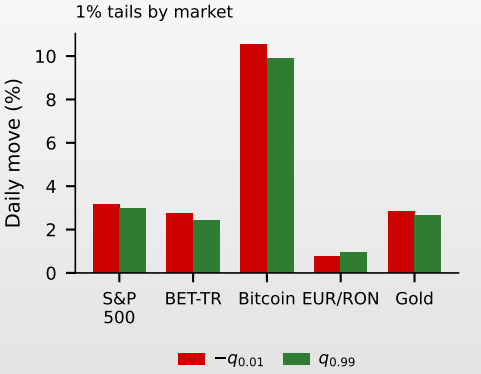
MFM_ch1_inference

Faptul 3: cum măsurăm și testăm asimetria cîștig/pierdere

- **Întrebarea**: sînt pierderile mari mai frecvente decît cîștigurile de aceeași mărime?
- **Funcția de supraviețuire** empirică $\hat{P}(X > x) = \frac{1}{T} \#\{t : X_t > x\}$
  - $X_t = -r_t$ pentru pierderi și $X_t = r_t$ pentru cîștiguri
  - pe scară log–log, o coadă Pareto $P(X > x) = (x/u)^{-\alpha}$ apare ca o dreaptă cu panta $-\alpha$
- **Statistica** $\Delta = -q_{0,01} - q_{0,99}$
  - $\Delta > 0$ înseamnă că pierderea de 1% este mai mare decît cîștigul de 1%
  - $-q_{0,01}$ este **VaR** (Value-at-Risk) 1%, pragul de pierdere zilnică depășit cu probabilitatea de 1% (Capitolul 7)
- **Testul**: $H_0 : \Delta = 0$ este respinsă dacă CI de 95% prin bootstrap pe blocuri suprapuse nu conține 0
  - blocuri de 20 de zile
  - blocurile păstrează gruparea zilelor extreme
- Pentru cozile îndepărtate: indicii Hill ai cozilor α_- (pierderi) și α_+ (cîștiguri), la același prag u

Faptul 3: asimetria cîștig/pierdere în date





MFM_ch1_heavy_tails ▶ Interactiv

Faptul 3: pierderile extreme depășesc cîștigurile, dar diferența este rar semnificativă

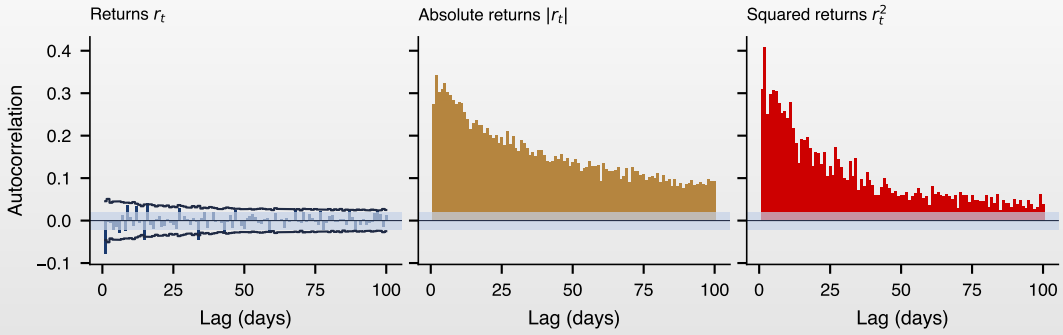
- Stînga: funcțiile de supraviețuire ale S&P 500, pe scară log–log
  - curba pierderilor stă peste cea a cîștigurilor
- Dreapta: $-q_{0,01}$ (VaR 1%, roșu) și $q_{0,99}$ (verde) pe cele cinci piețe
- $\Delta > 0$ pe 4 din 5 piețe, dar CI de 95% conține 0 pe toate patru
  - S&P 500: $\Delta = 3{,}15 - 2{,}97 = 0{,}18$ pp, CI $[-0{,}12;\ 0{,}49]$ pp
- EUR/RON: $\Delta = -0{,}17$ pp, CI $[-0{,}35;\ -0{,}07]$ pp
  - deprecierile leului (creșterile cursului) sînt semnificativ mai mari
- La același prag, coada pierderilor este mai groasă pentru BET-TR și, la limită, pentru Bitcoin
  - BET-TR: $\hat{\alpha}_- = 2{,}20$ față de $\hat{\alpha}_+ = 3{,}06$, $z = -2{,}7$ cu SE bootstrap pe blocuri
  - Bitcoin: 2,71 față de 3,36, $z = -1{,}9$
- Un model cu distribuția Normală și varianța corectă subestimează ambele cuantile extreme

MFM_ch1_heavy_tails

Faptele 1 și 6: întrebările, statisticile și benzile

- **Faptul 1**: se repetă direcția randamentelor?
  - statistica: $\hat{\rho}_k(r)$, autocorelația dintre r_t și r_{t-k}, la lagul k (în zile); în funcție de k: funcția de autocorelație (ACF, *AutoCorrelation Function*)
- **Faptul 6**: se repetă mărimea lor (gruparea volatilității)?
  - statisticile: $\hat{\rho}_k(|r|)$ și $\hat{\rho}_k(r^2)$
  - r_t^2 este legat direct de varianță, ca în modelele ARCH și GARCH (ARCH generalizat, *Generalised ARCH*)
  - $|r_t|$ cere mai puține momente: ACF (*AutoCorrelation Function*, funcția de autocorelație) a lui $|r_t|$ are o limită Normală pentru $\alpha > 4$, cea a lui r_t^2 doar pentru $\alpha > 8$ Davis & Mikosch (1998)
- **Testul** la fiecare lag: $H_0 : \rho_k = 0$, respinsă cînd $\hat{\rho}_k$ iese dintr-o bandă de 95%
  - banda este centrată în 0, valoarea sub H_0: este o bandă de respingere, nu un interval de încredere (acesta ar fi centrat în $\hat{\rho}_k$)
- Două benzi: i.i.d., $\pm 1{,}96/\sqrt{T}$, și robustă la gruparea volatilității, $\pm 1{,}96\sqrt{\hat{\tau}_k}$ (Aprofundări)

Faptele 1 și 6: randamente necorelate, dar dependente



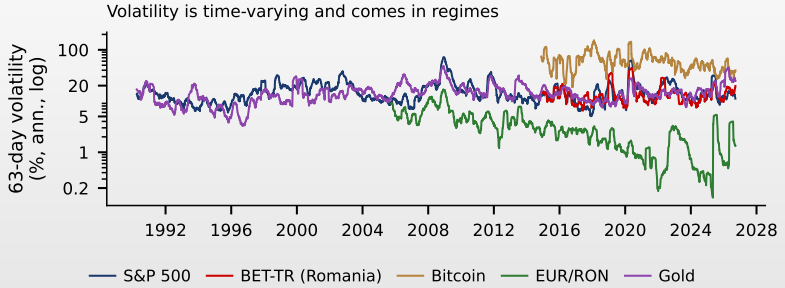
MFM_ch1_volatility_clustering ▶ Interactiv

Faptele 1 și 6: direcția nu se repetă, mărimea da

- Stînga, r_t (S&P 500, 1990–2026): $\hat{\rho}_1 = -0{,}08$
  - 20 din 100 de laguri ies din banda i.i.d. (zona albastră), dar doar 7 din banda robustă (liniile)
  - la 5%, circa 5 laguri din 100 ies din bandă întîmplător: în afară de lagul 1, Faptul 1 se confirmă
- Mijloc și dreapta: $\hat{\rho}_k(|r|)$ și $\hat{\rho}_k(r^2)$ sînt pozitive la toate cele 100 de laguri: Faptul 6
  - $\hat{\rho}_1(|r|) = 0{,}27$
  - benzile presupun moment de ordin patru finit, pus sub semnul întrebării de estimările Hill
- Autocorelațiile randamentelor sînt în general mici, cu excepții (S&P 500, EUR/RON), dar randamentele nu sînt independente
  - independența cere corelație nulă între **orice** funcții ale randamentelor
- Modelul $r_t = \sigma_t \varepsilon_t$ (GARCH, Capitolul 5)
  - σ_t: volatilitatea condiționată a zilei t, determinată de randamentele trecute; ε_t: șocuri i.i.d. cu media 0 și varianța 1

MFM_ch1_volatility_clustering

Faptul 5: intermitența în date



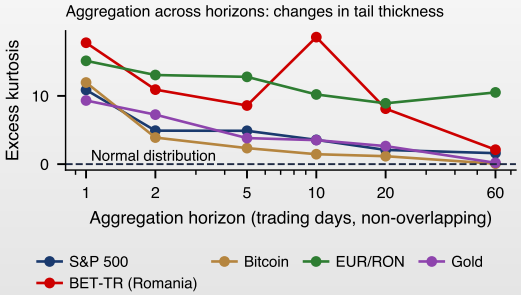
- Episoade de volatilitate ridicată separate de perioade calme
  - modelele cu volatilitate constantă nu pot reproduce acest tipar
- Volatilitatea pe o fereastră mobilă (*rolling window*) de 63 de zile: $\sqrt{A}\times$ abaterea standard, scară logaritmică
  - vîrfuri comune: 2008–2009, martie 2020
- Volatilitatea EUR/RON a scăzut puternic după iunie 2013, sub regimul de managed float al BNR

MFM_ch1_volatility_clustering ▶ Interactiv

Faptul 4: gaussianitate prin agregare, statistica și testul

- **Întrebarea**: se apropie randamentele pe h zile, $r_t(h) = r_t + \cdots + r_{t-h+1}$, de distribuția Normală cînd h crește?
- Statistica: excesul de kurtosis $\hat{K}(h) - 3$ al sumelor pe blocuri care nu se suprapun
  - n_h: numărul blocurilor
- Testul: $z = (\hat{K}(h) - 3)/\sqrt{24/n_h} \approx N(0,1)$ sub H_0
  - H_0: $r_t(h)$ i.i.d., cu distribuția Normală
  - sub H_0 toate momentele există

Faptul 4: gaussianitate prin agregare



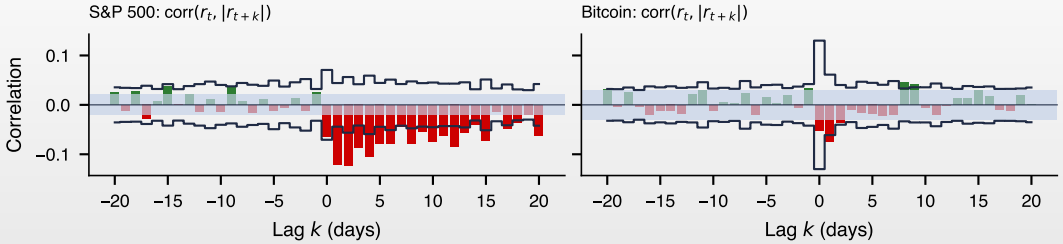
- Graficul: $\hat{K}(h) - 3$ în funcție de h, în zile de tranzacționare
  - linia punctată: distribuția Normală
- La $h = 60$ (un trimestru pentru S&P 500, două luni pentru Bitcoin)
  - S&P 500: 10,9 $\to$ 1,6 ($n_h = 154$, $z = 4{,}1$)
  - Bitcoin: 12,0 $\to$ 0,1 ($n_h = 73$, $z = 0{,}1$)
- Normalitatea rămîne respinsă la $h = 60$ pentru S&P 500, BET-TR și EUR/RON, dar nu pentru Bitcoin și aur
  - BET-TR: $z = 3{,}0$
  - EUR/RON: 15,1 $\to$ 10,5, $z = 20$
- CLT: convergență lentă, deoarece randamentele zilnice sînt dependente și au cozi groase

MFM_ch1_heavy_tails ▶ Interactiv

Faptul 9: efectul de levier, statistica și testul

- **Întrebarea**: crește volatilitatea mai mult după scăderi decît după creșteri?
- Statistica: $L(k) = \text{corr}(r_t, |r_{t+k}|)$
  - corelația dintre randamentul de azi și mărimea randamentului de peste k zile
  - $L(k) < 0$ pentru $k > 0$: după scăderi, $|r_t|$ crește, adică volatilitatea crește
  - $k < 0$ este un control: mărimea randamentelor trecute nu ar trebui să prezică semnul celui de azi
- **Testul**: $H_0 : L(k) = 0$, cu $z = \hat{L}(k)/\text{SE}$ comparat cu $\pm 1{,}96$
  - SE i.i.d. $= 1/\sqrt{T}$: ignoră gruparea volatilității, deci banda $\pm 1{,}96/\sqrt{T}$ este prea îngustă
  - SE robustă HAC (la heteroscedasticitate și autocorelație) $= \sqrt{\hat{\tau}}$: $\hat{\tau}$ este varianța de termen lung Newey–West (Bartlett, $\ell = \lfloor 4(T/100)^{2/9} \rfloor$ laguri) a lui $u_t = x_t y_{t+k}/(s_x s_y)$, împărțită la T
  - $x_t = r_t - \bar{r}$, $y_t = |r_t| - \overline{|r|}$; s_x, s_y: abaterile lor standard
  - presupune dependență slabă a lui u_t: chiar cu $L(k) = 0$, produsele u_t pot fi autocorelate, iar autocorelațiile lor pînă la lagul ℓ intră în SE

Faptul 9: efectul de levier



MFM_ch1_leverage_volume ▶ Interactiv

Faptul 9: după scăderi, volatilitatea crește

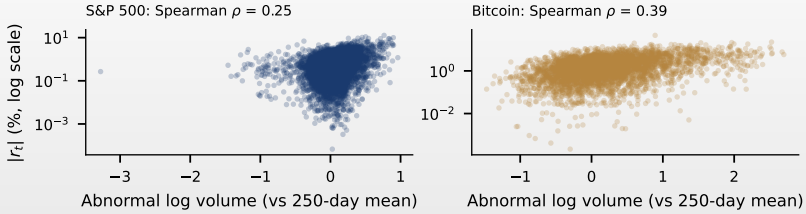
- Graficul: $\hat{L}(k)$ pentru k între -20 și 20
  - zona albastră: banda i.i.d.
  - liniile: banda robustă
- S&P 500: $L(1) = -0{,}12$ ($z = -5{,}4$, SE robustă)
  - SE robustă presupune moment de ordin patru finit, pus sub semnul întrebării de estimările Hill
  - încă $-0{,}07$ la $k = 10$
  - la $k < 0$, nicio valoare semnificativă
- $L(1)$ pe BET-TR, Bitcoin și aur
  - BET-TR: $L(1) = -0{,}12$ ($z = -2{,}4$)
  - Bitcoin: $-0{,}07$ ($z = -2{,}4$)
  - aur: $-0{,}02$ ($z = -0{,}8$; nu respingem $L(1) = 0$)
- EUR/RON: efect inversat, $L(1) = +0{,}10$ ($z = 2{,}5$)
  - volatilitatea crește după deprecierile leului
- Tipul de dovadă: asociere (variabilele se mișcă împreună; nu dovedește o relație cauzală)
  - explicații posibile: gradul de îndatorare al firmelor Christie (1982), volatilitatea cu efect întîrziat (*retarded volatility*) Bouchaud, Matacz & Potters (2001)
- Modele GARCH asimetrice (Capitolul 5): GJR-GARCH (Glosten–Jagannathan–Runkle), EGARCH (GARCH exponențial)

MFM_ch1_leverage_volume

Faptul 10: volum și volatilitate, statistica și testul

- **Întrebarea**: coincid zilele cu volum neobișnuit de mare cu zilele cu variații mari ale prețului?
- Volumul anormal: $\tilde{v}_t = \ln V_t - \frac{1}{250}\sum_{j=0}^{249} \ln V_{t-j}$
  - V_t: volumul tranzacționat în ziua t; media mobilă pe 250 de zile elimină tendința pe termen lung a volumului
- Statistica: corelația de rang Spearman $\rho_S = \mathrm{corr}\big(\mathrm{rang}(\tilde{v}_t),\ \mathrm{rang}(|r_t|)\big) \in [-1, 1]$
  - rangurile o fac robustă la cozile groase ale ambelor serii și la relațiile monotone neliniare
- **Testul**: $H_0 : \rho_S = 0$ este respinsă dacă CI de 95% prin bootstrap pe blocuri suprapuse nu conține 0
  - blocuri de 20 de zile
  - blocurile păstrează persistența ambelor serii

Faptul 10: volumul și volatilitatea evoluează împreună



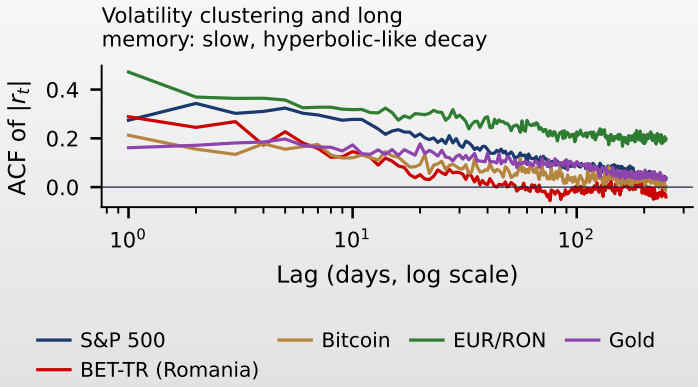
- Axele: volumul anormal $\tilde{v}_t$ (orizontal) și $|r_t|$ pe scară logaritmică (vertical); un punct este o zi
- $\hat{\rho}_S = 0{,}25$ pentru S&P 500 și 0,39 pentru Bitcoin: relație pozitivă și semnificativă
  - CI: [0,22; 0,28] pentru S&P 500, [0,34; 0,44] pentru Bitcoin
- Tipul de dovadă: asociere
- Ipoteza mixturii de distribuții Clark (1973)
  - fluxul de informații determină atît variațiile de preț, cît și volumul (sinteza dovezilor: Karpoff (1987))
- Volumul Bitcoin este raportat de burse și include **wash trading** Cong, Li, Tang & Yang (2023)
  - wash trading: tranzacții fictive în care cumpărătorul și vînzătorul coincid

MFM_ch1_leverage_volume ▶ Interactiv

Faptul 8: scădere exponențială sau hiperbolică?

- **Întrebarea**: cît de repede scade ρ_k, autocorelația lui $|r_t|$ la lagul k, cînd k crește?
- **Memorie scurtă**: $\sum_k |\rho_k| < \infty$
  - de exemplu, scădere exponențială $\rho_k \approx c\,\phi^k$, cu $c > 0$ și $0 < \phi < 1$ (GARCH(1,1), Capitolul 5)
- **Memorie lungă** Ding, Granger & Engle (1993): scădere hiperbolică $\rho_k \approx c\,k^{2d-1}$, cu $0 < d < \frac{1}{2}$
  - d: parametrul de memorie; un d mai mare înseamnă o scădere mai lentă, iar $\sum_k \rho_k = \infty$
- **Testul**: estimăm d și testăm $H_0 : d = 0$ (memorie scurtă)
  - cu estimatorii semiparametrici din Aprofundări

Faptul 8: scăderea lentă a ACF pentru $|r_t|$



MFM_ch1_volatility_clustering ▶ Interactiv

Faptul 8: ACF a lui $|r_t|$ scade lent pe toate piețele

- Graficul: ACF a lui $|r_t|$ (vertical) în funcție de lag (orizontal, scară logaritmică), lagurile 1–250
- S&P 500: 0,27 la lagul 1, 0,22 la lagul 20, încă 0,09 la lagul 100
- BET-TR scade cel mai repede
- O scădere lentă a ACF empirice nu dovedește, în sine, memoria lungă
  - rupturile structurale (salturi ale nivelului volatilității) dau același tipar

MFM_ch1_volatility_clustering

$\hat{d} \approx 0{,}35$–$0{,}50$ pe toate cele cinci piețe

$\lvert r_t \rvert$, $m = T^{0{,}65}$	S&P 500	BET-TR	Bitcoin	EUR/RON	Aur
m	378	181	232	265	386
Whittle local $\hat{d}$ (SE)	0,48 (0,03)	0,37 (0,04)	0,35 (0,03)	0,39 (0,03)	0,40 (0,03)
Log-periodogramă $\hat{d}$ (SE)	0,50 (0,03)	0,41 (0,05)	0,35 (0,04)	0,38 (0,04)	0,42 (0,03)

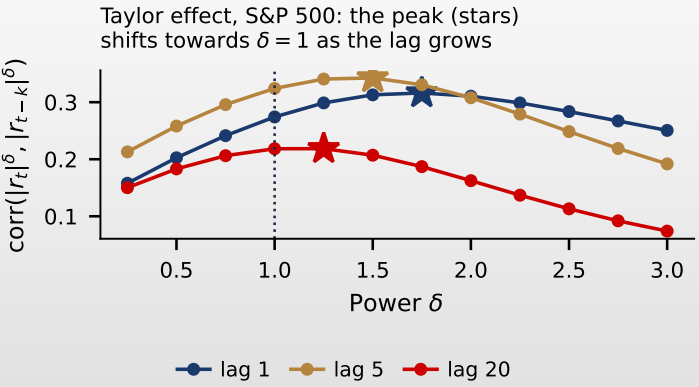
- Fiecare $\hat{d}$ este la cel puțin 8 SE de $d = 0$ (memorie scurtă), cu ambii estimatori
- S&P 500 este aproape de limita de staționaritate: pentru $d \geq \frac{1}{2}$ seria nu mai este staționară

MFM_ch1_inference

Efectul Taylor: întrebarea și statistica

- **Întrebarea**: ce putere a mărimii randamentelor este cea mai persistentă?
- Statistica: $\rho_k(\delta) = \text{corr}(|r_t|^\delta, |r_{t-k}|^\delta)$, în funcție de puterea $\delta > 0$
  - $\delta = 1$: randamentele absolute; $\delta = 2$: pătratele randamentelor
- **Efectul Taylor**: $\rho_k(\delta)$ este maximă pentru o putere δ apropiată de 1, nu pentru $\delta = 2$
  - documentat de Taylor (1986) și denumit astfel de Granger & Ding (1995)
- Efectul motivează modelele power-GARCH (Capitolul 5)
  - power-GARCH modelează σ_t^δ cu δ estimat
  - efectul motivează și măsurile de volatilitate bazate pe valori absolute

Efectul Taylor



MFM_ch1_volatility_clustering ▶ Interactiv

Efectul Taylor: persistența este maximă sub pătrat

- Graficul: $\rho_k(\delta)$ pentru lagurile 1, 5 și 20
  - stelele marchează maximul
  - linia punctată: $\delta = 1$
- S&P 500: maximul la $\delta = 1{,}75$ (lagul 1), 1,5 (lagul 5) și 1,25 (lagul 20)
  - la cele trei laguri din grafic maximul este sub 2 și se apropie de 1 cînd lagul crește; nu la orice lag (la lagul 2 este chiar 2)
  - la lagul 1 maximul este mai aproape de 2 decît de 1: dovezile pentru „$\delta \approx 1$" sînt mixte la laguri scurte
- Poziția maximului este o estimare punctuală, fără eroare standard
  - comparația cu $\delta = 1$ este descriptivă

MFM_ch1_volatility_clustering

Faptele 7 și 11: cozi condiționate și scale de timp

Faptul 7: cozi groase condiționate

- Estimăm un model de volatilitate, de exemplu GARCH (Capitolul 5)
  - și standardizăm: $\hat{z}_t = r_t / \hat{\sigma}_t$, cu $\hat{\sigma}_t$ volatilitatea estimată de model pentru ziua t
- Kurtosisul lui $\hat{z}_t$ este mai mic decît al lui r_t, dar rămîne peste 3 (literatură; netestat aici)
- Modelele necesită inovații cu cozi groase (distribuția Student-t, eventual asimetrică)

Faptul 11: asimetria scalelor de timp

- Volatilitatea săptămînală prognozează volatilitatea zilnică mai bine decît reciproc
- Investitorii cu orizonturi diferite reacționează la frecvențe diferite
- Modelul autoregresiv heterogen al volatilității realizate (**HAR-RV**, Capitolul 9)
  - volatilitatea realizată este suma pătratelor randamentelor intrazilnice (*intraday*)

- Randamentele standardizate cu volatilitatea realizată din date intrazilnice sînt apropiate de distribuția Normală
  - Andersen, Bollerslev, Diebold & Ebens (2001) (Capitolul 9)

Diferențele dintre cele cinci piețe

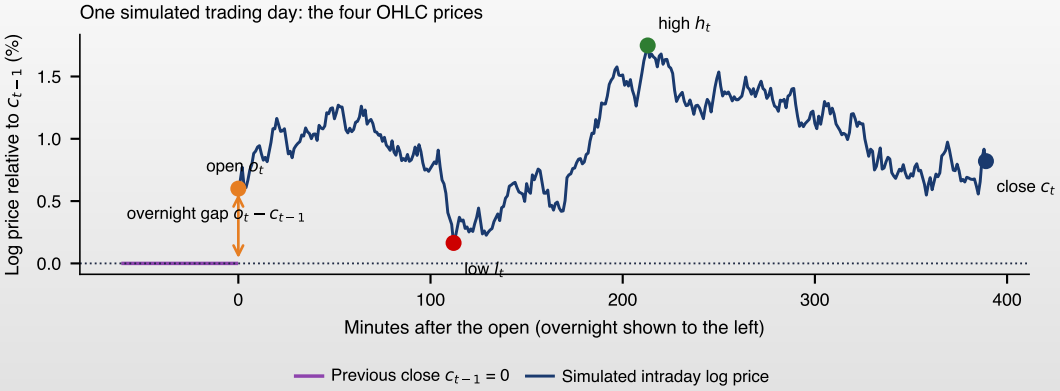
Piață	Trăsătură instituțională	Diferențe	Explicație posibilă
Bitcoin	tranzacționat 24/7; $A = 365$	volatilitate 66,6% față de 18,0% (S&P 500); cea mai slabă zi $-46{,}5\%$; efect de levier slab ($-0{,}07$); ACF a lui $\lvert r_t \rvert$ la lagul 100: 0,02 (S&P 500: 0,09)	fără îndatorare corporativă; volatilitatea crește după variații mari de orice semn
EUR/RON	curs de referință zilnic BNR, managed float	volatilitate 4,4%, dar exces de kurtosis 15,1; $\hat{\rho}_{\mathbf{1}} = +0{,}17$; cele mai mari variații în octombrie 2008 ($+2{,}9\%$, $-2{,}5\%$)	ajustări ale cursului distribuite pe mai multe zile
BET-TR	randament total, piață de frontieră/emergentă	asimetrie $-1{,}40$; cea mai slabă zi $-11{,}9\%$ pe 19 dec. 2018 (taxa pe activele bancare anunțată pe 18 dec., Ordonanța de urgență 114/2018); $\hat{\rho}_{\mathbf{1}} = +0{,}06$	șocuri de politică economică; **tranzacționarea nesincronă** a componentelor Campbell, Lo & MacKinlay (1997), cap. 3

- Explicațiile sînt ipoteze, nu cauze identificate
- Volatilitatea mică nu înseamnă risc de coadă (*tail risk*) mic
- Cozile groase și gruparea volatilității apar pe toate cele cinci piețe
  - autocorelația și asimetria depind de cadrul instituțional

Ce adaugă maximul și minimul zilei

- **Întrebarea**: cît de precis putem estima volatilitatea unei zile dacă folosim și deschiderea, maximul și minimul?
  - nu doar închiderea
- **OHLC**: patru prețuri ale zilei t
  - O_t: deschiderea (Open); H_t: maximul (High); L_t: minimul (Low); C_t: închiderea (Close)
- Graficul următor: o zi simulată
  - axa verticală: logaritmul prețului față de închiderea precedentă $c_{t-\mathbf{1}}$, în %
  - saltul de peste noapte $o_t - c_{t-\mathbf{1}}$ apare în stînga deschiderii
- Estimatorii bazați pe **amplitudinea zilnică** (*range*) folosesc întreaga traiectorie a zilei
  - amplitudinea H_t/L_t este mare în zilele volatile, chiar dacă închiderea este egală cu deschiderea

Deschiderea, maximul, minimul și închiderea (OHLC) unei zile



MFM_ch1_seminar_tests ▶ Interactiv

Amplitudinea logaritmică, randamentele zilei și eficiența unui estimator

- Logaritmii prețurilor: $o_t = \ln O_t$, $h_t = \ln H_t$, $l_t = \ln L_t$, $c_t = \ln C_t$
- Amplitudinea logaritmică a zilei t: $h_t - l_t = \ln(H_t/L_t) \geq 0$
  - aproximativ variația procentuală dintre maximul și minimul zilei
- Trei randamente logaritmice ale zilei t
  - close-to-close: $c_t - c_{t-1}$
  - peste noapte: $o_t - c_{t-1}$
  - în timpul zilei: $c_t - o_t$
- **Estimatorul close-to-close**: abaterea standard a lui $c_t - c_{t-1}$, o singură observație pe zi
- **Eficiența** unui estimator X: $\mathrm{Var}(\hat{\sigma}^2_{CC})/\mathrm{Var}(\hat{\sigma}^2_X)$
  - o eficiență de 5 înseamnă aceeași precizie cu de 5 ori mai puține zile

Estimatorul Parkinson: varianța din amplitudinea zilei

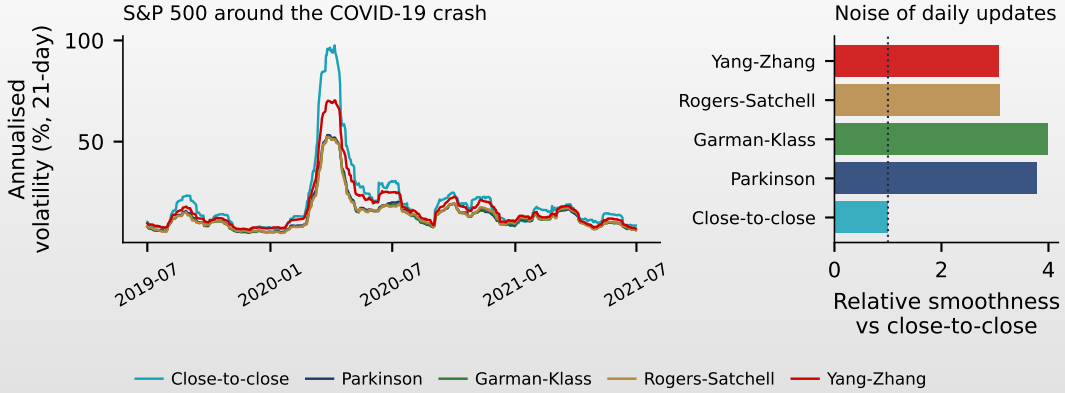
- **Parkinson**, Parkinson (1980): estimează varianța zilnică doar din amplitudinea zilnică

$$\hat{\sigma}_P^2 = \frac{1}{4\ln 2}\,\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(h_t - l_t)^2$$

  - pentru o mișcare browniană cu varianța zilnică σ^2, $\mathbb{E}[(h_t - l_t)^2] = 4\ln 2\,\sigma^2$: împărțirea la $4\ln 2$ face estimatorul nedeplasat
  - $\hat{\sigma}_P^2$ este o varianță zilnică (n zile); volatilitatea anuală este $\sqrt{A\,\hat{\sigma}_P^2}$

- Ipoteza: o mișcare browniană fără drift și fără salturi peste noapte
  - mișcarea browniană: mers aleator (*random walk*) în timp continuu (Capitolul 11)
  - eficiența față de close-to-close: circa 5 (Seminarul 1, A8)

Estimatorii de volatilitate aplicați pe S&P 500



MFM_ch1_vol_estimators ▶ Interactiv

Fără salturile de peste noapte, estimatorii din amplitudine dau valori mai mici

- Volatilitatea anualizată medie pe ferestre de 21 de zile, 2008–2026
  - close-to-close 16,4%, Yang–Zhang 13,9%, Parkinson 13,0%, Garman–Klass 12,4%, Rogers–Satchell 12,3%
- Estimatorii bazați doar pe amplitudine dau valori mai mici, deoarece nu surprind salturile de peste noapte
- Panoul din dreapta: netezimea relativă (*relative smoothness*) a estimatorului X

$$\left[\frac{\text{abaterea std. a variațiilor zilnice, estimarea close-to-close}}{\text{abaterea std. a variațiilor zilnice, estimarea } X}\right]^2$$

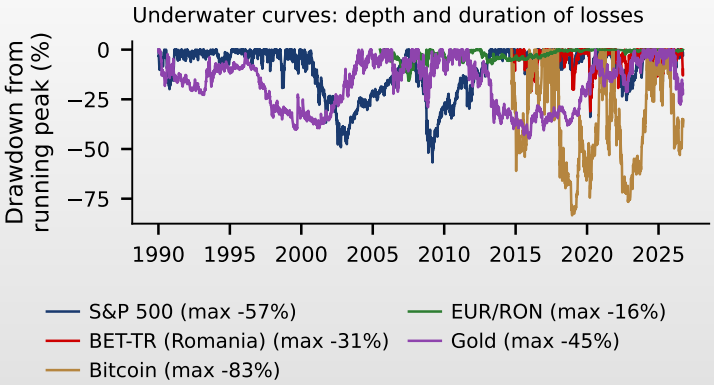
  - egală cu 1 pentru close-to-close; valori mai mari înseamnă că estimarea sare mai puțin de la o zi la alta
- Seriile estimate din amplitudinea zilnică sînt de 3–4 ori mai netede după această măsură
  - aceasta este o proprietate a estimărilor, nu o dovadă de eficiență: măsura nu le compară cu σ adevărat

MFM_ch1_vol_estimators

Drawdown: întrebarea, statistica și reperul

- **Întrebarea**: este cea mai adîncă scădere observată mai mare decît ar produce un mers aleator?
  - mers aleator cu același drift și aceeași volatilitate
- Drawdown-ul $DD_t = P_t / \max_{s \le t} P_s - 1 \in [-1, 0]$ (Capitolul 0)
  - drawdown-ul maxim: $MDD = \min_t DD_t$
- Pe scară logaritmică: $D = \max_t \left(\max_{s \le t} \ln P_s - \ln P_t \right) = -\ln(1 + MDD) \ge 0$
- Reperul Magdon-Ismail, Atiya, Pratap & Abu-Mostafa (2004): $\ln P_t$ este un mers aleator gaussian cu driftul anual μ și volatilitatea anuală σ, pe Y ani
  - $\mu = 0$: $\mathbb{E}[D] = \sqrt{\pi/2}\,\sigma\sqrt{Y}$, crește proporțional cu $\sqrt{Y}$
  - $\mu > 0$: $\mathbb{E}[D] \approx \frac{2\sigma^2}{\mu}\left[\frac{1}{4}\ln\frac{\mu^2 Y}{2\sigma^2} + 0{,}49\right]$, crește doar ca $\ln Y$ (aproximare pentru $\mu^2 Y/(2\sigma^2)$ mare)
- **Testul**: valoarea p $= P(D \ge D_{\text{obs}})$ sub reper, din 5 000 de traiectorii simulate cu driftul și volatilitatea estimate

Drawdown-uri pe piețe



MFM_ch1_risk_measures ▶ Interactiv

Drawdown-ul maxim: cît de adînc se poate cădea de la un vîrf

- Graficul: curbele underwater $100\,DD_t$ (%)
  - legenda dă MDD-ul fiecărei piețe
- MDD: Bitcoin -83%, S&P 500 -57%, aur -45%, BET-TR -31% (martie 2020), EUR/RON -16%
- S&P 500: 9 octombrie 2007 (1 565,15) – 9 martie 2009 (676,53): $-56{,}8\%$
- **Recuperarea**: revenirea prețului la vîrful anterior
  - după o scădere x cere o creștere de $1/(1-x)-1$; aici $1/(1-0{,}568)-1=+131\%$

MFM_ch1_risk_measures

Raportul Sharpe: randament în exces pe unitatea de volatilitate

- **Raportul Sharpe** Sharpe (1966), Sharpe (1994)

$$SR = \frac{\mu_{\text{aritm}} - r_f}{\sigma_{\text{an}}}$$

  - r_f: rata dobînzii fără risc; aici $r_f = 0$, pentru comparabilitate
  - $\mu_{\text{aritm}} = A\bar{R}$: media anuală a randamentelor **simple** (nu $A\bar{r}$ de la regula $\sqrt{A}$), cu $\bar{R}$ media lor zilnică
  - σ_{an}: volatilitatea anuală a randamentelor simple
- S&P 500 1990–2026: $\mu_{\text{aritm}} = 9{,}95\%$, $\sigma_{\text{an}} = 17{,}97\%$, $SR = 0{,}55$
  - cu media logaritmică $A\bar{r} = 8{,}33\%$ s-ar obține $8{,}33/17{,}97 = 0{,}46$

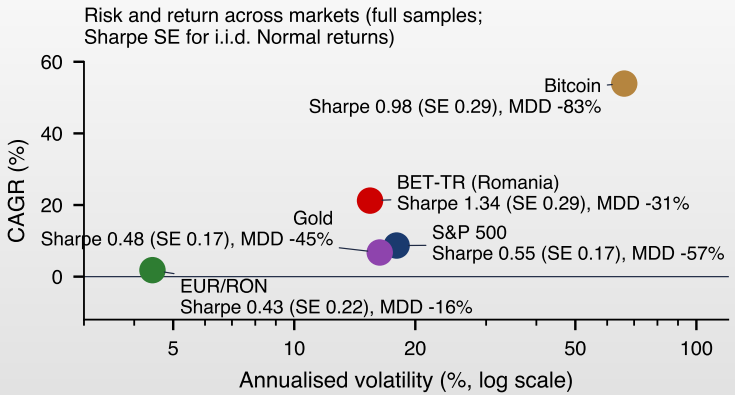
Rapoarte Sharpe cu erori standard

- Metoda delta, sub ipoteza randamentelor i.i.d. din distribuția Normală Lo (2002)
  - SR_d: raportul Sharpe zilnic, estimat prin $\widehat{SR}_d$, cu $\mathrm{Var}(\widehat{SR}_d) \approx (1 + SR_d^2/2)/T$
  - anualizat, $SR_{\text{an}} = \sqrt{A}\, SR_d$: $\mathrm{SE}(\widehat{SR}_{\text{an}}) \approx \sqrt{A(1 + SR_d^2/2)/T} \approx 1/\sqrt{Y}$, cu $Y = T/A$ ani
  - precizia depinde de durata eșantionului, nu de frecvența observațiilor
  - SE presupune moment de ordin patru finit, pus sub semnul întrebării de estimările Hill

	S&P 500	BET-TR	Bitcoin	EUR/RON	Aur
Ani Y	36,7	12,0	12,0	21,2	36,7
Raport Sharpe (SE, Normală)	0,55 (0,17)	1,34 (0,29)	0,98 (0,29)	0,43 (0,22)	0,48 (0,17)

MFM_ch1_risk_measures

Risc și randament pe piețe



MFM_ch1_risk_measures ▶ Interactiv

De ce graficul risc–randament nu este un clasament

- Axele: volatilitatea anualizată (orizontal, scară logaritmică) și CAGR (vertical)
- Etichetele: raportul Sharpe, eroarea lui standard (SE) și MDD
  - SE: formula de la rapoartele Sharpe cu erori standard, pentru randamente simple i.i.d. cu distribuția Normală; tabelul complet în ▸ Anexă
- Perioadele diferă, deci graficul nu este un clasament
- Cu $r_f = 0$, raportul Sharpe al BET-TR este supraestimat
  - S&P 500 este fără dividende
  - BET-TR este cu dividende și în lei
  - dobînzile în lei au fost mult peste cele în dolari americani (USD)
- Cu cozi groase și asimetrie negativă, raportul Sharpe supraevaluează performanța
  - raportați-l împreună cu drawdown-urile, VaR 1% și indicele cozii $\hat{\alpha}$

MFM_ch1_risk_measures

Studiu de caz (1/4): cît din volatilitate explică doar randamentele trecute?

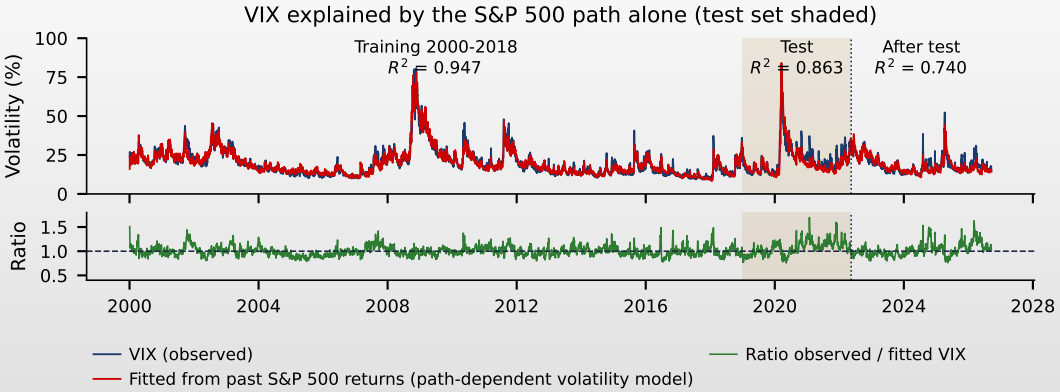
- Lucrarea: Guyon & Lekeufack (2023), *Quantitative Finance*
  - lucrarea pornește de la Bollerslev, Hood, Huss & Pedersen (2018)
- Întrebarea de cercetare
  - ce proporție din volatilitatea unui indice bursier este explicată doar de randamentele lui zilnice trecute?
  - ce formă funcțională are această dependență?
- Metoda: volatilitatea, funcție liniară de trendul recent și de volatilitatea recentă, ambele medii ponderate ale randamentelor trecute (Aprofundări)
- Trei variabile dependente, modelate separat (Secțiunile 3.4–3.5 din lucrare)
  - VIX (indicele de volatilitate al bursei Cboe): volatilitatea implicită a S&P 500 pe următoarele 30 de zile, calculată din prețurile opțiunilor
  - **volatilitatea implicită**: volatilitatea pentru care un model de evaluare a opțiunilor reproduce prețurile observate ale opțiunilor, adică volatilitatea anticipată de piață (Capitolul 12)
  - VIX9D: aceeași măsură, pe un orizont de 9 zile
  - volatilitatea realizată a zilei următoare, calculată din randamente pe 5 minute

Studiu de caz (2/4): randamentele trecute explică 80–92% din volatilitatea implicită

Indice	Volatilitate implicită (lucrarea, Tabelul 2) R^2 antrenare	R^2 test	Volatilitate realizată (lucrarea, Tabelul 4) R^2 antrenare	R^2 test
S&P 500 (VIX)	0,946	0,855	0,738	0,654
S&P 500 (VIX), replicarea noastră	0,947	0,863	–	–
S&P 500 (VIX pe 9 zile)	0,876	0,914	–	–
Euro Stoxx 50	0,929	0,913	0,672	0,682
Nikkei 225	0,890	0,800	0,563	0,504

- Numai randamentele trecute ale indicelui explică 80–92% (la cei cinci indici ai lucrării) din varianța volatilității implicite în afara eșantionului de estimare (*out-of-sample*)
  - FTSE 100 (indicele bursier britanic, *Financial Times Stock Exchange*) și DAX (*Deutscher Aktienindex*, indicele bursier german; R^2 test 0,918, maximul) în Anexă
- Pe datele noastre (S&P 500 și VIX): RMSE (rădăcina erorii pătratice medii) 0,020 (2 puncte VIX) la antrenare și 0,034 la test
- Scorurile pentru volatilitatea realizată sînt mai mici
  - volatilitatea realizată pe 5 minute este o variabilă explicată zgomotoasă (Remarca 3 din lucrare)
- Tipul de dovadă: asociere
  - randamentele trecute prezic volatilitatea în afara eșantionului; asta nu identifică ce o cauzează

Studiu de caz (3/4): VIX observat și VIX estimat din randamentele S&P 500



MFM_ch1_path_dependent_vol ▶ Interactiv

Studiu de caz (4/4): un singur nucleu pentru orizonturi scurte și lungi; ce rămîne exogen

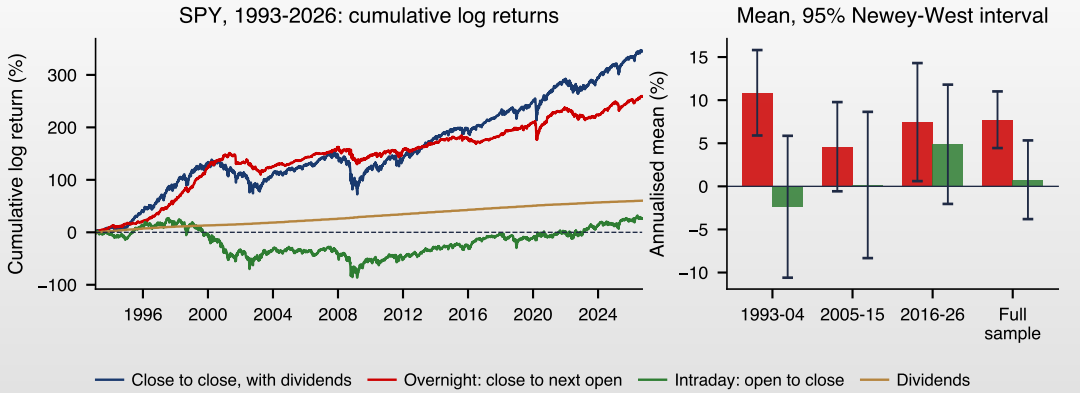
- Ponderile zilnice $K(i\Delta t)\Delta t$, pe scară log–log
  - nucleul K dă ponderea fiecărei zile trecute: K_1 pentru randamente (trendul), K_2 pentru pătratele lor (volatilitatea)
  - α: viteza de scădere a ponderilor; δ: decalajul, în ani (alte mărimi decît indicele cozii și puterea din efectul Taylor)
  - între paranteze: Tabelul 3 din lucrare
  - K_1 (trendul): $\hat{\alpha}_1 = 1{,}13$ (1,06), $\hat{\delta}_1 = 0{,}022$ (0,020)
  - K_2 (volatilitatea): $\hat{\alpha}_2 = 1{,}58$ (1,60), $\hat{\delta}_2 = 0{,}050$ (0,052)
- Ultimele 5 zile concentrează 20% din ponderea lui K_2
  - lagurile de peste 250 de zile primesc încă 10%
- Limite declarate de autori (Secțiunea 5 din lucrare)
  - rămîne o componentă exogenă mică
  - raportul dintre VIX observat și estimat revine în timp la 1
  - modelarea acestui raport necesită un factor stocastic
- Extindere deschisă (propunere de proiect)
  - descrie aceeași formulă volatilitatea realizată a lui Bitcoin sau a BET-TR?

MFM_ch1_path_dependent_vol

Randamentul pieței în jurul ceasului (1/4): în ce ore se cîștigă randamentul mediu?

- Lucrarea: Bondarenko & Muravyev (2023), *Journal of Financial and Quantitative Analysis*
  - datele: contractele futures E-mini pe S&P 500, tranzacționate aproape 24 de ore din 24
- Întrebarea de cercetare: depinde randamentul mediu al pieței de ora din zi?
  - faptul 1 (randamente necorelate) privește prognoza randamentului unei zile
  - aici întrebarea privește media pe un interval fix al zilei
- Rezultatul principal al lucrării
  - cele 4 ore din jurul deschiderii piețelor europene acoperă întregul randament mediu al pieței
  - raportul Sharpe al acestor 4 ore este 1,6; randamentul lor rămîne mare și după costurile de tranzacționare
  - în celelalte 20 de ore, media este zero, estimată cu mult zgomot
- Explicația propusă de autori: investitorii europeni procesează informația acumulată peste noapte
  - incertitudinea din prețurile futures pe VIX crește peste noapte și scade în jurul deschiderii europene
- De ce contează: un model cu randamente i.i.d. în timpul zilei repartizează media uniform pe ore

Randamentul pieței în jurul ceasului (2/4): SPY peste noapte și în timpul zilei



MFM_ch1_overnight_returns ▶ Interactiv

Randamentul pieței în jurul ceasului (3/4): metoda lucrării și replicarea din curs

- Lucrarea: randamente pe intervale din cele 24 de ore ale contractului futures, care nu plătește dividende
- Replicarea din curs: SPY (*SPDR S&P 500 ETF Trust*), un fond tranzacționat la bursă (ETF, *Exchange-Traded Fund*) pe indicele S&P 500, prețuri zilnice, 1 februarie 1993 – 18 septembrie 2026, 8 466 de zile
  - SPY, nu indicele: deschiderea indicelui S&P 500 este adesea un preț neactualizat (*stale*) (Aprofundări)
  - peste noapte $r_t^{\mathbf{on}} = \ln(O_t / C_{t-1})$; în timpul zilei $r_t^{\mathbf{id}} = \ln(C_t / O_t)$; O_t, C_t: prețul de deschidere și de închidere
  - dividendele $d_t = \ln(f_t / f_{t-1})$, cu f_t = prețul de închidere ajustat / prețul de închidere
  - $r_t^{\mathbf{on}} + r_t^{\mathbf{id}} + d_t$ = randamentul logaritmic total, de la o închidere la următoarea
  - aceeași descompunere, aplicată unor strategii pe acțiuni americane: Lou, Polk & Skouras (2019)
- Ce face replicarea diferit
  - intervalul „peste noapte", 16:00 – 9:30 ora New York-ului, include deschiderea europeană, dar și alte ore
  - cu date zilnice nu putem izola cele 4 ore ale lucrării
- Media anualizată = 252 × media zilnică; statistica t cu eroarea standard HAC Newey–West, ca la efectul de levier
- Extindere pe o piață deschisă 24/7: Bitcoin, bare de 5 minute, august 2024 – septembrie 2026 (749 de zile)
  - randamentul din sesiunea americană (9:30 – 16:00 New York, zile lucrătoare) față de restul zilei

MFM_ch1_overnight_returns

Randamentul pieței în jurul ceasului (4/4): rezultatul și limitele lui

- SPY peste noapte: media 7,7% pe an ($t = 4{,}6$), volatilitatea 10,6%, raportul Sharpe 0,73
- SPY în timpul zilei: media 0,8% pe an ($t = 0{,}33$), volatilitatea 15,2%, raportul Sharpe 0,05
  - rapoarte Sharpe din randamente logaritmice, cu $r_f = 0$; dividendele adaugă 1,8% pe an
  - 91% din randamentul logaritmic cumulat al prețului s-a obținut peste noapte
- Media de peste noapte este pozitivă în toate cele trei subperioade: 10,9%, 4,6% și 7,5% pe an
  - semnificativă la 5% în 1993–2004 ($t = 4{,}3$) și 2016–2026 ($t = 2{,}1$), nu și în 2005–2015 ($t = 1{,}7$)
  - media din timpul zilei nu este semnificativă la 5% în nicio subperioadă ($|t| \leq 1{,}38$)
  - în 23 din 34 de ani calendaristici, randamentul de peste noapte îl depășește pe cel din timpul zilei
- Bitcoin: $-3{,}6\%$ pe an în sesiunea americană, 20,9% în restul zilei; $|t| \leq 1{,}0$
  - cu doi ani de date, diferența nu se poate distinge de zero
- Tipul de dovadă: o regularitate a mediei, stabilă pe subperioade, compatibilă cu lucrarea
  - nu o strategie: media este 3,1 puncte de bază (0,031%) pe noapte, iar un cost dus-întors de 3 puncte de bază o anulează
  - nu cauza: explicația prin rezolvarea incertitudinii este a autorilor și cere date intraday pe futures
- Propunere de proiect: cu barele SPY de 5 minute, în ce oră a sesiunii americane se pierde sau se câștigă media?

MFM_ch1_overnight_returns

De la dovezi la cerințele unui model

Dovezi (cinci piețe)	Cerința pentru model	Capitolul din curs
exces de kurtosis pe cuantile (Crow–Siddiqui, Aprofundări) > 0 pe toate piețele; Hill $\hat{\alpha} \approx 2{,}3$–$3{,}5$ (Bitcoin: 4,2)	inovații cu cozi groase, inclusiv condiționat	Cap. 5, Cap. 7 (teoria valorilor extreme)
ACF a lui $\lvert r_t \rvert$ pozitivă pe orizonturi de mai multe luni; $\hat{d} \approx 0{,}35$–$0{,}50$	volatilitate persistentă, variabilă în timp; memorie lungă sau rupturi	Cap. 5, Cap. 9
$L(1) = -0{,}12$ (S&P 500, BET-TR); inversat pentru EUR/RON	răspuns asimetric la șocurile negative, acolo unde efectul există	Cap. 5 (GJR-GARCH, EGARCH)
$\hat{\rho}_{\mathbf{1}}$ semnificativ (SE robuste) doar pentru S&P 500 și EUR/RON; mic economic pe toate piețele	randamente aproximativ necorelate; rolul microstructurii pieței	Cap. 2, Cap. 10
asimetrie negativă bazată pe cuantile (Aprofundări) doar pentru S&P 500	asimetria depinde de piață	Cap. 7–8

- Un mers aleator cu creșteri i.i.d. din distribuția Normală este incompatibil cu Faptele 2, 3 și 5–11
  - lumea Bachelier–Black–Scholes
  - Faptele 1 și 4 sînt satisfăcute trivial
- Un test ARCH-LM semnificativ susține, descriptiv, existența grupării volatilității
  - momentul de ordinul patru este îndoielnic, deci nu este o dovadă formală

Întrebare deschisă: sînt indicii cozii stabili în timp?

- Indicele cozii α este de obicei tratat ca o constantă
- Structura pieței criptoactivelor s-a schimbat
  - contracte futures (2017), ETF-uri spot pe Bitcoin (ianuarie 2024), deținători instituționali
  - Liu & Tsyvinski (2021): randamentele criptomonedelor nu sînt explicate de factorii de risc ai acțiunilor, ai valutelor sau ai metalelor prețioase
  - Pele et al. (2023): un factor de coadă distinge criptomonedele de celelalte clase de active
- Ipoteza propusă de un asistent AI
  - după lansarea ETF-urilor spot (ianuarie 2024), intrarea investitorilor instituționali a redus grosimea cozilor distribuției randamentelor Bitcoin
  - adică a crescut indicele cozii α

Bucla de descoperire pentru indicele cozii Bitcoin

- **Literatură**: cereți lucrări cu evaluare inter pares, cu DOI (*Digital Object Identifier*, identificatorul digital al unei publicații), apoi verificați fiecare DOI
  - Hoga (2017): teste de punct de schimbare pentru indicele cozii, valide în condiții de dependență β-mixing
  - β-mixing: dependența se atenuează pe măsură ce distanța în timp crește, de exemplu în modelele GARCH
- **Ipoteze concurente**
  - o schimbare a formei cozii
  - doar o scădere a volatilității (scala nu modifică α)
  - zgomot de eșantionare
- **Date și cod**: replicați întîi estimările Hill ale capitolului (Bitcoin 4,2, S&P 500 3,1)
- Stabilite înaintea analizei
  - $k = 2{,}5\%$ din n, data rupturii 11 ianuarie 2024
  - SE bootstrap pe blocuri, un activ placebo (aceeași analiză pe un activ pentru care ipoteza nu prevede o schimbare)

Mini studiu de caz: coada Bitcoin după lansarea ETF-urilor spot

- Test: estimatorul Hill pentru $|r_t|$, $k = 2{,}5\%$ din n
  - $H_0 : \alpha_{\text{după}} = \alpha_{\text{înainte}}$ față de $H_1 : \alpha_{\text{după}} > \alpha_{\text{înainte}}$
  - $z = (\hat{\alpha}_{\text{după}} - \hat{\alpha}_{\text{înainte}}) / \sqrt{s^2_{\text{înainte}} + s^2_{\text{după}}}$, cu s erorile standard prin bootstrap pe blocuri suprapuse (blocuri de 20 de zile)
  - sub H_0, $z \approx N(0,1)$: respingem H_0 la 5% dacă $z > 1{,}645$
- Rezultate
  - înainte (sept. 2014 – 10 ian. 2024, $k = 85$): $\hat{\alpha} = 4{,}16$ ($s = 0{,}52$)
  - după (11 ian. 2024 – sept. 2026, $k = 24$): $\hat{\alpha} = 4{,}31$ ($s = 0{,}91$)
  - $z = 0{,}15$
- Placebo: S&P 500, 17 sept. 2014–18 sept. 2026
  - ruptură 11 ian. 2024, $k = 58/16$ înainte/după
  - $\hat{\alpha}$: $2{,}82 \to 2{,}86$, $z = 0{,}03$
- Tipul de dovadă: descriere (arată ce s-a întîmplat în date, fără un test al cauzei)
  - o comparație înainte/după, cu putere mică (slide-ul următor), nu efectul ETF-urilor

MFM_ch1_ai_discovery

Un rezultat nesemnificativ, cu putere mică: ce nu putem concluziona

- **Schimbarea minimă detectabilă**, test unilateral la 5% cu putere de 80%
  - $(1{,}645 + 0{,}842) \times 1{,}05 = 2{,}6$: creșterea lui α pe care testul o detectează cu probabilitatea de 80%
  - $1{,}645$ și $0{,}842$: cuantilele $N(0,1)$ pentru nivelul unilateral de 5% și puterea de 80%
  - $1{,}05 = \sqrt{0{,}52^2 + 0{,}91^2}$: eroarea standard a diferenței
  - aproximarea prin distribuția Normală este grosieră cînd coada conține doar 24 de observații
  - datele nu pot distinge o coadă neschimbată de o subțiere puternică a cozii
- Un rezultat nesemnificativ nu dovedește absența efectului
  - sînt necesare date suplimentare sau un panel de active

MFM_ch1_ai_discovery

Propunere de proiect

- **Întrebare**: s-a schimbat indicele cozii pentru Bitcoin și Ethereum odată cu instituționalizarea?
  - instituționalizarea: futures în 2017, ETF-uri spot în 2024
  - randamente brute și randamente standardizate cu GARCH (forma cozii față de scală)
  - coada pierderilor și coada cîștigurilor, separat
  - Bitcoin folosește seria din curs; Ethereum nu face parte din panelul celor cinci piețe (seria zilnică: `data/market/ETH-USD.CC.csv`): documentați sursa, ora și fusul orar al închiderii și moneda (USD) înainte de estimare
- **Replicați întîi**: tabelul Hill al capitolului și rezultatele mini studiului de caz
- **Preînregistrare**, depusă în repository înainte de obținerea rezultatelor
  - H_0, H_1, regula pentru k, datele rupturilor și bootstrap-ul
- **Raport**: testul de punct de schimbare al lui Hoga (2017), implementat ca Quantlet
  - estimări, ambele SE, schimbarea minimă detectabilă
- **Jurnal**: prompturile în `AI_USE.md`
  - fiecare eroare depistată (de exemplu, o SE i.i.d. sau o dată a rupturii aleasă după date) în `AI_ERRORS.md`
  - prompturi reutilizabile (▸ Anexă) și verificări (▸ Anexă)

Ce reținem: mărimea randamentelor se poate prognoza, direcția aproape deloc

Idei principale

- Autocorelațiile randamentelor sînt în general mici, cu excepții (S&P 500, EUR/RON), dar mărimea randamentelor este predictibilă
- Cozile groase sînt regula: indici ai cozii în jur de 3
  - estimările, condiționat de aproximarea de coadă și de pragurile folosite, pun sub semnul întrebării existența momentului de ordinul patru
  - inferența bazată pe kurtosis devine nesigură
- Volatilitatea este persistentă (memorie lungă sau rupturi)
  - pe piețele de acțiuni, volatilitatea reacționează asimetric la pierderi
- Fiecare test se bazează pe o distribuție de referință ale cărei ipoteze pot fi încălcate de date

Întrebări pentru sală

- De ce are o mixtură cu σ_t extras independent în fiecare zi cozi groase, dar nu gruparea volatilității (Aprofundări)?
- De ce scade statistica S&P 500 de la $Q(10) = 91{,}6$ la $\tilde{Q}(10) = 19{,}0$ cu erori standard robuste (Aprofundări)?
- De ce se poate estima indicele cozii cu estimatorul Hill cînd existența kurtosisului este îndoielnică?

- Capitolul următor: sînt randamentele predictibile? (Capitolul 2)

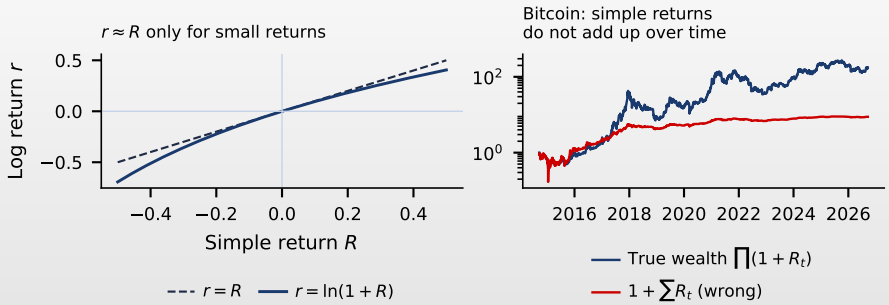
Decizia practică

- **Ce aleg**
  - pentru cozi: estimatorul Hill ($k = 2{,}5\%$ din n) cu SE bootstrap pe blocuri și cuantile (VaR 1%), nu kurtosisul
  - pentru dependență: benzile robuste, nu cele i.i.d. (S&P 500: 7 laguri din 100 ies din banda robustă, 20 din cea i.i.d.)
  - pentru modelare: volatilitate variabilă în timp și inovații cu cozi groase (Capitolul 5)
- **În ce condiții**
  - coada este aproximativ Pareto, iar graficul Hill este plat în jurul pragului ales
  - testele pe r_t^2 și $|r_t|$ și SE ale rapoartelor Sharpe presupun moment de ordin patru finit, pus sub semnul întrebării de estimările Hill
- **Ce rezultat m-ar face să renunț**
  - la un singur prag: un grafic Hill care nu se stabilizează (Bitcoin: 4,2 la $k = 2{,}5\%$; la un prag comun, 2,71 pentru pierderi și 3,36 pentru cîștiguri)
  - la evitarea kurtosisului: intervale bootstrap pentru α aflate în întregime peste 4, pe toate piețele
  - la inovațiile cu cozi groase: un kurtosis al lui $\hat{z}_t = r_t/\hat{\sigma}_t$ apropiat de 3

De ce randamentul logaritmic este mereu sub cel simplu

- $r = \ln(1 + R) < R$ pentru orice $R \neq 0$, deoarece $\ln(1 + x) < x$ pentru $x > -1$, $x \neq 0$ (logaritmul este concav)
- Diferența este neglijabilă pentru variații mici și mare pentru scăderi mari
  - $R = +1\%$ dă $r = 0{,}995\%$
  - $R = -50\%$ dă $r = -69{,}3\%$
- Exemplu: prețul trece de la 100 la 110, apoi la 99 (Seminarul 1, A1)
  - randamentele simple $+10\%$ și -10% au suma 0, dar valoarea scade cu 1%: $1{,}1 \times 0{,}9 = 0{,}99$
  - randamentele logaritmice $9{,}53\%$ și $-10{,}54\%$ au suma $-1{,}01\% = \ln 0{,}99$
- Manuale: Campbell, Lo & MacKinlay (1997), cap. 1; Franke, Härdle & Hafner (2019)

Randamente simple și logaritmice în practică



- Stînga: $r \approx R$ doar pentru variații mici
- Dreapta: Bitcoin 2014–2026 a multiplicat valoarea investiției de 176,9 ori, adică $\sum_t r_t = \ln 176{,}9 = 5{,}18$
  - suma randamentelor logaritmice zilnice este $\ln(P_T/P_0)$, logaritmul multiplicatorului
  - adunarea randamentelor simple zilnice dă $1 + \sum_t R_t = 8{,}83$, de 20 de ori mai puțin decît multiplicatorul real

MFM_ch1_returns

Cît de precis estimăm media, asimetria și kurtosisul

- **Eroarea standard** (SE) a mediei: $\mathrm{SE}(\bar{r}) = \sigma/\sqrt{T}$, estimată cu $\hat{\sigma}$
  - mediile zilnice sînt de 13 pînă la 40 de ori mai mici decît $\hat{\sigma}$: **raportat la mărimea sa**, media este momentul estimat cel mai imprecis
  - S&P 500: $\bar{r} = 0{,}033\% \pm 0{,}023\%$ pe zi (interval de încredere de 95%, $\pm 1{,}96\,\mathrm{SE}$), $T = 9\,245$; $\mathrm{SE}/|\bar{r}| \approx 0{,}36$
- Pentru date i.i.d. din distribuția Normală: $\sqrt{T}\,\hat{S} \to N(0, 6)$ și $\sqrt{T}(\hat{K} - 3) \to N(0, 24)$
  - deci $\mathrm{SE}(\hat{S}) \approx \sqrt{6/T}$ și $\mathrm{SE}(\hat{K}) \approx \sqrt{24/T}$: 0,025 și 0,051 pentru S&P 500
- Momentele superioare au altă problemă: SE poate să nici nu existe (secțiunea despre cozi)

Metoda delta și momentele care trebuie să existe

- **Metoda delta** dă eroarea standard a unei funcții de un estimator

$$\sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta) \to N(0, v) \implies \sqrt{T}\left(g(\hat{\theta}) - g(\theta)\right) \to N(0, g'(\theta)^2 v)$$

  - $\hat{\theta}$: estimatorul unui parametru θ (de exemplu un moment), cu varianța asimptotică v
  - g: o funcție derivabilă, de exemplu raportul de momente care definește $\hat{S}$
  - ideea: dezvoltarea Taylor de ordinul întîi $g(\hat{\theta}) \approx g(\theta) + g'(\theta)(\hat{\theta} - \theta)$
- Pentru date i.i.d. cu orice distribuție, limita este Normală doar dacă există momentele din varianța ei
  - $\hat{S}$: $\mathbb{E}r^6 < \infty$; $\hat{K}$: $\mathbb{E}r^8 < \infty$ ($\mathbb{E}$: media)
  - existența lor se verifică empiric în secțiunea despre cozi

Ce presupune fiecare test și unde cedează pe randamente

Test	H_0	Limita χ^2 presupune	Problema pentru randamente
JB, Jarque & Bera (1980)	i.i.d., distribuția Normală	chiar H_0 (toate momentele există)	cu cozi groase, respingere aproape sigură pentru T mare
LB, Ljung & Box (1978)	$\rho_1 = \cdots = \rho_m = 0$	i.i.d., nu doar absența corelației	gruparea volatilității: H_0 respinsă prea des
ARCH-LM, Engle (1982)	i.i.d., fără efecte ARCH	sub H_0 i.i.d.: $\mathbb{E}r^4 < \infty$ ($\alpha > 4$)	$\alpha \approx 3 < 4$: valori critice nesigure

- Două condiții de momente pentru ARCH-LM, în două situații diferite
  - sub ipoteza nulă i.i.d.: limita χ^2_q cere o varianță finită a lui r_t^2, adică $\mathbb{E}r^4 < \infty$
  - sub dependență de tip GARCH: ACF empirică a lui r_t^2, pe care se bazează statistica, folosește limita Normală standard sub condiția de moment $\mathbb{E}r^8 < \infty$ ($\alpha > 8$) Davis & Mikosch (1998)
- Problema nu este calculul statisticii, ci validitatea distribuției ei de referință pentru randamente

Exemplu rezolvat: JB pentru S&P 500

- Valoarea critică χ^2_2 la 5%: 5,99
- S&P 500, 1990–2026: $T = 9\,245$, $\hat{S} = -0{,}364$, $\hat{K} - 3 = 10{,}88$
  - termenul de asimetrie $\hat{S}^2/6 = 0{,}132/6 = 0{,}022$
  - termenul de kurtosis $10{,}88^2/24 = 118{,}4/24 = 4{,}93$
  - $JB = 9\,245 \times (0{,}022 + 4{,}93) \approx 45\,800$, față de valoarea critică 5,99
- Aproape întreaga valoare a statisticii provine din termenul de kurtosis
  - abaterea de la normalitate provine din cozi, nu din asimetrie

Ce arată, și ce nu arată, o respingere JB

- Sub ipoteza nulă toate momentele există
  - deci valoarea p este validă pentru ipoteza nulă **comună** „i.i.d. și distribuție Normală”
  - în prezența cozilor groase, JB crește odată cu T
  - acesta este un efect al puterii testului, nu o valoare p greșită
- O respingere nu arată ce parte a ipotezei este încălcată
  - poate fi încălcată distribuția marginală sau ipoteza de independență
  - teste pentru distribuția marginală cu varianțe HAC (robuste la heteroscedasticitate și autocorelație): Anexă

Alternativa robustă: asimetrie și kurtosis bazate pe cuantile

- Două măsuri bazate pe cuantile Kim & White (2004), care nu presupun existența momentelor
  - q_p: cuantila de ordin p a randamentelor, valoarea sub care se află o proporție p din zile
  - $q_{0,5}$: mediana
- **Asimetria Hinkley** compară lungimile celor două cozi față de mediană

$$\frac{q_{0,95} + q_{0,05} - 2q_{0,5}}{q_{0,95} - q_{0,05}}$$

  - numărătorul este $(q_{0,95} - q_{0,5}) - (q_{0,5} - q_{0,05})$: coada dreaptă minus coada stîngă
  - ia valori în $[-1, 1]$
  - o valoare negativă indică o coadă stîngă mai lungă
- **Excesul de kurtosis Crow–Siddiqui**, notat K_{CS}, compară lățimea cozilor cu lățimea centrului

$$K_{CS} = \frac{q_{0,975} - q_{0,025}}{q_{0,75} - q_{0,25}} - 2{,}91$$

  - 2,91: valoarea raportului pentru distribuția Normală
  - o valoare pozitivă indică cozi mai groase
  - ambele măsuri sînt 0 pentru distribuția Normală

Intervale de încredere prin bootstrap pe blocuri suprapuse

- Intervalele de încredere (CI) de 95% se obțin prin **bootstrap pe blocuri suprapuse**
  - se reeșantionează blocuri de 20 de zile consecutive (1 000 de reeșantionări)
  - măsura se recalculează pe fiecare serie reeșantionată
  - blocurile păstrează dependența din interiorul lor
- Procedura este validă pentru randamente staționare, slab dependente, cu densitate pozitivă în aceste cuantile
- Un CI care nu conține 0 indică o abatere semnificativă de la distribuția Normală

Cozile groase se confirmă și fără momente

	Asimetrie (momente)	Hinkley [CI 95%]	Exces kurt.	Exces Crow–Siddiqui [CI 95%]
S&P 500	−0,36	−0,064 [−0,092; −0,041]	10,9	1,54 [1,29; 1,79]
BET-TR	−1,40	−0,036 [−0,085; 0,025]	17,8	1,06 [0,73; 1,43]
Bitcoin	−0,70	−0,018 [−0,069; 0,032]	12,0	2,25 [1,88; 2,64]
EUR/RON	0,73	0,041 [−0,022; 0,093]	15,1	4,87 [3,74; 6,13]
Aur	−0,23	0,004 [−0,025; 0,030]	9,3	1,47 [1,29; 1,73]

- Excesul de kurtosis bazat pe cuantile (Crow–Siddiqui) este pozitiv pe toate cele cinci piețe
  - niciun CI nu conține 0
- Asimetria negativă bazată pe cuantile este semnificativă doar pentru S&P 500
  - asimetria bazată pe momente a BET-TR (−1,40) provine din cîteva zile extreme (19 decembrie 2018)

MFM_ch1_inference

Distribuția Student-t: un model cu cozi groase

- Distribuția Student-t, Praetz (1972): un model cu cozi groase pentru randamente, cu densitatea

$$f(x) \propto \left(1 + \frac{(x-\mu)^2}{\nu s^2}\right)^{-(\nu+1)/2}$$

  - $\propto$: fără constanta de normalizare; μ: centrul; $s > 0$: scala
  - $\nu > 0$: gradele de libertate; un ν mic înseamnă cozi groase, iar $\nu \to \infty$ dă distribuția Normală
- Coada $P(X > x) \propto x^{-\nu}$: există doar momentele de ordin $< \nu$
  - varianța $s^2\nu/(\nu-2)$ pentru $\nu > 2$
  - excesul de kurtosis $6/(\nu-4)$ pentru $\nu > 4$

Zile extreme: observate, sub distribuția Normală și sub Student-t

	S&P 500	BET-TR	Bitcoin	EUR/RON	Aur
Zile dincolo de $3\hat{\sigma}$ (%)	1,55	1,44	1,82	2,06	1,42
Zile dincolo de $5\hat{\sigma}$ (număr)	30	12	10	29	26
Număr așteptat sub distribuția Normală, $> 5\hat{\sigma}$	0,005	0,002	0,003	0,003	0,005
Grade de libertate Student-t $\hat{\nu}$ (verosimilitate maximă)	2,8	3,1	2,2	1,2	2,9

- Sub distribuția Normală
  - 0,27% din zile sînt dincolo de 3σ (observat: de 5–8 ori mai mult)
  - o zi de 5σ apare în medie o dată la 6 900 de ani de tranzacționare (observat: 10–30 de zile)
- $\hat{\nu}$ se obține prin **verosimilitate maximă**, pe întreaga distribuție
  - se aleg μ, s și ν care fac datele observate cele mai probabile
  - numeroasele randamente mici domină estimarea, deci o ajustare slabă în centru deplasează $\hat{\nu}$
  - EUR/RON: $\hat{\nu} = 1{,}2$, deoarece 57% din variațiile zilnice sînt sub 0,1%, la care se adaugă salturi rare

Alegerea lui k: între variață și deplasare

- **Alegerea lui** k, adică a pragului $u = X_{(k+1)}$
  - un k mic: puține observații în coadă, deci variață mare (SE $\approx \alpha/\sqrt{k}$)
  - un k mare: intră observații din centrul distribuției, unde coada nu mai este Pareto, deci $\hat{\alpha}$ este deplasat
  - se citește nivelul din zona în care **graficul Hill** ($\hat{\alpha}_k$ în funcție de k) este plat
- Regula capitolului, fixată înaintea estimării: $k = 2{,}5\%$ din n
  - mijlocul intervalului 1–5% în care graficele Hill sînt aproximativ plate
- Robustețea: raportăm și cel mai mic și cel mai mare $\hat{\alpha}_k$ pentru k între 1% și 5% din n
- Distribuția Student-t are indicele cozii $\alpha = \nu$, dar estimată pe întreaga distribuție descrie greșit cozile
  - pentru EUR/RON, $\hat{\alpha} = 2{,}8$ (Hill), iar $\hat{\nu} = 1{,}2$

ACF în prezența heteroscedasticității condiționate

- **ACF** (funcția de autocorelație): autocorelațiile empirice $\hat{\rho}_k$, reprezentate în funcție de lagul k

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_t x_t x_{t-k}}{\sum_t x_t^2}, \qquad x_t = r_t - \bar{r}$$

- Pentru randamente necorelate, cu varianță condiționată variabilă: $\hat{\rho}_k \approx N(0, \tau_k)$ Romano & Thombs (1996)
  - τ_k: varianța lui $\hat{\rho}_k$, estimată prin $\hat{\tau}_k = \sum_t x_t^2 x_{t-k}^2 / (\sum_t x_t^2)^2$
  - i.i.d.: $T\tau_k = 1$, de unde banda clasică $\pm 1{,}96/\sqrt{T}$
  - gruparea volatilității: $T\tau_k > 1$, deci banda clasică este prea îngustă și declară prea des autocorelații semnificative

Testul portmanteau robust $\tilde{Q}(m)$

- Statistica t robustă: $\hat{\rho}_k / \sqrt{\hat{\tau}_k}$, comparată cu $\pm 1{,}96$
- Testul portmanteau robust Lobato, Nankervis & Savin (2001): ipoteza nulă $\rho_1 = \cdots = \rho_m = 0$

$$\tilde{Q}(m) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\hat{\rho}_k^2}{\hat{\tau}_k}$$

  - suma pătratelor statisticilor t robuste pentru primele m laguri; distribuția de referință χ^2_m
  - ipotezele testului: Anexă
- Diferența față de $Q(m)$ (Ljung–Box)
  - $Q(m)$ împarte, aproximativ, fiecare $\hat{\rho}_k^2$ la varianța i.i.d. $1/T$, iar $\tilde{Q}(m)$ la varianța estimată $\hat{\tau}_k$

Cu erori standard robuste, rămîn semnificative doar S&P 500 și EUR/RON

Lagul 1	S&P 500	BET-TR	Bitcoin	EUR/RON	Aur
$\hat{\rho}_1$	−0,079	0,061	−0,022	0,170	−0,011
$T\hat{\tau}_1$	5,00	4,35	2,89	6,85	2,43
Statistica t, i.i.d. / robustă	−7,6 / −3,4	3,3 / 1,6	−1,5 / −0,9	12,4 / 4,7	−1,1 / −0,7

- S&P 500: $Q(10) = 91{,}6$, dar $\tilde{Q}(10) = 19{,}0$ (p = 0,041)
- Cu SE robuste, doar S&P 500 ($t = -3{,}4$) și EUR/RON ($t = 4{,}7$) păstrează o autocorelație de lag 1 semnificativă
  - dar este mică din punct de vedere economic

MFM_ch1_inference

Cozi groase din volatilitate aleatoare: mixturi de distribuții Normale

- Modelul: randamentul este un șoc Normal înmulțit cu o volatilitate aleatoare

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim N(0,1) \text{ independent de } \sigma_t$$

- Kurtosisul randamentelor este cel puțin 3

$$K = \frac{\mathbb{E}[r_t^4]}{\mathbb{E}[r_t^2]^2} = 3\,\frac{\mathbb{E}[\sigma_t^4]}{\mathbb{E}[\sigma_t^2]^2} \;\geq\; 3$$

  - egalitatea din mijloc: $\mathbb{E}[\varepsilon_t^4] = 3$ și $\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = 1$, iar σ_t și ε_t sînt independente
  - inegalitatea rezultă din inegalitatea lui Jensen ($\mathbb{E}[X^2] \geq \mathbb{E}[X]^2$) pentru $X = \sigma_t^2$
  - egalitate doar dacă σ_t este constantă
  - orice variație a volatilității creează exces de kurtosis

Exemplu numeric: kurtosis 8,33 din șocuri Normale

- Exemplu: $\sigma = 1\%$ în 90% din zile și 3% în 10% din zile

$$K = 3 \cdot \frac{0{,}9 \cdot 1 + 0{,}1 \cdot 81}{(0{,}9 + 0{,}1 \cdot 9)^2} = 3 \cdot \frac{9{,}0}{3{,}24} = 8{,}33$$

  - numărătorul: $\mathbb{E}[\sigma^4] = 0{,}9 \cdot 1^4 + 0{,}1 \cdot 3^4$, în unități de $(1\%)^4$
  - numitorul: $\mathbb{E}[\sigma^2]^2$, cu $\mathbb{E}[\sigma^2] = 0{,}9 \cdot 1^2 + 0{,}1 \cdot 3^2 = 1{,}8$
  - excesul de kurtosis este 5,33, deși randamentul fiecărei zile, condiționat de σ, are distribuție Normală
- Rezultatul leagă cozile groase (Faptul 2) de gruparea volatilității (Faptul 6)
  - o mixtură cu extrageri independente în fiecare zi are cozi groase, dar nu produce gruparea volatilității (Seminarul 1, A4 și A9)

Estimarea parametrului de memorie d

- Memoria lungă în domeniul frecvenței: densitatea spectrală crește nelimitat la frecvențe joase

$$f(\lambda) \approx G\lambda^{-2d} \quad \text{cînd } \lambda \to 0$$

  - $f(\lambda)$: densitatea spectrală, contribuția ciclurilor de frecvență λ la varianța seriei; λ mic: cicluri lungi
  - $G > 0$: o constantă; estimatorii semiparametrici folosesc doar cele mai joase m frecvențe Fourier $\lambda_j = 2\pi j/T$, $j = 1, \ldots, m$

- Doi estimatori (formulele în Anexă)
  - Whittle local Robinson (1995): $\sqrt{m}(\hat{d} - d) \to N(0, \frac{1}{4})$, deci SE $= 1/(2\sqrt{m})$
  - regresia log-periodogramei Geweke & Porter-Hudak (1983): SE $= \pi/\sqrt{24m}$
- Alegerea $m = T^{0,65}$
  - un m mic mărește SE
  - un m mare include frecvențe la care dinamica pe termen scurt (GARCH) deplasează $\hat{d}$

Memorie lungă sau rupturi structurale? (1/2)

- Schimbări rare ale nivelului volatilității produc o ACF a lui $|r_t|$ care scade încet
  - și $\hat{d} > 0$ chiar în absența memoriei lungi Diebold & Inoue (2001), Mikosch & Stărică (2004)
- Verificare: localizăm o ruptură de variață cu testul sumelor cumulate ale pătratelor Inclán & Tiao (1994)
  - apoi reestimăm d (Whittle local) pe fiecare subeșantion

$\lvert r_t \rvert$	Data rupturii	Volatilitate înainte / după (%)	$\hat{d}$ înainte (SE)	$\hat{d}$ după (SE)
S&P 500	20 iul. 1998	12,6 / 19,3	0,28 (0,04)	0,51 (0,03)
BET-TR	17 dec. 2018	12,5 / 16,9	0,19 (0,05)	0,37 (0,04)
Bitcoin	19 iun. 2022	74,9 / 47,7	0,39 (0,04)	0,15 (0,05)
EUR/RON	27 iun. 2013	6,6 / 2,2	0,35 (0,04)	0,35 (0,04)
Aur	29 nov. 2005	13,2 / 18,3	0,30 (0,03)	0,37 (0,03)

MFM_ch1_inference

Memorie lungă sau rupturi structurale? (2/2)

- $\hat{d}$ rămîne cu cel puțin 3 SE peste 0 în fiecare subeșantion
  - cel mai slab caz: Bitcoin după 2022, $0{,}15/0{,}05 = 3$
  - o singură ruptură nu explică persistența
- S&P 500 după 1998: $\hat{d} = 0{,}51$, peste limita de staționaritate $\frac{1}{2}$
  - la mai puțin de o SE de limită
  - interpretați cu prudență
- $\hat{d}$ se schimbă (Bitcoin $0{,}39 \to 0{,}15$)
  - rămîn posibile rupturi multiple sau un d variabil în timp
  - datele rupturilor au caracter descriptiv

MFM_ch1_inference

Ce inferență rămîne validă cînd momentele lipsesc

Statistica	Condiție	Pentru Hill $\hat{\alpha} \approx 2{,}3$–$3{,}5$ (Bitcoin: 4,2)
Media, varianța lui r_t	$\alpha > 2$	finite, convergență lentă
ACF a lui $\lvert r_t \rvert$, benzi ACF robuste, $\tilde{Q}$	$\alpha > 4$ pentru limite Normale	discutabilă
Kurtosis, ACF a lui r_t^2, ARCH-LM, Q pe r_t^2	$\alpha > 4$ pentru existență (și pentru χ^2 al ARCH-LM sub i.i.d.), $\alpha > 8$ pentru limite Normale sub dependență de tip GARCH	fără inferență standard
Asimetrie	$\alpha > 6$ pentru o limită Normală	fără inferență standard
Cuantile, frecvența depășirilor, Hill $\hat{\alpha}$	nu cere momente	valide, cu SE robuste la dependență

- Cînd momentul de ordinul patru este infinit, ACF empirică a lui r_t^2 converge lent
  - iar distribuția ei limită nu este Normală Davis & Mikosch (1998)
  - banda $\pm 1{,}96/\sqrt{T}$ și valorile p pentru Q pe r_t^2 și ARCH-LM nu sînt de încredere
- Concluzia „există grupare a volatilității" este robustă
  - valorile numerice exacte nu sînt robuste
  - o explicație posibilă a efectului Taylor: $\lvert r_t \rvert$ cere mai puține momente finite decît r_t^2

Estimatorul Garman–Klass: amplitudinea plus mișcarea de la deschidere la închidere

- **Garman–Klass**, Garman & Klass (1980): combină amplitudinea cu variația de la deschidere la închidere

$$\hat{\sigma}^2_{GK} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left[\tfrac{1}{2}(h_t - l_t)^2 - (2\ln 2 - 1)(c_t - o_t)^2\right]$$

  - $c_t - o_t$: randamentul logaritmic de la deschidere la închidere
  - ponderile $\frac{1}{2}$ și $2\ln 2 - 1 \approx 0{,}386$ provin din estimatorul cu variață minimă derivat de Garman și Klass
  - aceleași ipoteze ca la Parkinson: fără drift, fără salturi peste noapte
- Eficiența față de close-to-close: 7–8

Estimatorul Rogers–Satchell: corect și în prezența unui drift

- **Rogers–Satchell**, Rogers & Satchell (1991): nedeplasat în prezența unui **drift** nenul (tendința așteptată a logaritmului prețului)

$$\hat{\sigma}^2_{RS} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left[(h_t - o_t)(h_t - c_t) + (l_t - o_t)(l_t - c_t)\right]$$

  - termenii măsoară cît de departe au ajuns maximul și minimul față de deschidere și de închidere
  - ambele produse sînt ≥ 0, deoarece $l_t \leq o_t, c_t \leq h_t$
  - pentru o mișcare browniană cu drift, media lor este exact varianța zilnică
  - nu include saltul de peste noapte

Estimatorul Yang–Zhang: include saltul de peste noapte

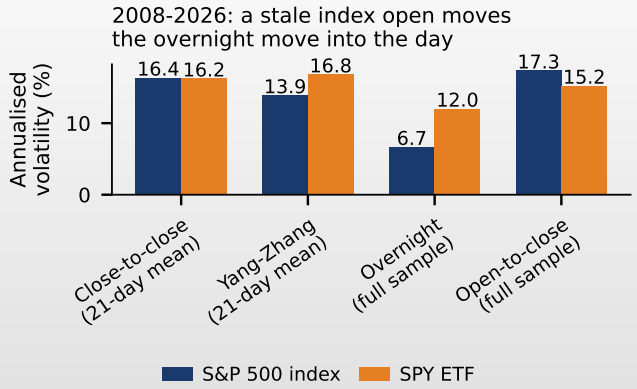
- **Yang–Zhang**, Yang & Zhang (2000): adaugă saltul de peste noapte (de la închidere la deschidere)

$$\hat{\sigma}^2_{YZ} = \hat{\sigma}^2_{\text{noapte}} + k\,\hat{\sigma}^2_{\text{desch-închid}} + (1-k)\,\hat{\sigma}^2_{RS}, \quad k = \frac{0{,}34}{1{,}34 + \frac{n+1}{n-1}}$$

  - $\hat{\sigma}^2_{\text{noapte}}$: varianța empirică a lui $o_t - c_{t-1}$, randamentul de peste noapte
  - $\hat{\sigma}^2_{\text{desch-închid}}$: varianța empirică a lui $c_t - o_t$
  - k: ponderea care dă varianța minimă printre estimatorii independenți de drift și robuști la salturile de la deschidere (alt k decît cel din estimatorul Hill); $k \approx 0{,}145$ pentru n mare

- Estimatorii bazați pe amplitudinea zilnică fac legătura cu volatilitatea realizată din date intraday (Capitolul 9)

Deschidere neactualizată: S&P 500 față de SPY, un fond tranzacționat la bursă (ETF)



MFM_ch1_seminar_tests

Deschiderea neactualizată: cauza și efectul asupra estimatorilor de volatilitate

- **Deschiderea neactualizată**: prețul de deschidere al indicelui este calculat din ultimele prețuri ale componentelor
  - la 9:30 multe acțiuni nu s-au tranzacționat încă și intră cu prețul de închidere anterior
- SPY, ETF-ul care replică S&P 500, are un preț de deschidere rezultat din tranzacții
- Ponderea zilelor cu deschiderea egală cu închiderea precedentă
  - circa 96% în 1996–2005 și încă 16% în 2007
  - 3,5% în 2008–2026 (pînă la 26% în 2012–2013): estimatorii bazați pe amplitudinea zilnică folosesc doar datele din 2008 încoace
- O deschidere neactualizată transferă o parte din variația de peste noapte în intervalul de tranzacționare
  - volatilitatea de peste noapte: 6,7% pentru indice, 12,0% pentru SPY
- Yang–Zhang coboară sub close-to-close doar în cazul indicelui
  - pentru estimatorii care folosesc deschiderea, folosiți un instrument tranzacționat (Seminarul 1, B15)

MFM_ch1_seminar_tests

Drawdown-ul maxim față de un mers aleator gaussian

	S&P 500	BET-TR	Bitcoin	EUR/RON	Aur
D observat (MDD)	0,84 (−57%)	0,37 (−31%)	1,80 (−83%)	0,17 (−16%)	0,59 (−45%)
$\mathbb{E}[D]$, $\mu = 0$	1,37	0,67	2,89	0,26	1,24
$\mathbb{E}[D]$, $\mu = \hat{\mu}$: formula / simulare	0,65 / 0,66	0,26 / 0,26	1,48 / 1,55	0,14 / 0,15	0,62 / 0,64
valoarea p, $P(D \geq D_{\mathbf{obs}})$	0,17	0,07	0,26	0,29	0,52

- Reperul fără drift supraestimează $\mathbb{E}[D]$ de circa două ori
  - un drift pozitiv limitează adîncimea scăderilor
- Cu driftul estimat, niciun MDD nu este neobișnuit: valoarea p între 0,07 (BET-TR) și 0,52 (aur)
- Reperul ignoră cozile groase și gruparea volatilității, deci este doar un prim termen de comparație
- MDD crește odată cu lungimea eșantionului: comparați doar orizonturi egale (Anexă)

generate_all_charts

Durata recuperării după drawdown-ul maxim

- **Durata recuperării**: timpul de la vîrf pînă cînd prețul atinge din nou acest nivel

	MDD	Vîrf	Minim	Vîrf recuperat
S&P 500	−57%	oct. 2007	mar. 2009	mar. 2013 (5,5 ani)
BET-TR	−31%	ian. 2020	mar. 2020	dec. 2020 (0,9 ani)
Bitcoin	−83%	dec. 2017	dec. 2018	nov. 2020 (3,0 ani)
EUR/RON	−16%	dec. 2005	iul. 2007	ian. 2008 (2,0 ani)
Aur	−45%	sept. 2011	dec. 2015	iul. 2020 (8,9 ani)

- Adîncimea și durata sînt dimensiuni distincte ale riscului
  - drawdown-ul aurului a fost mai puțin adînc decît al lui Bitcoin, dar a durat de trei ori mai mult
- Recuperări rapide în formă de V (BET-TR 2020)
  - față de perioade lungi underwater, sub vîrful anterior (aur 2011–2020)
- Pentru EUR/RON un „drawdown" este o scădere a euro față de leu

MFM_ch1_risk_measures

Rapoartele Sortino și Calmar: pierderile și drawdown-ul la numitor

- **Raportul Sortino** Sortino & van der Meer (1991): numărătorul raportului Sharpe, la numitor doar volatilitatea pierderilor

$$SoR = \frac{\mu_{\text{aritm}} - r_f}{\sigma^-_{\text{an}}}, \qquad \sigma^- = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \min(R_t, 0)^2}, \qquad \sigma^-_{\text{an}} = \sqrt{A}\,\sigma^-$$

  - σ^-: downside deviation zilnică (în seminar: semiabaterea inferioară $\hat{\sigma}_D$); media este pe toate cele T zile, iar zilele pozitive contribuie cu 0
  - S&P 500: $\sigma^-_{\text{an}} = 12{,}68\%$, $SoR = 0{,}78$

- **Raportul Calmar**: CAGR/$|MDD|$
  - S&P 500: $8{,}69\%/56{,}78\% = 0{,}15$, valoare determinată de un singur episod
  - nu are o teorie de eșantionare utilizabilă: MDD-ul de la numitor crește cu lungimea eșantionului

BET-TR față de S&P 500: diferența rapoartelor Sharpe nu este semnificativă la 5%

- În prezența grupării volatilității: teste HAC sau bootstrap studentizat pe blocuri Ledoit & Wolf (2008)
  - și ele cer momente de ordinul patru finite, pe care estimările Hill le pun la îndoială
- BET-TR față de S&P 500, zile comune 2014–2026
  - diferența dintre rapoartele Sharpe: 0,61, $z = 1{,}75$ ($p = 0{,}08$)
  - CI de 95% prin bootstrap pe blocuri: $[-0{,}01;\ 1{,}21]$ (Seminarul 1, B14)

MFM_ch1_risk_measures

Studiu de caz (1/7): un singur model pentru gruparea volatilității, memorie lungă și efectul de levier

- Cerința: un singur model trebuie să reproducă simultan
  - gruparea volatilității (Faptul 6)
  - scăderea lentă a autocorelației lui $|r_t|$ (Faptul 8)
  - efectul de levier (Faptul 9)
- Relevanța: dacă volatilitatea este în mare parte o funcție de traiectoria prețului, ea este în mare parte endogenă
  - un model de **volatilitate dependentă de traiectorie (PDV)** necesită doar o componentă aleatoare suplimentară redusă
  - spre deosebire de modelele cu volatilitate stocastică (Capitolele 11–12)
- Date: închiderile zilnice a cinci indici
  - S&P 500 (SUA), Euro Stoxx 50 (zona euro), FTSE 100 (Regatul Unit), DAX (Germania), Nikkei 225 (Japonia)
  - eșantionul de antrenare: 1 ian. 2000 – 31 dec. 2018
  - eșantionul de test: 1 ian. 2019 – 15 mai 2022

Studiu de caz (2/7): volatilitatea ca funcție de trend și de volatilitatea recentă

- Ecuația (3.7) din lucrare: volatilitatea de azi este o funcție liniară de două rezumate ale randamentelor trecute

$$\sigma_t = \beta_0 + \beta_1 R_{1,t} + \beta_2 \Sigma_t$$

- Notațiile
  - σ_t: variabila dependentă, de exemplu VIX la închiderea zilei t
  - S_{t_i}: nivelul indicelui la închiderea zilei t_i
  - $t_i \leq t$ parcurge zilele de pînă la t, inclusiv
  - $r_{t_i} = S_{t_i}/S_{t_{i-\mathbf{1}}} - 1$: randamentul **simplu** al zilei t_i (notația lucrării; în restul capitolului r_t este randamentul logaritmic)
  - $R_{1,t}$: componenta de trend, construită din randamentele trecute
  - Σ_t: componenta de volatilitate, construită din pătratele randamentelor trecute

Studiu de caz (3/7): cît contează o zi veche?

- Un **nucleu** $K(\tau)$ dă ponderea unei zile vechi de τ, cu $\tau = i\Delta t$ pentru o zi veche de i zile și $\Delta t = 1/252$
- Ponderile zilnice $K(i\Delta t)\Delta t$ sînt pozitive și însumează 1 (axa verticală a graficului nucleelor)
- Lucrarea folosește o **lege de putere decalată în timp (TSPL)**, ec. (3.9)

$$K(\tau) = \frac{(\tau + \delta)^{-\alpha}}{Z_{\alpha,\delta}}, \qquad \alpha > 1,\ \delta > 0,\ \tau = i\Delta t,\ i = 0, 1, \ldots, 999$$

  - $Z_{\alpha,\delta}$: constanta de normalizare pe ultimele 1 000 de zile
  - α: viteza de scădere a ponderilor; un α mic înseamnă ponderi care scad lent
  - δ: decalajul, în ani; un δ mic concentrează ponderea pe ultimele cîteva zile ($\delta = 0{,}05$ ani $\approx 12{,}6$ zile)
- Forma rezultată: pondere mare pe ultimele cîteva zile și o coadă de tip lege de putere
  - ponderea mare pe ultimele zile: memorie scurtă
  - coada de tip lege de putere: ponderi care scad lent, compatibile cu scăderea lentă a ACF lui $|r_t|$ (Faptul 8)
  - trunchiat la 1 000 de zile, nucleul nu arată singur o memorie lungă asimptotică
- Modelul folosește două nuclee: K_1 pentru trend și K_2 pentru volatilitate, cu parametrii (α_1, δ_1) și (α_2, δ_2)
- Aici α, δ și K nu sînt indicele cozii, puterea din efectul Taylor sau kurtosisul

Studiu de caz (4/7): trendul recent și volatilitatea istorică ponderată

- Componenta de trend: o sumă ponderată a randamentelor trecute

$$R_{1,t} = \sum_{t_i \le t} K_1(t - t_i)\, r_{t_i}$$

  - $t - t_i$: vechimea zilei t_i, măsurată în ani, ca în lucrare (o zi $= 1/252$ ani)
  - $K_1(t - t_i)$: ponderea acelei zile
  - $R_{1,t} < 0$ după o perioadă de scăderi, $R_{1,t} > 0$ după o perioadă de creșteri
- Componenta de volatilitate: rădăcina pătrată a unei sume ponderate a randamentelor la pătrat

$$\Sigma_t = \Big(\sum_{t_i \le t} K_2(t - t_i)\, r_{t_i}^2 \Big)^{1/2}$$

  - Ponderile $K_j(i\Delta t)\Delta t$ au suma 1: $R_{1,t}$ și Σ_t sînt medii ponderate, anualizate cu 252 și $\sqrt{252}$
- Interpretarea coeficienților
  - $\beta_1 < 0$: după scăderi ($R_{1,t} < 0$) volatilitatea crește, adică efectul de levier
  - $\beta_2 > 0$: o volatilitate recentă mare ridică volatilitatea de azi, adică gruparea volatilității, ca în GARCH
  - $\hat{\beta}_2 = 0{,}87 < 1$, rezultat empiric, nu restricție: VIX variază mai puțin decît unu-la-unu cu Σ_t
  - $\beta_0 > 0$ asigură o parte din nivel

Studiu de caz (5/7): șapte parametri, evaluați și în afara eșantionului

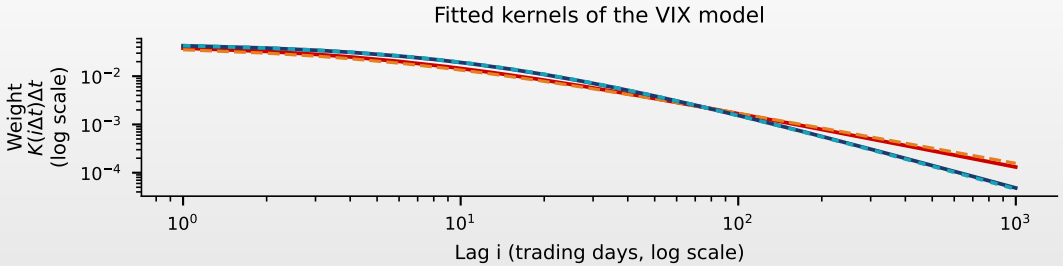
- Șapte parametri: $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \alpha_1, \delta_1, \alpha_2, \delta_2$
  - estimați prin cele mai mici pătrate neliniare pe eșantionul de antrenare: se minimizează $\sum_t (\sigma_t - \hat{\sigma}_t)^2$
  - $\hat{\sigma}_t$: valoarea dată de model pentru ziua t
  - detaliile estimării: Anexă
- Criteriile de evaluare, calculate separat pe eșantionul de antrenare și pe cel de test
  - RMSE (rădăcina erorii pătratice medii) $= \sqrt{\frac{1}{T} \sum_t (\sigma_t - \hat{\sigma}_t)^2}$: eroarea tipică, în unități de volatilitate (zecimale: 0,01 = 1 punct VIX)
  - $R^2 = 1 - \sum_t (\sigma_t - \hat{\sigma}_t)^2 / \sum_t (\sigma_t - \bar{\sigma})^2$, cu $\bar{\sigma}$ media lui σ_t

Studiu de caz (6/7): după 2022, eroare mai mică, dar și R^2 mai mic

- Parametrii estimați pe eșantionul de antrenare, 1 ian. 2000 – 31 dec. 2018 (4 779 de zile de tranzacționare), apoi menținuți fixați
- Zona umbrită: eșantionul de test
- După eșantionul de test, 16 mai 2022 – 18 sept. 2026: $R^2 = 0{,}740$, RMSE 0,026
  - RMSE mai mic, dar VIX a variat mai puțin (abaterea standard 5,0 față de 9,3 puncte), deci R^2 scade
- Raportul dintre VIX observat și estimat
  - media 0,85 în aprilie–mai 2020
  - media 1,16 din octombrie 2020 pînă în mai 2022
  - 8 aprilie 2025: VIX 52,3 față de 39,2 estimat

MFM_ch1_path_dependent_vol

Studiu de caz (7/7): nucleele estimate



MFM_ch1_path_dependent_vol

Formule și ipotezele lor

Randamente și anualizare

- $R_t = P_t/P_{t-\mathbf{1}} - 1$, $r_t = \ln(1+R_t)$, $r_t(k) = \sum_{j=\mathbf{0}}^{k-\mathbf{1}} r_{t-j}$, $R_{p,t} = \sum_i w_i R_{i,t}$
- $\text{CAGR} = (P_T/P_0)^{\mathbf{1}/Y} - 1$
- $\sigma_{\mathbf{an}} = \sqrt{A}\,\hat{\sigma}$: randamente necorelate, varianță constantă

Teste

- $JB = T\left[\hat{S}^{\mathbf{2}}/6 + (\hat{K}-3)^{\mathbf{2}}/24\right]$: $\chi^{\mathbf{2}}_{\mathbf{2}}$ sub i.i.d. Normală
- $Q(m) = T(T+2)\sum_{k=\mathbf{1}}^{m} \hat{\rho}_k^{\mathbf{2}}/(T-k)$: $\chi^{\mathbf{2}}_m$ sub i.i.d.
- $\tilde{Q}(m) = \sum_k \hat{\rho}_k^{\mathbf{2}}/\hat{\tau}_k$: $\mathbb{E}r^{\mathbf{4}} < \infty$, termeni încrucișați nuli
- Hill $\text{SE}(\hat{\alpha}) \approx \hat{\alpha}/\sqrt{k}$: coadă Pareto, observații independente

Volatilitate

- Parkinson $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\ln 2}}\overline{(h-l)^{\mathbf{2}}}$, cu bara media pe zile: fără drift, fără salturi peste noapte
- Mixtură $K = 3\,\mathbb{E}[\sigma^{\mathbf{4}}]/\mathbb{E}[\sigma^{\mathbf{2}}]^{\mathbf{2}}$: σ_t independent de ε_t

Randament ajustat la risc și drawdown

- $SR = (\mu - r_f)/\sigma$ pe randamente simple: $\mu = A\bar{R}$, nu media logaritmică $A\bar{r}$
  - $\ln(1+\text{CAGR}) \approx \mu - \sigma^{\mathbf{2}}/2$ (frîna volatilității pe scară logaritmică)
  - $\text{SE} \approx 1/\sqrt{Y}$ pentru randamente i.i.d. Normale
- $SoR = (\mu - r_f)/\sigma^{-}$
- $DD_t = P_t/\max_{s\le t} P_s - 1$; Calmar $= \text{CAGR}/|MDD|$

înapoi

Prețurile înainte de calculatoare, tickerul bursier



Ticker bursier proiectat de Thomas Edison (colecția Smithsonian)

Foto: Jaclyn Nash, Smithsonian National Museum of American History; domeniu public; Wikimedia Commons

- Înainte de calculatoare, tranzacțiile ajungeau la brokeri ca prețuri tipărite pe o **bandă de ticker**
- Un preț zilnic de închidere este un instantaneu al acestui flux de prețuri
- Alegerea momentului (închidere, fixing, instantaneu la miezul nopții) influențează rezultatele (Capitolul 0)
- Prețurile la nivel de tranzacție individuală: microstructura pieței, Capitolul 10

Înapoi

Oamenii din spatele faptelor stilizate (1/2)



Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

Pictură: C.A. Jensen (1840); domeniu public; Wikimedia Commons

- **Distribuția Normală**: reperul de la care randamentele se abat



Louis Bachelier (1870–1946)

Foto: autor necunoscut; domeniu public; Wikimedia Commons

- Prețurile ca mers aleator, în teza sa Bachelier (1900)



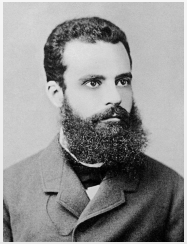
William S. Gosset, „Student" (1876–1937)

Foto: autor necunoscut; domeniu public; Wikimedia Commons

- Distribuția Student-t Student (1908), astăzi un model pentru cozi groase

Înapoi

Oamenii din spatele faptelor stilizate (2/2)



Vilfredo Pareto (1848–1923)

Foto: autor necunoscut (anii 1870); domeniu public; Wikimedia Commons



Benoît Mandelbrot (1924–2010)

Foto: Rama (2007); CC BY-SA 2.0 France; Wikimedia Commons

- Pareto: **legi de putere** pentru veniturile mari, precursoarele modelelor cu cozi groase
- Mandelbrot (1963): prețul bumbacului
  - cozi groase, pe care distribuția Normală nu le descrie
- Exponentul α al legilor de putere este indicele cozii estimat prin metoda Hill

înapoi

Faptele lui Cont în studii ulterioare

- Ratliff-Crain, Van Oort, Koehler & Tivnan (2025)
  - testează din nou toate cele 11 fapte pe randamentele intraday ale acțiunilor din Dow 30, octombrie 2018 – martie 2019
  - dovezi concludente pentru 8 fapte, nicio confirmare pentru celelalte 3
- Chakraborti, Toke, Patriarca & Abergel (2011)
  - trec în revistă faptele empirice ale randamentelor și ale carnetului de ordine, de la frecvențe intraday la frecvențe mai mici
- Cozi groase dincolo de Student-t: estimarea distribuțiilor alfa-stabile, cu indicele cozii sub 2 Pele (2014)
- Măsuri ale riscului de coadă bazate pe entropie, ca alternativă la kurtosis Pele, Lazar & Dufour (2017)
- Criptoactive: aceleași fapte, cu un factor de coadă care le distinge de celelalte clase de active Pele et al. (2023)

Înapoi

Varianța anuală în prezența autocorelației (1/2)

- Varianța unei sume de h randamente zilnice depinde de autocorelații

$$\mathrm{Var}\Big(\sum_{j=1}^{h} r_{t+j}\Big) = h\sigma^2\Big[1 + 2\sum_{j=1}^{h-1}(1 - j/h)\rho_j\Big]$$

  - h: orizontul, în zile; σ^2: varianța zilnică; ρ_j: autocorelația la lagul j
  - ipoteza: randamente slab staționare (medie și variață constante, autocovarianțe care depind doar de lag)
  - fără autocorelație ($\rho_j = 0$) rămîne $h\sigma^2$, adică regula $\sqrt{h}$ pentru volatilitate
- **Raportul variațelor** $VR(h) = \mathrm{Var}(\text{suma pe } h \text{ zile})/(h\sigma^2)$
  - $VR(h) > 1$ (< 1): autocorelație netă pozitivă (negativă)
  - volatilitatea pe orizontul h este cea dată de regula $\sqrt{h}$, înmulțită cu $\sqrt{VR(h)}$

Înapoi

Varianța anuală în prezența autocorelației (2/2)

- Model autoregresiv de ordinul 1, AR(1), cu $\rho_j = \rho^j$: $\sqrt{VR(h)} \to \sqrt{(1+\rho)/(1-\rho)}$ cînd h crește
  - ρ: autocorelația de lag 1, $|\rho| < 1$
  - EUR/RON, $\rho_1 = 0{,}17$ tratat ca parametru AR(1): factorul de corecție 1,19 (4,4% → circa 5,3%)
  - S&P 500, $\rho_1 = -0{,}079$: factorul de corecție 0,92
- Utilizarea autocorelației empirice de lag 1 ca parametru AR(1) este o ipoteză de modelare
  - verificați întreaga ACF (Seminarul 1, A7)
  - EUR/RON: $\hat{\rho}_2, \hat{\rho}_3, \hat{\rho}_4 < 0$ compensează lagul 1, iar randamentele lunare dau tot 4,4% (Capitolul 0)
  - testele raportului variațelor: Capitolul 2

Ipoteza nulă a testului JB și teste pentru serii de timp

- JB este un test al multiplicatorului Lagrange Jarque & Bera (1980)
  - pentru randamente i.i.d. din distribuția Normală, $\sqrt{T}\,(\hat{S}, \hat{K} - 3) \to N\big(0, \mathrm{diag}(6, 24)\big)$, de unde rezultă distribuția χ^2_2
  - $\hat{S}$ și $\hat{K}$ sînt asimptotic independente, cu variațele $6/T$ și $24/T$: JB este suma pătratelor celor două statistici standardizate
- Dependența de tip GARCH modifică $\mathrm{Var}(\hat{S})$ și $\mathrm{Var}(\hat{K})$
  - o respingere nu separă abaterile distribuției marginale de lipsa independenței
- Bai & Ng (2005): teste de asimetrie, kurtosis și normalitate pentru distribuția marginală a unei serii de timp
  - studentizate cu variațe HAC
  - testele lor separate de asimetrie și kurtosis (ipoteza nulă $S = 0$ sau $K = 3$, fără normalitate) necesită $\mathbb{E}r^6 < \infty$ și $\mathbb{E}r^8 < \infty$

înapoi

Testul portmanteau robust și ipotezele lui

- $\tilde{Q}(m) = \sum_{k=1}^{m} \hat{\rho}_k^2 / \hat{\tau}_k \sim \chi_m^2$ Lobato, Nankervis & Savin (2001) presupune $\mathbb{E}r^4 < \infty$
  - și termeni încrucișați nuli: $\mathbb{E}[x_t^2 x_{t-k} x_{t-l}] = 0$ pentru două laguri diferite $k \neq l$
  - atunci $\hat{\rho}_k$ de la laguri diferite sînt asimptotic necorelate, iar suma are distribuția χ_m^2
- Dalla, Giraitis & Phillips (2022) păstrează în covarianța lui $\hat{\rho}_k$ doar termenii încrucișați semnificativi
  - pentru S&P 500, BET-TR și Bitcoin nu rămîne niciunul
- $\hat{\tau}_k$ este varianța estimată sub ipoteza $\rho_k = 0$
  - pentru a compara un ρ_1 nenul între perioade, folosiți SE HAC ale pantei din regresia lui r_t pe r_{t-1} (Seminarul 1, B11)

Înapoi

Estimatorul Hill, distribuția asimptotică și alternative

- Estimatorul Hill este estimatorul de verosimilitate maximă pentru o coadă Pareto peste pragul $u = X_{(k+1)}$, condiționat de u (Seminarul 1, A11)
- Dacă $k \to \infty$ și $k/n \to 0$, iar coada este Pareto pînă la un termen de ordinul doi

$$\sqrt{k}\,(\hat{\alpha}_k - \alpha) \;\to\; N(0, \alpha^2)$$

  - termen de ordinul doi: o corecție a legii de putere care dispare cînd $x \to \infty$
  - consecință: $\mathrm{SE}(\hat{\alpha}_k) \approx \alpha/\sqrt{k}$, formula din partea principală
  - dacă k crește prea repede, apare o deplasare, deoarece coada este doar aproximativ Pareto
- Date dependente (de tip GARCH): $\hat{\alpha}$ rămîne consistent
  - dar valorile extreme apar grupat, iar varianța depășește α^2/k Hsing (1991)
- Alegerea lui k: $\hat{\alpha}$ în funcție de $\log k$ (graficul alt-Hill) Drees, Resnick & de Haan (2000)
  - scara logaritmică pune în evidență zona cu k mic, unde se află coada propriu-zisă
- Alternativa prin regresie Gabaix & Ibragimov (2011)
  - regresia logaritmului rangului pe logaritmul mărimii, cu rangul deplasat cu $-\frac{1}{2}$: $\ln(i - \frac{1}{2}) = a - b \ln X_{(i)}$, $i = 1, \ldots, k$
  - panta $\hat{b}$ estimează α
  - deplasarea cu $\frac{1}{2}$ reduce deplasarea estimatorului în eșantioane mici
  - $\mathrm{SE} = \hat{\alpha}\sqrt{2/k}$

înapoi

Cele două cozi și coada lui $|r_t|$

- $P(|X| > x) = P(X > x) + P(X < -x)$
  - dacă cozile au indicii cozii α_- (pierderi) și α_+ (cîștiguri), $|X|$ are indicele cozii $\min(\alpha_-, \alpha_+)$
- La același k, estimările nu sînt comparabile
  - cele mai mari k valori $|r_t|$ provin din ambele cozi
  - pragul comun u: cel mai mic dintre cele două praguri unilaterale la $k = 2{,}5\%$ din n

	u (%)	k pentru $\lvert r_t\rvert$	$\hat{\alpha}$, $\lvert r_t\rvert$	$\hat{\alpha}_-$, pierderi	$\hat{\alpha}_+$, cîștiguri
S&P 500	2,17	508	2,90	2,85	2,96
BET-TR	1,79	153	2,54	2,20	3,06
Bitcoin	7,11	233	3,02	2,71	3,36
EUR/RON	0,54	295	2,28	2,63	2,04
Aur	1,98	513	3,11	2,97	3,28

- La un prag comun, estimarea pentru $|r_t|$ se situează între estimările pentru cele două cozi
  - valoarea 4,2 pentru Bitcoin la $k = 2{,}5\%$ reflectă o deplasare de ordinul doi
  - raportați ambii indici unilaterali ai cozilor
  - Seminarul 1, B6 folosește $k = 2\%$ din n pe fiecare coadă: Bitcoin 2,89 / 3,62, BET-TR 2,19 / 3,08

înapoi

Care tail index este estimarea capitolului?

- Estimarea capitolului este cea fixată dinainte: $|r_t|$ la $k = 2{,}5\%$ din n (tabelul din partea principală)
- La pragul comun, k pentru $|r_t|$ iese din intervalul 1–5% din partea principală
  - S&P 500 $508/9\,245 = 5{,}5\%$, aur $513/9\,559 = 5{,}4\%$, EUR/RON $295/5\,352 = 5{,}5\%$, Bitcoin 5,3%, BET-TR 5,1%
  - un k mai mare include zile mai puțin extreme, care pot deplasa $\hat{\alpha}$ (alegerea lui k)
- EUR/RON scade de la 2,82 la 2,28
  - de peste două ori mai multe zile în coadă (295 față de 133)
  - iar coada cîștigurilor, $\hat{\alpha}_+ = 2{,}04$, este cea mai groasă: $|r_t|$ preia coada mai groasă
  - interpretați diferența ca sensibilitate la prag, nu ca o a doua estimare a aceleiași mărimi
- Tabelul cu prag comun răspunde la altă întrebare
  - care coadă, a pierderilor sau a cîștigurilor, este mai groasă

Formulele de estimare pentru d (1/2)

- Frecvențele Fourier $\lambda_j = 2\pi j/T$, $j = 1, \ldots, m$, cu $m = T^{0,65}$
- **Periodograma**: estimatorul empiric al densității spectrale

$$I(\lambda_j) = \frac{1}{2\pi T}\left|\sum_{t=1}^{T} x_t\, e^{-\mathrm{i}\lambda_j t}\right|^2$$

  - x_t: seria centrată (aici $|r_t|$ minus media)
  - $I(\lambda_j)$: cît din variația lui x_t provine din ciclul de frecvență λ_j
- Regresia log-periodogramei Geweke & Porter-Hudak (1983): $\ln I(\lambda_j)$ pe $-2\ln(2\sin(\lambda_j/2))$
  - motivul: $\ln f(\lambda) \approx \ln G - 2d \ln \lambda$, iar $2\sin(\lambda/2) \approx \lambda$ la frecvențe joase
  - panta este $\hat{d}$, SE $= \pi/\sqrt{24m}$

înapoi

Formulele de estimare pentru d (2/2)

- Whittle local Robinson (1995): $\hat{d}$ minimizează o funcție obiectiv construită din aproximarea $f(\lambda) \approx G\lambda^{-2d}$

$$\hat{d} = \arg\min_{d} \left[\ln\left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{2d} I(\lambda_j) \right) - \frac{2d}{m} \sum_{j=1}^{m} \ln \lambda_j \right]$$

  - constanta G a fost eliminată analitic
  - $\sqrt{m}(\hat{d} - d) \to N(0, \frac{1}{4})$, deci $\mathrm{SE} = 1/(2\sqrt{m})$
- Whittle local este robust la abaterile de la normalitate
  - un m mai mare reduce SE
  - dar amplifică deplasarea lui $\hat{d}$ indusă de dinamica pe termen scurt (GARCH) (Seminarul 1, B12)

Piețele în detaliu

- **Criptoactive**: o clasă de active cu profil statistic propriu Härdle, Harvey & Reule (2020)
  - randamentele lor au o expunere mică la factorii de risc ai piețelor tradiționale Liu & Tsyvinski (2021)
  - factorii de coadă, memorie și momente clasifică criptomonedele ca o clasă separată Pele et al. (2023)
  - modelarea cripto și indicele pieței cripto CRIX (CRypto IndeX): Härdle, Chen & Overbeck (2017); Capitolul 16
- **EUR/RON**: cursul de referință BNR, începînd cu 1 iulie 2005
  - perioade calme lungi întrerupte de ajustări bruște
- **BET-TR**: taxa pe activele bancare a fost anunțată pe 18 decembrie 2018
  - adoptată pe 28 decembrie 2018 prin Ordonanța de Urgență a Guvernului (OUG) 114/2018
  - șocurile de politică economică produc prăbușiri de o zi, fără creșteri de amplitudine comparabilă
- **Tranzacționarea nesincronă**: componentele indicelui nu se tranzacționează toate în fiecare moment
  - indicele reflectă știrile cu întîrziere
  - și prezintă autocorelație pozitivă Campbell, Lo & MacKinlay (1997), cap. 3

Înapoi

Drawdown-ul maxim al unei mișcări browniene

- Mișcare browniană fără drift a logaritmului prețului, cu volatilitatea anuală σ, pe T ani
  - aici T este orizontul în ani, nu numărul de zile
- Drawdown-ul maxim **logaritmic** $D = -\ln(1 + MDD) \geq 0$, cea mai mare scădere a logaritmului prețului, are

$$\mathbb{E}[D] = \sqrt{\pi/2}\,\sigma\sqrt{T} \qquad \text{Magdon-Ismail, Atiya, Pratap \& Abu-Mostafa (2004)}$$

- $MDD = e^{-D} - 1$, iar factorul $\sqrt{\pi/2} \approx 1{,}25$
  - cu drift pozitiv, $\mathbb{E}[D]$ crește doar ca $\ln T$ (formula din partea principală)
- Aur 1990–2026: $\sigma = 16{,}3\%$, $T = 36{,}7$
  - fără drift, $\mathbb{E}[D] = 1{,}24$, de două ori valoarea observată, 0,592 ($-44{,}7\%$) (Seminarul 1, A2(b–e))
  - cu driftul observat, $\mu = 6{,}5\%$ pe an: $\mathbb{E}[D] \approx 0{,}62$ (formula) și 0,64 (simulare), apropiate de valoarea observată
- Drawdown-urile și rapoartele Calmar din eșantioane de lungimi diferite nu sînt comparabile

Înapoi

Raportul Sharpe dincolo de distribuția Normală

- Randamente i.i.d. cu orice distribuție pentru care $\mathbb{E}r^4 < \infty$ Opdyke (2007)
  - $\text{Var}(\widehat{SR}_d) \approx (1 - S\,SR_d + \frac{K-1}{4} SR_d^2)/T$
  - S, K: asimetria și kurtosisul randamentelor zilnice
  - pentru distribuția Normală ($S = 0$, $K = 3$) se obține formula lui Lo
  - asimetria negativă și kurtosisul mare cresc varianța lui $\widehat{SR}_d$ cînd $SR_d > 0$
  - pe datele noastre, SE se modifică cu cel mult 0,02
- Deflated Sharpe Ratio corectează efectele abaterii de la normalitate și ale testării multiple (Capitolul 13)

	CAGR	Sharpe	Sortino	Calmar
S&P 500	8,7%	0,55	0,78	0,15
BET-TR	21,2%	1,34	1,87	0,68
Bitcoin	53,9%	0,98	1,45	0,65
EUR/RON	1,8%	0,43	0,65	0,12
Aur	6,7%	0,48	0,69	0,15

MFM_ch1_risk_measures

înapoi

Studiul de caz, detaliile estimării

- Variabile explicate (Secțiunile 3.4–3.5 din lucrare)
  - indicele de volatilitate implicită pe 30 de zile al fiecărui indice și VIX pe 9 zile
  - volatilitatea realizată a zilei $t+1$
- Nucleele, ec. (3.9) din lucrare: $K(\tau) = Z^{-\mathbf{1}}_{\alpha,\delta}(\tau+\delta)^{-\alpha}$, normalizate pe fereastra de 1 000 de zile
- Estimare: $(\beta_{\mathbf{0}}, \beta_{\mathbf{1}}, \beta_{\mathbf{2}}, \alpha_{\mathbf{1}}, \delta_{\mathbf{1}}, \alpha_{\mathbf{2}}, \delta_{\mathbf{2}})$ prin cele mai mici pătrate neliniare pe eșantionul de antrenare
  - pornind de la o regresie lasso pe variabile construite cu nuclee exponențiale

- Replicarea noastră
  - între paranteze, valorile din Tabelul 3 al lucrării
  - $\hat{\beta}_{\mathbf{0}} = 0{,}052$ (0,057), $\hat{\beta}_{\mathbf{1}} = -0{,}090$ ($-0{,}095$)
  - $\hat{\beta}_{\mathbf{2}} = 0{,}868$ (0,82), $\hat{\alpha}_{\mathbf{1}} = 1{,}13$ (1,06)
- VIX pe 9 zile există doar din 2011 (eșantion de antrenare mai scurt)
- Modelele restricționate ($\beta_{\mathbf{1}} = 0$, $\beta_{\mathbf{2}} = 0$) sînt analizate în Seminarul 1, C3

Înapoi

Studiul de caz: FTSE 100, DAX și alte rezultate ale lucrării (1/2)

Indice	**Volatilitate implicită** (lucrarea, Tabelul 2) R^2 antrenare	R^2 test	**Volatilitate realizată** (lucrarea, Tabelul 4) R^2 antrenare	R^2 test
FTSE 100	0,925	0,870	0,650	0,617
DAX	0,934	0,918	0,722	0,557

- Pentru toate variabilele explicate, $\alpha_2 \in [1{,}2;\ 2{,}3]$ (Tabelele 3 și 5 din lucrare)
  - memorie lungă aproape de pragul critic (Secțiunea 3.2)
- Eliminarea lui Σ_t deteriorează cel mai mult calitatea ajustării
- Modelul are performanțe superioare față de modelele de referință (Figurile 3.8–3.9 și Anexa C din lucrare)
  - două modele ARCH de referință
  - patru modele publicate dependente de traiectorie

Înapoi

Studiul de caz: FTSE 100, DAX și alte rezultate ale lucrării (2/2)

- Dincolo de acest curs (opțional): versiunea markoviană cu 4 factori
  - generată de mișcări browniene (Secțiunea 4.6 din lucrare)
  - produce traiectorii ale volatilității care arată aspră (*rough*), în formularea autorilor
  - aspră: traiectorie cu exponentul Hurst $H < 0{,}5$; mișcarea browniană are $H = 0{,}5$
  - modelul nu are volatilitatea aspră construită în el: neregularitatea vine din dependența de traiectorie

Înapoi

Bucla descoperirii, prompturi reutilizabile

Literatură

- Găsește lucrări cu evaluare inter pares, din 2015 încoace, despre variația în timp sau rupturile structurale ale indicilor cozii randamentelor, cu teste valide sub dependență de tip GARCH.
- Pentru fiecare: DOI, estimator, test, date.
- Marchează referințele de care nu ești sigur.

Ipoteză

- Formulează ipoteze concurente pentru o schimbare a cozii randamentelor Bitcoin după lansarea ETF-urilor spot în 2024.
- Ce implică fiecare pentru estimarea Hill a indicelui cozii, pe randamentele brute și pe cele standardizate cu GARCH?

Date și cod

- Folosește prețurile zilnice de închidere ale Bitcoin (în USD); randamente logaritmice pe propriul calendar;
- estimarea Hill a indicelui cozii pentru $|r|$, cu $k = 2{,}5\%$ din n, înainte și după 11 ianuarie 2024; erori standard prin bootstrap pe blocuri suprapuse.

Robustețe

- Scrie un plan preînregistrat: k de la 1% la 5% din n, coada pierderilor și coada câștigurilor, reziduuri standardizate GARCH, blocuri de 10 pînă la 50 de zile, o dată placebo și un activ placebo.

Critică

- Evaluează acest plan de cercetare ca un recenzent.
- Cu 24 de observații în coadă după ruptură, ce putere are testul față de o schimbare de 1 a indicelui cozii?

înapoi

Verificările obligatorii ale cercetătorului

- **Serie greșită de randamente sau de prețuri**: reproduceți întîi tabelul Hill al capitolului
- **Alegerea lui k după ce vedeți rezultatul**
  - fixați regula ($k = 2{,}5\%$ din n) dinainte
  - prezentați graficul Hill pentru 1–5%
- **Erori standard i.i.d.**: $\hat{\alpha}/\sqrt{k}$ ignoră gruparea volatilității
  - comparați cu un bootstrap pe blocuri
  - S&P 500, 17 sept. 2014–10 ian. 2024: SE bootstrap 0,817, față de 0,370 i.i.d., de 2,2 ori mai mare
- **Data rupturii aleasă după inspectarea datelor**
  - folosiți o dată fixată de eveniment
  - sau un test de punct de schimbare de tip sup, cu propriile valori critice Hoga (2017)
- **Cotațiile eronate creează cozi false**
  - listați cele mai mari zece valori $|r_t|$ și asociați fiecăreia un eveniment datat
- **Putere mică**: raportați schimbarea minimă detectabilă
  - 2,8 SE ale diferenței pentru un test bilateral la 5% cu putere de 80%
  - 2,5 SE pentru un test unilateral

Înapoi

Listă de verificare pentru analiza empirică

- **Cunoașteți-vă datele**
  - indice de preț sau de randament total
  - prețuri ajustate sau brute
  - fixing sau preț tranzacționat
  - cursuri oficiale de referință, acolo unde există (EUR/RON)
- **Curățați înainte de a modela**
  - zile fără tranzacții, sărbători, cotații neactualizate, erori evidente
  - asociați cele mai mari variații unor evenimente identificabile
- **Folosiți randamente logaritmice** pentru dinamica unui activ, randamente simple pentru portofolii
- **Raportați statistici robuste**: cuantile, frecvența depășirilor și indicele cozii $\hat{\alpha}$ alături de kurtosis
- **Anualizați cu atenție**
  - 252 sau 365 de perioade pe an
  - regula $\sqrt{A}$ presupune randamente necorelate cu variață constantă
- **Reproductibilitate**: cod și date pe GitHub, ca Quantlet-uri

Înapoi

Pentru aprofundare pe Quantinar

Cursuri avansate pe quantinar.com

- Statistics of Financial Markets
- Tukey's g- and h- transformations
- Applied Time Series Analysis with Python

Cod, date și lecturi recomandate

- Toate graficele și tabelele: github.com/danpele/MFM/tree/main/Quantlets/Ch_01
- Lecturi recomandate: Cont (2001); Franke, Härdle & Hafner (2019); Campbell, Lo & MacKinlay (1997), cap. 1–2

înapoi

Acronime folosite în acest material (1/2)

- **ACF**: AutoCorrelation Function — *funcția de autocorelație*
- **AI**: Artificial Intelligence — *inteligență artificială*
- **AR**: AutoRegressive (model) — *model autoregresiv*
- **ARCH**: AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity — *heteroscedasticitate condiționată autoregresivă*
- **ARCH-LM**: ARCH Lagrange Multiplier (test) — *testul multiplicatorului Lagrange pentru efecte ARCH*
- **BET**: Bucharest Exchange Trading (index) — *indicele de referință al Bursei de Valori București*
- **BET-TR**: BET Total Return (index) — *indicele BET cu dividendele reinvestite*
- **BNR**: Banca Națională a României
- **BVB**: Bursa de Valori București
- **CAGR**: Compound Annual Growth Rate — *rata anuală compusă de creștere*
- **CI**: Confidence Interval — *interval de încredere*
- **CLT**: Central Limit Theorem — *teorema limită centrală*
- **CRIX**: CRypto IndeX — *indicele pieței cripto*
- **DAX**: Deutscher Aktienindex — *indicele bursier german*
- **EGARCH**: Exponential GARCH — *GARCH exponențial*
- **ETF**: Exchange-Traded Fund — *fond tranzacționat la bursă*
- **FTSE**: Financial Times Stock Exchange (FTSE Russell, index provider) — *furnizorul de indici FTSE Russell*
- **GARCH**: Generalised AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity — *heteroscedasticitate condiționată autoregresivă generalizată*
- **GJR-GARCH**: Glosten–Jagannathan–Runkle GARCH — *GARCH asimetric Glosten–Jagannathan–Runkle*
- **HAC**: Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent (standard errors) — *erori standard robuste la heteroscedasticitate și autocorelație*

Acronime folosite în acest material (2/2)

- **HAR-RV**: Heterogeneous AutoRegressive model of Realised Volatility — *model autoregresiv heterogen al volatilității realizate*
- **JB**: Jarque–Bera (test) — *testul de normalitate Jarque–Bera*
- **LB**: Ljung–Box (test) — *testul de autocorelație Ljung–Box*
- **LM**: Lagrange Multiplier — *multiplicatorul Lagrange*
- **MDD**: Maximum DrawDown — *drawdown-ul maxim*
- **OHLC**: Open, High, Low, Close — *deschidere, maxim, minim, închidere*
- **OUG**: Ordonanță de Urgență a Guvernului
- **PDV**: Path-Dependent Volatility — *volatilitate dependentă de traiectoria prețului*
- **QQ**: Quantile–Quantile (plot) — *graficul cuantilă–cuantilă*
- **RMSE**: Root Mean Squared Error — *rădăcina erorii pătratice medii*
- **RS**: Rogers–Satchell (range-based variance estimator) — *estimatorul de varianță Rogers–Satchell, din amplitudinea zilei*
- **SE**: Standard Error — *eroare standard*
- **SUA**: Statele Unite ale Americii
- **TSPL**: Time-Shifted Power Law (kernel) — *nucleu de tip lege de putere decalată în timp*
- **VaR**: Value-at-Risk — *valoarea la risc*
- **VIX**: Cboe Volatility IndeX — *indicele de volatilitate Cboe*
- **VIX9D**: Cboe 9-Day Volatility Index — *indicele Cboe de volatilitate implicită pe 9 zile*
- **YZ**: Yang–Zhang (range-based variance estimator with the overnight jump) — *estimatorul de varianță Yang–Zhang, cu saltul de peste noapte*

Bibliografie (1/4)

- Andersen, T.G., Bollerslev, T., Diebold, F.X., Ebens, H. (2001). The distribution of realized stock return volatility. *Journal of Financial Economics*, 61(1), 43–76.
- Bachelier, L. (1900). Théorie de la spéculation. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 17, 21–86.
- Bai, J., Ng, S. (2005). Tests for skewness, kurtosis, and normality for time series data. *Journal of Business & Economic Statistics*, 23(1), 49–60.
- Bollerslev, T., Hood, B., Huss, J., Pedersen, L.H. (2018). Risk everywhere: modeling and managing volatility. *Review of Financial Studies*, 31(7), 2729–2773.
- Bondarenko, O., Muravyev, D. (2023). Market return around the clock: a puzzle. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 58(3), 939–967.
- Bouchaud, J.-P., Matacz, A., Potters, M. (2001). Leverage effect in financial markets: the retarded volatility model. *Physical Review Letters*, 87(22), 228701.
- Campbell, J.Y., Lo, A.W., MacKinlay, A.C. (1997). The Econometrics of Financial Markets. Princeton University Press.
- Chakraborti, A., Toke, I.M., Patriarca, M., Abergel, F. (2011). Econophysics review: I. Empirical facts. *Quantitative Finance*, 11(7), 991–1012.
- Christie, A.A. (1982). The stochastic behavior of common stock variances: value, leverage and interest rate effects. *Journal of Financial Economics*, 10(4), 407–432.
- Clark, P.K. (1973). A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices. *Econometrica*, 41(1), 135–155.
- Cong, L.W., Li, X., Tang, K., Yang, Y. (2023). Crypto wash trading. *Management Science*, 69(11), 6427–6454.
- Cont, R. (2001). Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*, 1(2), 223–236.
- Dalla, V., Giraitis, L., Phillips, P.C.B. (2022). Robust tests for white noise and cross-correlation. *Econometric Theory*, 38(5), 913–941.
- Davis, R.A., Mikosch, T. (1998). The sample autocorrelations of heavy-tailed processes with applications to ARCH. *Annals of Statistics*, 26(5), 2049–2080.
- Diebold, F.X., Inoue, A. (2001). Long memory and regime switching. *Journal of Econometrics*, 105(1), 131–159.
- Ding, Z., Granger, C.W.J., Engle, R.F. (1993). A long memory property of stock market returns and a new model. *Journal of Empirical Finance*, 1(1), 83–106.

Bibliografie (2/4)

- Drees, H., Resnick, S., de Haan, L. (2000). How to make a Hill plot. *Annals of Statistics*, 28(1), 254–274.
- Engle, R.F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, 50(4), 987–1007.
- Fama, E.F. (1965). The behavior of stock-market prices. *Journal of Business*, 38(1), 34–105.
- Franke, J., Härdle, W.K., Hafner, C.M. (2019). Statistics of Financial Markets: An Introduction, ed. a 5-a. Springer.
- Gabaix, X., Ibragimov, R. (2011). Rank − 1/2: a simple way to improve the OLS estimation of tail exponents. *Journal of Business & Economic Statistics*, 29(1), 24–39.
- Garman, M.B., Klass, M.J. (1980). On the estimation of security price volatilities from historical data. *Journal of Business*, 53(1), 67–78.
- Geweke, J., Porter-Hudak, S. (1983). The estimation and application of long memory time series models. *Journal of Time Series Analysis*, 4(4), 221–238.
- Granger, C.W.J., Ding, Z. (1995). Some properties of absolute return: an alternative measure of risk. *Annales d'Économie et de Statistique*, 40, 67–91.
- Guyon, J., Lekeufack, J. (2023). Volatility is (mostly) path-dependent. *Quantitative Finance*, 23(9), 1221–1258.
- Härdle, W.K., Chen, C.Y.-H., Overbeck, L. (Ed.) (2017). Applied Quantitative Finance, ed. a 3-a. Springer.
- Härdle, W.K., Harvey, C.R., Reule, R.C.G. (2020). Understanding cryptocurrencies. *Journal of Financial Econometrics*, 18(2), 181–208.
- Hill, B.M. (1975). A simple general approach to inference about the tail of a distribution. *Annals of Statistics*, 3(5), 1163–1174.
- Hoga, Y. (2017). Change point tests for the tail index of β-mixing random variables. *Econometric Theory*, 33(4), 915–954.
- Hsing, T. (1991). On tail index estimation using dependent data. *Annals of Statistics*, 19(3), 1547–1569.

Bibliografie (3/4)

- Inclán, C., Tiao, G.C. (1994). Use of cumulative sums of squares for retrospective detection of changes of variance. *Journal of the American Statistical Association*, 89(427), 913–923.
- Jarque, C.M., Bera, A.K. (1980). Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals. *Economics Letters*, 6(3), 255–259.
- Karpoff, J.M. (1987). The relation between price changes and trading volume: a survey. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22(1), 109–126.
- Kim, T.-H., White, H. (2004). On more robust estimation of skewness and kurtosis. *Finance Research Letters*, 1(1), 56–73.
- Ledoit, O., Wolf, M. (2008). Robust performance hypothesis testing with the Sharpe ratio. *Journal of Empirical Finance*, 15(5), 850–859.
- Liu, Y., Tsyvinski, A. (2021). Risks and returns of cryptocurrency. *Review of Financial Studies*, 34(6), 2689–2727.
- Ljung, G.M., Box, G.E.P. (1978). On a measure of lack of fit in time series models. *Biometrika*, 65(2), 297–303.
- Lo, A.W. (2002). The statistics of Sharpe ratios. *Financial Analysts Journal*, 58(4), 36–52.
- Lobato, I., Nankervis, J.C., Savin, N.E. (2001). Testing for autocorrelation using a modified Box–Pierce Q test. *International Economic Review*, 42(1), 187–205.
- Lou, D., Polk, C., Skouras, S. (2019). A tug of war: overnight versus intraday expected returns. *Journal of Financial Economics*, 134(1), 192–213.
- Magdon-Ismail, M., Atiya, A.F., Pratap, A., Abu-Mostafa, Y.S. (2004). On the maximum drawdown of a Brownian motion. *Journal of Applied Probability*, 41(1), 147–161.
- Mandelbrot, B. (1963). The variation of certain speculative prices. *Journal of Business*, 36(4), 394–419.
- Mikosch, T., Stărică, C. (2004). Nonstationarities in financial time series, the long-range dependence, and the IGARCH effects. *Review of Economics and Statistics*, 86(1), 378–390.
- Opdyke, J.D. (2007). Comparing Sharpe ratios: so where are the p-values?. *Journal of Asset Management*, 8(5), 308–336.
- Parkinson, M. (1980). The extreme value method for estimating the variance of the rate of return. *Journal of Business*, 53(1), 61–65.

Bibliografie (4/4)

- Pele, D.T. (2014). A SAS approach for estimating the parameters of an alpha-stable distribution. *Procedia Economics and Finance*, 10, 68–77.
- Pele, D.T., Lazar, E., Dufour, A. (2017). Information entropy and measures of market risk. *Entropy*, 19(5), 226.
- Pele, D.T., Wesselhöfft, N., Härdle, W.K., Kolossiatis, M., Yatracos, Y.G. (2023). Are cryptos becoming alternative assets?. *The European Journal of Finance*, 29(10), 1064–1105.
- Praetz, P.D. (1972). The distribution of share price changes. *Journal of Business*, 45(1), 49–55.
- Ratliff-Crain, E., Van Oort, C.M., Koehler, M., Tivnan, B.F. (2025). Revisiting Cont's stylized facts for modern stock markets. *Quantitative Finance*, 25(9), 1343–1373.
- Robinson, P.M. (1995). Gaussian semiparametric estimation of long range dependence. *Annals of Statistics*, 23(5), 1630–1661.
- Rogers, L.C.G., Satchell, S.E. (1991). Estimating variance from high, low and closing prices. *Annals of Applied Probability*, 1(4), 504–512.
- Romano, J.P., Thombs, L.A. (1996). Inference for autocorrelations under weak assumptions. *Journal of the American Statistical Association*, 91(434), 590–600.
- Sharpe, W.F. (1966). Mutual fund performance. *Journal of Business*, 39(1), 119–138.
- Sharpe, W.F. (1994). The Sharpe ratio. *Journal of Portfolio Management*, 21(1), 49–58.
- Sortino, F.A., van der Meer, R. (1991). Downside risk. *Journal of Portfolio Management*, 17(4), 27–31.
- Student (1908). The probable error of a mean. *Biometrika*, 6(1), 1–25.
- Taylor, S.J. (1986). Modelling Financial Time Series. Wiley; ed. a 2-a (2008), World Scientific, doi:10.1142/6578.
- Yang, D., Zhang, Q. (2000). Drift-independent volatility estimation based on high, low, open, and close prices. *Journal of Business*, 73(3), 477–492.