








Modelarea piețelor financiare

Capitolul 4: Optimizarea portofoliului



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București
IDA Institute Digital Assets
Blockchain Research Center
AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance
Academia Română, Institutul de Prognoză Economică
MSCA Digital Finance

Poate o regulă estimată să depășească ponderile egale?

> *"The process of selecting a portfolio may be divided into two stages. The first stage starts with observation and experience and ends with beliefs about the future performances of available securities."*
>
> — *Markowitz (1952)*

- 16 active și 60 de luni de date: 152 de parametri de estimat, 16 medii și 136 de variațe și covariațe
- 2 000 de portofolii tangente simulate: raportul Sharpe estimat are mediana 1,56
  - raportul Sharpe adevărat, calculat cu parametrii populației, are mediana 0,30
- 96% dintre ele au un Sharpe adevărat sub cel al ponderilor egale, 1/N (0,54)
- În afara eșantionului (*out-of-sample*), pe 16 ETF-uri, înainte de costuri: Sharpe 0,76 pentru 1/N, între 0,20 și 0,36 pentru regulile GMV
  - ETF: Exchange-Traded Fund, fond tranzacționat la bursă
  - GMV: portofoliul de variață minimă globală (global minimum-variance)

▸ Graficul central: frontiere estimate față de frontiere realizate

De ce schimbă estimarea problema optimizării?

Optimul este simplu, estimarea nu

- Un **portofoliu** este un vector de ponderi $\mathrm{w} = (w_1, \ldots, w_N)^\top$ cu $\mathrm{w}^\top 1 = 1$
- Optimul are formă închisă cînd mediile și covariațele sînt cunoscute, dar estimarea lui este dificilă
  - Optimizatorul atribuie ponderi mari exact acolo unde erorile de estimare sînt cele mai mari
  - 16 active: 16 medii + 136 variațe și covariațe = 152 de parametri, estimați din 60 de observații lunare
- Întrebarea capitolului: poate o regulă estimată să depășească ponderile egale în afara eșantionului, după costuri?

Ce conține capitolul

Traseul de bază

- Medie–varianță: ponderile de varianță minimă globală (GMV) și tangente, frontiera, restricțiile
- Riscul de estimare: de ce rapoartele Sharpe în eșantion (*in-sample*) sînt prea optimiste
- Trei corecții ale datelor de intrare: contracția (*shrinkage*) covarianței, restricțiile, Black–Litterman
- Reguli care folosesc doar Σ: equal risk contribution (ERC) și Hierarchical Risk Parity (HRP)
- Evaluarea în afara eșantionului: turnover și costuri, teste ale diferenței de Sharpe, Holm și Benjamini–Hochberg
- Aplicația pe Bursa de Valori București (BVB)

- Exemplele detaliate și subiectele avansate sînt în Aprofundări, după Concluzii
  - butonul din subsol duce la ele, iar butonul Înapoi revine la slide-ul de plecare

Pentru aprofundare

- Studii de caz: costuri, gestiunea volatilității
- Cercetarea asistată de inteligența artificială (AI) și căutarea repetată în aceleași date (*data snooping*)
- ▸ Anexa: demonstrațiile și tabelele complete
- Manual: Franke, Härdle & Hafner (2019), Partea I

Rezultatele învățării

- derivați GMV, tangentul și deplasarea Sharpe-ului
- calculați ponderile ERC și Sharpe-ul net de costuri
- interpretați de ce erorile de estimare favorizează 1/N
- interpretați un test de Sharpe după testarea multiplă
- Aprofundări și Anexa: lectură pentru familiarizare

Date, active și reperul 1/N

Univers	Active	Randamente	Monedă
Sectoare	9 ETF-uri sectoriale din SUA	1999/01 – 2026/07	USD
Multi-active	8 ETF-uri: acțiuni (3), titluri de stat (2), credit (2), aur	2007/05 – 2026/07	USD
Combinat	9 sectoare + cele 7 ETF-uri multi-active, fără SPY (S&P 500) (16 ETF-uri)	2007/05 – 2026/07	USD
România	8 blue chips BVB; indicii BET și BET-TR	2014/10 – 2026/08	RON

- ETF (exchange-traded fund): fond tranzacționat la bursă, care replică un indice
- De ce trei universuri
  - sectoarele sînt active asemănătoare, cu corelații mari
  - multi-active cuprinde clase cu corelații de semn opus (acțiuni și titluri de stat)
  - combinatul ridică N la 16 și accentuează eroarea de estimare
- Începutul eșantioanelor: lansarea ETF-urilor sectoriale (decembrie 1998) și a lui HYG (obligațiuni corporative cu randament ridicat, *high yield*; aprilie 2007)
- Randamente lunare simple din prețurile de sfîrșit de lună, cu dividendele reinvestite
  - BET (Bucharest Exchange Trading), indicele de referință al BVB, este indice de preț; BET-TR (total return) reinvestește dividendele
- Randamente în exces față de titlul de stat la o lună al Statelor Unite ale Americii (SUA) (Kenneth French Data Library)
- **1/N**: ponderi egale $w_i = 1/N$, reechilibrate lunar, fără nicio estimare: reperul oricărei comparații

Notație (1/2)

- **Randamente**
  - randamentul simplu $R_{i,t} = P_{i,t}/P_{i,t-1} - 1$
  - $P_{i,t}$: prețul de la sfîrșitul lunii al activului i
  - randamentul în exces $R^e_{i,t} = R_{i,t} - R_{f,t}$ (în seminar: r_t și r^e_t)
  - $R_{f,t}$: rata fără risc
  - randamentul logaritmic $\ln(P_{i,t}/P_{i,t-1}) = \ln(1 + R_{i,t})$ se adună în timp, dar nu între active
  - portofoliile folosesc randamente simple, deoarece $R_{p,t} = \sum_i w_i R_{i,t}$ este exact
- **Portofoliu** de N active
  - w: vectorul ponderilor
  - $\boldsymbol{\mu}$: vectorul randamentelor (în exces) așteptate
  - 1: vectorul de unu
  - $\boldsymbol{\Sigma}$: matricea de covarianță $N \times N$ a randamentelor
  - media portofoliului $\mathrm{w}^\top \boldsymbol{\mu}$, varianța portofoliului $\mathrm{w}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathrm{w}$

Notație (2/2)

- **Raportul Sharpe** (Sharpe (1966)): $SR_p = \mathbb{E}[R_p^e]/\sigma(R_p^e)$
  - randamentul mediu în exces pe unitatea de volatilitate σ
  - cifrele lunare se anualizează cu $\times 12$ (media) și $\times\sqrt{12}$ (volatilitatea, Sharpe)
- **Drawdown maxim**: $\min_t(W_t/\max_{s\leq t} W_s - 1)$
  - cea mai mare scădere a averii W_t față de un maxim anterior
- **În afara eșantionului** (OOS): ponderile deținute în luna t folosesc doar date pînă în luna $t-1$
- **În eșantion**: aceleași date servesc la estimare și la evaluare
- **Regulile capitolului**
  - MV (mean–variance): portofoliul tangent din momente de eșantion
  - GMV (global minimum variance): variață minimă globală
  - MV-LO și GMV-LO (*Global Minimum-Variance portfolio, Long-Only*, portofoliul de variață minimă globală, doar poziții long): versiunile lor doar cu poziții long (*long-only*, LO), adică fără vînzări în lipsă ($w_i \geq 0$)
  - GMV-LW: GMV cu contracția Ledoit–Wolf (LW) a covarianței
  - ERC (equal risk contribution) și HRP: reguli bazate pe risc
  - 1/N: ponderi egale

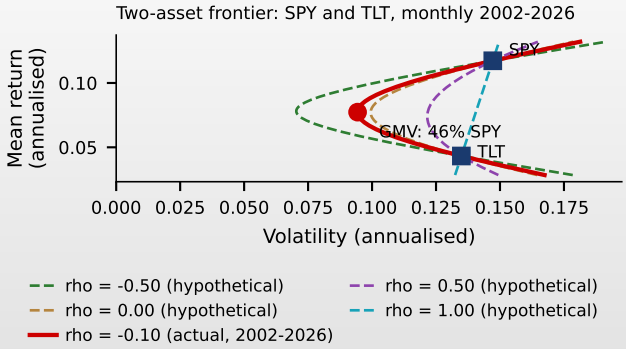
Problema lui Markowitz

- Întrebarea secțiunii: ce ponderi alegem dacă $\boldsymbol{\mu}$ și $\boldsymbol{\Sigma}$ sînt cunoscute?
- Markowitz (1952): investitorii țin cont de media și de varianța randamentelor portofoliului
- **Frontiera de varianță minimă**: varianța minimă pentru fiecare medie-țintă m
  - ramura ei superioară, $m \geq \mu_{\text{GMV}}$ (media portofoliului GMV), este **frontiera eficientă**

$$\min_{\mathrm{w}} \ \mathrm{w}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathrm{w} \quad \text{cu} \quad \mathrm{w}^\top \boldsymbol{\mu} = m, \ \ \mathrm{w}^\top 1 = 1$$

  - restricțiile: media-țintă m și investirea integrală (ponderile însumează 1)
- Forma cu utilitate, aversiunea la risc $\gamma > 0$: $\max_{\mathrm{w}} \ \mathrm{w}^\top \boldsymbol{\mu} - \frac{\gamma}{2} \mathrm{w}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathrm{w}$ cu $\mathrm{w}^\top 1 = 1$
  - cînd γ variază, soluția parcurge exact ramura eficientă
- Ponderile pot fi negative: o **vînzare în lipsă** (vînzarea unui activ împrumutat)

Două active: efectul corelației asupra diversificării



- Două active, corelația ρ: $\sigma_p^2 = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\rho\sigma_1\sigma_2$
  - w: ponderea activului 1, σ_1, σ_2: volatilitățile
  - σ_p: volatilitatea portofoliului
- Minimul este la $w^* = \dfrac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$
- Acțiuni și titluri de stat lungi, lunar 2002–2026: SPY (S&P 500) și TLT (titluri de stat SUA, peste 20 de ani)
  - $\rho = -0{,}10$, $w^* = 46\%$ SPY, volatilitate 9,4% (SPY 14,7%, TLT 13,5%)
  - corelația variabilă în timp: Capitolul 6
- Graficul: medii ale randamentelor totale și volatilități anualizate, în zecimale ($0{,}10 = 10\%$)
- Cu cît ρ este mai mic, cu atît curba este mai convexă spre stînga

MFM_ch4_two_asset ▶ Interactiv

Portofoliul de varianță minimă globală (GMV)

- Problema: $\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}$ cu $\mathbf{w}^\top 1 = 1$, $\boldsymbol{\Sigma}$ pozitiv definită
- Lagrangianul $\mathcal{L} = \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} - \lambda(\mathbf{w}^\top 1 - 1)$, λ: multiplicatorul Lagrange al restricției de buget
- Condiția de ordinul întîi $2\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} = \lambda 1$, deci $\mathbf{w} = \frac{\lambda}{2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}1$
- Bugetul dă $\frac{\lambda}{2} = 1/A$, cu $A = 1^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} 1$
- Rezultat: $\mathbf{w}_{\text{GMV}} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}1/A$, varianța $\sigma^2_{\text{GMV}} = 1/A$
- Necesită doar $\boldsymbol{\Sigma}$, nu și mediile

Portofoliul tangent

- Problema: $\max_{\mathrm{w}} \mathrm{w}^\top \boldsymbol{\mu} / \sqrt{\mathrm{w}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathrm{w}}$ cu $\mathrm{w}^\top 1 = 1$, $\boldsymbol{\mu}$ randamentele așteptate **în exces**
- Condiția de ordinul întîi: $\boldsymbol{\mu} = \dfrac{\mathrm{w}^\top \boldsymbol{\mu}}{\mathrm{w}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathrm{w}} \boldsymbol{\Sigma} \mathrm{w}$, deci $\mathrm{w} \propto \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}$
- Bugetul dă $\mathrm{w}_{\mathrm{MV}} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} / B$, cu $B = 1^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}$
- Raportul Sharpe maxim θ: $\theta^2 = \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}$
  - necesită $\boldsymbol{\mu}$ și $\boldsymbol{\Sigma}$
- Sharpe-ul lui w_{MV} este $\operatorname{sign}(B)\,\theta$: maximul doar dacă $B > 0$
- $B < 0$ dă portofoliul cu Sharpe minim
  - pentru $B = 0$ nu există soluție complet investită

Separarea și frontiera în formă închisă



James Tobin, Premiul Nobel pentru economie 1981

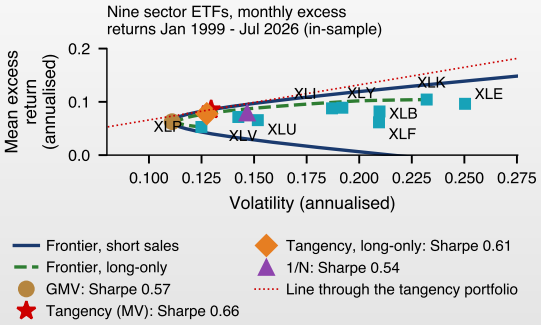
Foto: autor necunoscut (1962); domeniu public; Wikimedia Commons

- Tobin (1958): se adaugă un activ fără risc cu randamentul R_f
  - fiecare investitor deține **același** portofoliu riscant, portofoliul tangent, combinat cu numerar sau cu împrumut
  - aversiunea la risc schimbă doar combinația: **separarea în două fonduri**, puntea spre modelul de evaluare a activelor financiare (CAPM, Capital Asset Pricing Model; Capitolul 3)
- Merton (1972): cu vînzări în lipsă, frontiera este o hiperbolă
  - $\boldsymbol{\Sigma}$ pozitiv definită, $\boldsymbol{\mu}$ neproporțional cu 1
  - A și B ca pe cele două slide-uri anterioare
  - $C = \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} = \theta^2$, $D = AC - B^2 > 0$

$$\sigma^2(m) = \frac{Am^2 - 2Bm + C}{D}$$

- $\sigma^2(m)$: cea mai mică varianță cu media m, o parabolă în planul (σ^2, m) (derivarea: ▸ Anexă)
  - GMV se află la $m = B/A$, $\sigma^2 = 1/A$
  - orice portofoliu de pe frontieră combină oricare două portofolii distincte de pe frontieră, de exemplu GMV și tangentul (dacă $B \neq 0$)

Frontiera sectoarelor din SUA



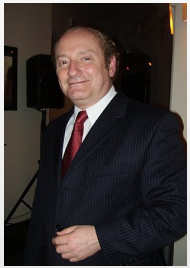
- Randamente lunare în exces, ianuarie 1999 – iulie 2026 ($T = 331$)
  - axele anualizate, în zecimale
- Toți parametrii estimați pe tot eșantionul: o imagine **în eșantion**
- Raportul Sharpe: tangent 0,66, GMV 0,57 (volatilitate 11,1%), 1/N 0,54
- Tangentul are poziții short ($-0{,}37$ financiar, $-0{,}21$ materiale)
  - cea mai mare poziție long este în sănătate ($+0{,}37$)
- Tangentul long-only are Sharpe 0,61
  - materialele, financiarul și industria primesc exact zero, o **soluție de colț**
- Linia punctată: combinațiile portofoliului tangent cu numerarul, din origine, cu panta 0,66
- Cîștigul față de 1/N este mic chiar dacă se folosește întregul eșantion istoric

MFM_ch4_frontier ▶ Interactiv

Restricții

- **Long-only** (LO): $w_i \geq 0$
- Fără formă închisă, se rezolvă prin programare pătratică
- Limite pe poziții: $w_i \leq 0{,}2$
- Limite pe sectoare sau clase de active: $\sum_{i \in G} w_i \leq c_G$, G un grup de active, c_G plafonul lui
- Limită de levier: $\sum_i |w_i| \leq L$
  - $\sum_i |w_i|$ este expunerea brută
  - $L = 1$ înseamnă fără vînzări în lipsă
- Frost & Savarino (1988): restricționarea ponderilor a îmbunătățit rezultatele în afara eșantionului
- Explicația: restricțiile acționează ca o contracție a covarianței (Jagannathan & Ma (2003))
  - slide-ul Restricțiile ca formă de contracție

Imprecizia mediilor estimate: argumentul lui Merton

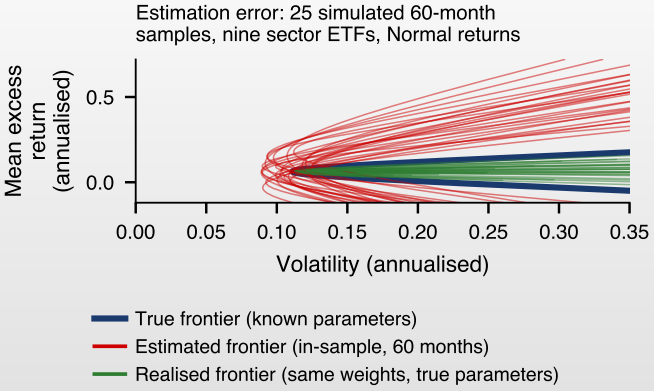


Robert C. Merton, Premiul Nobel pentru economie 1997

Foto: Digarnick (2006); domeniu public; Wikimedia Commons

- Întrebarea secțiunii: cît pierde portofoliul optim cînd $\boldsymbol{\mu}$ și $\boldsymbol{\Sigma}$ sînt înlocuite cu estimări?
- Merton (1980): Y ani observați de h ori pe an
  - randamente i.i.d. din distribuția Normală (o difuzie) cu media anuală μ și varianța σ^2
  - $\mathrm{Var}(\hat{\mu}) = \sigma^2/Y$ nu depinde de h: precizia crește doar cu **lungimea** eșantionului
  - $\mathrm{Var}(\hat{\sigma}^2) \approx 2\sigma^4/(hY) \to 0$ cînd $h \to \infty$ (distribuția Normală; în general $(\kappa - 1)\sigma^4/(hY)$, κ kurtosisul)
  - formula generală presupune moment de ordin patru finit, pus sub semnul întrebării în Capitolul 1
- SPY, $Y = 24$, $\sigma = 14{,}7\%$: eroarea standard 3,0%
  - intervalul de 95% [5,8%; 17,6%] pentru o medie de 11,7%
- O eroare standard de 1% cere $(0{,}1472/0{,}01)^2 \approx 217$ ani
- Chopra & Ziemba (1993): erorile de estimare a mediilor costă de circa zece ori mai mult decît cele ale varianțelor
- Regulile care nu folosesc medii (GMV, risk parity) sînt mai robuste

Maximizarea erorii: frontiere estimate față de frontiere realizate (1/2)



MFM_ch4_estimation_error ▶ Interactiv

Maximizarea erorii: frontiere estimate față de frontiere realizate (2/2)

- Michaud (1989): optimizatorii sînt **maximizatori ai erorii de estimare**
- Simularea: parametrii adevărați sînt momentele sectoarelor 1999–2026
  - se extrag 60 de luni din distribuția Normală
  - se optimizează cu momentele estimate din eșantion și se evaluează cu parametrii adevărați
- Graficul: 25 de eșantioane, axele anualizate, în zecimale
  - albastru: frontiera adevărată; roșu: frontierele estimate
  - verde: aceleași portofolii evaluate cu parametrii adevărați
- Frontierele roșii sînt sistematic prea optimiste, iar cele verzi stau toate sub frontiera adevărată
- 2 000 de portofolii tangente simulate: Sharpe estimat median 1,56
  - Sharpe adevărat median 0,30, optimul adevărat 0,66
  - 96% dintre ele au un Sharpe adevărat sub cel al lui 1/N (0,54)
  - 7,5% au un Sharpe adevărat negativ
- În 11% din eșantioane $\hat{B} = 1^\top \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \hat{\boldsymbol{\mu}} < 0$
  - formula tangentă dă atunci portofoliul cu Sharpe minim

MFM_ch4_estimation_error

Raportul Sharpe estimat direct este deplasat (1/2)

- Randamente i.i.d. $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, T luni, N active (Kan & Zhou (2007))
  - $T\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$: distribuție Wishart (Anexă)
  - $\hat{\theta}^2 = \hat{\boldsymbol{\mu}}^\top \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \hat{\boldsymbol{\mu}}$: pătratul raportului Sharpe maxim în eșantion, din $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ și $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ de verosimilitate maximă
  - θ^2: valoarea lui adevărată

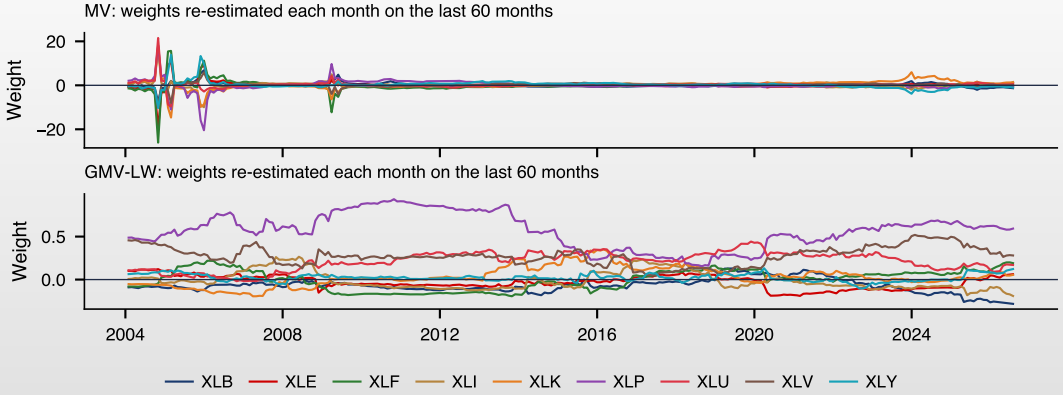
$$\mathbb{E}[\hat{\theta}^2] = \frac{T}{T-N-2}\left(\theta^2 + \frac{N}{T}\right) = \frac{T\theta^2 + N}{T-N-2}, \qquad T > N+2$$

- Sectoare: $N = 9$, $T = 60$, în simulare $\theta = 0{,}66$ pe an
  - $\sqrt{12\,\mathbb{E}[\hat{\theta}^2]} = 1{,}65$ pe an, o medie pătratică, nu o mediană
  - mediana simulată 1,56 este mai mică: $\hat{\theta}$ are asimetrie la dreapta
  - derivarea formulei: Seminarul 4, A8

Raportul Sharpe estimat direct este deplasat (2/2)

- Estimatorul nedeplasat al lui θ^2: $\hat{\theta}_u^2 = \left[(T - N - 2)\,\hat{\theta}^2 - N\right]/T$
  - Poate fi negativ
  - Trunchierea la zero dă un estimator nenegativ, dar deplasat în sus, iar $\sqrt{\hat{\theta}_u^2}$ nu este nedeplasat pentru θ
- Sectoare, tot eșantionul ($T = 331$), sub ipoteza i.i.d. Normală: corecția deplasării lui $\hat{\theta}^2$ reduce estimația punctuală echivalentă a Sharpe de la 0,66 (estimat direct) la circa 0,31 pe an
  - corecția privește θ^2: nu arată ce parte din Sharpe-ul observat provine din zgomot
- Ponderile tangente: $w = b/1^\top b$ (Britten-Jones (1999); Anexă)
  - b: coeficienții regresiei OLS (ordinary least squares) a lui 1 pe randamentele în exces, fără constantă
  - Seminarul 4, A9 și B6

Ponderi instabile (1/2)



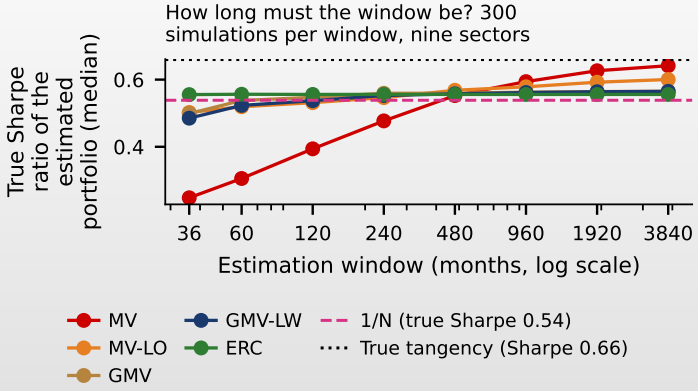
MFM_ch4_oos_backtest ▶ Interactiv

Ponderi instabile (2/2)

- Nouă ETF-uri sectoriale, fereastră mobilă (*rolling window*) de 60 de luni
  - una dintre cele două ferestre din DeMiguel, Garlappi & Uppal (2009) (60 și 120 de luni)
  - o fereastră mai lungă reduce eroarea de estimare
  - una mai scurtă urmărește mai repede schimbările de regim
- Best & Grauer (1991): o mică schimbare într-o medie mută multe ponderi
- MV: expunerea brută mediană este $\sum_i |w_i| = 4{,}9$ și depășește 3 în 90% din luni
- Cea mai mare pondere individuală a lui MV ajunge la 26 în valoare absolută
- Salturi extreme în 2004–2006 și 2009
  - numitorul $1^\top \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \hat{\boldsymbol{\mu}}$ este aproape de zero, deci ponderile tangente au cozi foarte groase
  - Negativ în 12 din 271 de ferestre: MV deține atunci portofoliul cu Sharpe minim
- GMV-LW (jos): expunere brută 1,5, cea mai mare pondere 0,94
- Ponderile instabile înseamnă turnover mare, deci costuri mari de tranzacționare

MFM_ch4_oos_backtest

Lungimea ferestrei necesară pentru a depăși 1/N (1/2)



MFM_ch4_window_length ▶ Interactiv

Lungimea ferestrei necesară pentru a depăși 1/N (2/2)

- DeMiguel, Garlappi & Uppal (2009): niciunul dintre cele 14 modele, pe 7 seturi de date, nu depășește consecvent 1/N
  - criteriile: raport Sharpe, randament echivalent cert sau turnover
  - randament echivalent cert: media $-\frac{\gamma}{2}\times$ varianța, randamentul fără risc care aduce aceeași utilitate
  - în calibrarea DeMiguel, Garlappi & Uppal (2009), cu 25 de active, MV ar avea nevoie de o fereastră de circa 3 000 de luni pentru a depăși 1/N
- Graficul: 300 de eșantioane simulate pentru fiecare fereastră
  - axa orizontală: fereastra, în luni, scară logaritmică
  - parametrii populației sînt momentele sectoarelor
  - axa verticală: Sharpe-ul adevărat median
- MV depășește 1/N abia la 480 de luni (40 de ani)
  - Sharpe adevărat median 0,55 față de 0,54
  - doar 0,31 cu o fereastră de 60 de luni
- MV-LO, GMV, GMV-LW sînt aproape de 1/N de la 60 de luni
- ERC este aproape insensibil la lungimea ferestrei, cu un Sharpe adevărat median de 0,56
- În această calibrare 1/N este aproape eficient (tangentul adevărat 0,66)
  - rezultat de simulare, nu un test empiric

MFM_ch4_window_length

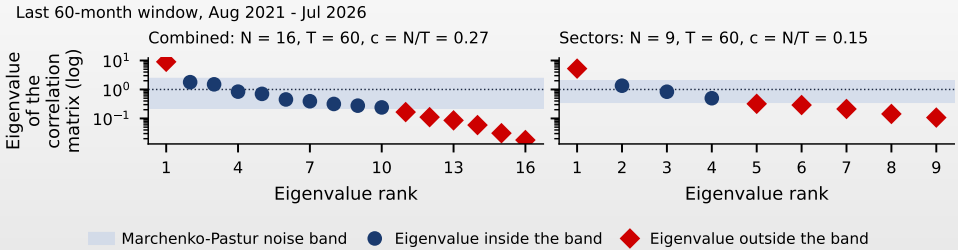
Limitele matricei de covarianță de eșantion

- Întrebarea secțiunii: cum estimăm $\boldsymbol{\Sigma}$ astfel încît $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}$ să nu amplifice zgomotul?
- Valorile proprii de eșantion sînt prea dispersate: cele mari prea mari, cele mici prea mici
- **Numărul de condiționare** măsoară cît amplifică $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ zgomotul
  - cea mai mare valoare proprie împărțită la cea mai mică
- Optimizatorii inversează $\boldsymbol{\Sigma}$, deci pun ponderi mari pe direcțiile cu cea mai mică varianță estimată
- Matricea de eșantion centrată are rangul cel mult $T - 1$
  - este singulară, deci neinversabilă, ori de cîte ori $T \leq N$
- Reperul **Marchenko–Pastur** (Marčenko & Pastur (1967)): randamente i.i.d. cu $\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2 \mathbf{I}$ ($\mathbf{I}$: matricea identitate)
  - cînd $N, T \to \infty$ cu $N/T \to c \in (0, 1)$, valorile proprii de eșantion acoperă intervalul

$$\left[\lambda_-, \lambda_+\right] = \left[\sigma^2(1 - \sqrt{c})^2,\ \sigma^2(1 + \sqrt{c})^2\right]$$

  - λ_-, λ_+: cea mai mică și cea mai mare valoare proprie produse de zgomotul pur
  - $c = 16/60 = 0{,}27$: banda $[0{,}23; 2{,}30]$ pentru o matrice de corelație ($\sigma^2 = 1$), un raport de zece între extreme, generat numai de zgomot
  - Laloux et al. (1999): valorile proprii din afara benzii sînt candidate la structură
  - cele din interior nu se pot deosebi de zgomot doar prin această comparație

Valorile proprii de eșantion și banda de zgomot (1/2)



- Matrice de corelație ale randamentelor lunare în exces, ultima fereastră de 60 de luni
  - august 2021 – iulie 2026, cu banda colorată $[\lambda_-, \lambda_+]$ pentru $\sigma^2 = 1$
- Doar valoarea proprie a pieței depășește λ_+
  - 9,0 (56% din urma matricei) la 16 ETF-uri, 5,2 la nouă sectoare (unde $\lambda_+ = 1{,}92$)

MFM_ch4_inference ▶ Interactiv

Valorile proprii de eșantion și banda de zgomot (2/2)

- Cu zgomotul rescalat la $\sigma^2 = 1 - \lambda_1/N$ (Laloux et al. (1999)), trei valori proprii depășesc banda în fiecare univers
- Șase din 16 valori proprii sînt **sub** bandă: direcții de variață standardizată mică în eșantion
  - de exemplu long TLT și short IEF (*iShares 7–10 Year Treasury Bond ETF*, ETF de obligațiuni de stat americane cu scadența 7–10 ani), scalate cu volatilitățile lor
- GMV pune ponderi mari pe aceste combinații
  - dacă varianța lor este subestimată, este subestimat și riscul GMV

MFM_ch4_inference

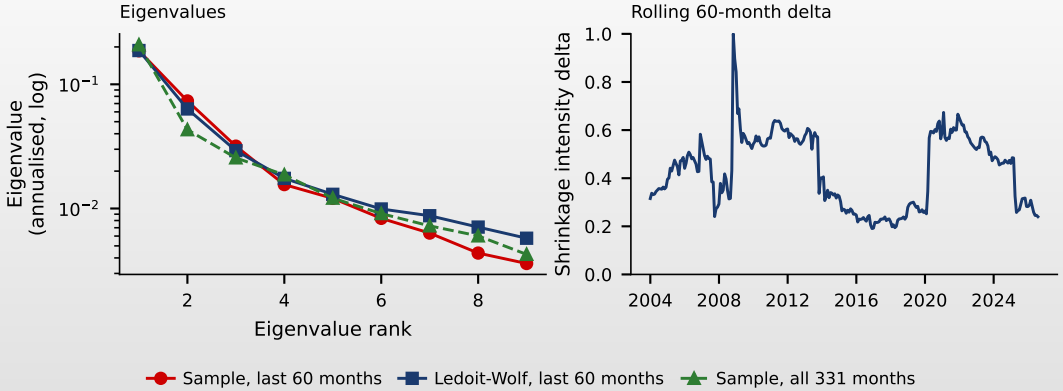
Estimatorul de contracție

- **Contracția**: matricea de eșantion S este trasă spre o țintă structurată F

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathrm{LW}} = \delta\,\mathrm{F} + (1-\delta)\,\mathrm{S}, \qquad 0 \le \delta \le 1$$

- Ținte posibile: modelul cu un singur indice (Ledoit & Wolf (2003)), identitatea scalată (Ledoit & Wolf (2004a)), corelația constantă (Ledoit & Wolf (2004b))
- Ținta folosită aici: $f_{ii} = s_{ii}$, $f_{ij} = \bar{r}\sqrt{s_{ii}s_{jj}}$ pentru $i \neq j$
  - $\bar{r}$: corelația medie de eșantion
- De ce ea: sectoarele sînt toate acțiuni din SUA, cu corelații apropiate
  - ținta nu cere alegerea unui indice de piață
- Intensitatea optimă: $\delta^* = \max\{0, \min\{1, \hat{\kappa}/T\}\}$, $\hat{\kappa} = (\hat{\pi} - \hat{\rho})/\hat{\gamma}$
  - $\hat{\pi} - \hat{\rho}$: zgomotul estimat al lui S (notația Ledoit–Wolf; $\hat{\rho}$ nu este o corelație)
  - $\hat{\gamma} = \|\mathrm{F} - \mathrm{S}\|^2$: distanța pînă la țintă (nu aversiunea la risc γ)
- δ^* scade ca $1/T$: pentru eșantioane lungi $\delta^* \to 0$ (Anexă)

Contracția pe sectoarele din SUA (1/2)



MFM_ch4_shrinkage ▶ Interactiv

Contracția pe sectoarele din SUA (2/2)

- Nouă ETF-uri sectoriale, randamente lunare în exces
  - stînga: valorile proprii anualizate (scară logaritmică)
  - dreapta: δ^* pe ferestre mobile de 60 de luni
- Pe ultima fereastră, august 2021 – iulie 2026, $\delta^* = 0{,}24$
- Cele mai mici valori proprii cresc
  - cea mai mare rămîne aproape neschimbată
  - a doua scade de la 0,073 la 0,063
- Numărul de condiționare scade de la 51,6 la 32,5
  - matricea pe toate cele 331 de luni (verde) are 48,7
- Pe ferestre mobile, δ^* are media 0,43 și variază între 0,19 și 1,00
- $\delta^* = 1$ doar în fereastra încheiată în octombrie 2008
  - luna crizei triplează zgomotul estimat $\hat{\pi}$ al lui S
  - distanța $\hat{\gamma}$ pînă la țintă rămîne aproape aceeași

MFM_ch4_shrinkage

Restricțiile ca formă de contracție

- Jagannathan & Ma (2003): GMV long-only este egal cu GMV fără restricții al unei matrice de covarianță modificate

$$\tilde{\mathrm{S}} = \mathrm{S} - (\boldsymbol{\lambda}1^\top + 1\boldsymbol{\lambda}^\top), \qquad \mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\mathrm{w}^\top \mathrm{S}\mathrm{w} - \lambda_0(\mathrm{w}^\top 1 - 1) - \boldsymbol{\lambda}^\top \mathrm{w}$$

  - $\boldsymbol{\lambda} \geq 0$: multiplicatorii Lagrange ai restricțiilor $w_i \geq 0$ din $\mathcal{L}$ (aici nu valori proprii)
  - $\lambda_i > 0$ doar unde restricția este activă
  - Condiția de ordinul întîi $\mathrm{S}\mathrm{w} = \lambda_0 1 + \boldsymbol{\lambda}$ și $\boldsymbol{\lambda}^\top \mathrm{w} = 0$ dau $\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{w} = \lambda_0 1$: condiția GMV pentru $\tilde{\mathrm{S}}$
  - pas cu pas, cu bugetul $1^\top \mathrm{w} = 1$: $\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{w} = \mathrm{S}\mathrm{w} - \boldsymbol{\lambda}(1^\top \mathrm{w}) - 1(\boldsymbol{\lambda}^\top \mathrm{w}) = \lambda_0 1 + \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda} - 0$
- $\tilde{s}_{ij} = s_{ij} - \lambda_i - \lambda_j$: o restricție activă pe activul i îi reduce covariațele
  - ceea ce corectează în jos estimările mari
  - de ce acolo: GMV fără restricții vinde în lipsă activele cu covariațe mari cu celelalte, deci $w_i \geq 0$ devine activă exact pentru ele
  - covariațele lor mari sînt cele mai probabil umflate de zgomot
- Restricția „greșită" (fără vînzări în lipsă) poate reduce riscul în afara eșantionului
- Efectul este cel mai mare cînd covariațele sînt estimate din puține observații

Restricțiile ca contracție: un exemplu cu două active

- $\sigma_1 = 25\%$, $\sigma_2 = 10\%$, $\rho = 0{,}5$: $s_{11} = 0{,}0625$, $s_{22} = 0{,}0100$, $s_{12} = 0{,}0125$
- GMV fără restricții: $w_1^* = (s_{22} - s_{12})/(s_{11} + s_{22} - 2s_{12}) = -0{,}0025/0{,}0475 = -0{,}053$
  - activul volatil este vîndut în lipsă pentru că evoluează puternic împreună cu celălalt
  - volatilitatea 9,93%
- Long-only: restricția $w_1 \geq 0$ devine activă, $\mathrm{w} = (0, 1)$, volatilitatea 10%
  - condiția de ordinul întîi: $\mathrm{Sw} = (s_{12}, s_{22}) = (0{,}0125;\ 0{,}0100) = \lambda_0 1 + \boldsymbol{\lambda}$, deci $\lambda_0 = 0{,}0100$, $\boldsymbol{\lambda} = (0{,}0025;\ 0)$
- Matricea modificată: $\tilde{s}_{12} = 0{,}0125 - 0{,}0025 = 0{,}0100$
  - $\tilde{s}_{11} = 0{,}0625 - 2(0{,}0025) = 0{,}0575$, $\tilde{s}_{22} = 0{,}0100$
  - corelația scade de la 0,5 la $0{,}0100/\sqrt{0{,}0575 \times 0{,}0100} \approx 0{,}42$
  - și dispersia primului activ scade
  - GMV fără restricții pentru $\tilde{\mathrm{S}}$: $w_1^* = (0{,}0100 - 0{,}0100)/(\cdots) = 0$, adică soluția long-only

De la contracția covarianței la contracția mediilor



Fischer Black (1938–1995)

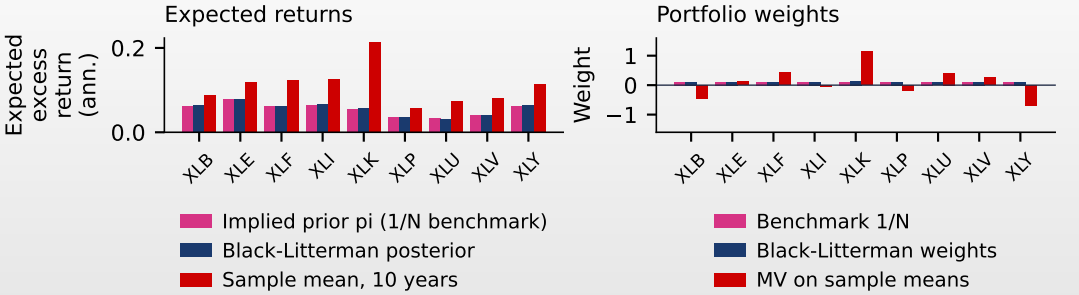
Foto: Dalmatine, Wikipedia în limba engleză; domeniu public; Wikimedia Commons

- Întrebarea secțiunii: ce medii folosim, dacă mediile de eșantion sînt prea imprecise?
- Black & Litterman (1992) contractă mediile spre cele implicate de un portofoliu **de referință** w_b
- Optimizarea inversă: investitorul medie–variață deține $w^* = (\delta_{\mathbf{RA}} \boldsymbol{\Sigma})^{-1} \boldsymbol{\mu}$ în active riscante
  - el are aversiunea la risc $\delta_{\mathbf{RA}}$ și acces la numerar
- Randamentele care fac w_b optim sînt

$$\boldsymbol{\pi} = \delta_{\mathbf{RA}} \boldsymbol{\Sigma} w_b$$

- $\boldsymbol{\pi}$: randamente în exces **implicite** (de echilibru), nu $\hat{\pi}$ din Ledoit–Wolf
  - cu ponderile pieței, ele sînt randamentele CAPM
- Aici: capitalizările sectoarelor nu sînt disponibile, deci $w_b = 1/N$, $\delta_{\mathbf{RA}} = 2{,}5$
- Apoi se adaugă **opiniile** investitorului, ponderate cu încrederea în ele

Black–Litterman pe sectoarele din SUA (1/2)



MFM_ch4_black_litterman ▶ Interactiv

Black–Litterman pe sectoarele din SUA (2/2)

- Stînga: mediile, anualizate
  - implicite $\boldsymbol{\pi}$, Black–Litterman după opinie și de eșantion pe 10 ani
- Dreapta: ponderile 1/N, Black–Litterman și MV cu mediile de eșantion
- $\boldsymbol{\Sigma}$ din randamentele lunare în exces, august 2016 – iulie 2026 (120 de luni)
  - cealaltă fereastră folosită de DeMiguel, Garlappi & Uppal (2009)
- O singură opinie relativă: tehnologia (XLK) minus utilitățile (XLU) $= 3\%$ pe an
  - portofoliul opiniei: $+1$ XLK, -1 XLU
- Diferența XLK minus XLU: 2,2% implicită, 2,6% după combinarea cu opinia
  - formula pe slide-ul următor
- Ponderi: XLK de la 11,1% la 14,4%, XLU de la 11,1% la 7,8%
  - restul neschimbate
  - calculul de mînă: Seminarul 4, A7
- Cu mediile de eșantion (XLK: 21,3% pe an), ponderile MV ar deveni
  - $+115\%$ în XLK, -68% în bunuri de consum ciclice (XLY) și -45% în materii prime (XLB)

MFM_ch4_black_litterman

Opiniile și distribuția a posteriori

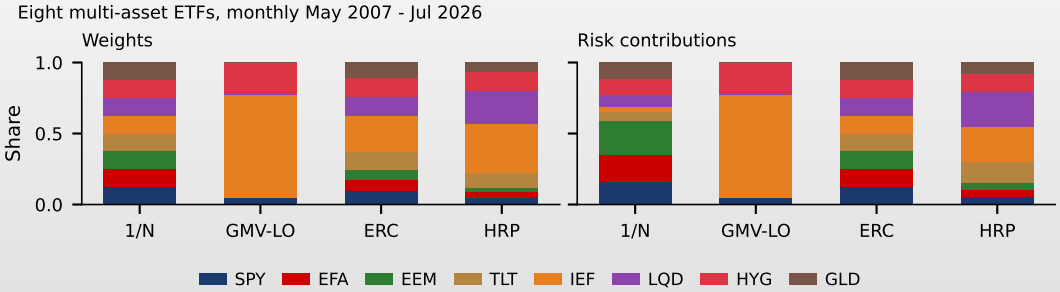
- A priori: $\boldsymbol{\mu} \sim N(\boldsymbol{\pi}, \tau\boldsymbol{\Sigma})$
  - τ scalează incertitudinea asupra lui $\boldsymbol{\pi}$
- K opinii: $\mathrm{P}\boldsymbol{\mu} = \mathrm{q} + \boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \boldsymbol{\Omega})$
  - P: matrice $K \times N$, linia k = portofoliul opiniei k
  - q: randamentele din opinii
  - $\boldsymbol{\Omega}$: incertitudinea lor
- Media a posteriori, o medie ponderată cu preciziile

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{BL}} = \left[(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-\mathbf{1}} + \mathrm{P}^{\top}\boldsymbol{\Omega}^{-\mathbf{1}}\mathrm{P}\right]^{-\mathbf{1}}\left[(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\pi} + \mathrm{P}^{\top}\boldsymbol{\Omega}^{-\mathbf{1}}\mathrm{q}\right]$$

- Ponderile Black–Litterman: $\mathrm{w}_{\mathbf{BL}} = (\delta_{\mathbf{RA}}\boldsymbol{\Sigma})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{BL}}$
- Un activ, $\pi = 5\%$, $\tau\sigma^{\mathbf{2}} = 0{,}00128$, opinia 8% cu varianța 0,0004
  - ponderea opiniei: $0{,}00128/(0{,}00128 + 0{,}0004) = 0{,}76$
  - deci $\mu_{\mathbf{BL}} = 7{,}29\%$

Ponderi și contribuții la risc (1/2)

Întrebarea secțiunii: putem construi ponderi doar din Σ, fără medii și fără a inversa Σ?



MFM_ch4_risk_contrib ▶ Interactiv

Ponderi și contribuții la risc (2/2)

- Opt ETF-uri multi-active, covariança pe tot eșantionul, mai 2007 – iulie 2026 ($T = 231$)
  - volatilitățile variază de la 6,7% (IEF) la 21,1% (EEM)
- Stînga: ponderile; dreapta: cota fiecărui activ din risc
  - cota: $w_i(\boldsymbol{\Sigma}\mathrm{w})_i/\sigma_p^2$ (slide-ul următor), în zecimale (0,5 = 50%)
- 1/N: acțiunile și obligațiunile high yield (HYG) primesc jumătate din pondere, dar generează 69% din risc
- ERC (contribuții egale la risc): fiecare activ contribuie cu 12,5%
  - IEF primește cea mai mare pondere (25%)
- GMV long-only: 73% IEF, 22% HYG, 5% SPY, cinci active cu pondere zero
- HRP (Hierarchical Risk Parity): cele mai mari ponderi sînt IEF (35%) și LQD (23%)
- Volatilitate: 1/N 9,4%, ERC 7,9%, HRP 7,1%, GMV long-only 5,8%

MFM_ch4_risk_contrib

Contribuțiile la risc

- Volatilitatea este omogenă de gradul întîi în ponderi (Euler)

$$\sigma_p = \sum_{i=1}^{N} w_i \frac{\partial \sigma_p}{\partial w_i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{w_i(\mathbf{\Sigma w})_i}{\sigma_p}$$

- **Contribuția la risc** a activului i: $RC_i = w_i(\mathbf{\Sigma w})_i/\sigma_p$
- Cota procentuală $RC_i/\sigma_p = w_i(\mathbf{\Sigma w})_i/\sigma_p^2$
- Exemplu numeric, 50/50 în SPY și IEF (lunar 2002–2026, anualizat)
  - $\sigma_1^2 = 0{,}02166$, $\sigma_2^2 = 0{,}00441$, $\sigma_{12} = -0{,}00098$
  - $(\mathbf{\Sigma w})_1 = 0{,}5(0{,}02166) + 0{,}5(-0{,}00098) = 0{,}01034$, $(\mathbf{\Sigma w})_2 = 0{,}5(-0{,}00098) + 0{,}5(0{,}00441) = 0{,}00172$
  - $\sigma_p^2 = 0{,}5(0{,}01034) + 0{,}5(0{,}00172) = 0{,}00603$, $\sigma_p = 7{,}76\%$
  - cotele din risc: SPY 85,8%, IEF 14,2%
- Bugetarea riscului alege w astfel încît cotele să fie egale cu bugetele fixate b_i

Contribuții egale la risc (ERC)

- ERC (Maillard, Roncalli & Teïletche (2010)): $RC_i = RC_j$ pentru orice i, j
- Ponderile se calculează dintr-o problemă convexă, apoi se normalizează

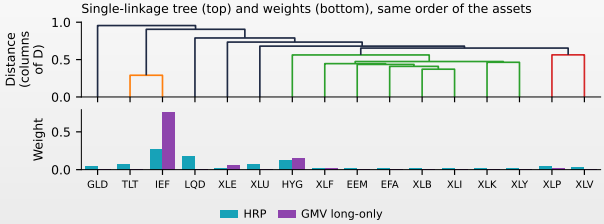
$$\min_{\mathrm{y}>0} \ \tfrac{1}{2}\mathrm{y}^\top \boldsymbol{\Sigma}\mathrm{y} - \tfrac{1}{N}\sum_i \ln y_i, \qquad \mathrm{w} = \mathrm{y}/1^\top\mathrm{y}$$

  - y: ponderi pozitive nenormalizate
  - termenul logaritmic menține $y_i > 0$
  - condiția de ordinul întîi dă $y_i(\boldsymbol{\Sigma}\mathrm{y})_i = 1/N$ pentru orice i
- Pentru $\boldsymbol{\Sigma}$ pozitiv definită soluția există și este unică (obiectiv strict convex, infinit la frontieră)
- Ordinea volatilităților: $\sigma_{\mathrm{GMV}} \leq \sigma_{\mathrm{ERC}} \leq \sigma_{1/N}$
- Două active: ERC înseamnă **inversul volatilității**, $w_1 = \sigma_1^{-1}/(\sigma_1^{-1} + \sigma_2^{-1})$, pentru orice $\rho \in (-1, 1)$
  - SPY (14,7%) și IEF (6,6%): ERC deține 31% SPY, volatilitate 6,1%, fiecare activ contribuind cu 50% la varianță
- ERC este portofoliul tangent dacă toate activele au același raport Sharpe și corelații egale

Hierarchical Risk Parity: de la arbore la ponderi

- HRP (López de Prado (2016)): trei pași, fără inversarea matricei, toate ponderile pozitive
  - funcționează chiar dacă $\mathbf{\Sigma}$ este singulară
- **Pasul 1, arborele**
  - distanța de corelație $d_{ij} = \sqrt{(1-\rho_{ij})/2} \in [0,1]$
  - ρ_{ij}: corelația activelor i și j
  - distanța euclidiană dintre **coloanele** lui D $= (d_{ij})$: $\tilde{d}_{ij} = \sqrt{\sum_k (d_{ki} - d_{kj})^2}$
  - legătura simplă pe $\tilde{d}_{ij}$ (se unesc repetat cele mai apropiate două grupuri) dă o **dendrogramă**
- **Pasul 2, cvasi-diagonalizarea**
  - activele se ordonează ca frunzele arborelui, astfel încît cele asemănătoare sînt vecine
- **Pasul 3, bisecția recursivă**: **lista ordonată** se împarte în două jumătăți
  - jumătățile primesc α și $1-\alpha$, $\alpha = 1 - V_1/(V_1+V_2)$, $V_j = \tilde{\mathrm{w}}_j^\top \mathbf{\Sigma}_j \tilde{\mathrm{w}}_j$ varianța jumătății j
  - $\tilde{\mathrm{w}}_j$: ponderi $\tilde{w}_i \propto 1/\sigma_i^2$ în interiorul jumătății j, $\mathbf{\Sigma}_j$ covarianța ei
  - se repetă în fiecare jumătate, pînă rămîn active individuale
- Mantegna (1999): aceeași distanță și **arborele de acoperire minim** arată ierarhia unei piețe de acțiuni
- Manual: Härdle & Simar (2019), analiza cluster
- Un exemplu rezolvat cu patru active: Seminarul 4, B4

HRP pe 16 ETF-uri

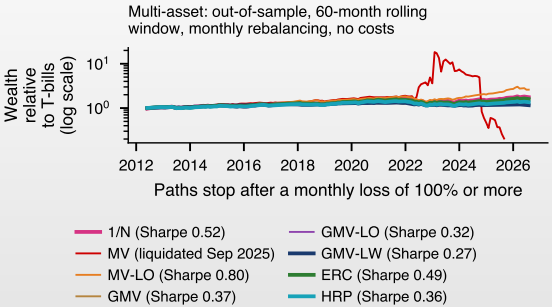


- Nouă sectoare și șapte ETF-uri multi-active, lunar, mai 2007 – iulie 2026
- Cea mai apropiată pereche este TLT–IEF ($\tilde{d} = 0{,}29$)
- Aurul se alătură ultimul ($\tilde{d} = 0{,}96$)
- Grupul de acțiuni: sectoarele ciclice, EFA (*iShares MSCI EAFE ETF*, ETF pe acțiunile piețelor dezvoltate din afara Americii de Nord), EEM și creditul high yield
- Sectoarele defensive (utilități, bunuri de consum de bază, sănătate) și energia i se alătură tîrziu
- HRP: toate cele 16 ponderi sînt pozitive
  - cele mai mari sînt IEF 26,7%, LQD 17,6% și HYG 12,6%
- GMV long-only: 75,6% în IEF și doar cinci active cu pondere nenulă

Protocolul de backtesting

- Întrebarea secțiunii: depășește o regulă estimată ponderile 1/N?
  - cînd ponderile folosesc doar datele disponibile la momentul deciziei
- Ponderile lunii t folosesc doar lunile $t-60, \ldots, t-1$ (fereastra mobilă de 60 de luni)
- Reechilibrare lunară, la frecvența datelor
  - costul ei se măsoară separat, prin turnover
- Opt reguli: 1/N, MV, MV-LO, GMV, GMV-LO, GMV-LW, ERC, HRP
- O regulă a cărei avere ajunge la zero (o pierdere lunară de 100% sau mai mult) este lichidată
  - randamentele ei ulterioare nu mai sînt rezultatul unei investiții
  - ea nu intră în comparațiile de Sharpe, în analiza costurilor și în teste
- Trei universuri
  - Sectoare: în afara eșantionului, ianuarie 2004 – iulie 2026, 271 de luni (prima fereastră: 1999–2003)
  - Multi-active și combinat: mai 2012 – iulie 2026, 171 de luni
- Măsuri
  - Sharpe anualizat $\sqrt{12}\,\bar{r}^e/\hat{\sigma}(r^e)$ din randamentele în exces
  - drawdown-ul maxim din randamentele totale
  - fiecare diferență față de 1/N cu un test, corectat pentru testare multiplă

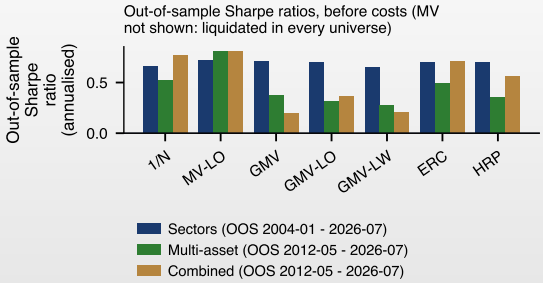
Evoluția averii în afara eșantionului: multi-active



- Axa verticală: averea relativă la un cont în titluri de stat (T-bills), pe scară logaritmică
  - opt ETF-uri multi-active, înainte de costuri
- MV eșuează complet
  - turnover de 44 de ori averea pe lună
  - lichidată în septembrie 2025, după o pierdere lunară de peste 100%
- MV-LO are cel mai mare Sharpe (0,80), urmat de 1/N (0,52) și ERC (0,49)
- Regulile GMV: cea mai mică volatilitate (3,8%–5,4%), Sharpe scăzut (0,27–0,37)
- Pun ponderi mari pe titlurile de stat
  - randamentele lor în exces au fost ușor negative după mai 2012 (TLT −0,5%, IEF −0,2% pe an)
- MV-LO: mai bun sau norocos? Decide un test

MFM_ch4_oos_backtest ▶ Interactiv

Rapoartele Sharpe în cele trei universuri



- Înainte de costuri; tabelele complete în ▸ Anexă
- MV lipsește din grafic: averea ei ajunge la zero în toate universurile
  - sectoare: martie 2009; multi-active: septembrie 2025; combinat: ianuarie 2023
- Sectoare: toate celelalte reguli au Sharpe la cel mult 0,07 de cel al lui 1/N
  - 1/N are aici 0,66 (2004–2026), nu 0,54 ca în simulări (1999–2026)
  - perioadele diferă
- Universul combinat: Sharpe 0,76 pentru 1/N, 0,81 pentru MV-LO, 0,71 pentru ERC
- Universul combinat, regulile GMV: Sharpe între 0,20 și 0,36
- Turnover lunar pe sectoare: 1/N 0,02, ERC 0,03, GMV-LW 0,14, MV-LO 0,23

MFM_ch4_oos_backtest ▸ Interactiv

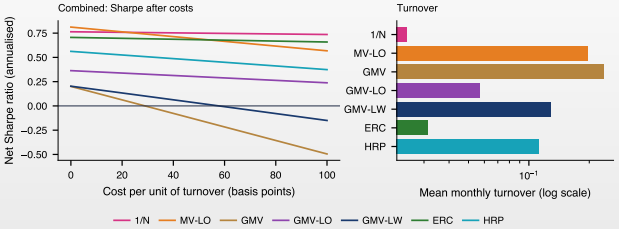
Turnover și costuri: un exemplu numeric pe o lună (1/2)

- Între reechilibrări ponderile se modifică odată cu randamentele (drift)
  - $w_{i,t}^{+} = w_{i,t}(1 + R_{i,t}) / \sum_j w_{j,t}(1 + R_{j,t})$
  - $R_{i,t}$: randamentul **total** al activului i în luna t
  - numitorul este $1 + R_{p,t}$, unu plus randamentul total al portofoliului
- **Turnover**: fracțiunea din avere tranzacționată
  - $TO_{t+1} = \sum_i |w_{i,t+1} - w_{i,t}^{+}|$, însumată pe toate cele N active
- Exemplu numeric, sectoare, 1/N: în ianuarie 2004 XLB a avut $-4{,}4\%$ și XLK $+4{,}3\%$
  - ponderile de 11,11% s-au modificat (drift) la 10,50% și 11,45%
  - randamentul total al lui 1/N în ianuarie 2004: 1,18% (în exces 1,11%, plus titlul de stat 0,07%)
  - Seminarul 4, B1
  - XLB: $\frac{1}{9}(1 - 0{,}044)/1{,}0118 = 10{,}50\%$; XLK: $\frac{1}{9}(1 + 0{,}043)/1{,}0118 = 11{,}45\%$

Turnover și costuri: un exemplu numeric pe o lună (2/2)

- Revenirea la 1/N în februarie 2004 tranzacționează $TO = 0{,}019$
  - și 1/N tranzacționează: vinde cîștigătorii și cumpără perdanții
  - XLB și XLK contribuie cu $|0{,}1111 - 0{,}1050| + |0{,}1111 - 0{,}1145| = 0{,}0061 + 0{,}0034 = 0{,}0095$
  - celelalte șapte sectoare, împreună, cu circa 0,009
  - MV-LO, reestimat pe noua fereastră, tranzacționează 0,748 în aceeași lună
- Randamentul net cu costul c pe unitate tranzacționată: $R^{\text{net}}_{p,t} = R_{p,t} - c\, TO_t$
  - 1 punct de bază (bp) = 0,01%, deci 20 bp înseamnă $c = 0{,}002$
  - La 20 bp, tranzacția din februarie costă MV-LO $0{,}002 \times 0{,}748 = 0{,}15\%$ din avere
  - și 1/N $0{,}002 \times 0{,}019 = 0{,}004\%$

Rapoartele Sharpe după costuri



- Universul combinat (16 ETF-uri)
  - stînga: Sharpe-ul net (vertical) în funcție de costul c, 0–100 bp pe unitate de turnover (orizontal)
  - dreapta: turnover-ul lunar mediu, scară logaritmică
  - MV lipsește: lichidată în ianuarie 2023
- Turnover-ul lunar variază de la 0,02 (1/N) la 0,24 (GMV)
- Sharpe-ul net devine negativ la circa 29 bp pentru GMV și 58 bp pentru GMV-LW
- MV-LO depășește 1/N doar la costuri sub circa 22 bp (Seminarul 4, B2)
- 1/N și ERC aproape nu se modifică: turnover-ul mic este un avantaj

MFM_ch4_costs ▶ Interactiv

Inferența pentru un raport Sharpe: Lo (2002)

- Lo (2002), randamente i.i.d. din distribuția Normală: $\sqrt{T}(\widehat{SR} - SR) \to N(0,\ 1 + SR^2/2)$
  - cu SR lunar și T numărul de luni
  - eroarea standard este $\sqrt{(1 + SR^2/2)/T}$
  - fără ipoteza Normală, eroarea standard presupune moment de ordin patru finit, pus sub semnul întrebării în Capitolul 1
- 1/N pe sectoare, $T = 271$: $\widehat{SR}$ lunar $= 0{,}191$, eroarea standard $0{,}061$
  - Anualizat $0{,}66 \pm 1{,}96 \times 0{,}21$: intervalul de 95% $[0{,}25; 1{,}08]$
- Anualizarea cu $\sqrt{q}$ ($q = 12$ luni pe an) este exactă doar fără autocorelație
- În general, $SR(q) = \eta(q)\, SR$

$$\eta(q) = \frac{q}{\sqrt{q + 2\sum_{k=1}^{q-1}(q-k)\rho_k}}$$

  - ρ_k: autocorelația randamentelor lunare la lagul k
  - ρ_k pozitive scad η, ρ_k negative îl cresc
- Pentru 1/N pe sectoare: $\rho_1 = -0{,}03$, suma ponderată $\sum_{k=1}^{11}(12-k)\rho_k = -0{,}50$
  - $\eta = 12/\sqrt{12 - 2(0{,}50)} = 12/\sqrt{11{,}0} = 3{,}62$ în loc de $\sqrt{12} = 3{,}46$
  - Sharpe anual $0{,}191 \times 3{,}62 = 0{,}69$
  - $SR(q)$ este Sharpe-ul sumei celor 12 randamente lunare, nu al randamentului anual compus $\prod_t(1 + R_t) - 1$

Testarea unei diferențe de rapoarte Sharpe

- H_0: $SR_1 = SR_2$ pentru două strategii evaluate pe aceleași luni
- Jobson & Korkie (1981), în forma corectată de Memmel (2003), redată în Ledoit & Wolf (2008)
  - pentru randamente i.i.d. din distribuția Normală: $z = \hat{\Delta}/\sqrt{\hat{V}/T}$
  - $\hat{V} = 2(1-\hat{\rho}) + \frac{1}{2}\left(\widehat{SR}_1^2 + \widehat{SR}_2^2 - 2\widehat{SR}_1\widehat{SR}_2\hat{\rho}^2\right)$
  - $\hat{\rho}$: corelația celor două strategii
- Ledoit & Wolf (2008): o variantă robustă, prin metoda delta (liniarizarea lui f în jurul momentelor estimate)

$$\hat{\Delta} = \widehat{SR}_1 - \widehat{SR}_2 = f(\hat{\mathrm{v}}), \qquad f(\mathrm{v}) = \frac{\mu_1}{\sqrt{\mathbb{E}r_1^2 - \mu_1^2}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\mathbb{E}r_2^2 - \mu_2^2}}$$

  - r_{1t}, r_{2t}: randamentele în exces ale celor două strategii, cu mediile μ_1, μ_2
  - $\mathrm{v} = (\mu_1, \mu_2, \mathbb{E}[r_1^2], \mathbb{E}[r_2^2])$
  - eroarea standard $\sqrt{\nabla f^\top \hat{\boldsymbol{\Psi}} \nabla f / T}$
  - $\hat{\boldsymbol{\Psi}}$: o covarianță HAC (consistentă la heteroscedasticitate și autocorelație) a celor patru momente
  - HAC tratează dependența, nu condiția de moment: testul presupune moment de ordin patru finit, pus sub semnul întrebării în Capitolul 1
- Strategiile pe aceleași active sînt puternic corelate: diferențe mici pot fi semnificative

Bootstrap-ul pe blocuri

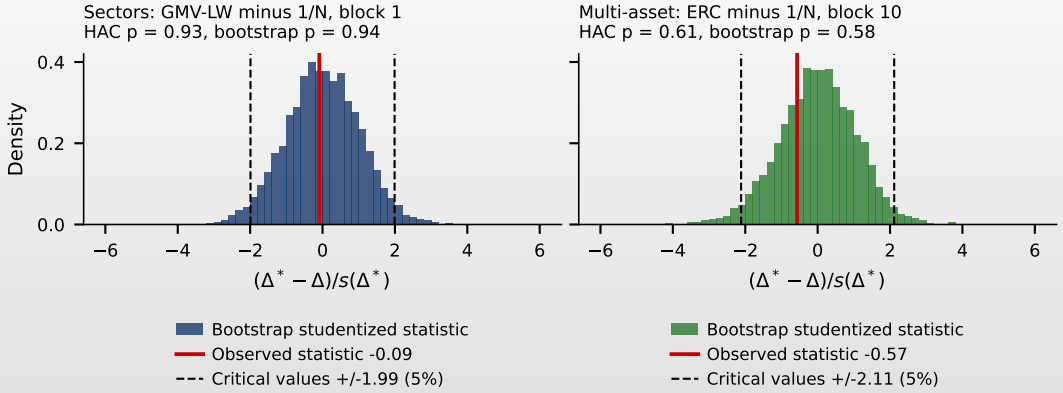


Bradley Efron, inventatorul bootstrap-ului (1979)

Foto: Ryan K. Morris (2007); domeniu public; Wikimedia Commons

- Randamentele sînt dependente (gruparea volatilității, *volatility clustering*)
  - bootstrap-ul reeșantionează **blocuri** de luni consecutive (Künsch (1989))
- Ledoit & Wolf (2008), Secțiunea 3.2.2: blocuri circulare de **perechi** (r_{1t}, r_{2t})
  - care trec peste sfîrșitul eșantionului
  - astfel încît corelația celor două strategii se păstrează
- Statistica din extragerea m: $\tilde{d}^{*m} = |\hat{\Delta}^{*m} - \hat{\Delta}|/s(\hat{\Delta}^{*m})$
  - centrată în $\hat{\Delta}$ și împărțită la eroarea standard $s(\cdot)$
- Statistica este asimptotic pivotală: poate îmbunătăți, în eșantion finit, aproximarea Normală a testului HAC
  - pivotal: distribuția limită nu conține parametri necunoscuți
- $p = \left[\#\{m : \tilde{d}^{*m} \geq |\hat{\Delta}|/s(\hat{\Delta})\} + 1\right]/(M+1)$, cu $M = 4\,999$ de extrageri
- Lungimea blocului se alege prin calibrarea din Ledoit & Wolf (2008), Algoritmul 3.1 (▸ Anexă)
  - 1 pentru toate cele șase reguli pe sectoare
  - între 1 și 10, cel mai des 10, pentru regulile multi-active și combinate

Testul diferenței de Sharpe față de 1/N (1/2)



MFM_ch4_sharpe_test ▶ Interactiv

Testul diferenței de Sharpe față de 1/N (2/2)

- Axa orizontală: $(\Delta^* - \hat{\Delta})/s(\Delta^*)$, distribuția bootstrap a diferenței studentizate față de 1/N
- Roșu: statistica observată $\hat{\Delta}/s(\hat{\Delta})$
  - $-0{,}09$ (sectoare, GMV-LW) și $-0{,}57$ (multi-active, ERC)
  - linii întrerupte: valorile critice bootstrap $\pm 1{,}99$ și $\pm 2{,}11$, în aceeași ordine
- Sectoare, GMV-LW minus 1/N: $-0{,}02$, intervalul de 95% $[-0{,}36; 0{,}33]$
  - p HAC $= 0{,}93$, p bootstrap $= 0{,}94$ (bloc 1)
- Multi-active, ERC minus 1/N: $-0{,}03$, $[-0{,}15; 0{,}08]$
  - p HAC $= 0{,}61$, p bootstrap $= 0{,}58$ (bloc 10)
  - ERC este atît de corelat cu 1/N încît intervalul este îngust, dar conține totuși zero
- Sectoare: nicio regulă nu diferă de 1/N la 5%
  - cea mai mică valoare p (*p-value*) o are ERC ($+0{,}04$, p HAC $= 0{,}09$)
- Multi-active: MV-LO $+0{,}29$ **nu** este semnificativ (p HAC $= 0{,}12$, bootstrap 0,16)
- valorile p HAC și bootstrap presupun moment de ordin patru finit, pus sub semnul întrebării în Capitolul 1

MFM_ch4_sharpe_test

Testarea multiplă a regulilor de portofoliu (1/2)

Univers	Regula minus 1/N	$\hat{\Delta}$	p HAC	p bootstrap
Sectoare	ERC	$+0{,}04$	0,0915	0,1296
Multi-active	HRP	$-0{,}16$	0,0720	0,0460
Combinat	GMV	$-0{,}56$	0,0304	0,0496
Combinat	GMV-LO	$-0{,}40$	0,0477	0,0804
Combinat	GMV-LW	$-0{,}56$	0,0238	0,0322
Combinat	MV-LO	$+0{,}05$	0,8175	0,8180

- Nicio regulă nu depășește semnificativ 1/N în niciun univers
- Fără ajustare pentru testare multiplă, la 5%: reguli cu Sharpe semnificativ mai mic decît 1/N
  - trei după testul HAC (GMV, GMV-LO, GMV-LW combinat)
  - trei după bootstrap (HRP multi-active; GMV, GMV-LW combinat)
- Regulile GMV au risc mic, dar un randament și mai mic
- Tabelul arată 6 dintre cele 18 teste bilaterale, H_0: $\Delta_k = 0$
  - 6 reguli $\times$ 3 universuri; toate 18 în ▸ Anexă

Testarea multiplă a regulilor de portofoliu (2/2)

- Holm pe toate cele 18: cea mai mică valoare p ajustată este 0,43 (HAC, $18 \times 0{,}024$) și 0,58 (bootstrap, $18 \times 0{,}032$)
  - nicio diferență nu rămîne semnificativă (slide-ul următor; Capitolul 3)
- O întrebare distinctă privește cea mai bună dintre cele 21 de configurații (7 reguli, fără MV, $\times$ 3 universuri)
  - raportul Sharpe deflatat (DSR, *deflated Sharpe ratio*, Bailey & López de Prado (2014)), probabilitatea ca Sharpe-ul cîștigătorului să nu fie doar noroc, pe calendarul comun mai 2012 – iulie 2026: $0{,}94 < 0{,}95$ pentru MV-LO pe sectoare
  - verdictul depinde însă de numărul efectiv de încercări (Anexă)
  - DSR folosește kurtosis-ul cîștigătorului, deci presupune moment de ordin patru finit, pus sub semnul întrebării în Capitolul 1
- Tipul de dovadă: comparație între proceduri (arată care metodă funcționează mai bine pe aceleași date, nu de ce)
  - regulile sînt evaluate pe aceleași luni și active, în eșantioanele analizate

Holm și Benjamini–Hochberg pe testele capitolului

- **FWER** (family-wise error rate): probabilitatea a cel puțin unei respingeri false în familie
- **FDR** (false discovery rate): proporția așteptată de respingeri false printre respingeri
- Se ordonează cele m valori p, $p_{(1)} \leq \cdots \leq p_{(m)}$
  - **Holm** (controlează FWER sub orice dependență): $\tilde{p}_{(i)} = \max_{j \leq i} \min\{1, (m - j + 1)\, p_{(j)}\}$
  - **Benjamini–Hochberg** (BH, Benjamini & Hochberg (1995)): $\tilde{p}_{(i)} = \min_{j \geq i} \min\{1, \frac{m}{j}\, p_{(j)}\}$
  - BH controlează FDR pentru valori p valide, sub independență sau sub condiția PRDS (dependență pozitivă, Benjamini & Yekutieli (2001)); corelațiile pozitive dintre strategii nu demonstrează singure PRDS
  - sub dependență arbitrară: Holm (rezultatul principal) sau Benjamini–Yekutieli
  - se respinge unde $\tilde{p} < 0{,}05$ (Holm) sau $\tilde{p} <$ FDR-ul ales (BH)
- Cele mai mici patru valori p HAC bilaterale, $m = 18$

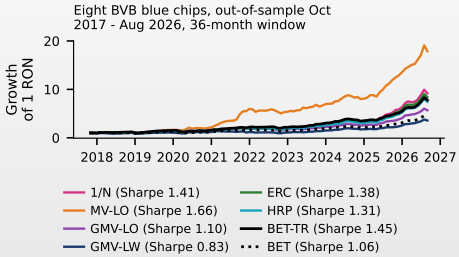
Testul	$p_{(j)}$	**Holm**	$\frac{18}{j}\, p_{(j)}$
Combinat, GMV-LW	0,0238	$18 \times 0{,}0238 = 0{,}428$	0,428
Combinat, GMV	0,0304	$17 \times 0{,}0304 = 0{,}516$	0,273
Combinat, GMV-LO	0,0477	$16 \times 0{,}0477 = 0{,}763$	0,286
Multi-active, HRP	0,0720	$\min\{1; 15 \times 0{,}0720\} = 1{,}00$	0,324

- BH ia minimul de jos în sus: primele două devin amîndouă 0,273
  - nicio respingere la un FDR de 10%

Cadrul: un investitor român

- Întrebarea secțiunii: bate o regulă de alocare indicele BET-TR pe blue chips BVB?
  - pentru un investitor în lei
- Opt blue chips (acțiunile marilor companii, cele mai lichide) cu istoric complet din octombrie 2014, cu simbolurile bursiere BVB: Banca Transilvania (TLV), OMV (*Österreichische Mineralölverwaltung*, Administrația austriacă a uleiurilor minerale, grupul OMV) Petrom (SNP), BRD–Groupe Société Générale (BRD), Transgaz (TGN), Romgaz (SNG), Nuclearelectrica (SNN), Electrica (EL), Transelectrica (TEL)
- Fereastră de 36 de luni, nu 60
  - cu 60 de luni ar rămîne doar 83 de luni în afara eșantionului
  - primul portofoliu în octombrie 2017
- Reguli: 1/N, MV-LO, GMV-LO, GMV-LW, ERC, HRP
  - fără MV și GMV nerestricționate, ale căror ponderi ar fi extreme pe ferestre de 36 de luni
- Reper: BET-TR (randament total, cu dividende)
  - BET apare doar pentru a arăta efectul dividendelor
- Rapoarte Sharpe cu $R_f = 0$, deci mai mari decît Sharpe-ul din randamente în exces
  - datele nu conțin o serie a pieței monetare în lei
- Dovezi anterioare despre diversificare în România: Dragotă, Șerbănescu & Pele (2008)

Portofoliile BVB față de BET-TR



- Graficul: valoarea a 1 leu (RON) investit în octombrie 2017
  - în afara eșantionului pînă în august 2026 (107 luni), înainte de costuri
- BET-TR: media 24,7% pe an, volatilitatea 17,0%, Sharpe 1,45
- BET (fără dividende): media 17,8%, Sharpe 1,06
- Sharpe apropiate de BET-TR: 1/N 1,41, ERC 1,38, HRP 1,31
- MV-LO: Sharpe 1,66, cu 0,21 peste BET-TR (p HAC $= 0{,}44$, bootstrap 0,53)
- GMV-LW: Sharpe 0,83, cu 0,62 sub BET-TR (p HAC $= 0{,}050$, bootstrap 0,10)
  - valorile p presupun moment de ordin patru finit, pus sub semnul întrebării în Capitolul 1
- Corelația medie a celor opt acțiuni, 0,44, limitează diversificarea
  - ultimul GMV-LO alocă 70% în TLV (Seminarul 4, C2)
- Tipul de dovadă: comparație între proceduri

MFM_ch4_bvb ▶ Interactiv

Frontiera accesibilă unui investitor mare (1/2)

- Întrebare: ce regulă de alocare rămîne eficientă?
  - cînd costurile de tranzacționare cresc cu mărimea investitorului
- Jensen, Kelly, Malamud & Pedersen (2026), *Review of Financial Studies*
  - construcția portofoliilor din prognoze de randament obținute prin învățare automată (*machine learning*, ML)
  - cînd fiecare tranzacție are impact asupra prețurilor
- **Frontiera eficientă implementabilă** (ec. 12)
  - pentru fiecare volatilitate σ, cel mai mare randament așteptat **net de costurile de tranzacționare**

$$k(\sigma) = \max_{\pi} E[r_{t+1}^{\text{net}}] \quad \text{cu} \quad E[\pi_t^\top \boldsymbol{\Sigma} \pi_t] = \sigma^2$$

  - π_t: vectorul ponderilor activelor riscante la t (notația articolului)
  - nu randamentele implicite $\boldsymbol{\pi}$ din Black–Litterman
  - r_{t+1}^{net}: randamentul portofoliului după costurile de tranzacționare
  - $k(\sigma)$: cel mai bun randament net așteptat la volatilitatea σ
- Propoziția 1: raportul Sharpe net $k(\sigma)/\sigma$ scade de-a lungul frontierei
  - un investitor mai mare are o frontieră mai joasă

Frontiera accesibilă unui investitor mare (2/2)

- Costul ca fracțiune din averea W_t (ec. 4, 7), pătratic în tranzacție

$$c_t = \frac{W_t}{2}(\pi_t - g_t\pi_{t-\mathbf{1}})^\top \mathbf{\Lambda}(\pi_t - g_t\pi_{t-\mathbf{1}}), \qquad \mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}(0{,}2/V_i)$$

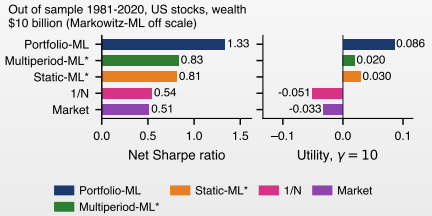
  - g_t: aplică drift-ul ponderilor lunii trecute
  - V_i: volumul zilnic mediu în dolari al activului i

- Regula optimă: se parcurge prin tranzacții doar o parte din distanța pînă la un **portofoliu-țintă** A_t (Gârleanu & Pedersen (2013))

$$\pi_t = m\, g_t\pi_{t-\mathbf{1}} + (\mathbf{I} - m)A_t$$

  - A_t: țintă prospectivă, medie ponderată a portofoliilor Markowitz curente și viitoare așteptate
  - ponderarea reflectă persistența semnalelor și fricțiunile; A_t nu este, în general, portofoliul Markowitz curent
  - m: o matrice $N \times N$ a ritmurilor de tranzacționare (ec. 14), deci și $\mathbf{I} - m$ este o matrice
  - în cazul scalar din Gârleanu & Pedersen (2013), m este partea păstrată din poziția veche în fiecare perioadă
  - Portfolio-ML învață A_t din semnale printr-o regresie ridge al cărei obiectiv este utilitatea netă de costuri
  - regresia ridge: cele mai mici pătrate cu o penalizare pe mărimea coeficienților

Rezultatele articolului: Sharpe net și utilitate



- Jensen, Kelly, Malamud & Pedersen (2026), Tabelul 2: net de costuri, 1981–2020, $\gamma = 10$
  - utilitatea (ec. 11) = randamentul net anual $-\frac{\gamma}{2}\times$ varianța anuală
- Markowitz-ML (medie–varianță pe prognozele ML, fără costuri)
  - Sharpe brut 2,06, turnover 79,36, levier 74,61: randament net extrem de negativ
- Portfolio-ML: Sharpe net 1,33, utilitate 0,086
  - randament net 15%, volatilitate 11%, cost 0,6% pe an
- Static-ML* (costuri pe o singură perioadă; * = nivel suplimentar de calibrare): Sharpe net 0,81, utilitate 0,030
- Multiperiod-ML* (12 orizonturi): Sharpe net 0,83, utilitate 0,020
- 1/N și piața: Sharpe net 0,54 și 0,51, utilitate $-0{,}051$ și $-0{,}033$
- Doar regulile care țin cont de costuri au utilitate pozitivă
- Tipul de dovadă: comparație între proceduri
  - limită declarată: pe cele mai mici 20% dintre acțiuni, Portfolio-ML rămîne sub Multiperiod-ML* și Static-ML*

MFM_ch4_implementable_frontier

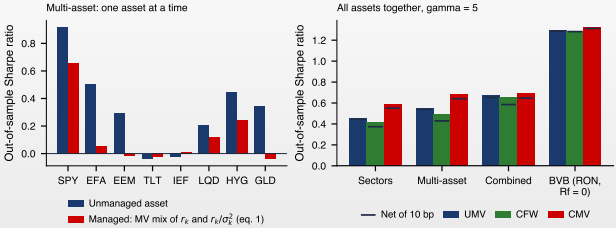
Portofoliile gestionate după volatilitate: întrebarea

- Întrebare: crește raportul Sharpe dacă investitorul reduce expunerea cînd volatilitatea este mare?
  - da, dacă volatilitatea măsurată prezice riscul lunii următoare, iar randamentul așteptat nu crește proporțional cu varianța
- Moreira & Muir (2017): factorul k gestionat după volatilitate (ec. 1 la DeMiguel, Martín-Utrera & Uppal (2024))

$$r^{\sigma}_{k,t+\mathbf{1}} = \frac{c}{\sigma^{\mathbf{2}}_{k,t}}\, r_{k,t+\mathbf{1}}$$

  - $r_{k,t+\mathbf{1}}$: randamentul în exces al factorului k în luna $t+1$
  - $\sigma^{\mathbf{2}}_{k,t}$: varianța randamentelor zilnice ale factorului k în luna t
  - c: constanta care dă lui r^{σ}_{k} aceeași volatilitate ca lui r_k
  - investitorul deține combinația medie–variață a lui r_k și r^{σ}_{k}
- Cederburg, O'Doherty, Wang & Yan (2020): în afara eșantionului, versiunile gestionate nu bat sistematic strategiile neschimbate; eroarea de estimare a ponderilor combinației contează
- Barroso & Detzel (2021): după costurile de tranzacționare, cîștigul nu rămîne robust pentru majoritatea factorilor studiați
- DeMiguel, Martín-Utrera & Uppal (2024), *Journal of Finance*: aceeași întrebare pentru un portofoliu de mai mulți factori
  - afirmația articolului: portofoliul condițional medie–varianță (CMV) bate portofoliul necondiționat (UMV) în afara eșantionului și net de costuri
  - Tabelul II, nouă factori, 1977–2020: Sharpe net 1,062 (CMV) față de 0,940 (UMV), $p = 0{,}006$

Gestionarea după volatilitate pe datele cursului



- Stînga: Sharpe-ul OOS al fiecărui ETF multi-active, mai 2012 – iulie 2026
  - albastru: activul neschimbat; roșu: combinația medie–variață estimată a lui r_k și r_k/σ_k^2 (ec. 1)
- Dreapta: Sharpe-ul în afara eșantionului al portofoliilor UMV, CFW (portofoliul UMV scalat cu volatilitatea lui) și CMV în cele patru universuri; liniuța: net de 10 bp
- Un activ singur: gestionarea scade Sharpe-ul la 22 dintre cele 25 de active (sectoare, multi-active, BVB)
  - EFA: de la 0,50 la 0,05; aur (GLD): de la 0,35 la $-0{,}04$
  - șapte scăderi au $p < 0{,}05$ în teste HAC individuale, neajustate
  - niciuna după Holm pe familia celor 25 de comparații: cea mai mică valoare p ajustată este 0,16
- Toate activele împreună: CMV are cel mai mare Sharpe brut în fiecare univers
  - sectoare 0,59 față de 0,45 (UMV); multi-active 0,69 față de 0,55
  - combinat 0,69 față de 0,67; BVB 1,32 față de 1,29
- CFW, scalarea întregului portofoliu UMV ca la Moreira & Muir (2017), rămîne sub UMV în toate cele patru universuri

MFM_ch4_vol_managed ▶ Interactiv

Metoda articolului și replicarea din curs

- CMV (ec. 2–6): ponderea factorului k, decisă la sfîrșitul lunii t și aplicată randamentului $r_{k,t+\mathbf{1}}$, este $\theta_{k,t} = a_k + b_k/\sigma_t$
  - σ_t: volatilitatea realizată a pieței în luna t, din randamentele zilnice
  - $b_k > 0$: expunere mai mică la factorul k cînd piața este volatilă
  - $a_k, b_k \geq 0$ maximizează $\boldsymbol{\mu}^\top \eta - \widehat{TC}(\eta) - \frac{\gamma}{2}\, \eta^\top \boldsymbol{\Sigma}\, \eta$, cu $\gamma = 5$
  - notația articolului: θ nu este aici Sharpe-ul maxim, η nu este factorul lui Lo; $\eta = (a, b)$; $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\Sigma}$: media și covarianța randamentelor extinse $(r_{k,t+\mathbf{1}},\ r_{k,t+\mathbf{1}}/\sigma_t)$; $\widehat{TC}$: costul mediu de tranzacționare
- UMV: aceeași problemă, cu $b_k = 0$
- CFW: combinația medie–varianță a lui UMV cu UMV împărțit la varianța sa din luna trecută (Moreira & Muir (2017))
- Articolul: costul fiecărei acțiuni din spread-ul estimat lunar; tranzacțiile se compensează între factori (*trading diversification*)
- Articolul: fereastră extinsă (*expanding window*), prima de 120 de luni
- Replicarea din curs: „factorii" sînt randamentele în exces ale ETF-urilor (poziții finanțate la rata T-bill)
  - BVB: randamente în lei, cu $R_f = 0$, ca în restul capitolului
  - piața: SPY pentru universurile din SUA, BET-TR pentru BVB
  - fereastră extinsă, prima de 60 de luni (BVB: 36), deci aceleași perioade în afara eșantionului ca backtest-ul capitolului
  - ponderile optimizate fără costuri, ca în Tabelul III, coloanele 1–3
  - costul: $c = 10$ bp pe unitate de turnover, cu turnover-ul calculat pe ETF (tranzacțiile se compensează)
  - regula de lichidare a capitolului: nicio regulă nu pierde 100% într-o lună, deci nicio regulă nu este lichidată
- Teste: bootstrap-ul staționar unilateral al articolului (bloc mediu 5, 10 000 de extrageri) și testul HAC bilateral al capitolului

Rezultatul: un cîștig mic, nesemnificativ

- Diferența de Sharpe brut CMV − UMV, din valori nerotunjite (p bootstrap unilateral; p HAC bilateral)
  - sectoare, 271 de luni: 0,14 (0,13; 0,26)
  - multi-active, 171 de luni: 0,13 (0,25; 0,46)
  - combinat, 171 de luni: 0,02 (0,46; 0,92)
  - BVB, 107 luni: 0,03 (0,30; 0,55)
- CMV tranzacționează mai mult: turnover lunar 1,08 față de 0,21 (multi-active)
- CMV folosește mai mult levier: suma medie a ponderilor în valoare absolută 4,8 față de 3,3 (multi-active)
- Costul pe unitate de turnover la care avantajul CMV dispare
  - sectoare 45 bp, multi-active 42 bp, BVB 49 bp, combinat 7 bp
  - la 10 bp, CMV rămîne sub UMV în universul combinat: Sharpe net 0,646 față de 0,655
- Tipul de dovadă: comparație între proceduri
  - direcția din articol apare în toate cele patru universuri: CMV peste UMV, combinația gestionată a unui singur activ sub activul neschimbat
  - concluzia privește această implementare (ETF-uri, fereastră extinsă, $\gamma = 5$); nu arată că gestionarea după volatilitate nu ajută în general
  - niciuna dintre cele patru diferențe CMV − UMV nu este semnificativă la 10%

Limitele replicării

- 8–16 ETF-uri și 107–271 de luni, față de nouă factori long-short pe 528 de luni
- Valorile p presupun moment de ordin patru finit, pus sub semnul întrebării în Capitolul 1
- BVB: levierul este finanțat la $R_f = 0$, deci media este supraestimată
- SUA: levierul (expunere medie 3,3–4,8, multi-active) este finanțat la rata T-bill; un spread de împrumut ar reduce media mai mult decît cîțiva bp de tranzacționare
- Costul constituirii inițiale a pozițiilor nu este inclus
- În articol, fără compensarea tranzacțiilor între factori, CMV pierde: Sharpe net 0,613 față de 0,710 (Tabelul III, panoul C, coloanele 1–3, optimizare fără costuri)

Întrebări deschise

- Întrebări
  - depășește vreo regulă de alocare **estimată** ponderile 1/N în afara eșantionului, net de costuri?
  - rămîne superioară după ce se iau în calcul toate regulile, ferestrele și universurile încercate?
- Dovezile actuale sînt contradictorii
  - Contracția neliniară a lui $\boldsymbol{\Sigma}$ îmbunătățește GMV în afara eșantionului pe secțiuni transversale mari: Ledoit & Wolf (2017)
  - Combinații sub riscul de estimare, fără activ fără risc: Kan, Wang & Zhou (2022); cu 1/N: Tu & Zhou (2011)
  - Rezultatele backtest-urilor trebuie ajustate pentru numărul de specificații încercate: Harvey & Liu (2015)
- Formularea: H_0: $\Delta_k \leq 0$ pentru toate cele 18 perechi (regulă, univers)
  - față de H_1: $\Delta_k > 0$ pentru cel puțin un k
  - cu FWER sau FDR fixat pentru toată familia (Testarea multiplă a regulilor de portofoliu)
- Bucla de cercetare, parcursă o dată cu un asistent AI (prompturile în ▸ Anexă)
  - literatură cu DOI (*Digital Object Identifier*, identificatorul digital al unei publicații), ipoteze concurente
  - cod pe datele lunare ale cursului, o familie de teste preînregistrată
  - o critică în stilul unui recenzent
- H_0 ar fi respinsă de un $\hat{\Delta}_k$ pozitiv care rămîne semnificativ
  - după corecția pentru toată familia
  - după costuri și pe un al doilea eșantion

Verificările necesare pentru cercetător

- **Deplasarea de anticipare** (*look-ahead bias*): ponderile lunii t construite cu randamentele aceleiași luni
  - test: verificați că ultima dată de estimare este înainte de t
- **Deplasarea de supraviețuire** (*survivorship bias*) **și selecția**: o listă de ETF-uri aleasă azi
  - test: folosiți universul disponibil la fiecare dată, inclusiv ETF-urile delistate ulterior, sau declarați limita
- **Testare multiplă**: 6 reguli $\times$ 3 universuri dau deja 18 teste
  - test: valori p ajustate Holm (FWER) sau Benjamini–Hochberg (FDR)
- **Putere**: pentru MV-LO minus 1/N pe multi-active, $\hat{\Delta}$ are o eroare standard HAC de 0,18 pe 171 de luni
  - test: calculați efectul minim detectabil înainte de a rula testele
- **Tipul randamentului**: portofoliile agregă randamente **simple**
  - rapoartele Sharpe folosesc randamente **în exces**
  - test: recalculați o lună pas cu pas
- **Referințe inventate**: un link DOI nefuncțional sau un titlu diferit
  - afirmația se elimină, iar eroarea se înregistrează în `AI_ERRORS.md`

Mini studiu de caz: căutarea repetată în datele capitolului (1/2)

- O propunere tipică a asistentului: „MV-LO depășește 1/N pe universul multi-active”
- Superioritatea este unilaterală: H_0: $\Delta \le 0$, $p = 1 - \Phi(\hat{\Delta}/\mathrm{SE})$
  - Φ: funcția de repartiție a distribuției Normale standard
  - SE: eroarea standard
- Replicare: $\hat{\Delta} = +0{,}29$, eroarea standard HAC 0,18, p unilateral $= 0{,}06$
  - HAC bilateral 0,12, bootstrap 0,16
  - $z = 0{,}2863/0{,}1836 = 1{,}56$, $p = 1 - \Phi(1{,}56) = 0{,}06$
- O putere de 0,8 pentru $\Delta = 0{,}29$, unilateral la 5%, cere circa 435 de luni (36 de ani)
  - 919 luni (77 de ani) la nivelul Holm 5%/18
  - lunile necesare: $T_{\mathrm{obs}}\left[(z_{1-\alpha} + z_{0,8})\,\mathrm{SE}/\Delta\right]^2 = 171\left[(1{,}645 + 0{,}842) \times 0{,}1836/0{,}2863\right]^2 \approx 435$
  - la $\alpha = 0{,}05/18$, $z_{1-\alpha} = 2{,}77$, ceea ce dă ≈ 919

MFM_ch4_ai_discovery

Mini studiu de caz: căutarea repetată în datele capitolului (2/2)

- Testați familia, nu cîștigătorul: 18 teste (6 reguli × 3 universuri)
  - valorile p unilaterale ale tuturor în ▸ Anexă
  - Doar 7 din 18 diferențe sînt pozitive
  - Cele 3 valori p HAC bilaterale sub 0,05 corespund toate unor diferențe **negative**
  - acestea nu pot respinge o ipoteză nulă de superioritate
  - cea mai mică valoare p unilaterală este 0,046 (sectoare, ERC)
  - după ajustare devine 0,82 cu Holm și 0,53 cu Benjamini–Hochberg: nicio descoperire la un FDR de 10%
- De ce 0,82 aici, dar 0,43 la Testarea multiplă a regulilor de portofoliu?
  - o pierdere are o valoare p unilaterală mare (circa $1 - p_{\text{bilateral}}/2$, de exemplu 0,99 pentru GMV-LW combinat)
  - deci pierderile semnificative ies din calcul
  - cea mai mică valoare p unilaterală aparține unui cîștig, 0,046, iar Holm îl înmulțește cu 18
- Interpretare: datele nu permit ordonarea acestor reguli
- Tipul de dovadă: comparație între proceduri
- Intervalul bootstrap pentru MV-LO, $[-0{,}13; 0{,}70]$, este compatibil atît cu pierderi, cît și cu cîștiguri mari
- Nerespingerea nu dovedește egalitatea

MFM_ch4_ai_discovery

O idee de proiect de cercetare

- **Întrebări**
  - depășește contracția neliniară (Ledoit & Wolf (2017)) ponderile 1/N pe cele 16 ETF-uri ale capitolului, după costuri de 10–50 bp?
  - depășește o combinație între o regulă optimizată și 1/N (Tu & Zhou (2011)) ponderile 1/N pe aceleași ETF-uri, după aceleași costuri?
- **Replicați întîi**
  - rezultatele pe universul combinat (Sharpe 1/N 0,76, MV-LO 0,81)
  - valorile p ajustate din mini studiul de caz
- **Preînregistrați**, înainte de orice rezultat
  - ipotezele, familia de teste, rata de eroare și puterea
  - un placebo: ponderi long-only aleatoare cu același turnover
- **Raportați**
  - cod pe datele lunare ale cursului
  - un tabel cu toate specificațiile
  - o autocritică în stilul unui recenzent
- **Jurnal**: prompturile în `AI_USE.md`
- Fiecare eroare depistată și verificarea care a depistat-o în `AI_ERRORS.md`

Decizia practică

- **Ce aleg**
  - 1/N ca regulă implicită: nu estimează nimic, are turnover lunar 0,02 și este greu de depășit după costuri
  - ERC dacă vreau riscul echilibrat între active: o abatere moderată de la 1/N, cu turnover 0,03 (HRP tranzacționează mai mult)
  - GMV sau GMV-LW doar dacă obiectivul este riscul minim: cea mai mică volatilitate, dar Sharpe sub 1/N pe 16 ETF-uri (0,20–0,36 față de 0,76)
  - nu aleg MV nerestricționată: averea ei ajunge la zero în toate cele trei universuri
- **În ce condiții**
  - ferestre de 60 de luni și 8–16 active: eroarea de estimare domină (în simulare, MV depășește 1/N abia la 480 de luni)
  - costuri de peste circa 22 bp: MV-LO, cea mai bună estimație punctuală, nu mai depășește 1/N pe 16 ETF-uri
  - Black–Litterman doar cu opinii a căror încredere $\boldsymbol{\Omega}$ este fixată prudent: modifică doar activele din opinii
  - concluziile sînt specifice eșantioanelor analizate (sectoare 2004–2026, multi-active și combinat 2012–2026)
- **Ce rezultat m-ar face să renunț**
  - o regulă estimată cu $\hat{\Delta} > 0$ față de 1/N, semnificativ după Holm sau Benjamini–Hochberg pe toată familia de teste
  - un cîștig care rămîne net de costuri și pe un al doilea eșantion

Verificări rapide cu cifre simple (1/2)

- **Trei reguli, două active**: $\sigma_1 = 30\%$, $\sigma_2 = 15\%$, $\rho = 0{,}2$
  - calculați ponderile și volatilitățile GMV, ERC și 1/N
  - verificați $\sigma_{\text{GMV}} \leq \sigma_{\text{ERC}} \leq \sigma_{1/N}$
  - ce parte din varianța lui 1/N provine din activul 1? (Două active; Contribuțiile la risc; ERC)
- **Optimismul Sharpe-ului estimat direct**: $N = 4$ active, $T = 120$ de luni, în simulare $\theta = 0{,}50$ pe an
  - ce Sharpe maxim în eșantion (medie pătratică, anual) vă așteptați să obțineți? (Raportul Sharpe estimat direct este deplasat)
- **Banda de zgomot**: $N = 10$, $T = 40$, matrice de corelație
  - calculați banda Marchenko–Pastur
  - este o valoare proprie de eșantion de 2,0 un semn de structură? (Limitele matricei de covarianță de eșantion)

Verificări rapide cu cifre simple (2/2)

- **O opinie, un activ**: $\pi = 4\%$, $\tau\sigma^2 = 0{,}0009$, opinia 10%
  - media a posteriori și ponderea opiniei pentru $\Omega = 0{,}0009$ și pentru $\Omega = 0{,}0003$ (Opiniile și distribuția a posteriori)
- **Un raport Sharpe**: $\widehat{SR}$ lunar $= 0{,}15$, $T = 120$, i.i.d. din distribuția Normală
  - Sharpe-ul anual și intervalul lui de 95%
  - este semnificativ pozitiv? (Inferența pentru un raport Sharpe)
- **Patru teste**: $p = 0{,}004;\ 0{,}020;\ 0{,}030;\ 0{,}300$
  - valorile p ajustate Holm și Benjamini–Hochberg
  - cîte respingeri la 5% cu fiecare? (Holm și Benjamini–Hochberg)
- Răspunsurile: ▸ Anexă

Autoevaluare și legături cu alte capitole

Întrebări de recapitulare

- De ce supraestimează Sharpe-ul tangent în eșantion pe cel realizabil?
  - Sharpe estimat direct; Seminarul 4, A8
- Cu cît îl supraestimează pentru $N = 9$, $T = 60$?
- De ce acționează o restricție long-only ca o contracție?
  - Jagannathan–Ma și exemplul cu două active
- De ce poate o diferență mică de Sharpe între ERC și 1/N să fie aproape semnificativă, iar una mai mare între GMV și 1/N nu?
  - pe sectoare
  - testul HAC: comparați erorile standard 0,023 și 0,159 din tabelul din Anexă

Legături cu alte capitole

- **Capitolul 3**: portofoliul tangent, CAPM și modelele factoriale de covarianță
- **Capitolele 5–6**: volatilitate și corelație variabile în timp pentru ponderi dinamice
- **Capitolul 7**: Value-at-Risk și Expected Shortfall de portofoliu
- **Capitolul 13**: machine learning pentru randamente și portofolii
  - supraajustarea (*overfitting*) backtest-ului

Activele în detaliu

- **Sectoare** (9 ETF-uri sectoriale din SUA)
  - XLB (materiale), XLE (energie), XLF (financiar), XLI (industrie), XLK (tehnologie)
  - XLP (bunuri de consum de bază), XLU (utilități), XLV (sănătate), XLY (consum discreționar)
- **Multi-active**
  - acțiuni: SPY (S&P 500), EFA (țări dezvoltate, fără SUA și Canada), EEM (piețe emergente)
  - obligațiuni: TLT (titluri de stat SUA, peste 20 de ani), IEF (titluri de stat SUA, 7–10 ani), LQD (investment grade), HYG (high yield)
  - aur: GLD
- **BVB** (8 blue chips)
  - TLV Banca Transilvania, SNP OMV Petrom (OMV: *Österreichische Mineralölverwaltung*, grupul petrolier austriac), BRD BRD–Groupe Société Générale, TGN Transgaz
  - SNG Romgaz, SNN Nuclearelectrica, EL Electrica, TEL Transelectrica

Contracția neliniară

- Contracția liniară amestecă două matrice cu un singur δ
  - contracția **neliniară** păstrează vectorii proprii de eșantion și corectează separat fiecare valoare proprie
  - $\hat{\Sigma}_{\text{NL}} = \text{U}\,\text{diag}(\tilde{d}_1, \ldots, \tilde{d}_N)\text{U}^\top$, U: vectorii proprii ai lui S, $\tilde{d}_i$: valorile proprii corectate
  - Ledoit & Wolf (2017): calibrat pentru alegerea portofoliului
  - Ledoit & Wolf (2020): o formulă analitică, fără optimizare
- În afara eșantionului, fereastră de 60 de luni, volatilitatea GMV
  - Sectoare: eșantion 11,90%, liniar (corelație constantă) 11,80%, neliniar 11,62%
  - 16 ETF-uri: eșantion 4,06%, liniar 4,38%, neliniar 4,31%
- O corelație constantă nu descrie nici perechile acțiuni–acțiuni, nici perechile acțiuni–obligațiuni
  - primele au corelații pozitive, celelalte corelații negative
  - alegerea țintei contează (Seminarul 4, B7)
- Niciun estimator nu domină
  - neliniarul cîștigă pe sectoare, matricea de eșantion pe 16 ETF-uri
  - alegerea se face în afara eșantionului
- La $N = 16$, $T = 60$ matricea de eșantion rămîne competitivă
  - ea devine inutilizabilă cînd N se apropie de T

Black–Litterman: cazuri limită

- $\boldsymbol{\Omega} \to 0$: opiniile se impun exact, $\mathrm{P}\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{BL}} = \mathrm{q}$
- $\boldsymbol{\Omega} \to \infty$: opiniile sînt ignorate, $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{BL}} = \boldsymbol{\pi}$
- Fără opinii se obține chiar portofoliul de referință w_b
- Cu aceeași $\boldsymbol{\Sigma}$ în ponderi, se modifică doar ponderile activelor din opinii
- Același estimator este o regresie mixtă (Theil & Goldberger (1961); Anexă)
  - estimată prin cele mai mici pătrate generalizate (GLS, generalised least squares)
  - Seminarul 4, A6

Black–Litterman: rolul lui δ_{RA} și τ

- Valorile din He & Litterman (2002): $\delta_{\text{RA}} = 2{,}5$, $\tau = 0{,}05$, $\boldsymbol{\Omega} = \operatorname{diag}(\mathrm{P}\,\tau\boldsymbol{\Sigma}\,\mathrm{P}^\top)$
- **Aversiunea la risc**: se înmulțește $\boldsymbol{\pi} = \delta_{\text{RA}}\boldsymbol{\Sigma}\mathrm{w}_b$ la stînga cu $\mathrm{w}_b^\top$

$$\delta_{\text{RA}} = \frac{\mathrm{w}_b^\top \boldsymbol{\pi}}{\mathrm{w}_b^\top \boldsymbol{\Sigma}\mathrm{w}_b} = \frac{\text{randamentul în exces al reperului}}{\text{varianța reperului}}$$

  - de exemplu, 6% randament în exces la volatilitatea 15,5%: $0{,}06/0{,}155^2 = 2{,}5$
  - $\boldsymbol{\pi}$ este liniar în δ_{RA}: dublarea lui dublează diferența implicită XLK minus XLU de 2,2%
- **Incertitudinea a priori**: $\tau\boldsymbol{\Sigma}$ este incertitudinea asupra mediei
  - o interpretare este $\tau \approx 1/Y$, varianța unei medii estimate pe Y ani raportată la $\boldsymbol{\Sigma}$ (argumentul lui Merton)
  - deci $\tau = 0{,}05$ corespunde la circa 20 de ani de date
- Cu această $\boldsymbol{\Omega}$ și o singură opinie, τ se simplifică
  - diferența a posteriori este mijlocul $(2{,}2\% + 3\%)/2 = 2{,}6\%$
  - ponderile nu depind de τ
- Încrederea în opinie este dată de $\boldsymbol{\Omega}$ relativ la $\tau\boldsymbol{\Sigma}$, nu de τ singur

Testul HAC pas cu pas

- Gradientul lui f în raport cu $\mathrm{v} = (\mu_1, \mu_2, \mathbb{E}[r_1^2], \mathbb{E}[r_2^2])$

$$\nabla f = \Big(\frac{\mathbb{E}[r_1^2]}{\sigma_1^3},\ -\frac{\mathbb{E}[r_2^2]}{\sigma_2^3},\ -\frac{\mu_1}{2\sigma_1^3},\ \frac{\mu_2}{2\sigma_2^3} \Big)$$

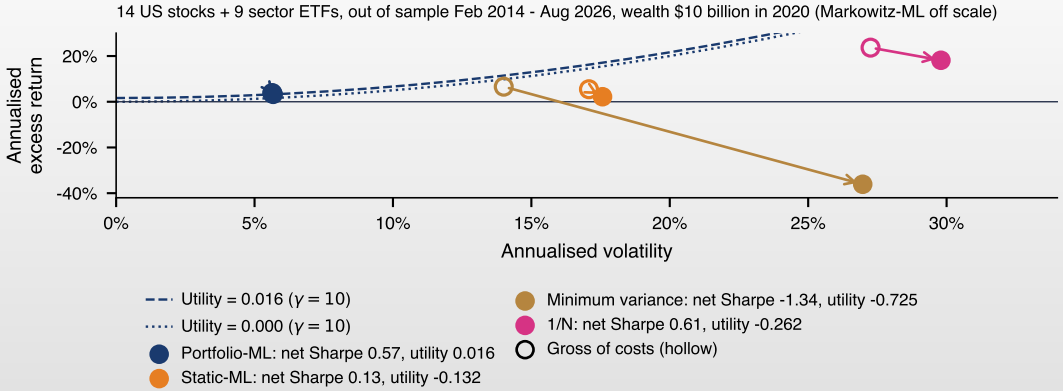
  - notația: $\sigma_i^2 = \mathbb{E}[r_i^2] - \mu_i^2$
  - derivatele sînt în momentele de ordinul doi **necentrate**
  - un gradient în (μ_i, σ_i^2) nu se potrivește cu această $\hat{\mathbf{\Psi}}$

- $\hat{\mathbf{\Psi}}$: covariația pe termen lung a lui y_t
  - $\mathrm{y}_t = (r_{1t} - \hat{\mu}_1,\ r_{2t} - \hat{\mu}_2,\ r_{1t}^2 - \widehat{\mathbb{E}r_1^2},\ r_{2t}^2 - \widehat{\mathbb{E}r_2^2})$
- Valorile p HAC din tabelele capitolului: nucleul Bartlett (Newey–West)
  - $\lfloor 4(T/100)^{2/9} \rfloor = 4$ laguri pentru orice T între 107 și 271
  - $z = \hat{\Delta}/\mathrm{SE}$, $p = 2[1 - \Phi(|z|)]$
- Bootstrap-ul studentizează cu altă eroare standard, deci cele două statistici diferă puțin
  - nucleu pătratic-spectral cu prealbire (Anexă)
  - sectoare, MV-LO minus 1/N: $\hat{\Delta} = 0{,}063$; SE Bartlett 0,120, $z = 0{,}53$, p HAC $= 0{,}60$
  - SE pătratic-spectral (QS) 0,127, statistica studentizată 0,50

Articolul și aplicația din curs: ce comparăm?

	Articol	**Replicarea din curs**
Active	acțiuni din SUA cu capitalizarea peste mediana NYSE (New York Stock Exchange; 184–805)	14 acțiuni din SUA + 9 ETF-uri sectoriale
Semnale	115 caracteristici (Jensen, Kelly & Pedersen (2023))	5 semnale de preț și volum
În afara eșantionului	1981–2020, lunar	februarie 2014 – august 2026 (151 de luni)
Investitor	$\gamma = 10$, avere de 10 miliarde \$ la sfîrșitul lui 2020, care crește odată cu piața	la fel; averea scalată cu randamentul cumulat al SPY înainte și după 2020
Utilitate	randamentul net anual $- \frac{\gamma}{2} \times$ varianța anuală	la fel: $12\times$ media lunară $- \frac{\gamma}{2} \times 12\times$ varianța lunară

Brut și net de costuri pe datele cursului (1/2)



MFM_ch4_implementable_frontier

Brut și net de costuri pe datele cursului (2/2)

- Axe: volatilitatea anualizată (orizontal) și randamentul în exces anualizat (vertical)
  - marcaj gol: înainte de costuri
  - marcaj plin: după costul c_t (ec. 35 din articol)
- Curba întreruptă: utilitatea lui Portfolio-ML (0,016)
  - curba punctată: utilitatea 0
- Portfolio-ML: randament 3,8% brut și 3,2% net, volatilitate 5,7%, Sharpe net 0,57
- Utilitatea lui Portfolio-ML: $0{,}0324 - \frac{10}{2} \times 0{,}0567^2 = 0{,}016$
  - media netă și volatilitatea netă, anual
- 1/N: 18,1% net și Sharpe 0,61, dar volatilitatea de 29,8% îi dă utilitatea $-0{,}26$
- Varianța minimă: $+6{,}6\%$ brut, $-36{,}1\%$ net
  - levierul de 2,6 costă 43% pe an
- Limite: 23 de active, 5 semnale, fără model factorial pentru $\boldsymbol{\Sigma}$ (Seminarul 4, C3)

MFM_ch4_implementable_frontier

Frontiera în formă închisă, pas cu pas

- Două restricții, doi multiplicatori: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mathrm{w}^\top \boldsymbol{\Sigma}\mathrm{w} - \lambda_1(\mathrm{w}^\top \boldsymbol{\mu} - m) - \lambda_2(\mathrm{w}^\top 1 - 1)$
- Condiția de ordinul întîi: $\boldsymbol{\Sigma}\mathrm{w} = \lambda_1\boldsymbol{\mu} + \lambda_2 1$, deci $\mathrm{w} = \lambda_1\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} + \lambda_2\boldsymbol{\Sigma}^{-1}1$
- Restricțiile, cu $A = 1^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}1$, $B = 1^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}$
  - $C = \boldsymbol{\mu}^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}$, $D = AC - B^2$

$$\boldsymbol{\mu}^\top\mathrm{w} = \lambda_1 C + \lambda_2 B = m, \qquad 1^\top\mathrm{w} = \lambda_1 B + \lambda_2 A = 1$$

- Soluția sistemului 2×2: $\lambda_1 = (Am - B)/D$, $\lambda_2 = (C - Bm)/D$
- Varianța: $\mathrm{w}^\top\boldsymbol{\Sigma}\mathrm{w} = \mathrm{w}^\top(\lambda_1\boldsymbol{\mu} + \lambda_2 1) = \lambda_1 m + \lambda_2 = \dfrac{Am^2 - 2Bm + C}{D}$
- Verificare: la $m = B/A$ varianța este $(C - B^2/A)/D = 1/A$, adică GMV
- Forme: σ^2 este pătratică în m (parabolă în planul (σ^2, m))
  - $\sigma^2 - A(m - B/A)^2/D = 1/A$ este o hiperbolă în planul (σ, m)

înapoi

Momentele Wishart și distribuția ponderilor

- Randamente i.i.d. $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, estimatori de verosimilitate maximă
  - $\hat{\boldsymbol{\mu}} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}/T)$, $T\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \sim W_N(T-1, \boldsymbol{\Sigma})$, independenți
  - Wishart: analogul matriceal al lui χ^2, cu $T-1$ grade de libertate
- Momentul Wishart invers, finit pentru $T > N+2$: $\mathbb{E}[\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}] = \frac{T}{T-N-2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$
  - o deplasare **în sus** care crește cu N/T
- Condiționînd pe $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ se obține $\mathbb{E}[\hat{\theta}^2]$ din curs (Seminarul 4, A8)
  - se folosește $\mathbb{E}[\mathrm{x}^\top \mathrm{K}\mathrm{x}] = \mathrm{tr}(\mathrm{K}\,\mathrm{Var}(\mathrm{x})) + \mathbb{E}[\mathrm{x}]^\top \mathrm{K}\,\mathbb{E}[\mathrm{x}]$
  - orice vector aleator x, matrice fixă K, tr: urma
- Ponderile GMV cu $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ Wishart și T suficient de mare față de N
  - $\hat{\mathrm{w}}_{\mathrm{GMV}}$ este nedeplasat
  - distribuția și covarianța lui exacte sînt cunoscute (Okhrin & Schmid (2006))
- Ponderile tangente împart la $1^\top \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}$, care poate fi aproape de zero: cozi foarte groase
- Combinații optime sub riscul de estimare: tangent și GMV, cu activ fără risc (Kan & Zhou (2007)); fără activ fără risc (Kan, Wang & Zhou (2022))

înapoi

Ponderile tangente prin regresie, Britten-Jones (1999) (1/2)

- Britten-Jones (1999): regresia constantei 1 pe randamentele în exces, **fără** termen liber

$$1 = \mathrm{b}^\top \mathrm{r}_t + u_t, \qquad \hat{\mathrm{b}} = (\mathrm{X}^\top \mathrm{X})^{-1} \mathrm{X}^\top 1_T \propto \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \hat{\boldsymbol{\mu}}$$

  - r_t: vectorul randamentelor în exces din luna t
  - X: matricea $T \times N$ cu liniile $\mathrm{r}_t^\top$
  - 1_T: vectorul de T unități; u_t: eroarea regresiei
- Sherman–Morrison aplicat lui $\mathrm{X}^\top \mathrm{X}/T = \hat{\boldsymbol{\Sigma}} + \hat{\boldsymbol{\mu}} \hat{\boldsymbol{\mu}}^\top$ dă proporționalitatea (Seminarul 4, A9)
- $\hat{\mathrm{b}}/1^\top \hat{\mathrm{b}}$ = ponderile tangente de eșantion
- $1^\top \hat{\mathrm{b}}$ are semnul lui $1^\top \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \hat{\boldsymbol{\mu}}$
  - portofoliul este pe ramura eficientă doar dacă este pozitiv
- Distribuții t și F exacte în eșantion finit pentru randamente i.i.d. din distribuția Normală
- Altfel se folosesc erori standard HAC

Înapoi

Ponderile tangente prin regresie, Britten-Jones (1999) (2/2)

- Testul t OLS al lui $b_i = 0$: activul i are pondere zero în portofoliul tangent
- Testul F al lui $\mathrm{Rb} = 0$ cu $\mathrm{R} = [\mathrm{I}_{N-1}, -1_{N-1}]$: „portofoliul tangent este 1/N"
- Nouă sectoare, ianuarie 1999 – iulie 2026 ($T = 331$)
  - $\hat{\mathrm{b}}$ normalizat reproduce ponderile tangente
- Cel mai mare $|t|$ este 1,12 (financiar), iar cu erori HAC 1,19
- H_0: tangent = 1/N, opt restricții: $F(8, 322) = 0{,}48$, $p = 0{,}87$
- Testul Wald cu erori HAC: $\chi^2_8 = 4{,}50$, $p = 0{,}81$
- Nerespingerea nu dovedește ponderi egale

Înapoi

Intensitatea optimă a contracției

- Ledoit și Wolf aleg ponderea δ a țintei din $\delta \mathrm{F} + (1-\delta)\mathrm{S}$
  - ea minimizează distanța pătratică așteptată (Frobenius) față de $\boldsymbol{\Sigma}$ adevărată

$$\delta^* = \max\left\{0, \min\left\{1, \frac{\hat{\kappa}}{T}\right\}\right\}, \qquad \hat{\kappa} = \frac{\hat{\pi} - \hat{\rho}}{\hat{\gamma}}$$

- $\hat{\pi}$: suma variațelor asimptotice ale elementelor lui S (zgomotul)
- $\hat{\rho}$: covariațele lor asimptotice cu elementele țintei
- $\hat{\gamma} = \|\mathrm{F} - \mathrm{S}\|^2$: eroarea de specificare a țintei (nu aversiunea la risc γ)
- Formulele complete pentru ținta de corelație constantă: Ledoit & Wolf (2004b), Anexă
- Codul: Quantlet-ul de contracție

Înapoi

Contracția mediilor și alți estimatori de covariață

- Bayes–Stein (Jorion (1986)): $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\text{BS}} = (1 - \hat{\phi})\,\hat{\boldsymbol{\mu}} + \hat{\phi}\,\hat{\mu}_{\text{GMV}}\mathbf{1}$
  - Contracție Bayes empirică a fiecărei medii spre media portofoliului GMV
  - $\hat{\phi}$ dintr-un argument Stein, mai mare cînd N/T este mare
- Tu & Zhou (2011): combinația convexă dintre o regulă sofisticată și 1/N
  - ea minimizează pierderea așteptată în afara eșantionului
- DeMiguel, Garlappi, Nogales & Uppal (2009): restricțiile de normă $\|\mathrm{w}\|_1 \leq \delta$ sau $\|\mathrm{w}\|_2 \leq \delta$ includ GMV long-only, GMV cu contracție și 1/N
- Aceste restricții de normă sînt puntea spre portofoliile lasso din Capitolul 13
- Structură factorială plus o covariață reziduală rară: POET (Fan, Liao & Mincheva (2013))
  - POET: principal orthogonal complement thresholding
  - legătura cu Capitolul 3
- GMV în dimensiune mare, cu contracție spre un portofoliu-țintă: Bodnar, Parolya & Schmid (2018)

Înapoi

Black–Litterman ca estimare mixtă (GLS)

- Theil & Goldberger (1961): distribuția a priori și opiniile se scriu ca o singură regresie pentru $\boldsymbol{\mu}$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi} \\ \mathrm{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I} \\ \mathrm{P} \end{pmatrix} \boldsymbol{\mu} + \begin{pmatrix} \mathrm{e}_1 \\ \mathrm{e}_2 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{Var} \begin{pmatrix} \mathrm{e}_1 \\ \mathrm{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau\boldsymbol{\Sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Omega} \end{pmatrix}$$

- GLS dă exact $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{BL}}$, cu covarianța $\mathrm{M} = \left[(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1} + \mathrm{P}^{\top}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathrm{P}\right]^{-1}$
- Formă echivalentă: $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{BL}} = \boldsymbol{\pi} + \tau\boldsymbol{\Sigma}\mathrm{P}^{\top}(\mathrm{P}\tau\boldsymbol{\Sigma}\mathrm{P}^{\top} + \boldsymbol{\Omega})^{-1}(\mathrm{q} - \mathrm{P}\boldsymbol{\pi})$
- $\boldsymbol{\Omega} \to 0$: cele mai mici pătrate cu restricții, $\mathrm{P}\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{BL}} = \mathrm{q}$
- Covarianța predictivă $\boldsymbol{\Sigma} + \mathrm{M}$ în ponderi ar modifica toate ponderile
- Fără opinii, le scalează pe toate cu $1/(1+\tau)$

înapoi

Alte reguli bazate pe risc

- **Inversul volatilității**: $w_i \propto 1/\sigma_i$
- Coincide cu ERC cînd toate corelațiile sînt egale
- **Diversificare maximă** (Choueifaty & Coignard (2008)): se maximizează $\mathrm{w}^\top \boldsymbol{\sigma} / \sqrt{\mathrm{w}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathrm{w}}$
  - raportul dintre volatilitatea medie a activelor și volatilitatea portofoliului
- $\boldsymbol{\sigma}$: vectorul volatilităților activelor
- **Varianță minimă**: GMV, regula extremă bazată pe risc
- Toate ignoră randamentele așteptate
  - robuste la eroarea de estimare, dar optime doar în ipoteze speciale

înapoi

Rezultate, universul sectoarelor

Regula	Media	Volatilitate	Sharpe	Turnover	Drawdown maxim	Sharpe, 50 bp
1/N	9,4%	14,3%	0,66	0,02	−49%	0,65
MV	lichidată în martie 2009 (averea ajunge la zero); nu intră în clasament					
MV-LO	10,7%	14,7%	0,72	0,23	−42%	0,63
GMV	8,5%	11,9%	0,71	0,23	−33%	0,59
GMV-LO	8,1%	11,5%	0,70	0,09	−34%	0,65
GMV-LW	7,6%	11,8%	0,65	0,14	−31%	0,58
ERC	9,3%	13,2%	0,70	0,03	−47%	0,69
HRP	8,9%	12,8%	0,70	0,08	−45%	0,66

- Perioada: ianuarie 2004 – iulie 2026
- Turnover: media lunară
- Drawdown-ul: din averea calculată cu randamente totale
- Ultima coloană: Sharpe net de 50 de puncte de bază pe unitate de turnover

înapoi

Rezultate, universul multi-active (8 ETF-uri)

Regula	Media	Volatilitate	Sharpe	Turnover	Drawdown maxim	Sharpe, 50 bp
1/N	4,3%	8,4%	0,52	0,02	−21%	0,50
MV	lichidată în septembrie 2025 (averea ajunge la zero); nu intră în clasament					
MV-LO	7,1%	8,9%	0,80	0,12	−24%	0,72
GMV	1,4%	3,8%	0,37	0,14	−11%	0,16
GMV-LO	1,7%	5,4%	0,32	0,05	−17%	0,27
GMV-LW	1,1%	4,2%	0,27	0,09	−13%	0,15
ERC	3,6%	7,3%	0,49	0,02	−21%	0,47
HRP	2,4%	6,6%	0,36	0,04	−20%	0,32

- Perioada: mai 2012 – iulie 2026 (171 de luni)

înapoi

Rezultate, universul combinat (16 ETF-uri)

Regula	Media	Volatilitate	Sharpe	Turnover	Drawdown maxim	Sharpe, 50 bp
1/N	7,9%	10,3%	0,76	0,02	−17%	0,75
MV	lichidată în ianuarie 2023 (averea ajunge la zero); nu intră în clasament					
MV-LO	8,0%	9,8%	0,81	0,20	−26%	0,69
GMV	0,8%	4,1%	0,20	0,24	−12%	−0,15
GMV-LO	2,0%	5,4%	0,36	0,06	−17%	0,30
GMV-LW	0,9%	4,4%	0,20	0,13	−14%	0,03
ERC	5,5%	7,8%	0,71	0,03	−18%	0,68
HRP	4,0%	7,0%	0,56	0,11	−18%	0,47

- Perioada: mai 2012 – iulie 2026

înapoi

Toate cele 18 teste față de 1/N (1/3), sectoare

Regula	$\hat{\Delta}$	SE HAC	p HAC	Holm	p unilateral	p bootstrap	Bloc
MV-LO	+0,06	0,120	0,60	1,00	0,299	0,63	1
GMV	+0,05	0,159	0,75	1,00	0,377	0,76	1
GMV-LO	+0,04	0,112	0,73	1,00	0,363	0,73	1
GMV-LW	−0,02	0,166	0,93	1,00	0,537	0,94	1
ERC	+0,04	0,023	0,09	1,00	0,046	0,13	1
HRP	+0,04	0,040	0,32	1,00	0,162	0,36	1

- Ianuarie 2004 – iulie 2026, $T = 271$
  - $\hat{\Delta}$: Sharpe-ul anualizat al regulii minus cel al lui 1/N, înainte de costuri
- Coloanele
  - HAC: Bartlett, 4 laguri, bilateral; Holm: pe toate cele 18 teste HAC bilaterale
  - unilateral: $1 - \Phi(\hat{\Delta}/\mathrm{SE})$
  - bootstrap: bootstrap circular pe blocuri, studentizat, bilateral, blocul din Algoritmul 3.1

Înapoi

Toate cele 18 teste față de 1/N (2/3), multi-active

Regula	$\hat{\Delta}$	SE HAC	p HAC	Holm	p unilateral	p bootstrap	Bloc
MV-LO	+0,29	0,184	0,12	1,00	0,059	0,16	10
GMV	−0,15	0,226	0,51	1,00	0,745	0,54	1
GMV-LO	−0,20	0,137	0,14	1,00	0,930	0,15	8
GMV-LW	−0,25	0,191	0,19	1,00	0,903	0,20	4
ERC	−0,03	0,060	0,61	1,00	0,694	0,58	10
HRP	−0,16	0,089	0,07	1,00	0,964	0,05	6

- Mai 2012 – iulie 2026, $T = 171$
  - aceleași coloane ca la sectoare

înapoi

Toate cele 18 teste față de 1/N (3/3), combinat

Regula	$\hat{\Delta}$	SE HAC	p HAC	Holm	p unilateral	p bootstrap	Bloc
MV-LO	+0,05	0,210	0,82	1,00	0,409	0,82	10
GMV	−0,56	0,261	0,03	0,52	0,985	0,05	1
GMV-LO	−0,40	0,203	0,05	0,76	0,976	0,08	6
GMV-LW	−0,56	0,249	0,02	0,43	0,988	0,03	2
ERC	−0,06	0,114	0,61	1,00	0,695	0,62	10
HRP	−0,20	0,152	0,18	1,00	0,908	0,20	8

- Mai 2012 – iulie 2026, $T = 171$
- Familia unilaterală: Holm $18 \times 0{,}046 = 0{,}82$
  - Benjamini–Hochberg $\min\{18 \times 0{,}046;\ \frac{18}{2} \times 0{,}059\} = 0{,}53$ pentru primele două

înapoi

Detaliile bootstrap-ului și lungimea blocului

- Studentizare: $s(\hat{\Delta}^*)$ din sumele pe blocuri ale fiecărei reeșantionări
- $s(\hat{\Delta})$ pe date, cu un nucleu pătratic-spectral cu prealbire (Andrews & Monahan (1992)) și lățime de bandă automată (Andrews (1991))
- Ledoit & Wolf (2008), Algoritmul 3.1, aplicat fiecăreia dintre cele 18 perechi
  - grila și K din Secțiunile 4–5
  - se alege blocul b al cărui interval bootstrap are acoperirea efectivă cea mai apropiată de 95%
  - se estimează o autoregresie vectorială de ordinul întîi pentru perechea de randamente
  - reziduurile ei se reeșantionează printr-un bootstrap staționar (Politis & Romano (1994)), bloc mediu 5
  - în fiecare dintre cele $K = 5\,000$ de pseudo-eșantioane de lungime T se construiește intervalul de 95% pentru $b \in \{1, 2, 4, 6, 8, 10\}$
  - se alege $\tilde{b} = \arg\min_b |\hat{g}(b) - 0{,}95|$, $\hat{g}(b)$ fiind proporția intervalelor care conțin $\hat{\Delta}$ pseudo-adevărat
- Un bootstrap nestudentizat cu bloc fix de 6 luni nu calibrează acoperirea
  - nu este același test

Înapoi

Raportul Sharpe deflatat (1/2)

- Bailey & López de Prado (2014): cel mai bun dintre N rapoarte Sharpe este deplasat în sus
  - chiar dacă toate rapoartele Sharpe adevărate sînt zero
- Maximul așteptat sub H_0: toate rapoartele Sharpe adevărate sînt zero
  - N încercări independente, T în unități lunare
  - pe acest slide N numără încercările (configurațiile), nu activele
  - $\gamma_E = 0{,}5772$: constanta lui Euler, e: numărul lui Euler
  - $\hat{V}$: varianța celor N estimații, Φ: funcția de repartiție a distribuției Normale standard

$$SR_0 = \sqrt{\hat{V}}\left[(1-\gamma_E)\,\Phi^{-1}\left(1-\tfrac{1}{N}\right) + \gamma_E\,\Phi^{-1}\left(1-\tfrac{1}{Ne}\right)\right]$$

- Raportul Sharpe deflatat: probabilitatea ca raportul Sharpe adevărat al cîștigătorului să depășească SR_0
  - cu asimetria $\hat{\gamma}_3$ și kurtosis-ul $\hat{\gamma}_4$ ale cîștigătorului

$$\text{DSR} = \Phi\left(\frac{(\widehat{SR} - SR_0)\sqrt{T-1}}{\sqrt{1-\hat{\gamma}_3\widehat{SR} + \frac{\hat{\gamma}_4-1}{4}\widehat{SR}^2}}\right)$$

înapoi

Raportul Sharpe deflatat (2/2)

- Acest capitol: 21 de configurații (7 reguli $\times$ 3 universuri; fără MV, lichidată), aliniate pe calendarul comun mai 2012 – iulie 2026 ($T = 171$)
  - cîștigătorul este MV-LO pe sectoare, cu Sharpe 0,92 pe an
  - Ca 21 de încercări independente: $SR_0 = 0{,}48$ pe an, DSR $= 0{,}94 < 0{,}95$
  - Configurațiile sînt puternic corelate (pînă la 0,99), deci numărul efectiv de încercări independente este mai mic
  - $N = 8$ dă DSR 0,98, $N = 3$ dă 0,99
  - N efectiv tratează dependența dintre configurații, nu autocorelația randamentelor
  - DSR este o aproximare ilustrativă: o probabilitate calibrată doar sub ipotezele formulei
- Holm ajustează întreaga familie de teste pe perechi față de 1/N
- DSR compară performanța cîștigătorului cu efectul hazardului

Înapoi

Dincolo de acțiuni, activele digitale

- Petukhina, Trimborn, Härdle & Elendner (2021): criptomonedele în regulile de alocare a portofoliului
- Cîștigul adus de criptomonede depinde de regula de alocare și de lichiditate
- Pele et al. (2023): devin criptomonedele active alternative?
- Bitcoin: volatilitatea anualizată 172%, IEF 6,6%
  - lunar, 2010–2026; Bitcoin este o criptomonedă supraviețuitoare, aleasă ex post
- Contribuțiile la risc cresc cu volatilitatea
  - regulile bazate pe risc atribuie automat lui Bitcoin o pondere mică (Seminarul 4, B8)
- Markowitz robust pentru cripto-active: Pele (2023)

Înapoi

Studiul de caz, metoda în detaliu (1/4)

- **Costul** (ec. 4, 7)
  - π_t: ponderile activelor riscante
  - $1 - 1^\top \pi_t$: ponderea activului fără risc
  - $g_t = \mathrm{diag}((1 + r_t^f + r_t)/(1 + g_t^w))$ (ec. 6)
  - r_t^f: rata fără risc, r_t: randamentele activelor, g_t^w: creșterea averii
  - $\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}(0{,}2/V_i)$, V_i: volumul zilnic mediu în dolari pe 6 luni
  - tranzacționarea a 1% din V_i modifică prețul cu 0,1% (ec. 35, Frazzini, Israel & Moskowitz (2018))

înapoi

Studiul de caz, metoda în detaliu (2/4)

- **Regula optimă** (Propoziția 3): $\pi_t = m\, g_t \pi_{t-1} + (\mathrm{I} - m) A_t$, care generalizează Gârleanu & Pedersen (2013)
  - A_t: o sumă ponderată a portofoliilor Markowitz de azi și a celor viitoare așteptate
  - m rezolvă ec. (14)
- **Portfolio-ML** (Propoziția 4, ec. 40): $A_t = \mathrm{diag}(1/\sigma_{i,t})\, f(s_t)\beta$
  - $\sigma_{i,t}$: volatilitatea activului i
  - f: p caracteristici Fourier aleatoare ale semnalelor s_t
  - $\hat{\beta} = (E_T[\tilde{\Sigma}_t] + \lambda \mathrm{I})^{-1} E_T[\tilde{r}_{t+1}]$: o regresie ridge ($\lambda$: penalizarea)
  - ea maximizează în formă închisă utilitatea netă de costuri (ec. 24–26)
  - învață direct ponderile, ca Brandt, Santa-Clara & Valkanov (2009), care însă ignoră costurile

Înapoi

Studiul de caz, metoda în detaliu (3/4)

- **Date** (Secțiunea 5.1): acțiuni ordinare din SUA cu capitalizarea peste mediana NYSE (184–805 acțiuni)
  - 115 caracteristici din Jensen, Kelly & Pedersen (2023), ordonate în $[0, 1]$
  - decembrie 1952 – decembrie 2020, în afara eșantionului 1981–2020, lunar
- **Covarianța $\boldsymbol{\Sigma}$**: 13 teme de caracteristici și 12 industrii ca factori
  - ponderi exponențiale cu timpi de înjumătățire de 378 de zile (corelații) și 126 de zile (variațe)
  - investitorul: $\gamma = 10$, avere de 10 miliarde \$ la sfîrșitul lui 2020
  - averea crește odată cu piața (Secțiunea 5.1.3)

Înapoi

Studiul de caz, metoda în detaliu (4/4)

- **Calibrare** (Tabelul 1), aleasă anual după utilitatea backtest-urilor de validare din 1971
  - $\lambda \in \{0, e^{-10}, e^{-9,8}, \ldots, e^{10}\}$, $p \in \{2^6, \ldots, 2^9\}$, $\eta \in \{e^{-3}, e^{-2}\}$
  - η: abaterea standard a ponderilor aleatoare
- **Reguli concurente** („*" marchează un nivel suplimentar de calibrare, Secțiunea 5.3)
  - Markowitz-ML (ec. 32), Static-ML (cost pe o perioadă, ec. 34), Multiperiod-ML (prognoze pentru 12 orizonturi, ec. 22)
  - sortări pe factori, 1/N, varianță minimă, piața

Înapoi

Studiul de caz, rezultatele complete (1/2)

- **Tabelul 2**: turnover-ul Portfolio-ML este 0,25 pe lună
- Portfolio-ML nu are nevoie de un al doilea nivel de calibrare
  - spre deosebire de Static-ML* și Multiperiod-ML*
- **Tabelul 3**: probabilitatea a posteriori ca Portfolio-ML să aibă utilitatea mai mare
  - 99,9% față de Static-ML* și Multiperiod-ML*, 100% față de Markowitz-ML
- **Figura 1(B)** (Secțiunea 6.2), $\gamma = 10$: dimensiunea portofoliului generează costuri
  - cu 10 miliarde \$, randament net în exces 14,6% la volatilitatea de 11%
  - cu 1 miliard \$, randamentul net în exces este 16,3%

Înapoi

Studiul de caz, rezultatele complete (2/2)

- **Figura 5**: net de costuri, calitatea este tema cea mai importantă
  - reversal-ul pe termen scurt este aproape irelevant
  - autocorelația lunară $-0{,}04$ pentru reversal-ul de o lună, $0{,}94$ pentru book-to-market (Secțiunea 6.3)
  - semnalele persistente generează costuri de tranzacționare mici
- **Limite declarate de autori**
  - comisioane și alte fricțiuni
  - putere de calcul și metode ML indisponibile în timp real la începutul eșantionului (Secțiunea 6.1)
  - costurile și riscul considerate constante pe orizontul fiecărei optimizări (Secțiunea 5.1.3)
  - pe cele mai mici 20% dintre acțiuni, Portfolio-ML obține rezultate inferioare față de Multiperiod-ML* și Static-ML* (Figura 8)

înapoi

Studiul de caz, replicarea din curs (1/2)

- **Datele cursului**: 14 acțiuni din SUA și 9 ETF-uri sectoriale
  - regula de cost, γ, averea și grila sînt cele din articol
  - cinci semnale: randamentul logaritmic pe o lună, momentum logaritmic de la $t-6$ și de la $t-12$ la $t-1$
  - și volatilitatea pe un an, volumul în dolari pe 6 luni (formulele în Seminarul 4, C3)
  - $\boldsymbol{\Sigma}$ cu aceleași ponderi exponențiale
  - validarea începe în 2011
- **Portfolio-ML**: cost 0,6% pe an, levier 0,32
- Utilitatea netă: Static-ML $-0{,}13$, varianța minimă $-0{,}72$
  - Markowitz-ML: extrem de negativă (levier 18)
- **Probabilitatea** unei utilități mai mari pentru Portfolio-ML: aproximare Normală i.i.d., condiționată de procedura estimată, nu probabilitate a posteriori exactă
  - 99,5% față de Static-ML, 99,9% față de varianța minimă, 93,4% față de 1/N
- Diferența de utilitate anuală, cu interval HAC de 95%
  - față de 1/N: 0,28 [$-0{,}18$; 0,73]; față de Static-ML: 0,15 [$-0{,}001$; 0,30]; față de varianța minimă: 0,74 [0,25; 1,23]

Înapoi

Studiul de caz, replicarea din curs (2/2)

- Regulile care țin cont de costuri le domină pe cele care le ignoră, ca în Tabelul 2
  - avantajul Portfolio-ML provine din poziții mici, ajustate lent, nu dintr-un Sharpe brut mai mare (0,68 față de 0,87 pentru 1/N)
- **Limite**
  - 23 de active în loc de 184–805
  - cinci semnale în loc de 115
  - fără model factorial pentru $\mathbf{\Sigma}$, a cărui fereastră ajunge la 10 ani abia în august 2014 (prețuri comune din august 2004)
  - prognoze de randament cu $p \geq 2^6$ și trei ani de validare în loc de zece
  - fără regulile concurente marcate cu stea
- **Extindere deschisă** (Seminarul 4, C3)
  - frontiere implementabile pentru averi de 1, 10 și 100 de miliarde \$ și $\gamma \in \{1, 5, 10, 20, 100\}$
  - costurile lui 1/N calculate la fiecare nivel de avere

Înapoi

Bucla descoperirii, prompturi reutilizabile (1/2)

- Instrumentele sînt interschimbabile
  - un asistent AI (Claude, ChatGPT, Gemini, GitHub Copilot)
  - motoare de căutare a literaturii (Semantic Scholar, Elicit, Google Scholar)
- **Literatură**
  - *„Enumeră studiile publicate în reviste cu evaluare inter pares din 2015 încoace care compară regulile cu shrinkage sau bazate pe risc cu 1/N out-of-sample; pentru fiecare dă DOI, N, T, ipoteza de cost și testul."*
  - Verificați fiecare DOI în Crossref și deschideți tabelul citat
- **Ipoteze**
  - *„Dă trei explicații concurente pentru un cîștig de Sharpe față de 1/N (o Σ mai bună, o primă de volatilitate redusă, noroc) și implicația testabilă a fiecăreia pentru turnover, subperioade și expunerile la factori."*
- **Date și cod**
  - *„Scrie cod Python care citește prețurile zilnice din datele cursului, aliniază prețurile pe zilele comune și rulează GMV-LW și 1/N cu o fereastră mobilă de 60 de luni; ponderile de la t pot folosi date doar pînă la $t-1$."*
  - Replicați întîi: 1/N 0,76, GMV-LW 0,20 pe universul combinat

înapoi

Bucla descoperirii, prompturi reutilizabile (2/2)

- **Robustețe**
  - *„Scrie o preînregistrare: familia de teste (reguli × universuri × ferestre × costuri), rata de eroare (FWER sau FDR), subperioadele și un placebo, fixate înainte de a vedea vreun rezultat.”*
- **Critică**
  - *„Joacă rolul unui recenzent sever: dă cele mai puternice trei motive pentru care cîștigul meu de Sharpe ar putea fi aparent și testul care l-ar demasca pe fiecare.”*
- **Raport**: fiecare specificație încercată, valori p ajustate, puterea testului, codul și seed-urile
- Orice specificație aleasă după ce ați văzut rezultatele este exploratorie

înapoi

Răspunsurile la verificările rapide (1/2)

- **Trei reguli**: $s_{11} = 0{,}09$, $s_{22} = 0{,}0225$, $s_{12} = 0{,}2 \times 0{,}30 \times 0{,}15 = 0{,}009$
  - GMV: $w_1 = (0{,}0225 - 0{,}009)/(0{,}09 + 0{,}0225 - 0{,}018) = 1/7$, volatilitate 14,3%
  - ERC (inversul volatilității): $w_1 = 1/3$, volatilitate 15,5%; 1/N: 18,1%
  - 1/N: $w_1(\mathbf{\Sigma w})_1 = 0{,}5 \times 0{,}0495 = 0{,}02475$ din $\sigma_p^2 = 0{,}0326$
  - activul 1 aduce 76% din risc cu 50% din pondere
- **Sharpe estimat direct**: θ^2 lunar $= 0{,}25/12 = 0{,}0208$
  - $(120 \times 0{,}0208 + 4)/(120 - 6) = 0{,}0570$
  - $\sqrt{12 \times 0{,}0570} = 0{,}83$ pe an, față de 0,50 adevărat
- **Banda de zgomot**: $c = 10/40 = 0{,}25$, banda $[(1 - 0{,}5)^2; (1 + 0{,}5)^2] = [0{,}25; 2{,}25]$
  - 2,0 este în interior, deci această comparație nu o poate separa de zgomot

înapoi

Răspunsurile la verificările rapide (2/2)

- **O opinie**: precizii egale dau ponderea opiniei $0{,}0009/(0{,}0009 + 0{,}0009) = 0{,}5$
  - media a posteriori 7%
  - cu $\Omega = 0{,}0003$, ponderea $0{,}0009/0{,}0012 = 0{,}75$, media a posteriori $4\% + 0{,}75 \times 6\% = 8{,}5\%$
- **Un raport Sharpe**: $\mathrm{SE} = \sqrt{(1 + 0{,}15^2/2)/120} = 0{,}092$
  - anual $0{,}52 \pm 1{,}96 \times 0{,}32$, intervalul $[-0{,}10; 1{,}14]$: nesemnificativ
- **Patru teste**
  - Holm 0,016; 0,060; 0,060; 0,300: o respingere
  - Benjamini–Hochberg 0,016; 0,040; 0,040; 0,300: trei respingeri

înapoi

Cursuri, cod și date

Cursuri avansate pe quantinar.com

- Hierarchical Clustering
- Minimum Spanning Tree
- Multivariate Statistical Analysis

Cod și date

- Toate graficele și tabelele: github.com/danpele/MFM/tree/main/Quantlets/Ch_04
- Rata fără risc: Kenneth French Data Library

Înapoi

Bibliografie (1/6)

- Andrews, D.W.K. (1991). Heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix estimation. *Econometrica*, 59(3), 817–858.
- Andrews, D.W.K., Monahan, J.C. (1992). An improved heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix estimator. *Econometrica*, 60(4), 953–966.
- Bailey, D.H., López de Prado, M. (2014). The deflated Sharpe ratio: correcting for selection bias, backtest overfitting, and non-normality. *Journal of Portfolio Management*, 40(5), 94–107.
- Barroso, P., Detzel, A. (2021). Do limits to arbitrage explain the benefits of volatility-managed portfolios?. *Journal of Financial Economics*, 140(3), 744–767.
- Benjamini, Y., Hochberg, Y. (1995). Controlling the false discovery rate: a practical and powerful approach to multiple testing. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, 57(1), 289–300.
- Best, M.J., Grauer, R.R. (1991). On the sensitivity of mean-variance-efficient portfolios to changes in asset means: some analytical and computational results. *Review of Financial Studies*, 4(2), 315–342.
- Black, F., Litterman, R. (1992). Global portfolio optimization. *Financial Analysts Journal*, 48(5), 28–43.
- Bodnar, T., Parolya, N., Schmid, W. (2018). Estimation of the global minimum variance portfolio in high dimensions. *European Journal of Operational Research*, 266(1), 371–390.
- Brandt, M.W., Santa-Clara, P., Valkanov, R. (2009). Parametric portfolio policies: exploiting characteristics in the cross-section of equity returns. *Review of Financial Studies*, 22(9), 3411–3447.
- Britten-Jones, M. (1999). The sampling error in estimates of mean-variance efficient portfolio weights. *Journal of Finance*, 54(2), 655–671.
- Chopra, V.K., Ziemba, W.T. (1993). The effect of errors in means, variances, and covariances on optimal portfolio choice. *Journal of Portfolio Management*, 19(2), 6–11.

Bibliografie (2/6)

- Cederburg, S., O'Doherty, M.S., Wang, F., Yan, X.S. (2020). On the performance of volatility-managed portfolios. *Journal of Financial Economics*, 138(1), 95–117.
- Choueifaty, Y., Coignard, Y. (2008). Toward maximum diversification. *Journal of Portfolio Management*, 35(1), 40–51.
- DeMiguel, V., Garlappi, L., Nogales, F.J., Uppal, R. (2009). A generalized approach to portfolio optimization: improving performance by constraining portfolio norms. *Management Science*, 55(5), 798–812.
- DeMiguel, V., Garlappi, L., Uppal, R. (2009). Optimal versus naive diversification: how inefficient is the 1/N portfolio strategy?. *Review of Financial Studies*, 22(5), 1915–1953.
- DeMiguel, V., Martín-Utrera, A., Uppal, R. (2024). A multifactor perspective on volatility-managed portfolios. *Journal of Finance*, 79(6), 3859–3891.
- Dragotă, M., Şerbănescu, C.I., Pele, D.T. (2008). Portfolio diversification and market share analysis for Romanian insurance companies. În *Risk Management and Value*, World Scientific, 277–298.
- Fan, J., Liao, Y., Mincheva, M. (2013). Large covariance estimation by thresholding principal orthogonal complements. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, 75(4), 603–680.
- Franke, J., Härdle, W.K., Hafner, C.M. (2019). Statistics of Financial Markets: An Introduction, ed. a 5-a. Springer.
- Frazzini, A., Israel, R., Moskowitz, T.J. (2018). Trading costs. SSRN Working Paper 3229719.
- Frost, P.A., Savarino, J.E. (1988). For better performance: constrain portfolio weights. *Journal of Portfolio Management*, 15(1), 29–34.
- Gârleanu, N., Pedersen, L.H. (2013). Dynamic trading with predictable returns and transaction costs. *Journal of Finance*, 68(6), 2309–2340.
- Härdle, W.K., Simar, L. (2019). Applied Multivariate Statistical Analysis, ed. a 5-a. Springer.

Bibliografie (3/6)

- Harvey, C.R., Liu, Y. (2015). Backtesting. *Journal of Portfolio Management*, 42(1), 13–28.
- He, G., Litterman, R. (2002). The intuition behind Black-Litterman model portfolios. SSRN Working Paper 334304.
- Jagannathan, R., Ma, T. (2003). Risk reduction in large portfolios: why imposing the wrong constraints helps. *Journal of Finance*, 58(4), 1651–1683.
- Jensen, T.I., Kelly, B., Malamud, S., Pedersen, L.H. (2026). Machine learning and the implementable efficient frontier. *Review of Financial Studies*, 39(10), 3035–3078.
- Jensen, T.I., Kelly, B., Pedersen, L.H. (2023). Is there a replication crisis in finance?. *Journal of Finance*, 78(5), 2465–2518.
- Jobson, J.D., Korkie, B.M. (1981). Performance hypothesis testing with the Sharpe and Treynor measures. *Journal of Finance*, 36(4), 889–908.
- Jorion, P. (1986). Bayes-Stein estimation for portfolio analysis. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 21(3), 279–292.
- Kan, R., Wang, X., Zhou, G. (2022). Optimal portfolio choice with estimation risk: no risk-free asset case. *Management Science*, 68(3), 2047–2068.
- Kan, R., Zhou, G. (2007). Optimal portfolio choice with parameter uncertainty. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 42(3), 621–656.

Bibliografie (4/6)

- Künsch, H.R. (1989). The jackknife and the bootstrap for general stationary observations. *Annals of Statistics*, 17(3), 1217–1241.
- Laloux, L., Cizeau, P., Bouchaud, J.-P., Potters, M. (1999). Noise dressing of financial correlation matrices. *Physical Review Letters*, 83(7), 1467–1470.
- Ledoit, O., Wolf, M. (2003). Improved estimation of the covariance matrix of stock returns with an application to portfolio selection. *Journal of Empirical Finance*, 10(5), 603–621.
- Ledoit, O., Wolf, M. (2004a). A well-conditioned estimator for large-dimensional covariance matrices. *Journal of Multivariate Analysis*, 88(2), 365–411.
- Ledoit, O., Wolf, M. (2004b). Honey, I shrunk the sample covariance matrix. *Journal of Portfolio Management*, 30(4), 110–119.
- Ledoit, O., Wolf, M. (2008). Robust performance hypothesis testing with the Sharpe ratio. *Journal of Empirical Finance*, 15(5), 850–859.
- Ledoit, O., Wolf, M. (2017). Nonlinear shrinkage of the covariance matrix for portfolio selection: Markowitz meets Goldilocks. *Review of Financial Studies*, 30(12), 4349–4388.
- Ledoit, O., Wolf, M. (2020). Analytical nonlinear shrinkage of large-dimensional covariance matrices. *Annals of Statistics*, 48(5), 3043–3065.
- Lo, A.W. (2002). The statistics of Sharpe ratios. *Financial Analysts Journal*, 58(4), 36–52.

Bibliografie (5/6)

- López de Prado, M. (2016). Building diversified portfolios that outperform out of sample. *Journal of Portfolio Management*, 42(4), 59–69.
- Maillard, S., Roncalli, T., Teïletche, J. (2010). The properties of equally weighted risk contribution portfolios. *Journal of Portfolio Management*, 36(4), 60–70.
- Mantegna, R.N. (1999). Hierarchical structure in financial markets. *European Physical Journal B*, 11(1), 193–197.
- Marčenko, V.A., Pastur, L.A. (1967). Distribution of eigenvalues for some sets of random matrices. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1(4), 457–483.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7(1), 77–91.
- Merton, R.C. (1972). An analytic derivation of the efficient portfolio frontier. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 7(4), 1851–1872.
- Merton, R.C. (1980). On estimating the expected return on the market: an exploratory investigation. *Journal of Financial Economics*, 8(4), 323–361.
- Michaud, R.O. (1989). The Markowitz optimization enigma: is 'optimized' optimal?. *Financial Analysts Journal*, 45(1), 31–42.
- Moreira, A., Muir, T. (2017). Volatility-managed portfolios. *Journal of Finance*, 72(4), 1611–1644.
- Okhrin, Y., Schmid, W. (2006). Distributional properties of portfolio weights. *Journal of Econometrics*, 134(1), 235–256.

Bibliografie (6/6)

- Pele, D.T. (2023). Robust Markowitz for crypto-assets. Curs Quantinar, Academia de Studii Economice din București.
- Pele, D.T., Wesselhöfft, N., Härdle, W.K., Kolossiatis, M., Yatracos, Y.G. (2023). Are cryptos becoming alternative assets?. *The European Journal of Finance*, 29(10), 1064–1105.
- Petukhina, A., Trimborn, S., Härdle, W.K., Elendner, H. (2021). Investing with cryptocurrencies – evaluating their potential for portfolio allocation strategies. *Quantitative Finance*, 21(11), 1825–1853.
- Politis, D.N., Romano, J.P. (1994). The stationary bootstrap. *Journal of the American Statistical Association*, 89(428), 1303–1313.
- Sharpe, W.F. (1966). Mutual fund performance. *Journal of Business*, 39(S1), 119–138.
- Theil, H., Goldberger, A.S. (1961). On pure and mixed statistical estimation in economics. *International Economic Review*, 2(1), 65–78.
- Tobin, J. (1958). Liquidity preference as behavior towards risk. *Review of Economic Studies*, 25(2), 65–86.
- Tu, J., Zhou, G. (2011). Markowitz meets Talmud: a combination of sophisticated and naive diversification strategies. *Journal of Financial Economics*, 99(1), 204–215.
- Date: Kenneth R. French Data Library, mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data_library.html.

Acronime folosite în acest material (1/4)

- **AI**: Artificial Intelligence — *inteligență artificială*
- **BET**: Bucharest Exchange Trading (index) — *indicele de referință al Bursei de Valori București*
- **BET-TR**: BET Total Return (index) — *indicele BET cu dividendele reinvestite*
- **BVB**: Bursa de Valori București
- **CAPM**: Capital Asset Pricing Model — *modelul de evaluare a activelor financiare*
- **DSR**: Deflated Sharpe Ratio — *raportul Sharpe deflatat*
- **ERC**: Equal Risk Contribution portfolio — *portofoliul cu contribuții egale la risc*
- **ETF**: Exchange-Traded Fund — *fond tranzacționat la bursă*
- **FDR**: False Discovery Rate — *rata descoperirilor false*
- **FWER**: Family-Wise Error Rate — *probabilitatea de cel puțin o eroare de tip I în familia de teste*
- **GLS**: Generalised Least Squares — *metoda celor mai mici pătrate generalizate*
- **GMV**: Global Minimum-Variance portfolio — *portofoliul de variață minimă globală*
- **GMV-LO**: Global Minimum-Variance portfolio, Long-Only — *portofoliul de variață minimă globală, doar poziții long*
- **GMV-LW**: Global Minimum-Variance portfolio with Ledoit–Wolf covariance — *portofoliul de variață minimă globală cu covarianța Ledoit–Wolf*
- **HAC**: Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent (standard errors) — *erori standard robuste la heteroscedasticitate și autocorelație*

Acronime folosite în acest material (2/4)

- **HRP**: Hierarchical Risk Parity — *paritatea ierarhică a riscului*
- **HYG**: iShares iBoxx High Yield Corporate Bond ETF — *ETF de obligațiuni corporative americane cu randament ridicat, sub rating investițional*
- **IEF**: iShares 7–10 Year Treasury Bond ETF — *ETF de obligațiuni de stat americane cu scadența 7–10 ani*
- **LO**: Long-Only, no short sales — *doar poziții long, fără vînzări în lipsă*
- **LQD**: iShares iBoxx Investment Grade Corporate Bond ETF — *ETF de obligațiuni corporative americane cu rating investițional*
- **ML**: Machine Learning — *învățare automată*
- **MV**: Mean–Variance tangency portfolio estimated from sample moments — *portofoliul tangent medie–varianță estimat din momentele de eșantion*
- **MV-LO**: Mean–Variance tangency portfolio, Long-Only — *portofoliul tangent medie–varianță, doar poziții long*
- **NYSE**: New York Stock Exchange — *Bursa din New York*
- **OLS**: Ordinary Least Squares — *metoda celor mai mici pătrate*
- **OMV**: Österreichische Mineralölverwaltung — *Administrația austriacă a uleiurilor minerale (grupul OMV)*
- **OOS**: Out-Of-Sample — *evaluare pe date ulterioare estimării*
- **POET**: Principal Orthogonal complEment Thresholding — *estimatorul prin prag aplicat complementului ortogonal al componentelor principale*
- **SUA**: Statele Unite ale Americii

Acronime folosite în acest material (3/4)

- **BH**: Benjamini–Hochberg — *procedura Benjamini–Hochberg de control al FDR*
- **CFW**: Conditional Fixed-Weight multifactor portfolio — *portofoliul multifactor condițional cu ponderi relative fixe*
- **CMV**: Conditional Mean–Variance multifactor portfolio — *portofoliul multifactor medie–variață condiționat de volatilitatea pieței*
- **DOI**: Digital Object Identifier — *identificatorul permanent al unei publicații*
- **i.i.d.**: independent and identically distributed — *independente și identic distribuite*
- **LW**: Ledoit–Wolf — *estimatorul de covariață cu shrinkage Ledoit–Wolf*
- **QS**: Quadratic Spectral (kernel) — *nucleul pătratic-spectral*
- **RON**: leul românesc
- **SE**: Standard Error — *eroarea standard*
- **SR**: Sharpe Ratio — *raportul Sharpe*
- **UMV**: Unconditional Mean–Variance multifactor portfolio — *portofoliul multifactor medie–variață necondiționat*
- **USD**: dolarul american

Acronime folosite în acest material (4/4): simbolurile activelor

- **SPY**: SPDR S&P 500 ETF Trust — *ETF pe indicele S&P 500*
- **EFA**: iShares MSCI EAFE ETF — *acțiuni din țări dezvoltate, fără SUA și Canada*
- **EEM**: iShares MSCI Emerging Markets ETF — *acțiuni din piețe emergente*
- **TLT**: iShares 20+ Year Treasury Bond ETF — *titluri de stat SUA cu scadența peste 20 de ani*
- **GLD**: SPDR Gold Shares — *ETF pe aur*
- **XLB**, **XLE**, **XLF**, **XLI**, **XLK**: Select Sector SPDR — *materiale, energie, financiar, industrie, tehnologie*
- **XLP**, **XLU**, **XLV**, **XLY**: Select Sector SPDR — *bunuri de consum de bază, utilități, sănătate, consum discreționar*
- **TLV**: Banca Transilvania
- **SNP**: OMV Petrom
- **BRD**: BRD–Groupe Société Générale
- **TGN**: Transgaz
- **SNG**: Romgaz
- **SNN**: Nuclearelectrica
- **EL**: Electrica
- **TEL**: Transelectrica