








Modelarea piețelor financiare

Capitolul 5: Modele de volatilitate condiționată



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București
IDA Institute Digital Assets
Blockchain Research Center
AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance
Academia Română, Institutul de Prognoză Economică
MSCA Digital Finance

Putem prognoza volatilitatea condiționată?



Robert F. Engle. **Foto: Jon Demske (2022); CC BY-SA 4.0; Wikimedia Commons**

"These are mean zero, serially uncorrelated processes with nonconstant variances conditional on the past, but constant unconditional variances. For such processes, the recent past gives information about the one-period forecast variance."

— *Engle (1982)*

- S&P 500 (*Standard & Poor's*): autocorelația de ordinul 1 este $-0{,}099$ pentru randamentele zilnice și 0,313 pentru pătratele lor
  - semnul unui randament este aproape imprevizibil, mărimea lui nu
- Testele ARCH (*autoregressive conditional heteroskedasticity*) resping dispersia constantă pe toate cele șase piețe ale capitolului
  - S&P 500: $Q(10)$ pe r_t^2 este 6 135, față de valoarea critică 18,3 la 5%
- GARCH(1,1), modelul ARCH generalizat, cu inovații Student-t: persistența $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 0{,}9948$ și timpul de înjumătățire 132 de zile pentru S&P 500
  - la Bitcoin și EUR (moneda euro)/RON estimarea atinge frontiera $\alpha + \beta = 1$: în model, șocurile nu se disipă niciodată
- În afara eșantionului (*out-of-sample*), 2016–2026 (2 693 de prognoze pe o zi pentru S&P 500): GARCH(1,1)-t are o pierdere QLIKE (*quasi-likelihood*) mai mică decît EWMA (media mobilă ponderată exponențial) și decît media lui r^2 pe ultimele 20 de zile
  - statisticile Diebold–Mariano: $t = 3{,}47$ și 4,10

▸ Graficul contra': Prognoze în afara eșantionului: schema și traiectoriile, 2016–2026

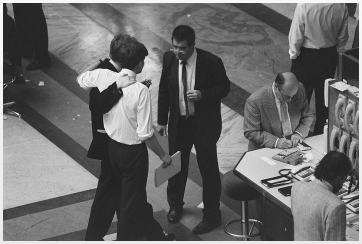
Ideea capitolului

- ARCH (*AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity*): dispersia depinde de șocurile trecute
- Materia de bază
  - Gruparea volatilității și testele ARCH
  - Recursia GARCH, persistența și timpul de înjumătățire
  - Estimarea cu inovații Student-t
  - Prognozele
  - Asimetria (GJR, EGARCH)
  - Diagnosticul reziduurilor
  - Evaluarea prognozelor: QLIKE, Mincer–Zarnowitz, Diebold–Mariano
- Inferență dincolo de modelul de bază
  - Teoria asimptotică a QMLE (*Quasi-Maximum Likelihood Estimator*, cvasi-verosimilitate maximă), metoda delta lîngă $\alpha + \beta = 1$, teste la frontieră, teste corectate pe reziduuri, Giacomini–White, Model Confidence Set
- Două secțiuni de cercetare
  - Un model de volatilitate bazat pe un cvasi-scor
  - O buclă de descoperire asistată de inteligența artificială (AI)
- Exemple detaliate și subiecte avansate: Aprofundări, după Concluzii

Rezultatele învățării

- derivați dispersia de termen lung, kurtosis-ul și timpul de înjumătățire ale GARCH(1,1)
- calculați prognoze ale dispersiei pe mai multe zile și teste LR (*Likelihood Ratio*, testul raportului de verosimilitate) la frontieră
- interpretați estimările GARCH, GJR și EGARCH pe șase piețe
- interpretați comparațiile în afara eșantionului cu QLIKE, DM (testul Diebold–Mariano de comparare a prognozelor) și Model Confidence Set
- Aprofundări și Anexa: lectură pentru familiarizare

Episoade de volatilitate ridicată

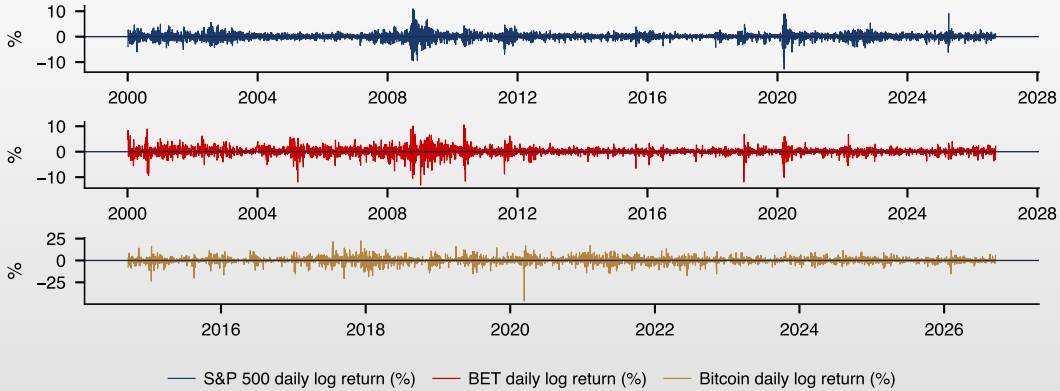


Bursa din Amsterdam, 21 octombrie 1987, după crahul din 19 octombrie

Foto: Bart Molendijk / Anefo (1987); CC0; Wikimedia Commons

- Crahurile nu se limitează la zile izolate: variațiile mari sînt urmate de variații mari
  - „Schimbările mari tind să fie urmate de schimbări mari, de orice semn” Mandelbrot (1963)
- Această **grupare a volatilității** (*volatility clustering*) este faptul stilizat 6 din Capitolul 1
- Volatilitatea intervine în calculul
  - Value at Risk (Capitolul 7)
  - ponderilor portofoliului (Capitolul 4)
  - prețurilor opțiunilor
- Pe lîngă prognoză: putem evalua corect incertitudinea ei?

Gruparea volatilității pe orice piață



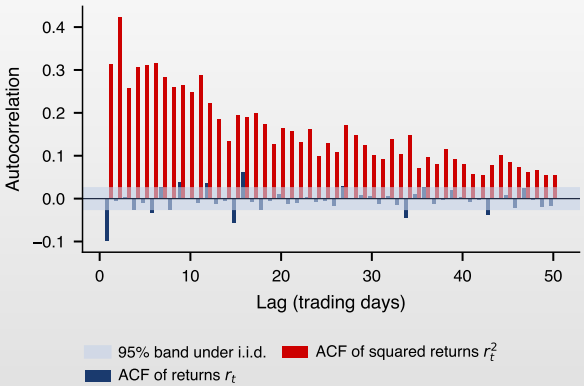
MFM_ch5_arch_effects ▶ Interactiv

Calendarul și episoadele de volatilitate

- Randamente logaritmice zilnice $r_t = 100\,(\ln P_t - \ln P_{t-1})$ în %, închideri pînă la 18 septembrie 2026
  - P_t: prețul (nivelul indicelui) la închiderea zilei t
- Șase serii, alese pentru regimuri de piață diferite
  - S&P 500 (piața de referință globală) și BET (piața locală), din 2000
  - BET-TR (BET cu dividendele reinvestite), din 2014
  - Bitcoin (BTC), din 17 septembrie 2014, cu toate cele 7 zile ale săptămînii
  - EUR/RON (cursul de referință BNR, regim de flotare controlată, *managed float*), din 2005
  - Aurul (XAU/USD), activ de refugiu, din 2000
- Indici bursieri și aur: doar zilele lucrătoare
  - Regulă euristică: un rînd care repetă închiderea precedentă și nu arată tranzacții (volum raportat zero, open = high = low = close sau o copie a rîndului precedent) este tratat ca zi completată de furnizor
  - Astfel de rînduri se elimină, cu motivul păstrat, și se verifică în calendarul bursei; o închidere care chiar nu s-a schimbat (randament zero) se păstrează
  - Un volum lipsă nu este tratat ca volum zero
  - Zile eliminate: 0 la S&P 500, BET și BET-TR, 7 la aur
- Pe grafic (S&P 500, BET, Bitcoin), perioadele calme alternează cu luni de volatilitate ridicată
  - 2008, martie 2020, aprilie 2025

MFM_ch5_arch_effects

Predictibilitatea semnului și a mărimii randamentelor



- Autocorelația de selecție la lagul k: $\hat{\rho}_k = \widehat{\text{Corr}}(x_t, x_{t-k})$, calculată pentru $x_t = r_t$ și $x_t = r_t^2$
  - Banda $\pm 1{,}96/\sqrt{n}$ (n: numărul de randamente): intervalul de 95% al lui $\hat{\rho}_k$ dacă seria ar fi i.i.d.
- S&P 500, lagul 1: $-0{,}099$ pentru r_t, 0,313 pentru r_t^2
- La r_t, 15 din 50 de autocorelații ies din banda $\pm 0{,}024$, dar toate sînt mici
- La r_t^2, toate cele 50 ies din bandă
- Cozi groase: exces de kurtosis (kurtosis minus 3) 10,7 (S&P 500), 11,1 (BET), 12,0 (Bitcoin)
  - Kurtosis-ul presupune moment de ordin patru finit, pus sub semnul întrebării în Capitolul 1
- Mărimea modelată: $\sigma_t^2 = \text{Var}(r_t \mid \mathcal{F}_{t-1})$, cu $\mathcal{F}_{t-1}$ informația de la închiderea zilei $t-1$

MFM_ch5_arch_effects ▶ Interactiv

Testarea efectelor ARCH (1/2): cele două teste

- H_0: fără gruparea volatilității, $\mathrm{Var}(r_t \mid \mathcal{F}_{t-1})$ constantă
- Ambele teste caută autocorelație în pătratele randamentelor
- **McLeod–Li** McLeod & Li (1983): statistica Ljung–Box aplicată lui r_t^2
  - $Q(m) = n(n+2)\sum_{k=1}^{m} \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k}$
  - $\hat{\rho}_k$: autocorelația lui r_t^2 la lagul k
  - n: volumul eșantionului
  - $m = 10$ laguri: două săptămîni de tranzacționare
  - Măsoară mărimea comună a primelor m autocorelații
  - χ^2_{10} sub H_0
  - Respingem dacă $Q(10) > 18{,}3$ (5%)
- **Testul Lagrange Multiplier (LM) al lui Engle** Engle (1982)
  - Regresăm $\hat{\varepsilon}_t^2$ pe o constantă și pe $\hat{\varepsilon}_{t-1}^2, \ldots, \hat{\varepsilon}_{t-5}^2$ (5 laguri: o săptămînă de tranzacționare)
  - $\hat{\varepsilon}_t = r_t - \bar{r}$: randamentul centrat, $\bar{r}$: media de selecție
  - $LM = nR^2$, cu R^2 coeficientul de determinare al acestei regresii
  - H_0: toate cele cinci pante sînt 0
  - χ^2_5 sub H_0
  - Respingem dacă $LM > 11{,}1$ (5%)
  - Un LM mare înseamnă că pătratele șocurilor trecute le prezic pe cele de azi

Testarea efectelor ARCH (2/2): rezultate

- Toate statisticile sînt mult peste valorile critice (toate $p < 0{,}001$)
  - Gruparea volatilității la acțiuni, Bitcoin, EUR/RON și aur
  - Valorile p (*p-values*) din legea χ^2 cer cel puțin un moment de ordinul patru finit al lui r_t, pe care estimările Hill din Capitolul 1 îl pun sub semnul întrebării
- Efectul cel mai slab, măsurat prin $\hat{\rho}_1(r^2)$, apare la aur (0,110) și Bitcoin (0,137)
- Q și LM cresc cu n, deci nu se compară între serii de lungimi diferite
  - Testele scorului unilaterale: Anexă
- Tipul de dovadă: descriere (arată ce s-a întîmplat în date, fără un test al cauzei)

Serie	$Q(10)$ pe r^2	LM(5)	$\hat{\rho}_1(r^2)$
S&P 500	6 135	1 685	0,313
BET	2 440	982	0,330
BET-TR	714	371	0,171
Bitcoin	213	115	0,137
EUR/RON	2 420	871	0,342
Aur	745	331	0,110

MFM_ch5_arch_effects

Modelul ARCH al lui Engle (1982)

- Cadrul: $r_t = \mu + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$, inovațiile z_t i.i.d. cu media 0 și dispersia 1
  - μ: randamentul mediu
  - ε_t: șocul (partea neașteptată a randamentului)
  - σ_t: volatilitatea condiționată
  - Dispersia condiționată $\sigma_t^2 = \mathrm{Var}(r_t \mid \mathcal{F}_{t-1})$
  - Dispersia necondiționată $\sigma^2 = \mathbb{E}\sigma_t^2$
- **ARCH**(q) Engle (1982)
  - Dispersia de azi este o constantă plus o sumă ponderată a pătratelor ultimelor q șocuri
  - $\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2$
  - q: numărul de laguri
  - ω: nivelul minim al dispersiei
  - α_i: ponderea șocului de acum i zile
  - $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0$: dispersia este mereu pozitivă
- Un șoc mare ieri (ε_{t-1}^2 mare) crește dispersia de azi
  - Gruparea volatilității rezultă direct din specificația modelului
- ARCH(1): dispersia necondiționată $\sigma^2 = \omega/(1-\alpha_1)$, finită dacă $\alpha_1 < 1$
- Engle a primit Premiul Nobel în 2003 pentru ARCH (istoric: ▸ Anexă)

De la ARCH la GARCH (Bollerslev, 1986)

- GARCH: Generalised AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity
  - Dispersia depinde și de propriul trecut
- Problema ARCH: episoadele de grupare a volatilității din datele reale durează luni
  - Deci q trebuie să fie mare (mulți parametri)
- **GARCH**(1,1) Bollerslev (1986): $\sigma_t^2 = \omega + \alpha\,\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\,\sigma_{t-1}^2$
  - $\omega > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$
  - α: reacția la știri
  - β: memoria dispersiei trecute
- Prin substituții succesive în recursie: $\sigma_t^2 = \frac{\omega}{1-\beta} + \alpha \sum_{j\geq 1} \beta^{j-1} \varepsilon_{t-j}^2$
  - Valabil pentru $\beta < 1$
  - j: vechimea șocului în zile, cu ponderea $\alpha\beta^{j-1}$
  - Un ARCH(∞) cu ponderi descrescătoare geometric, cu doar trei parametri
- GARCH(p,q) adaugă laguri (p laguri ale lui σ^2, q ale lui ε^2)
- În practică GARCH(1,1) este modelul de bază Hansen & Lunde (2005)

Denumirile modelelor și inovațiile

- Numele modelului descrie dinamica dispersiei
  - Sufixul descrie distribuția inovației standardizate
- GARCH-N: GARCH cu inovații din distribuția Normală
- GARCH-t: GARCH cu inovații Student-t, care permit cozi mai groase
- GJR-t (sau GJR-GARCH-t)
  - Dispersie asimetrică Glosten–Jagannathan–Runkle (secțiunea Asimetrie), cu inovații Student-t

GARCH(1,1) ca model ARMA pentru pătratele șocurilor

- Definim $u_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$, surpriza din pătratul șocului ($\mathbb{E}[u_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] = 0$)
- Atunci $\varepsilon_t^2 = \omega + (\alpha + \beta)\,\varepsilon_{t-1}^2 + u_t - \beta\, u_{t-1}$
  - Se obține adunînd u_t în ambii membri ai recursiei GARCH și scriind $\sigma_{t-1}^2 = \varepsilon_{t-1}^2 - u_{t-1}$
  - Un model AutoRegressive Moving Average, ARMA(1,1), în ε_t^2 cu coeficientul autoregresiv $\alpha + \beta$ și coeficientul de medie mobilă $-\beta$
- Consecință: autocorelațiile lui ε_t^2 scad geometric, $\rho_k = \rho_1(\alpha + \beta)^{k-1}$
  - $\rho_k = \mathrm{Corr}(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-k}^2)$: autocorelația pătratelor șocurilor la lagul k
  - $\rho_1 = \alpha(1 - \beta^2 - \alpha\beta)/(1 - \beta^2 - 2\alpha\beta)$ dacă $\mathbb{E}\varepsilon_t^4 < \infty$ (Seminarul 5, A6)
  - S&P 500, GARCH-N estimat prin QMLE Gaussian ($\hat{\alpha} = 0{,}120$, $\hat{\beta} = 0{,}860$): $\rho_1 = 0{,}356$ și $\rho_{10} = 0{,}298$, față de valorile empirice $\hat{\rho}_1 = 0{,}313$ și $\hat{\rho}_{10} = 0{,}248$
- De aceea $\alpha + \beta$ se numește **persistența** volatilității

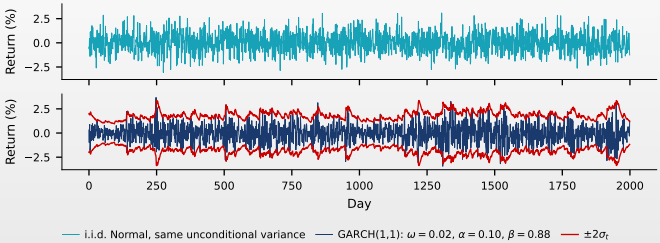
Staționaritatea și dispersia necondiționată

- **Staționaritate în covarianță**: $\alpha + \beta < 1$, caz în care
  - $\sigma^2 = \mathbb{E}[\sigma_t^2] = \dfrac{\omega}{1 - \alpha - \beta}$
- Derivare: luăm media în recursie, $\mathbb{E}\sigma_t^2 = \omega + (\alpha + \beta)\,\mathbb{E}\sigma_{t-1}^2$, și impunem $\mathbb{E}\sigma_t^2 = \mathbb{E}\sigma_{t-1}^2$
- **IGARCH** (Integrated GARCH): $\alpha + \beta = 1$
- Dispersia necondiționată este infinită
  - Totuși, dacă $\alpha > 0$ și z_t^2 este nedegenerat, procesul rămîne **strict** staționar: condiția $\mathbb{E}\ln(\alpha z_t^2 + \beta) < 0$ Nelson (1990) este îndeplinită din inegalitatea lui Jensen, deoarece $\mathbb{E}\ln(\alpha z_t^2 + \beta) < \ln(\alpha + \beta) = 0$
- Notație: σ^2 este dispersia de termen lung a modelului (în Seminarul 5: $\bar{\sigma}^2$), $\hat{\sigma}^2 = \hat{\omega}/(1 - \hat{\alpha} - \hat{\beta})$ estimarea ei
- s^2 este dispersia de selecție a lui r_t
- Fixarea țintei dispersiei (*variance targeting*): $\omega = s^2(1 - \alpha - \beta)$, deci se estimează doar α și β
  - Fixarea dispersiei de termen lung la dispersia de selecție

Momentul de ordin patru și kurtosis-ul

- Cu z_t Normal, kurtosis-ul lui ε_t este $K = \dfrac{3\left[1-(\alpha+\beta)^2\right]}{1-(\alpha+\beta)^2-2\alpha^2}$
  - $K = \mathbb{E}\varepsilon_t^4/(\mathbb{E}\varepsilon_t^2)^2$: 3 pentru distribuția Normală, peste 3 pentru cozi groase
  - K este finit doar dacă $(\alpha+\beta)^2+2\alpha^2<1$ (Seminarul 5, A4)
  - ARCH(1) este cazul $\beta=0$: $K=3(1-\alpha^2)/(1-3\alpha^2)$, finit doar dacă $\alpha<1/\sqrt{3}$: cozi groase chiar cu inovații Normale
- S&P 500, GARCH-N, 2000–2026: $\hat{\alpha}=0{,}120487$, $\hat{\beta}=0{,}860062$
  - $(\hat{\alpha}+\hat{\beta})^2+2\hat{\alpha}^2=0{,}990509$: puțin sub 1, deci $K=12{,}2$
  - kurtosis-ul de selecție al randamentelor: 13,7 (exces de kurtosis 10,7)
- Lîngă frontiera momentelor, K este foarte sensibil la rotunjirea estimărilor (Anexă)
- Gruparea volatilității explică singură o mare parte din cozile groase
- Inovațiile z_t cu cozi groase pot contribui suplimentar; diferența dintre 12,2 și 13,7 nu este o descompunere identificată

Simulare: GARCH produce gruparea volatilității



- Sus: randamente Normale i.i.d.
- Jos: GARCH(1,1) cu $\omega = 0{,}02$, $\alpha = 0{,}10$, $\beta = 0{,}88$
  - Aceeași dispersie necondiționată (1) și benzile $\pm 2\sigma_t$
- Perioadele calme și episoadele de volatilitate ridicată apar doar în traiectoria GARCH
- Inovații Normale, dar randamente cu cozi groase
  - Un amestec de distribuții Normale cu dispersii diferite are cozi groase
  - Kurtosis-ul pe o traiectorie lungă: Anexă

MFM_ch5_garch_simulation ▶ Interactiv

Persistența și timpul de înjumătățire

- Prognoza pe mai mulți pași: $\mathbb{E}[\sigma^2_{t+h} \mid \mathcal{F}_t] = \sigma^2 + (\alpha+\beta)^{h-1}(\sigma^2_{t+1} - \sigma^2)$
  - h: orizontul prognozei, în zile
  - σ^2_{t+1}: dispersia pentru ziua următoare, cunoscută la t
  - Distanța față de dispersia de termen lung scade cu factorul $\alpha+\beta$ în fiecare zi
- **Timpul de înjumătățire**: numărul de zile după care jumătate dintr-un șoc de dispersie a dispărut
  - $(\alpha+\beta)^h = 0{,}5 \;\Rightarrow\; h_{1/2} = \dfrac{\ln 0{,}5}{\ln(\alpha+\beta)}$
- Timpul de înjumătățire: 13,5 zile pentru $\alpha+\beta = 0{,}95$
  - 69 de zile pentru 0,99
  - 138 de zile pentru 0,995
- Schimbări mici ale lui $\alpha+\beta$ lîngă 1 dau timpi de înjumătățire foarte diferiți
  - Incertitudinea estimării contează (secțiunea următoare; Seminarul 5, A2 și B4)

Exemplu numeric: riscul pe mai multe zile după o zi cu volatilitate ridicată

- GARCH(1,1) ilustrativ, neestimat pe date: $\omega = 0{,}04$, $\alpha = 0{,}08$, $\beta = 0{,}90$
  - Persistența $p = \alpha + \beta = 0{,}98$
  - Dispersia de termen lung $\sigma^2 = 0{,}04/0{,}02 = 2$
  - Timpul de înjumătățire $\ln 0{,}5 / \ln 0{,}98 \approx 34{,}3$ zile
- O zi cu volatilitate ridicată: $\sigma^2_{t+1} = 4$, dublul nivelului de termen lung
  - Ziua 2: $\mathbb{E}[\sigma^2_{t+2} \mid \mathcal{F}_t] = 2 + 0{,}98 \times (4 - 2) = 3{,}96$: distanța față de σ^2 scade cu 2% pe zi
- Dispersia pe H zile: o sumă geometrică
  - Șocurile zilnice sînt necorelate
  - Deci dispersia sumei lor este suma prognozelor zilnice ale dispersiei
  - $V_H = \sum_{h=1}^{H} \mathbb{E}[\sigma^2_{t+h} \mid \mathcal{F}_t] = H\sigma^2 + (\sigma^2_{t+1} - \sigma^2)\,\dfrac{1 - p^H}{1 - p}$
  - $H = 5$: $V_5 = 10 + 2 \times (1 - 0{,}98^5)/0{,}02 = 10 + 2 \times 4{,}804 = 19{,}61$
  - Regula rădăcinii pătrate a timpului, $V_H = H\,\sigma^2_{t+1}$ (volatilitatea pe H zile este $\sqrt{H}$ ori cea de o zi), dă $5 \times 4 = 20$, prea mult
- Exercițiu: refaceți calculul pentru $H = 5$ după o zi calmă, $\sigma^2_{t+1} = 1$
  - Răspuns: $V_5 = 10 - 4{,}804 = 5{,}20 > 5$
  - Deci acum regula subestimează, ca în cazul S&P 500 din secțiunea Prognoze

EWMA și IGARCH: fără revenire la medie

- **Exponentially Weighted Moving Average (EWMA)** J.P. Morgan/Reuters (1996)
  - $\sigma_t^2 = \lambda\,\sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda)\,r_{t-1}^2$
  - $\lambda = 0{,}94$ pentru date zilnice și randamente de medie zero
  - $\lambda \in (0,1)$: factorul de descreștere
  - Ponderi $(1-\lambda)\lambda^{j-1}$ pe pătratele randamentelor trecute: zilele recente contează cel mai mult
  - EWMA este un IGARCH(1,1) cu $\omega = 0$, $\alpha = 1-\lambda$, $\beta = \lambda$: niciun parametru de estimat
- Prognozele pe mai mulți pași, la închiderea zilei t, diferă
  - $\mathbb{E}_t[\cdot] = \mathbb{E}[\cdot \mid \mathcal{F}_t]$: media condiționată de informația de la t
  - EWMA: constantă, $\mathbb{E}_t\sigma_{t+h}^2 = \sigma_{t+1}^2$ pentru orice h
  - IGARCH cu $\omega > 0$: crescătoare, $\mathbb{E}_t\sigma_{t+h}^2 = \sigma_{t+1}^2 + (h-1)\,\omega$
  - GARCH staționar: converge spre σ^2 cu rata $\alpha + \beta$
- EWMA servește drept reper în comparația prognozelor

Verosimilitatea maximă

- Maximum Likelihood Estimation (MLE) a parametrilor $\theta = (\mu, \omega, \alpha, \beta)$
- Dat fiind θ, recursia produce $\sigma_1^2(\theta), \ldots, \sigma_n^2(\theta)$
- Log-verosimilitatea Normală: $\ell(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^{n} \left[\ln 2\pi + \ln \sigma_t^2 + \varepsilon_t^2 / \sigma_t^2 \right]$
  - $\varepsilon_t = r_t - \mu$
  - Fiecare zi contribuie cu densitatea lui ε_t condiționată de trecut: verosimilitatea se factorizează în timp
- Fără formulă explicită: optimizare numerică sub restricțiile $\omega > 0$, $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta \leq 1$
  - Pachetul `arch` impune $\alpha + \beta \leq 1$, o mulțime închisă: o estimare poate fi chiar pe frontieră (Bitcoin și EUR/RON în tabelul celor șase piețe)
- Inițializarea: σ_1^2 este o valoare de pornire (*backcast*) din primele pătrate ale reziduurilor, al cărei efect dispare cu rata β
- Scalarea: randamente în %, astfel încît dispersia să fie de ordinul 1
  - EUR/RON are o abatere standard zilnică de circa 0,28%, așa că se estimează pe $10\, r_t$; pe randamentele nescalate, optimizatorul se oprește într-un optim local

Inovații cu cozi groase

- **Student-t** Bollerslev (1987): $z_t = \sqrt{(\nu-2)/\nu}\, t_\nu$, dispersie unitară pentru $\nu > 2$
  - t_ν: o variabilă Student-t standard, cu dispersia $\nu/(\nu-2)$
  - factorul o rescalează la dispersia 1
  - ν (grade de libertate): cu cît ν este mai mic, cu atît cozile sînt mai groase
  - momentul de ordin patru există doar pentru $\nu > 4$
- **t asimetric** Hansen (1994): adaugă un parametru de asimetrie $\lambda \in (-1, 1)$
  - $\lambda < 0$: coada stîngă este mai lungă (pierderile mari mai probabile decît cîștigurile mari)
- **Generalised Error Distribution (GED)** Nelson (1991): densitate $\propto \exp(-\frac{1}{2}|z/\lambda_\nu|^\nu)$
  - $\nu > 0$: parametrul de formă
  - λ_ν: constanta de scală
  - $\nu = 2$: distribuția Normală
  - $\nu = 1$: Laplace
  - $\nu < 2$: cozi mai groase (λ_ν asigură dispersia unitară)

Verosimilitatea Student-t

- Contribuția zilei t la log-verosimilitatea GARCH-t, modelul de bază al capitolului ($\varepsilon_t = r_t - \mu$)

$$\ell_t = \ln \Gamma\left(\tfrac{\nu+1}{2}\right) - \ln \Gamma\left(\tfrac{\nu}{2}\right) - \tfrac{1}{2} \ln[\pi(\nu-2)] - \tfrac{1}{2} \ln \sigma_t^2 - \tfrac{\nu+1}{2} \ln\left(1 + \tfrac{\varepsilon_t^2}{(\nu-2)\sigma_t^2}\right)$$

- Γ: funcția gamma
- $\nu > 2$: gradele de libertate ale inovației cu dispersie unitară
- Cînd $\nu \to \infty$, ℓ_t devine contribuția Normală de pe slide-ul Verosimilitatea maximă
- De ce Student-t: un singur parametru în plus (ν) și cozi groase simetrice

QMLE Gaussian: definiția și consistența

- **QMLE Gaussian** (Quasi-Maximum Likelihood Estimator) Bollerslev & Wooldridge (1992)
  - Maximizăm verosimilitatea Normală chiar dacă z_t nu este Normal
  - $\ell(\theta)$ Normală este folosită drept criteriu, nu ca ipoteză despre legea lui z_t
  - θ_0: valoarea adevărată a parametrilor
  - $\hat{\theta}$: estimarea, punctul de maxim al lui ℓ
- **Consistența** (GARCH(1,1)): $\hat{\theta} \to \theta_0$ cînd $n \to \infty$ Berkes, Horváth & Kokoszka (2003), Francq & Zakoïan (2004)
  - Staționaritate strictă: $\mathbb{E} \ln(\alpha z_t^2 + \beta) < 0$
  - $\alpha_0 > 0$ (altfel β nu este identificat) și $\beta_0 < 1$
  - θ_0 într-o mulțime compactă (închisă și mărginită) de parametri
  - z_t^2 nedegenerat (nu este o constantă)
  - Nicio condiție de moment asupra lui ε_t: consistența are loc și pentru IGARCH

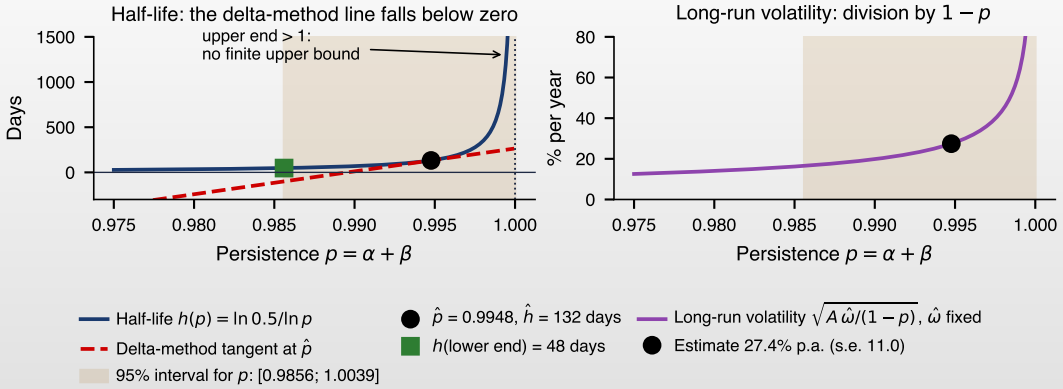
S&P 500: estimările GARCH(1,1)-t

Parametru	Estimare	SE robustă	SE clasică	Raport
ω	0,0157			
α	0,122	0,0107	0,0101	1,06
β	0,872	0,0103	0,0096	1,08
ν	6,25	0,48		
$\alpha + \beta$	0,9948			

- Media $\hat{\mu} = 0{,}079\%$ pe zi
- SE (*Standard Error*): eroarea standard; Raport = SE robustă / SE clasică
- Tabelul complet: Seminarul 5, B1
- $\hat{\beta}$ mare: memoria dispersiei domină
- $\hat{\alpha}$: o reacție moderată la știri
- $\hat{\nu} = 6{,}25$: cozi mult mai groase decît la distribuția Normală
- Timpul de înjumătățire: 132 de zile
- Volatilitatea de termen lung $\sqrt{251{,}5\,\hat{\omega}/(1-\hat{\alpha}-\hat{\beta})} = 27{,}4\%$ anual
  - $A = 251{,}5$ randamente pe an
  - Peste valoarea din eșantion 19,2%: împărțirea la $1-\hat{\alpha}-\hat{\beta}$ o face imprecisă (slide-ul următor)

MFM_ch5_garch_estimation

Persistență aproape de 1: limitele metodei delta (1/2)



MFM_ch5_seminar ▶ Interactiv

Persistență aproape de 1: limitele metodei delta (2/2)

- $g(\theta)$: o funcție netedă de parametri, cu gradientul ∇g
  - De exemplu volatilitatea de termen lung sau timpul de înjumătățire
- Metoda delta: $\widehat{\mathrm{SE}}\, g(\hat{\theta}) \approx \sqrt{\nabla g' \hat{V} \nabla g}$, cu $\hat{V}$ covariança robustă a lui $(\hat{\omega}, \hat{\alpha}, \hat{\beta})$
- Pentru timpul de înjumătățire: $p = \alpha + \beta$ și $h = \ln 0{,}5 / \ln p$
- Volatilitatea de termen lung este 27,4% anual, cu SE de 11,0 puncte procentuale
- Timpul de înjumătățire: $\partial h / \partial p = 25\,330$ la $\hat{p} = 0{,}994769$
  - $\widehat{\mathrm{SE}}(\hat{p}) = 0{,}0047$, deci $\widehat{\mathrm{SE}}(\hat{h}) \approx 118$ zile
  - $\hat{h} \pm 1{,}96\, \widehat{\mathrm{SE}}$ conține timpi de înjumătățire negativi: liniarizarea eșuează
- Transformăm în schimb intervalul pentru p: $[0{,}9856; 1{,}0039]$ dă $h \in [48; \infty)$
- Plauzibilitatea lui $p = 1$ cere un test la frontieră (slide-urile următoare)

MFM_ch5_seminar

Testarea la frontieră (1/2): un tabel de decizie

Situația sub H_0	**Exemplu**	**Likelihood Ratio (LR):** $LR = 2(\ell_1 - \ell_0)$	**Valoare critică 5%**
Restricție interioară	GJR (GARCH asimetric) față de GARCH, $\gamma = 0$ (cu $\alpha > 0$)	χ^2_1	3,84
Un parametru pe frontieră, ceilalți identificați și interiori	Normală față de Student-t ($1/\nu = 0$), IGARCH ($\alpha + \beta = 1$)	$\frac{1}{2}\chi^2_0 + \frac{1}{2}\chi^2_1$ Self & Liang (1987), Andrews (2001)	2,71
Un parametru perturbator (nuisance) neidentificat	Fără ARCH: $\alpha = 0$ lasă β neidentificat	nestandard Andrews (2001)	simulare
Mai multe restricții active simultan	GJR cu $\alpha_0 = 0$ sub H_0, testul $\gamma = 0$	nestandard	simulare

- ℓ_1, ℓ_0: log-verosimilitățile maxime fără și cu restricție
- $\frac{1}{2}\chi^2_0 + \frac{1}{2}\chi^2_1$: $LR = 0$ cu probabilitatea $\frac{1}{2}$, altfel χ^2_1
- GJR: γ este reacția suplimentară a dispersiei la șocurile negative (secțiunea Asimetrie)
- Legea LR depinde de parametrul adevărat sub H_0, nu de estimarea alternativei: pe S&P 500, GARCH-t estimat sub $\gamma = 0$ are $\hat{\alpha} = 0{,}122 > 0$
  - $\hat{\alpha} = 0$ în GJR afectează statistica Wald t pentru α, nu automat legea LR pentru $\gamma = 0$

Testarea la frontieră (2/2): de ce IGARCH este un caz de frontieră

- IGARCH este pe frontieră doar pentru că estimarea impune $\alpha + \beta \leq 1$, ca în `arch`
  - Sub H_0: $\alpha + \beta = 1$, estimarea nerestricționată ar depăși 1 în circa jumătate din cazuri
  - Restricția o fixează la 1 și atunci $LR = 0$: de aici amestecul și pragul 2,71
  - Fără această restricție, $\alpha + \beta = 1$ se află în interiorul regiunii de staționaritate strictă, QMLE rămîne asimptotic Normal acolo Lumsdaine (1996), iar LR s-ar compara cu χ^2_1 (3,84)
  - Normalitatea QMLE nu ajunge pentru un quasi-LR: legea χ^2_1 cere densitatea corect specificată sau o corecție a statisticii
- Testul Wald t pentru o estimare la limită (de ex. $\hat{\alpha} = 0$) nu este $N(0, 1)$
- Bootstrap-ul parametric din $\hat{\theta}$ (eșantioane simulate din modelul estimat) este inconsistent cînd θ_0 este pe frontieră Andrews (2000)
  - Simulăm în schimb sub H_0

Exemplu lucrat (1/2): prognoza pe o zi

- S&P 500, GARCH(1,1)-t: $\hat{\omega} = 0{,}0157$, $\hat{\alpha} = 0{,}122$, $\hat{\beta} = 0{,}872$, $\hat{\mu} = 0{,}079$
  - Persistența $\hat{p} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} = 0{,}994769$
  - Cu valorile rotunjite afișate, $1 - \hat{p} = 0{,}006$, iar dispersia de termen lung ar fi 2,62 în loc de 3,00
- Ultima zi $T = 18.09.2026$: $\hat{\varepsilon}_T = r_T - \hat{\mu} = 0{,}088$, dispersia filtrată $\hat{\sigma}^2_T = 0{,}565$
  - Dispersia filtrată: recursia aplicată pe tot eșantionul cu $\hat{\theta}$, citită în ultima zi T
  - $\hat{\sigma}^2_{T+1} = \hat{\omega} + \hat{\alpha}\hat{\varepsilon}^2_T + \hat{\beta}\hat{\sigma}^2_T = \hat{\omega} + 0{,}0009 + 0{,}493 = 0{,}509$, adică 11,3% anual
- O ultimă zi calmă: $\hat{\sigma}^2_{T+1}$ este mult sub nivelul de termen lung
  - Deci prognozele vor crește (slide-ul următor)

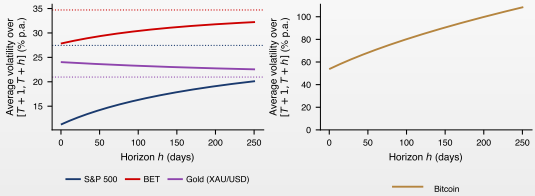
MFM_ch5_garch_estimation

Exemplu lucrat (2/2): zece zile înainte

- Dispersia de termen lung $\hat{\sigma}^2 = \hat{\omega}/(1 - \hat{\alpha} - \hat{\beta}) = 3{,}00$
- Ziua 10: $\hat{\sigma}^2 + (\hat{\alpha} + \hat{\beta})^9(\hat{\sigma}^2_{T+1} - \hat{\sigma}^2)$
  - $= 3{,}00 + 0{,}954 \times (0{,}509 - 3{,}00) = 0{,}624$
- Dispersia pe 10 zile $\sum_{h=1}^{10} \hat{\sigma}^2_{T+h} = 5{,}67$, volatilitatea 2,38%
  - Suma în formă închisă (exemplul numeric din secțiunea despre persistență): $10\,\hat{\sigma}^2 + (\hat{\sigma}^2_{T+1} - \hat{\sigma}^2)\,(1 - \hat{\rho}^{10})/(1 - \hat{\rho})$
  - $= 29{,}95 + (0{,}509 - 2{,}995) \times 9{,}768 = 5{,}67$
  - Regula rădăcinii pătrate a timpului dă $\sqrt{10} \times 0{,}714 = 2{,}26\%$ ($\hat{\sigma}_{T+1} = 0{,}714\%$): o subestimare, deoarece $\hat{\sigma}^2_{T+1} < \hat{\sigma}^2$ și volatilitatea este prognozată în creștere

MFM_ch5_garch_estimation

Structura la termen a volatilității (1/2)



- Volatilitatea medie pe următoarele h zile, prognozată din 18.09.2026 (GARCH(1,1)-t)
- Punctat: nivelul de termen lung
- S&P 500: de la 11,3% pentru ziua următoare la 20,1% în medie pe 250 de zile
  - Nivelul curent este sub cel de termen lung
- Aurul scade de la 24,0% la 22,5%

MFM_ch5_persistence ▶ Interactiv

Structura la termen a volatilității (2/2)

- Bitcoin și EUR/RON: estimarea atinge frontiera $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 1$ (IGARCH)
  - Cu $\hat{\omega} > 0$ (la EUR/RON, $\hat{\omega} \approx 5 \cdot 10^{-8}$ în $\%^2$)
  - Deci prognoza dispersiei crește liniar cu $\hat{\omega}$ pe zi
- Bitcoin: 54,1% pentru ziua următoare, 108,3% în medie pe 250 de zile (circa 8 luni calendaristice)
  - EUR/RON nu apare în grafic
- Această creștere nelimitată nu este o prognoză utilizabilă
  - În Capitolul 8, prognozele GARCH sînt retrase în zilele în care estimarea nu este admisibilă
  - Bitcoin: 1 660 din 3 384 de zile de evaluare
  - EUR/RON: 20 din 4 352

MFM_ch5_persistence

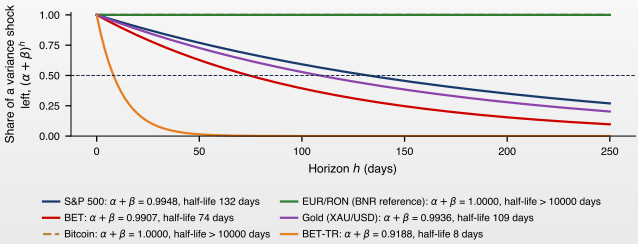
GARCH(1,1)-t pe șase piețe

Serie	$\hat{\omega}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}+\hat{\beta}$	$h_{1/2}$ (zile)	$\hat{\nu}$	Vol. termen lung
S&P 500	0,0157	0,122	0,872	0,9948	132	6,25	27,4
BET	0,0448	0,192	0,799	0,9907	74	5,01	34,7
BET-TR	0,0755	0,206	0,713	0,9188	8	5,02	15,2
Bitcoin	0,1937	0,109	0,891	1,0000	∞	3,18	–
EUR/RON	0,0000	0,123	0,877	1,0000	∞	4,20	–
Aur	0,0107	0,050	0,944	0,9936	109	4,52	21,0

- Volatilitatea de termen lung în % anual, fiecare serie anualizată cu frecvența ei
- Semnul – apare cînd $\hat{\alpha}+\hat{\beta} \geq 0{,}999$
- EUR/RON: $\hat{\omega}$ în $\%^2$, după estimarea pe $10\, r_t$
- S&P 500, BET și aur: persistență 0,99–0,995
- BET reacționează mai puternic la știri ($\hat{\alpha} = 0{,}192$) și are o memorie mai scurtă decît S&P 500
- BET-TR acoperă doar 2014–2026: comparația cu BET cere același eșantion
- EUR/RON: pe 6 mai 2025, o variație de $+1{,}20\%$ după zile de $\pm 0{,}004\%$ dă un reziduu standardizat de 154
- Tipul de dovadă: descriere

MFM_ch5_garch_estimation

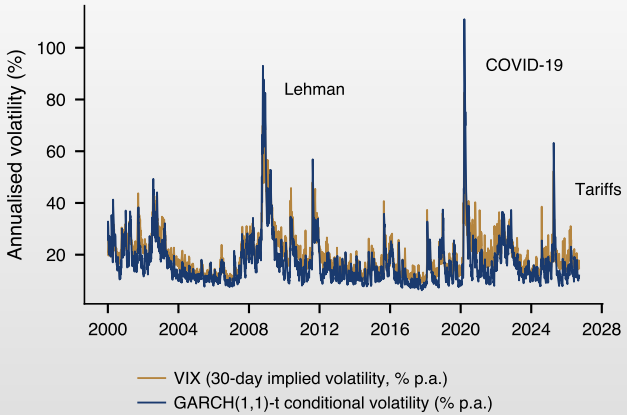
Persistența: viteza de disipare a șocurilor



- $(\hat{\alpha}+\hat{\beta})^h$: partea dintr-un șoc de dispersie rămasă după h zile
- linia întreruptă: o jumătate
- Timpii de înjumătățire: coloana $h_{1/2}$ din tabelul celor șase piețe
- La Bitcoin și EUR/RON șocurile nu se disipă niciodată în model
- Schimbările structurale ale nivelului volatilității pot genera o persistență aparent mare Lamoureux & Lastrapes (1990)
  - Schimbare de regim: Hamilton & Susmel (1994)
  - Raportați timpii de înjumătățire ca intervale (Seminarul 5, B4)

MFM_ch5_persistence ▶ Interactiv

S&P 500: volatilitatea GARCH și VIX (1/2)



- $\hat{\sigma}_t\sqrt{A}$: volatilitatea GARCH(1,1)-t anualizată
- VIX: volatilitatea implicită pe 30 de zile (Volatility Index al Chicago Board Options Exchange)
- Etichetele din grafic
  - Lehman: falimentul Lehman Brothers, septembrie 2008
  - COVID-19: Coronavirus Disease 2019, martie 2020
  - Tariffs: anunțul tarifelor vamale americane, aprilie 2025

MFM_ch5_sp500_vix ▶ Interactiv

S&P 500: volatilitatea GARCH și VIX (2/2)

- Corelația dintre cele două serii, 2000–2026: 0,89
- $\hat{\sigma}_t$ este filtrată cu parametrii estimați pe tot eșantionul (estimare în eșantion, *in-sample*), nu o prognoză în afara eșantionului
- VIX este mai mare în medie: 19,8% față de 17,0%
  - VIX depășește volatilitatea GARCH în 84% din zile
- Diferența nu măsoară prima de risc a dispersiei (*variance risk premium*)
  - Prima compară VIX^2 cu o prognoză a dispersiei pe 30 de zile sub probabilitatea reală
  - Iar $\hat{\sigma}_t$ este o volatilitate pe o zi
- Tipul de dovadă: asociere (variabilele se mișcă împreună; nu dovedește o relație cauzală)

MFM_ch5_sp500_vix

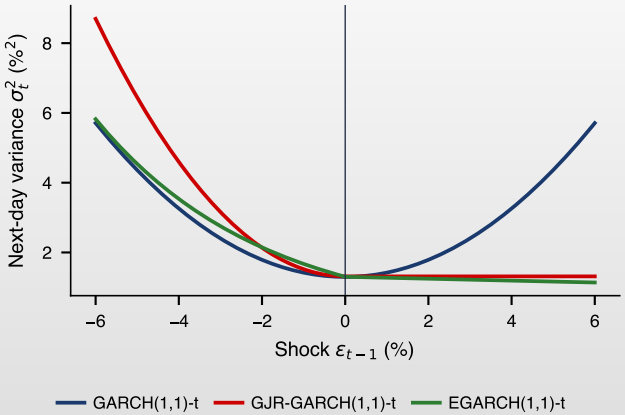
GJR-GARCH (Glosten, Jagannathan și Runkle, 1993)

- **Întrebarea**: crește volatilitatea mai mult după o scădere decît după o creștere?
  - Șocuri de aceeași mărime (faptul stilizat 9, Capitolul 1)
- GARCH(1,1) ignoră semnul: ε_{t-1}^2 este același pentru -3 și $+3$
- GJR: un șoc negativ primește panta suplimentară γ Glosten, Jagannathan & Runkle (1993)
  - $\sigma_t^2 = \omega + (\alpha + \gamma\, I_{t-1})\,\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\,\sigma_{t-1}^2$, cu $I_{t-1} = 1$ dacă $\varepsilon_{t-1} < 0$, altfel 0
  - Știri bune: panta α
  - Știri proaste: panta $\alpha + \gamma$
  - Pozitivitatea: $\omega > 0$, $\alpha \geq 0$, $\alpha + \gamma \geq 0$, $\beta \geq 0$ (γ poate fi negativ)
  - Persistența $\alpha + \gamma/2 + \beta$ pentru z_t simetric
  - Pentru z_t asimetric, $1/2$ se înlocuiește cu $\mathbb{E}[z_t^2 1(z_t < 0)]$, $1(\cdot)$ fiind indicatorul (Seminarul 5, A3)
- S&P 500: $\hat{\alpha} = 0{,}000$, $\hat{\gamma} = 0{,}205$ (t = 10,0), $\hat{\beta} = 0{,}881$
- Testul simetriei: H_0: $\gamma = 0$ prin t sau prin LR față de GARCH(1,1)
- $\hat{\alpha} = 0$ este pe frontieră: testul t al lui γ nu este standard
  - Legea χ_1^2 a LR pentru $\gamma = 0$ presupune $\alpha_0 > 0$
  - Vezi tabelul de decizie pentru testele la frontieră
- Mecanisme posibile, netestate aici
  - Efectul de levier (*leverage effect*): un preț în scădere crește raportul datorii/capital propriu
  - Feedback-ul volatilității: volatilitatea așteptată mai mare crește randamentul cerut, deci prețurile scad acum

EGARCH (Nelson, 1991)

- Exponential GARCH (EGARCH) modelează logaritmul dispersiei Nelson (1991)
  - În funcție de mărimea și de semnul șocului standardizat de ieri
  - $\ln \sigma_t^2 = \omega + \alpha \left(|z_{t-1}| - \mathbb{E}|z_{t-1}| \right) + \gamma \, z_{t-1} + \beta \ln \sigma_{t-1}^2$
  - $z_{t-1} = \varepsilon_{t-1} / \sigma_{t-1}$: șocul standardizat
  - $|z_{t-1}| - \mathbb{E}|z_{t-1}|$: mărimea sa peste mărimea medie
  - Efectul de mărime α, efectul de semn γ
  - $\gamma < 0$: șocurile negative cresc volatilitatea mai mult
- Forma logaritmică garantează $\sigma_t^2 > 0$ fără restricții de semn asupra parametrilor
- Persistența: β; $|\beta| < 1$ dă staționaritatea log-dispersiei $\ln \sigma_t^2$
- Momentele randamentelor cer condiții separate: cu inovații Student-t, dispersia necondiționată poate fi infinită chiar dacă $\nu > 4$
- S&P 500: $\hat{\alpha} = 0{,}138$, $\hat{\gamma} = -0{,}165$ (t $= -15{,}2$), $\hat{\beta} = 0{,}979$
- În `arch`, $\mathbb{E}|z|$ este fixat la $\sqrt{2/\pi}$, valoarea sa sub distribuția Normală

Curba de impact a știrilor pentru S&P 500



- **Curba de impact a știrilor** Engle & Ng (1993): σ_t^2 ca funcție de ε_{t-1}
  - σ_{t-1}^2 fixată la dispersia de selecție $s^2 = 1{,}47$ (%^{2})
  - Nu la dispersia de termen lung a modelului
- După un șoc de -3%: GJR 3,16, EGARCH 2,75
- După un șoc de $+3\%$: GJR 1,31, EGARCH 1,22
- GARCH dă 2,40 pentru ambele șocuri
- După știri proaste prognoza este de 2,4 ori (GJR) și de 2,3 ori (EGARCH) cea după știri bune
  - Rapoarte de niveluri, nu de creșteri

MFM_ch5_asymmetry ▸ Interactiv

Asimetria pe șase piețe

Serie	$\hat{\gamma}_{GJR}$	t	*LR* față de GARCH	valoarea *p*	$\hat{\gamma}_{EGARCH}$	t
S&P 500	0,205	10,0	236,2	$<0{,}001$	$-0{,}165$	$-15{,}2$
BET	0,043	2,1	4,9	0,026	$-0{,}028$	$-2{,}6$
BET-TR	0,111	2,9	10,3	0,001	$-0{,}063$	$-3{,}5$
Bitcoin	$-0{,}013$	$-0{,}7$	0,7	0,416	0,015	1,2
EUR/RON	0,039	3,0	9,3	0,002	$-0{,}040$	$-2{,}5$
Aur	$-0{,}043$	$-4{,}7$	26,7	$<0{,}001$	0,038	5,7

- Toate modelele folosesc inovații Student-t
  - Coloanele t conțin statistici t robuste
  - $LR \sim \chi^2_1$ (3,84) dacă densitatea Student-t este corectă
- Statistica t robustă este $N(0,1)$ doar cu ceilalți parametri interiori (nu la S&P 500 GJR, unde $\hat{\alpha}=0$)
- Momentele: QMLE Gaussian cere $\mathbb{E}z_t^4 < \infty$; MLE Student-t corect specificat nu o cere; cu densitatea greșită, $\hat{\nu} > 4$ nu garantează singur erorile robuste Fan, Qi & Xiu (2014)
- Știrile proaste contează mai mult (GJR $\hat{\gamma} > 0$, EGARCH $\hat{\gamma} < 0$)
  - Efect puternic la S&P 500
  - Mai mic, dar semnificativ la 5%, la BET, BET-TR și EUR/RON
  - La Bitcoin nu este detectat
  - La aur semnul este inversat
- Tipul de dovadă: asociere
  - Efectul de levier la acțiuni și rolul de refugiu (*safe haven*) al aurului: interpretări compatibile cu semnele, nu mecanisme testate

S&P 500: douăsprezece modele comparate prin BIC

ΔBIC	$N(0,1)$	Student-t	t asimetric	GED
GARCH(1,1)	650,2	347,1	307,9	339,6
GJR-GARCH(1,1)	395,3	119,8	49,6	140,8
EGARCH(1,1)	373,4	74,7	0,0	110,7

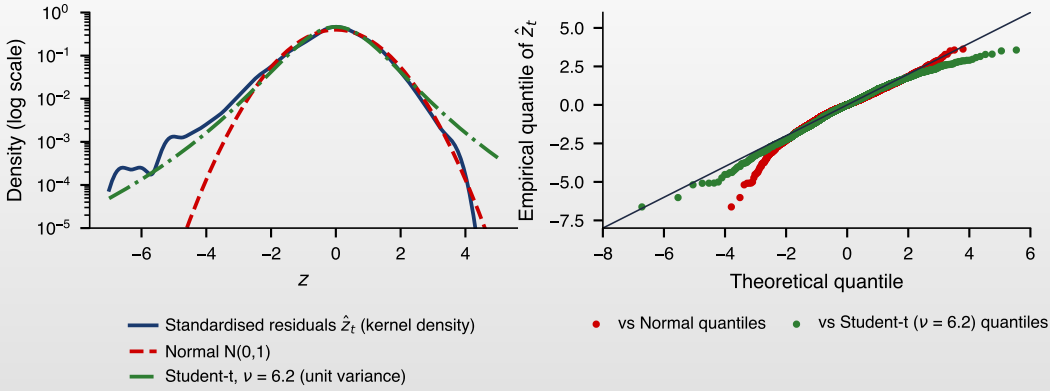
- ΔBIC: Bayesian Information Criterion minus cel mai mic BIC dintre cele 12 modele
  - BIC $= -2\ell + k \ln n$ (k parametri)
  - 0 = modelul preferat
- Akaike Information Criterion, AIC $= -2\ell + 2k$: alegem totuși prin BIC
  - Cu $n = 6\,717$ ($\ln n \approx 8{,}8$), BIC penalizează fiecare parametru de 4,4 ori mai mult
  - Evită modelele supraparametrizate
- Contează două decizii: inovațiile Student-t în locul celor Normale scad BIC cu 276–303
- Asimetria îl mai scade cu 227–272 (coloana Student-t, GJR și EGARCH față de GARCH)
- Modelul preferat: EGARCH cu inovații t asimetrice
- BIC ordonează adecvarea în eșantion, nu acuratețea prognozelor
  - Secțiunea despre prognoze testează dacă aceste cîștiguri se păstrează în afara eșantionului
- Tipul de dovadă: comparație între proceduri (arată care metodă funcționează mai bine pe aceleași date, nu de ce)
- Seminarul 5, B3 reestimează rîndul BET din tabelul asimetriei și explică deciziile LR, AIC și BIC

MFM_ch5_garch_estimation

Reziduurile standardizate: ce verificăm

- **Întrebarea**: a eliminat modelul ales toată dinamica din $\hat{z}_t$, iar $\hat{z}_t$ are densitatea presupusă?
- **Reziduul standardizat**: $\hat{z}_t = \hat{\varepsilon}_t / \hat{\sigma}_t$
- Dacă modelul este corect, $\hat{z}_t$ este aproape i.i.d. cu dispersia 1
- Verificări, fiecare cu H_0: modelul reproduce proprietatea respectivă
  - Ecuația mediei: Ljung–Box $Q(10)$ pe $\hat{z}_t$
  - Ecuația dispersiei: $Q(10)$ pe $\hat{z}_t^2$ și LM(5)
  - Distribuția: grafic Quantile–Quantile (QQ) față de densitatea presupusă
- Regresia de asimetrie Engle & Ng (1993): $\hat{z}_t^2 = b_0 + b_1 S_{t-1}^- + b_2 S_{t-1}^- \hat{\varepsilon}_{t-1} + b_3 S_{t-1}^+ \hat{\varepsilon}_{t-1} + u_t$
  - $S_{t-1}^- = 1$ dacă $\hat{\varepsilon}_{t-1} < 0$, altfel 0
  - $S_{t-1}^+ = 1 - S_{t-1}^-$
  - u_t: eroarea regresiei
  - termenii de mărime folosesc reziduul nestandardizat $\hat{\varepsilon}_{t-1}$ (ec. 18 din Engle & Ng (1993))
  - b_1 (deplasarea de semn, *sign bias*): $\hat{z}_t^2$ mai mare în medie după un șoc negativ; testul deplasării de semn este t-ul lui b_1
  - b_2, b_3: asimetria de mărime negativă și pozitivă
  - testul comun $nR^2 \sim \chi_3^2$ (7,81 la 5%), conservator deoarece omite gradientul dispersiei estimate

S&P 500: normalitatea inovațiilor (1/2)



MFM_ch5_innovations ▶ Interactiv

S&P 500: normalitatea inovațiilor (2/2)

- Reziduurile standardizate ale GARCH(1,1) cu inovații Normale
  - Excesul de kurtosis scade de la 10,7 (randamente) la 1,73
- Asimetria $-0{,}53$, Jarque–Bera 1 156
- Jarque–Bera $= n[S^2/6 + E^2/24]$, S: asimetria, E: excesul de kurtosis
- χ^2_2 sub normalitate, valoarea critică la 5% este 5,99: normalitatea este respinsă clar
- 16 reziduuri sub -4: 0,21 așteptate sub distribuția Normală, 8,6 sub Student-t cu $\nu = 6{,}2$
- Cel mai mic reziduu standardizat: $\hat{z} = -6{,}6$, pe 27 februarie 2007
- O coadă stîngă mai lungă: t asimetric cu parametrul de asimetrie $\hat{\lambda} = -0{,}155$
  - ambele estimări provin din EGARCH cu inovații t asimetrice: $\hat{\lambda}$ și $\hat{\nu} = 7{,}5$ grade de libertate
  - De aceea BIC preferă inovațiile t asimetrice

MFM_ch5_innovations

S&P 500: diagnosticul a cinci modele

Model	$Q(10)$ pe $\hat{z}$	$Q(10)$ pe $\hat{z}^2$	LM(5)	Asim. semn t	Comun χ^2_3
GARCH-N	21,1	16,2	8,1	3,65	41,6
GARCH-t	21,8	13,5	5,8	3,57	40,6
GJR-t	22,0	10,1	4,4	3,61	28,1
EGARCH-t	27,4	10,5	8,3	2,05	9,9
GJR cu t asimetric	19,4	10,6	5,0	3,90	31,9

- Valori critice la 5%: 18,3 (χ^2_{10}), 11,1 (χ^2_5), 7,81 (χ^2_3), $|t| > 1{,}96$
- Valorile critice χ^2 ignoră estimarea parametrilor, deci testele sînt conservatoare (Aprofundări)
- Media: $Q(10)$ pe $\hat{z}$ între 19,4 și 27,4 în toate modelele
  - Peste valoarea critică 18,3: o mică autocorelație pe care media constantă o ignoră
- Dispersia: $Q(10)$ pe $\hat{z}^2$ scade de la 6 135 (pe r_t^2) la 10–16
  - LM(5) nu este semnificativ
  - Aceste teste naive nu detectează gruparea volatilității rămasă
- Asimetria: testul comun respinge toate cele cinci modele la 5%
  - GARCH-t 40,6, GJR-t 28,1, EGARCH-t 9,9 (cea mai mică statistică, valoarea p 0,019)
- Testul deplasării de semn (t al lui b_1) rămîne peste 1,96 în toate modelele (2,05–3,90)
- Cu $n = 6\,717$, judecați mărimea economică, nu doar valorile p

MFM_ch5_innovations

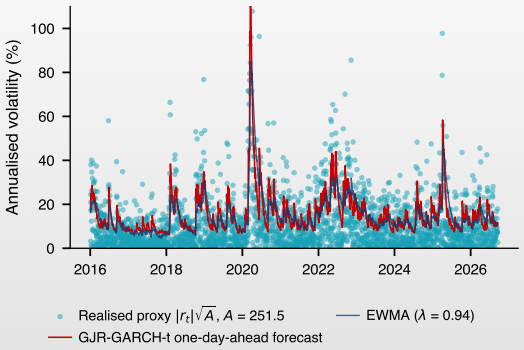
Problema aproximării și pierderile robuste

- **Întrebarea**: se păstrează în afara eșantionului cîștigurile de BIC ale GJR și EGARCH?
- Volatilitatea nu este observată niciodată: comparăm prognozele cu o **aproximare** zgomotoasă
  - Aici r_t^2, deoarece nu folosim date intrazilnice (*intraday*)
  - Dispersia realizată: Capitolul 9
- $r_t^2 = \sigma_t^2 z_t^2$ este nedeplasat ($\mathbb{E}[r_t^2 \mid \mathcal{F}_{t-1}] = \sigma_t^2$ pentru $\mu = 0$), dar foarte zgomotos
  - Chiar și prognoza perfectă $h_t = \sigma_t^2$ explică puțin din variația lui r_t^2 (un R^2 mic), deoarece z_t^2 este zgomotos Andersen & Bollerslev (1998)
  - S&P 500: ignorăm media, deoarece $\hat{\mu}^2 = 0{,}0062$ față de o dispersie zilnică medie de 1,47 ($\%^2$), o deplasare sub 1%
- Patton (2011): doar unele funcții de pierdere ordonează corect prognozele cu o aproximare zgomotoasă
  - Robuste: Mean Squared Error (MSE, eroarea pătratică medie) $(r_t^2 - h_t)^2$ și **Quasi-Likelihood (QLIKE)** $r_t^2/h_t + \ln h_t$, cu h_t prognoza dispersiei pentru ziua t
  - Nerobuste: $(|r_t| - \sqrt{h_t})^2$ și $(\ln r_t^2 - \ln h_t)^2$: ordonarea lor depinde de zgomotul aproximării
- QLIKE este (pînă la constante) minus log-verosimilitatea Normală
- Valoarea sa așteptată este minimă pentru $h_t = \sigma_t^2$
- Penalizează mai mult subestimarea

Evaluarea prognozelor: Mincer–Zarnowitz și Diebold–Mariano

- **Regresia Mincer–Zarnowitz (MZ)** Mincer & Zarnowitz (1969): regresăm aproximarea pe prognoză
  - $r_t^2 = a + b\, h_t + u_t$
- Prognoză nedeplasată: $a = 0$, $b = 1$
  - Test Wald comun cu erori robuste la heteroscedasticitate și autocorelație (HAC, *Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent*)
  - χ^2_2 sub H_0
  - $b < 1$: prognoze prea dispersate (prea mari cînd sînt mari, prea mici cînd sînt mici)
- **Testul Diebold–Mariano** Diebold & Mariano (1995): au două prognoze aceeași pierdere așteptată?
  - Diferența de pierderi $d_t = L(r_t^2, h_t^A) - L(r_t^2, h_t^B)$
  - L: funcția de pierdere (QLIKE sau MSE)
  - h_t^A, h_t^B: prognozele modelelor A și B
  - $d_t < 0$: A a fost mai bun în ziua t
- Statistica Diebold–Mariano (DM): $DM = \bar{d} / \widehat{\mathrm{SE}}(\bar{d})$
  - $\bar{d}$: media lui d_t pe zilele de prognoză
  - eroare standard HAC, deoarece d_t este autocorelat
  - $\approx N(0,1)$ sub acuratețe egală
  - $DM < -1{,}96$: A semnificativ mai bun
  - $DM > 1{,}96$: B semnificativ mai bun
- Modele estimate și imbricate (GARCH-t în GJR-t): legea $N(0,1)$ poate să nu fie valabilă
  - Acolo DM se citește descriptiv (testul Giacomini–White, GW: Aprofundări)

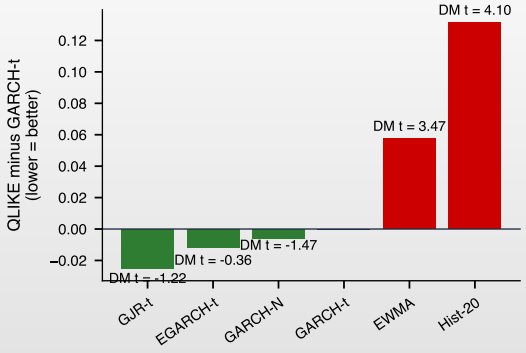
Prognoze în afara eșantionului: schema și traiectoriile, 2016–2026



- S&P 500: 2 693 de prognoze pe o zi
- Reestimare în fiecare ianuarie pe toate datele din 2000 (fereastră în expansiune)
  - Actualizare zilnică cu parametri ficși
- Alinierea în timp: h_t folosește datele pînă la închiderea zilei $t-1$ și se compară cu r_t^2
- Test de aliniere: dacă modificăm r_t, h_t nu trebuie să se schimbe
- Modele: GARCH-N, GARCH-t, GJR-t, EGARCH-t
- Repere fără parametri estimați: EWMA ($\lambda = 0{,}94$, factorul de descreștere) și Hist-20, media lui r^2 pe ultimele 20 de zile

MFM_ch5_forecast_evaluation ▶ Interactiv

S&P 500: evaluarea prognozelor față de GARCH-t (1/2)



- QLIKE mediu minus cel al GARCH-t, cu t DM (HAC, 5 laguri)
- Cel mai mic QLIKE: GJR-t (0,731)
- Familia GARCH: t DM între $-1{,}47$ și $-0{,}36$, nesemnificative la 5%; descriptive pentru perechile imbricate (GARCH-N și GJR-t față de GARCH-t)
  - EGARCH-t nu este imbricat în GARCH-t
  - Testul DM cere momente finite și dependență limitată pentru $d_t = r_t^2(1/h_t^A - 1/h_t^B) + \ln(h_t^A/h_t^B)$
  - $\mathbb{E}r_t^4 < \infty$ nu este condiția relevantă: prognozele normalizează r_t^2; HAC nu repară momente inexistente
- EWMA și Hist-20 sînt clar mai slabe ($t = 3{,}47$; 4,10)
  - Revenirea la medie și parametrii estimați aduc un cîștig Hansen & Lunde (2005)
- Tipul de dovadă: comparație între proceduri

MFM_ch5_forecast_evaluation ▶ Interactiv

S&P 500: evaluarea prognozelor față de GARCH-t (2/2)

- Cu MSE ordinea se schimbă: EGARCH-t 21,30, GJR-t 21,80, GARCH-N 22,27, GARCH-t 22,76 ($\%^4$)
- MZ: nedeplasarea nu este respinsă pentru prognozele de tip GARCH
  - Este respinsă pentru Hist-20
  - Toate statisticile: ▸ Anexă
- Nerespingerea este o dovadă slabă: SE a lui b este 0,25 pentru GARCH-t
  - Inferența MZ cere momente finite pentru scorul $(1, h_t)' u_t$, $u_t = r_t^2 - a - b\, h_t$; chiar pentru prognoza ideală, termenul pantei implică $\mathbb{E} h_t^4$
  - $\mathbb{E} r_t^4 < \infty$ nu ajunge în general, iar HAC nu repară momente inexistente (cozile groase: Capitolul 1)
  - Cîteva zile de criză determină b (Seminarul 5, B5)

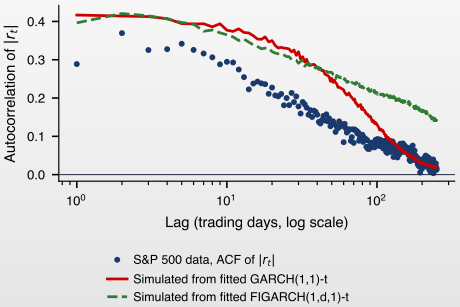
MFM_ch5_forecast_evaluation

GARCH-in-mean: prima de risc

- **Întrebarea**: ce nu descrie GARCH(1,1) și ce extensie răspunde fiecărei limite?
- **GARCH-in-Mean (GARCH-M)** Engle, Lilien & Robins (1987): $r_t = c + \kappa\,\sigma_t + \varepsilon_t$ (sau $\kappa\,\sigma_t^2$)
  - c: constantă
  - κ: prețul riscului, randamentul așteptat suplimentar pe unitate de volatilitate
  - $\kappa > 0$: investitorii cer un randament așteptat mai mare cînd riscul este mai mare (compromisul risc–randament)
- S&P 500, GARCH(1,1)-t: $\hat{\kappa} = 0{,}096$ (t = 3,03) cu σ_t în ecuația mediei
- $\hat{\kappa} = 0{,}028$ (t = 2,36) cu σ_t^2 în ecuația mediei
  - Pozitiv și semnificativ în acest eșantion, dar rezultatele din literatură sînt contradictorii: Glosten, Jagannathan & Runkle (1993) au găsit o relație negativă
- Un efect zilnic în medie este mic și fragil
- Depinde de eșantion și de asimetria dispersiei
- Tipul de dovadă: asociere

MFM_ch5_long_memory

Memoria lungă: forma ACF a lui $|r_t|$



- S&P 500, ACF (*AutoCorrelation Function*, funcția de autocorelație) a lui $|r_t|$ (scară log): în date, 0,289 la lagul 1, 0,083 la lagul 100 și 0,013 la lagul 250
- GARCH(1,1)-t simulat supraestimează ACF la toate lagurile
  - 0,417 la lagul 1, 0,131 la lagul 100, 0,020 la lagul 250
- Problema este forma: un singur $\alpha + \beta$ nu dă simultan un nivel mic la lagul 1 și o scădere lentă
- **Fractionally Integrated GARCH (FIGARCH)** Baillie, Bollerslev & Mikkelsen (1996)
  - Filtrul $(1 - L)^d$, cu $Lx_t = x_{t-1}$ și $d \in (0, 1)$, dă o scădere hiperbolică
- $\hat{d} = 0{,}60$ (SE 0,06), BIC mai mic cu 34,9
- FIGARCH supraestimează și mai mult memoria: 0,214 la lagul 100, 0,144 la lagul 250
- Niciun model cu o singură scară de timp nu descrie toate orizonturile
  - Volatilitatea realizată și modelele Heterogeneous AutoRegressive (HAR) în Capitolul 9

MFM_ch5_long_memory ▶ Interactiv

Limitele GARCH și extensiile pe care le motivează

Limita	Dovada din acest capitol	Extensia
Schimbările de nivel exagerează $\alpha + \beta$ Lamoureux & Lastrapes (1990)	BET-TR (2014–2026) mult mai puțin persistent decît BET (2000–2026): un indiciu, nu o dovadă, deoarece diferă eșantionul și indicele	GARCH-MIDAS (Mixed Data Sampling), componentă lentă Engle, Ghysels & Sohn (2013); schimbare de regim Hamilton & Susmel (1994)
Reacție întîrziată cu o zi	COVID-19: VIX a reacționat în aceeași zi, GARCH a doua zi	Realized GARCH, cu ecuație de măsurare pentru dispersia realizată Hansen, Huang & Shek (2012) (Capitolul 9)
O valoare extremă domină actualizarea	reziduul EUR/RON de 154 (mai 2025)	Modele GAS (Generalised Autoregressive Score), scor mărginit Creal, Koopman & Lucas (2013) (studiul de caz de mai jos)
Forma ACF a lui $\lvert r_t \rvert$	GARCH-t și FIGARCH supraestimează ACF (slide-ul anterior)	HAR pe dispersia realizată (Capitolul 9)
Un singur activ	portofoliile au nevoie de covariațe	GARCH multivariat, DCC (Dynamic Conditional Correlation), Capitolul 6
Curs în regim de managed float	EUR/RON: perioade lungi de stabilitate, apoi salturi	Intervențiile modelate ca salturi sau regimuri

- Fiecare extensie se judecă la fel ca GARCH
  - În afara eșantionului, pierdere robustă, Model Confidence Set
  - Ecuațiile modelelor: ▸ Anexă

MFM_ch5_garch_estimation

Trei extensii de cercetare și ce presupun

- **Volatilitate bazată pe un cvasi-scor**: replicarea unui articol publicat în 2023
  - Se bazează pe: densitatea Student-t, testele LR și variantele lor la frontieră, actualizarea bazată pe scor (GAS) din secțiunea de extensii
  - Continuare în Seminarul 5, C3
- **Ciclurile volatilității (MF2-GARCH)**: o componentă lentă, învățată din erorile de prognoză ale GARCH, replicarea unui articol publicat în 2025
  - MF2-GARCH: Multiplicative Factor Multi-Frequency GARCH
  - Se bazează pe: GJR-GARCH, QMLE, BIC, QLIKE și testul Diebold–Mariano
- **AI pentru descoperire științifică**: o buclă de cercetare cu asistent AI și verificări
  - Se bazează pe: schema de evaluare în afara eșantionului, QLIKE, Diebold–Mariano și Model Confidence Set
  - Lista de verificare ajută la auditul răspunsului AI din Seminarul 5, C1 și la proiectul de echipă

Volatilitate bazată pe scor: cît de mult atenuăm șocurile?

- **Întrebarea** Blasques, Francq & Laurent (2023)
  - Trebuie ca un model de volatilitate bazat pe scor să actualizeze σ_t^2 cu scorul aceleiași densități care descrie randamentele?
- Actualizarea bazată pe scor (GAS) Creal, Koopman & Lucas (2013)
  - Parametrul de mîine se deplasează în direcția care ar fi făcut observația de azi mai probabilă
  - $f_{t+1} = \omega + \alpha\, S(f_t)\, \partial \log p(y_t \mid f_t)/\partial f_t + \beta f_t$
  - y_t: randamentul
  - f_t: parametrul variabil în timp (aici dispersia)
  - $p(y_t \mid f_t)$: densitatea lui y_t dată fiind f_t
  - $\partial \log p/\partial f_t$: scorul
  - $S(f_t) > 0$: un factor de scalare
  - ω, α, β: ca în GARCH
- Cu o densitate Student-t, același parametru ν determină două lucruri
  - Grosimea cozilor lui z_t
  - Cît de puternic este atenuat un șoc mare în actualizare

QSD: separăm cozile groase de atenuarea șocurilor

- **Quasi Score-Driven (QSD) GARCH(1,1)-t**, ec. (30) din lucrare
  - $y_t = \sqrt{f_t}\,\epsilon_t$, ϵ_t Student-t standardizat cu $1/\xi$ grade de libertate
  - f_t este σ_t^2, ϵ_t este z_t
  - $f_{t+1} = \omega + \varpi X_t + \alpha \dfrac{1+\zeta}{1-2\zeta+\zeta\epsilon_t^2}\,\epsilon_t^2 f_t + \beta f_t$
  - X_t: o variabilă exogenă, pătratul VIX la orizont zilnic
  - ϖ: coeficientul ei
  - ξ: grosimea cozilor lui ϵ_t ($\xi = 0$: Normală)
  - ζ: atenuarea valorilor mari ale lui ϵ_t^2 în actualizare
  - $\zeta = 0$: GARCH(1,1)-t
  - $\zeta = \xi$: Beta-t-GARCH (bazat pe scor)
  - De ce: cu $\zeta = \xi = 1/\nu$, înmulțind cu ν obținem $\dfrac{1+\zeta}{1-2\zeta+\zeta\epsilon_t^2} = \dfrac{\nu+1}{\nu-2+\epsilon_t^2}$, ponderea din scorul Student-t
- Date: 400 de acțiuni din S&P 500, 3 ianuarie 1995 (sau mai tîrziu) – 28 februarie 2019
- Verosimilitate maximă cu medie AR(1)
  - Testele LR pentru $\zeta = 0$ și $\xi = \zeta$, față de χ_1^2 (metoda completă: ▸ Anexă)
  - Testul Probability Integral Transform (PIT): $u_t = F(y_t \mid \mathcal{F}_{t-1})$, funcția de repartiție estimată în randamentul observat, trebuie să fie i.i.d. uniformă pe $(0,1)$ dacă densitatea este corectă

QSD: rezultatele principale (lucrarea, Tabelele 4 și 6)

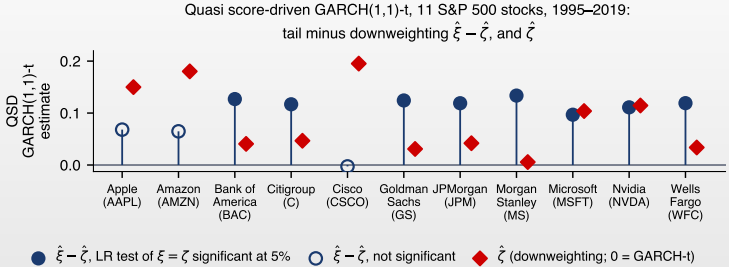
Respinse la 5%, % din cele 400 de acțiuni	Student-t (Tabelul 4)	t asimetric (Tabelul 6)
LR, H_0: $\zeta = 0$ (actualizare GARCH)	89,5	98,8
LR, H_0: $\xi = \zeta$ (bazat pe scor; asimetric: și $\kappa = \tau$)	53,5	100,0
Testul PIT: GARCH(1,1)	40,0	33,1
Testul PIT: Beta-t-GARCH	46,0	72,2
Testul PIT: QSD GARCH(1,1)	45,7	11,3

- κ: asimetria densității (aici nu prețul riscului din GARCH-M)
- τ: asimetria actualizării
- $\kappa = \tau = 0{,}5$: cazul simetric (versiunea cu t asimetric, Tabelul 6)
- Atenuarea șocurilor mari contează (Tabelul 4)
  - $\zeta = 0$ este respinsă pentru majoritatea acțiunilor (primul rînd)
  - Toate valorile $\hat{\zeta}$ sînt pozitive
- Tipul de dovadă: comparație între proceduri
  - Faptul că depășește GARCH-t și Beta-t-GARCH nu face modelul QSD adecvat: testul PIT îl respinge pentru 45,7% din acțiuni (Tabelul 4)

QSD: interpretarea rezultatelor (lucrarea, Fig. 2–6)

- **Beta-t-GARCH atenuează excesiv** (Fig. 2–3)
  - Acolo unde $\hat{\xi} - \hat{\zeta}$ este semnificativă, $\hat{\xi} > \hat{\zeta}$ pentru toate acțiunile, cu o excepție
  - Mediana lui $1/\hat{\zeta}$: 9,48 în QSD, față de 5,07 în Beta-t-GARCH, unde $\zeta = \xi$
  - Grosimea cozilor și atenuarea șocurilor sînt parametri diferiți
- **t asimetric** (Fig. 5–6)
  - $\hat{\tau}$ mult sub 0,5 (mediana 0,333), iar $\hat{\kappa}$ rămîne aproape de 0,5
  - Efectul de levier acționează prin ecuația de actualizare, nu prin densitate
- **Calibrarea** (Tabelul 6)
  - Cu actualizarea t asimetrică, testul PIT respinge modelul QSD pentru doar 11,3% din acțiuni, față de 72,2% pentru Beta-t-GARCH

QSD: replicare pe 11 acțiuni (cf. lucrarea, Fig. 2)



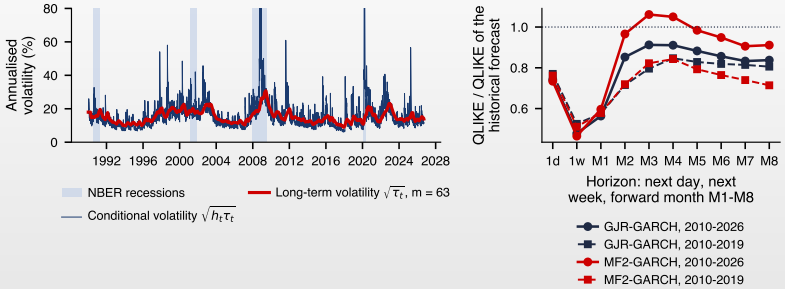
- Cercuri: $\hat{\xi} - \hat{\zeta}$ (cozi minus atenuare) pentru fiecare acțiune
  - Plin dacă LR respinge $\xi = \zeta$ la 5%
- Romburi: $\hat{\zeta}$, atenuarea șocurilor mari ($\zeta = 0$: GARCH-t)
- $\hat{\xi} > \hat{\zeta}$ la 10 din 11 acțiuni
  - Excepția este Cisco ($\hat{\xi} = 0{,}193$, $\hat{\zeta} = 0{,}195$)

MFM_ch5_quasi_score_driven ▶ Interactiv

Ciclurile volatilității: poate GARCH să învețe din propriile erori?

- Conrad & Engle (2025): erorile de prognoză standardizate ale unui GARCH cu o singură componentă, $r_t^2/\tilde{h}_t$, sînt predictibile
  - predictorul este media lor pe ultimele m zile: modelul subestimează volatilitatea luni la rînd în recesiuni și o supraestimează în expansiuni
- De ce contează: prognozele de risc pe mai multe luni depind de nivelul spre care revine volatilitatea
  - GJR-GARCH revine mereu spre aceeași dispersie necondiționată, oricare ar fi faza ciclului
- MF2-GARCH (Multiplicative Factor Multi-Frequency GARCH): $r_t = \mu + e_t$, $e_t = \sqrt{h_t\,\tau_t}\,Z_t$, cu Z_t i.i.d., media 0, dispersia 1, densitate simetrică
  - componenta pe termen scurt: $h_t = (1-\phi) + (\alpha + \gamma\,1\{e_{t-1} < 0\})\,e_{t-1}^2/\tau_{t-1} + \beta h_{t-1}$, cu $\phi = \alpha + \gamma/2 + \beta$ și media 1
  - componenta pe termen lung: $\tau_t = \lambda_0 + \lambda_1 V_{t-1}^{(m)} + \lambda_2 \tau_{t-1}$ (λ_i: coeficienți, nu factorul EWMA)
  - $V_{t-1}^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} e_{t-j}^2/h_{t-j}$: media erorilor standardizate ale lui h pe ultimele m zile
- Cifrele lucrării, S&P 500, ianuarie 1971 – iunie 2023: BIC alege $m = 63$ de zile (un trimestru)
  - persistența: 0,924 pe termen scurt (ϕ) și 0,982 pe termen lung ($\lambda_1 + \lambda_2$), față de 0,982 în GJR-GARCH
  - în afara eșantionului, 2010–2019: RMSE (*root mean squared error*, rădăcina erorii pătratice medii) pe luna 1 este cu 31,5% sub cel al prognozei istorice (raportul 0,685; GJR-GARCH: 0,798)

S&P 500: componenta lentă a volatilității și prognozele pe luni



- Stînga: volatilitatea condiționată $\sqrt{h_t \tau_t}$ și componenta pe termen lung $\sqrt{\tau_t}$ ale MF2-GARCH cu $m = 63$, anualizate, 1990–2026
  - $\sqrt{\tau_t}$: maxim 30,8% (4 iunie 2009), minim 8,9% (15 decembrie 2017)
- Dreapta: QLIKE mediu împărțit la cel al prognozei istorice (media lui r_t^2 pe ultimii 10 ani), pentru ziua următoare, săptămîna următoare și lunile 1–8

MFM_ch5_mf2_garch ▶ Interactiv

MF2-GARCH: metoda lucrării și replicarea din curs

- Lucrarea: QMLE Gaussian, erori standard Bollerslev–Wooldridge, m ales prin BIC pentru $m \leq 160$
  - prognozele pe s zile au formă închisă (Teorema 2), cu $\kappa_z = \mathrm{E}[Z_t^4]$ estimat în eșantion
  - în afara eșantionului, 2010–2023: fereastră mobilă (*rolling*), reestimare la 21 de zile de tranzacționare, m reales prin BIC
  - ținta: dispersia realizată din randamente de 5 minute plus randamentul de peste noapte (*overnight*); pierderi RMSE și QLIKE, raportate la prognoza istorică
- Replicarea din curs: S&P 500, randamente log zilnice, 3 ianuarie 1990 – 18 septembrie 2026 (9 245 de zile)
  - aceeași specificație (MF2-GARCH-rw-m) și același estimator, pe 36 de ani în loc de 52
  - în afara eșantionului: 2010–2026, fereastră mobilă de 20 de ani, reestimare la 21 de zile, $m = 63$ ales o singură dată, prin BIC pe 1990–2009
  - ținta: suma pătratelor randamentelor zilnice; datele cursului nu au randamente de 5 minute înainte de 2020
  - QLIKE $= y/f - \ln(y/f) - 1$ (y ținta, f prognoza): $y/f + \ln f$ minus $\ln y + 1$, care nu depinde de prognoză; raportul QLIKE omite zilele cu $y = 0$: 1 din 4 203 la orizontul de o zi
  - test Diebold–Mariano MF2-GARCH față de GJR pe diferența lui $y/f + \ln f$, definită și pentru $y = 0$; Newey–West cu atîtea laguri cîte zile are ținta
- Rezultatele pe 2010–2019 se compară cu Tabelul 4 al lucrării
  - 2010–2026 include șocul din martie 2020; în testele din Tabelul 5, lucrarea dă pondere zero zilelor cu dispersia realizată peste percentila 99

MF2-GARCH: cîștigul de precizie pe orizonturi și perioade

- În eșantion, BIC alege tot $m = 63$; log-verosimilitatea crește cu 57,1 față de GJR-GARCH, BIC scade cu 96
  - componenta rapidă: $\hat{\phi} = 0{,}935$ (timp de înjumătățire 10 zile); GJR-GARCH: 0,978 (32 de zile)
  - componenta lentă: $\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 = 0{,}989$, dar $\mathbb{E}\tau_t$ urmează o recursie AR(63); rădăcina ei dominantă, 0,9966, corespunde asimptotic unei înjumătățiri în circa 204 de zile
  - un șoc într-o singură eroare zilnică ridică τ_t timp de 63 de zile; efectul scade apoi la jumătate după încă 137 de zile
  - $\hat{\lambda}_1 = 0{,}067$ (eroarea standard 0,051), $\hat{\lambda}_2 = 0{,}922$ (0,059); în lucrare: 0,112 (0,054) și 0,870 (0,062)
- 2010–2019, QLIKE relativ pe luna 8: 0,714 pentru MF2-GARCH, 0,806 pentru GJR-GARCH (t DM $-2{,}66$)
  - pe luna 1: 0,578 și 0,576 (t DM 0,07); RMSE relativ pe luna 1: 0,721 și 0,762
  - în lucrare, QLIKE relativ pe luna 8: 0,859 și 0,918
- 2010–2026: ordinea QLIKE se inversează de la luna 1 la luna 8 (luna 8: 0,911 față de 0,838, t DM 0,99)
  - RMSE relativ rămîne mai mic pentru MF2-GARCH pe lunile 1–5 (luna 1: 0,916 față de 0,960, t DM $-1{,}16$)
- Tipul de dovadă: o comparație de prognoze; direcția lucrării se regăsește la orizonturi lungi pe 2010–2019, nu și pe 2010–2026
- Limitele
  - ținta din randamente zilnice este mai zgomotoasă decît dispersia realizată, deci testele DM au putere mai mică
  - dispersia randamentelor este finită doar dacă $\Gamma_m < 1$ (Teorema 1 a lucrării), condiție în plus față de $\phi < 1$ și $\lambda_1 + \lambda_2 < 1$: $\hat{\Gamma}_{63} = 0{,}883$ pe tot eșantionul, între 0,881 și 0,950 în cele 201 de ferestre mobile
  - $\hat{\alpha} = 0{,}000$, la frontieră (în lucrare 0,003): erorile standard obișnuite nu se aplică acestui parametru Andrews (2001)
  - QMLE și pierderile în unități de dispersie cer moment de ordin patru finit, pus sub semnul întrebării în Capitolul 1; $\hat{\kappa}_z = 5{,}03$

Întrebări deschise și bucla descoperirii (1/2)

- Întrebări
  - depășesc prognozele bazate pe învățare automată sau pe măsuri realizate un GARCH bine specificat pentru dispersia zilnică a acțiunilor, în afara eșantionului?
  - rămîne răspunsul valabil după luarea în calcul a numărului de modele comparate?
- Literatura
  - Christensen, Siggaard & Veliyev (2023): metodele de învățare automată, cu puțină calibrare, sînt competitive cu modelele de tip HAR
  - Hansen, Lunde & Nason (2011): Model Confidence Set este instrumentul potrivit cînd concurează multe modele
- Afirmațiile formale, $d_t = L(r_t^{\mathbf{2}}, h_t^A) - L(r_t^{\mathbf{2}}, h_t^B)$, fiecare cu ipoteza nulă și regula de decizie
  - Egalitatea A–B: $H_{\mathbf{0}}\colon \mathbb{E}d_t = 0$, respinsă la 5% dacă $|t_{DM}| > 1{,}96$
  - Superioritatea lui A: $H_{\mathbf{0}}\colon \mathbb{E}d_t \geq 0$, respinsă la 5% dacă $t_{DM} < -1{,}645$
  - Apartenența la Model Confidence Set privește tot setul de modele, nu perechea A–B
  - Stabilitatea: un test separat al egalității lui $\mathbb{E}d_t$ între subperioadele pre-înregistrate

Întrebări deschise și bucla descoperirii (2/2)

- Bucla
  - Un asistent AI propune harta literaturii, ipoteze concurente, codul, un plan de robustețe și o critică în stilul unui referent
  - Cercetătorul verifică fiecare Digital Object Identifier (DOI, identificatorul permanent al publicației), reproduce fiecare cifră și fixează planul înainte de prima rulare
- Verificări specifice prognozelor de volatilitate
  - Deplasarea de anticipare (*look-ahead bias*), adică folosirea unor informații indisponibile la data prognozei: h_t nu trebuie să se schimbe cînd se modifică r_t
  - O pierdere robustă la aproximare (QLIKE, MSE)
  - Căutarea modelelor: Model Confidence Set sau corecția Bonferroni (pragul de 5% împărțit la numărul de teste)
  - Scara și convergența optimizatorului
  - DOI-uri sau argumente ale funcțiilor din pachetul `arch` inventate de asistent (prompturi reutilizabile și lista completă de verificare: Anexă)

Mini-studiu de caz și un punct de plecare pentru proiect

- O afirmație tipică a unui asistent: „GJR-t depășește GARCH-t datorită efectului de levier”
  - d_t = QLIKE(GJR-t) − QLIKE(GARCH-t), 2 693 de zile, 2016–2026: $\bar{d} = -0{,}025$, DM $t = -1{,}22$
- O ipoteză auxiliară, nu o implicație necesară a efectului de levier: cîștigul apare după zilele de scădere
  - Regresie pe tot calendarul: $d_t = a + b\,1(r_{t-\mathbf{1}} < 0) + u_t$, HAC cu 5 laguri
  - $\hat{b} = 0{,}019$ (SE 0,041, $t = 0{,}46$): nicio dovadă a unei diferențe între zilele de după o scădere (1 223) și celelalte (1 470)
  - Pe subperioade: $t = -0{,}02$ în 2016–2020 și $t = -4{,}06$ în 2021–2026
  - Doar descriptiv (modele imbricate, fereastră în expansiune)
  - Continuarea calibrată: aceeași regresie într-un test GW cu fereastră fixă
- Tipul de dovadă: comparație între proceduri
- **Punct de plecare pentru proiect**
  - Intră prognozele bazate pe învățare automată în Model Confidence Set alături de GARCH, GJR și EGARCH pentru S&P 500 și BET, 2016–2026?
  - Replicați întîi tabelul QLIKE
  - Pre-înregistrați modelele, pierderile, împărțirile și rata de eroare
  - Notați utilizarea AI în `AI_USE.md` și fiecare eroare depistată în `AI_ERRORS.md` (descrierea completă: ▸ Anexă)

Sinteză: un flux de decizie

- **1. Detectăm**
  - $Q(10)$ pe r_t^2 și testul LM
  - Gruparea volatilității apare pe toate cele șase piețe
  - Persistența este aproape de 1
  - La Bitcoin și EUR/RON, estimarea atinge frontiera IGARCH
- **2. Estimăm**
  - GARCH, GJR, EGARCH cu inovații Normale, Student-t, t asimetrice
  - Randamente în %
  - Verificăm convergența și parametrii la limită
- **3. Diagnosticăm**
  - Nivelul, pătratele și semnele lui $\hat{z}_t$, precum și cele mai mari valori
  - Testele naive sînt conservatoare
- **4. Prognozăm**
  - Recursia dă dispersiile pe mai mulți pași
  - Regula rădăcinii pătrate a timpului ignoră revenirea la medie
- **5. Comparăm**
  - În afara eșantionului: QLIKE, GW cu fereastră mobilă și Model Confidence Set
  - GARCH depășește EWMA și Hist-20
  - Modelele din familia GARCH sînt greu de departajat
- **6. Raportăm incertitudinea**
  - SE robuste (valide dacă $\mathbb{E}z_t^4 < \infty$) și teste care țin cont de frontieră
  - Timpi de înjumătățire ca intervale $[h_{lo}; \infty)$ cînd $\alpha + \beta \approx 1$

Autoevaluare și legătura cu Capitolul 6

Întrebări de verificare

- De ce supraestimează regula rădăcinii pătrate a timpului riscul pe 10 zile după o zi cu volatilitate ridicată?
- De ce se compară testul LR al inovațiilor Normale față de Student-t cu 2,71 și nu cu 3,84?
- De ce poate un interval simetric pentru timpul de înjumătățire să conțină valori negative?
- De ce diferența dintre VIX și volatilitatea GARCH nu măsoară prima de risc a dispersiei?

Capitolele următoare

- Capitolul 6: volatilitate multivariată și corelații dinamice (DCC)
- Capitolele 7–8: Value at Risk și expected shortfall cu volatilitate GARCH și backtesting-ul lor
- Capitolul 9: volatilitatea realizată și memoria lungă
- Seminarul 5: recursia dispersiei pas cu pas
  - GARCH-t și GJR pe date reale
  - Un răspuns AI de verificat
  - Teste bootstrap și comparații de prognoze

Autoevaluare: răspunsuri scurte

- **Regula rădăcinii pătrate a timpului**
  - După o zi cu volatilitate ridicată, $\sigma^2_{t+1} > \sigma^2$, dispersia de termen lung
  - Prognozele zilnice scad spre σ^2, deci suma lor este sub $H\sigma^2_{t+1}$
  - Seminarul 5, A1
- **2,71 în loc de 3,84**
  - Sub H_0, $1/\nu = 0$ este pe frontieră: în circa jumătate din eșantioane estimarea este la limită și $LR = 0$, deci legea este $\frac{1}{2}\chi^2_0 + \frac{1}{2}\chi^2_1$, cu valoarea critică 2,71 la 5%
- **Timpi de înjumătățire negativi**
  - $h = \ln 0{,}5 / \ln p$ crește exploziv cînd $p \to 1$
  - Metoda delta o înlocuiește cu o dreaptă, deci $\hat{h} \pm 1{,}96\,\widehat{\mathrm{SE}}$ ignoră curbura
  - Se transformă în schimb intervalul pentru p
  - Seminarul 5, A2
- **VIX față de GARCH**
  - Comparația corectă: VIX^2, media neutră la risc (*risk-neutral*) a dispersiei pe 30 de zile, față de o prognoză GARCH a dispersiei pe 30 de zile sub probabilitatea reală
  - $\hat{\sigma}_t$ este o volatilitate pe o zi, deci diferă atît orizontul, cît și probabilitatea

Decizia practică

- **Ce aleg**: un model din familia GARCH cu inovații Student-t; pentru indicii bursieri, GJR-t
  - GJR-t are cel mai mic QLIKE în afara eșantionului (0,731) și valoarea p 1,000 în MCS (*Model Confidence Set*, mulțimea de încredere a modelelor)
  - EWMA și Hist-20 sînt clar mai slabe (t DM = 3,47 și 4,10)
- **În ce condiții**
  - Persistența GJR-t este sub 1: $\hat{\alpha} + \hat{\gamma}/2 + \hat{\beta} = 0{,}9835$ la S&P 500, 0,9897 la BET
  - Restricțiile active se raportează: la S&P 500, $\hat{\alpha} = 0$ atinge limita $\alpha \geq 0$, deci eroarea standard a lui $\hat{\alpha}$ nu este cea obișnuită
  - Erorile standard ale MLE Student-t presupun densitatea corectă; altfel, erorile robuste cer momente finite ale scorului, pe care $\hat{\nu} > 4$ nu le garantează singur
  - $Q(10)$ pe $\hat{z}_t^2$ și LM(5) nu mai detectează gruparea volatilității
- **Ce rezultat m-ar face să renunț**
  - Estimarea atinge frontiera $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 1$, ca la Bitcoin și EUR/RON: prognoza dispersiei crește atunci cu $\hat{\omega}$ pe zi
  - Modelul iese din Model Confidence Set de 90% sau pierde în QLIKE în fața EWMA, în afara eșantionului

QMLE Gaussian: normalitatea asimptotică și erorile standard

- **Normalitatea asimptotică** a lui $\vartheta = (\omega, \alpha, \beta)$ (GARCH pur, media cunoscută): adăugăm ϑ_0 interior și $\kappa_z = \mathbb{E}z_t^4 < \infty$
  - $\sqrt{n}(\hat{\vartheta} - \vartheta_0) \to N\left(0, (\kappa_z - 1)J^{-1}\right)$, $J = \mathbb{E}[g_t g_t']$, $g_t = \partial \ln \sigma_t^2 / \partial \vartheta$
  - κ_z: kurtosis-ul lui z_t (3 dacă este Normal)
  - g_t: gradientul lui $\ln \sigma_t^2$
  - J: media produsului său exterior
  - interior: nicio restricție activă
- Estimatorul sandwich $\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A}^{-1}$ estimează $(\kappa_z - 1)J^{-1}$
- Inversa hessianei $\hat{A}^{-1}$ estimează $2J^{-1}$
  - A: minus hessiana medie (derivatele de ordinul doi) a lui ℓ/n
  - B: dispersia scorului (derivatele de ordinul întîi) pe observație
  - Eroarea standard (SE) robustă / clasică $= \sqrt{(\kappa_z - 1)/2}$: 1 sub normalitate, peste 1 cu cozi groase
- Variante (medie estimată, IGARCH, cazul exploziv): Anexă

QMLE: validitatea inferenței în aplicații

- S&P 500, GARCH(1,1) cu verosimilitate Normală: kurtosis-ul reziduurilor $\hat{\kappa}_z = 4{,}73$
  - Teoria: SE robustă / clasică $= \sqrt{(4{,}73-1)/2} = 1{,}37$ (Seminarul 5, A5)
  - Raportul observat: 1,37 pentru $\hat{\alpha}$ și 1,37 pentru $\hat{\beta}$
- Bitcoin: GARCH-t dă $\hat{\nu} = 3{,}18 < 4$ grade de libertate
  - Sub această lege $\mathbb{E}z_t^4 = \infty$
  - Condiția pentru normalitatea asimptotică a QMLE Gaussian nu este îndeplinită
  - Kurtosis-ul reziduurilor QMLE Gaussian nu se stabilizează: 19,8 pe prima jumătate, 14,6 pe tot eșantionul
  - Pe tot eșantionul, SE robustă / clasică: 2,51 pentru $\hat{\alpha}$ și 2,01 pentru $\hat{\beta}$, față de valoarea din formulă, 2,61, care presupune $\kappa_z < \infty$
- Hall & Yao (2003): atunci QMLE Gaussian converge mai lent decît $\sqrt{n}$
  - Spre o distribuție-limită care nu este Normală
  - Statisticile t robuste ale QMLE Gaussian nu sînt valide
- Remedii
  - O cvasi-verosimilitate cu cozi groase, cu ajustarea scalei Fan, Qi & Xiu (2014)
  - Sau MLE Student-t (scor mărginit: nu cere momentul de ordin patru dacă legea este corectă)
  - Cu inferență bootstrap lîngă frontiere

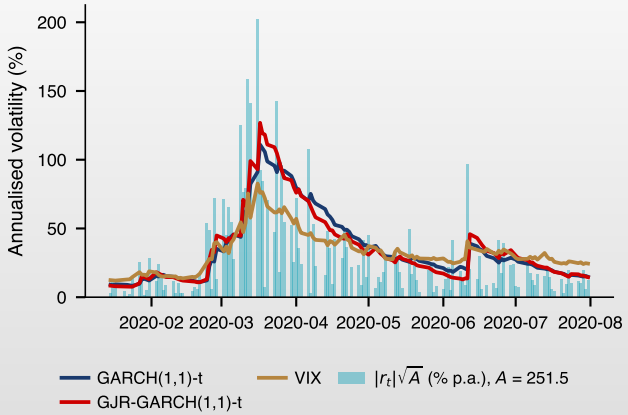
MFM_ch5_inference

Teste la frontieră pe datele cursului

- Inovații Normale față de Student-t, GARCH(1,1)
  - $LR = 311{,}9$ (S&P 500), 1 082,0 (Bitcoin; Seminarul 5, B6)
  - Mult peste 2,71: cozile groase sînt clar susținute de date
  - Distribuția de tip amestec contează doar în cazurile la limită
- IGARCH, H_0: $\alpha + \beta = 1$ (GARCH-t): $LR = 1{,}09$ (S&P 500), 1,14 (BET)
  - S&P 500, valorile p: 0,30 (χ^2_1), 0,15 (amestec), 0,17 (bootstrap parametric sub H_0 pe statistica $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$, 998 de reestimări convergente din 999 de eșantioane simulate)
  - BET, valorile p: 0,28, 0,14 și 0,17 (Seminarul 5, B8)
- S&P 500, bootstrap sub H_0: 53% din reestimări au $\hat{\alpha} + \hat{\beta} \geq 0{,}999$
  - La frontiera $\alpha + \beta = 1$, cum prezice distribuția de tip amestec
- Concluzie: rădăcina unitară în dispersie nu poate fi respinsă nici la S&P 500, nici la BET

MFM_ch5_seminar

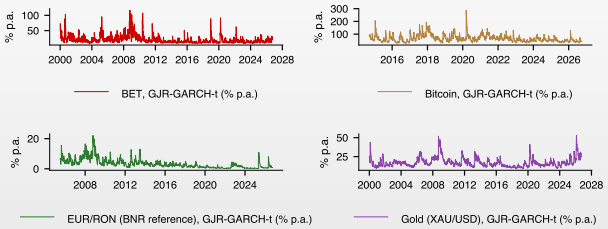
Detaliu: crahul COVID-19, 2020



- COVID-19, ianuarie–iulie 2020: $|r_t|$ anualizat, volatilitatea GARCH-t și GJR-GARCH-t, VIX
- 24 februarie ($r_t = -3{,}41\%$): VIX a trecut de la 17,1% la 25,0% în aceeași zi
- GARCH-t de la 12,2% la 22,5% abia a doua zi
  - GARCH reacționează cu o zi întîrziere, piața include informația în preț imediat
- După $r_t = -12{,}8\%$ pe 16 martie, vîrfuri pe 17 martie: GARCH-t 111%, GJR-t 127%
  - Vîrful GJR este mai ridicat, deoarece șocurile au fost negative
- Parametrii sînt estimați pe tot eșantionul (2000–2026)
  - O prognoză cu parametri estimați înainte de 2020 (ca în Seminarul 5, B5) dă un vîrf diferit

MFM_ch5_sp500_vix

BET, Bitcoin, EUR/RON și aur



- BET: anul 2008 domină, nivelul actual este 26,4%
- Bitcoin: 50–100% este obișnuit
  - Cel mai înalt vîrf, în martie 2020
- EUR/RON: perioade calme (managed float), întrerupte de episoade volatile în 2022 și 2025
  - Slab descrise de un GARCH zilnic
- Aur: un nou maxim de 53% în 2026
- Bitcoin și EUR/RON: estimarea este pe frontiera IGARCH
  - Deci traiectoriile sînt doar descriptive (structura la termen)

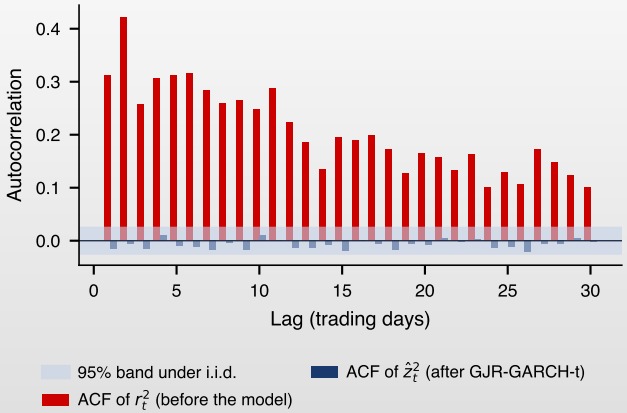
MFM_ch5_markets

Diagnosticul reziduurilor depinde de parametrii estimați

- $\hat{z}_t$ depinde de $\hat{\theta}$: statistica Ljung–Box pe $\hat{z}_t^2$ nu este exact χ^2_m Li & Mak (1994)
- Motivul: dispersia estimată a preluat deja o parte din dependența de la lagurile mici
- S&P 500, QMLE Gaussian pentru GARCH(1,1), $Q(10)$ pe $\hat{z}_t^2$
  - Ljung–Box naiv: 16,2, valoarea p 0,094: nerespins la 5%
  - Corectat pentru parametrii estimați: 19,0, valoarea p 0,041: respins la 5%, verdictul se inversează
- Testul naiv este conservator: sub H_0 respinge mai rar decît nivelul nominal, deci are și putere mai mică
- Testul comun de asimetrie are aceeași limită (matricea de corecție: Anexă)

MFM_ch5_inference

Diagnostic: pătratele randamentelor și pătratele reziduurilor



- S&P 500, lagurile 1–30: autocorelațiile lui r_t^2 (înainte de model) și ale lui $\hat{z}_t^2$ din GJR-GARCH-t
- După model ele sînt în banda i.i.d.: la aceste laguri nu se mai detectează dinamică a dispersiei
- Banda este cea naivă: cu parametri estimați este prea largă la laguri mici (slide-ul anterior)

MFM_ch5_innovations

Diagnostic pe alte piețe: un tabel de decizie

Piața	Tiparul reziduurilor	Problema posibilă	Verificarea următoare
BET	$Q(10)$ pe $\hat{z} = 116{,}6$	autocorelație în medie (tranzacționare redusă, Capitolul 2)	model AutoRegressive AR(1) pentru medie
Bitcoin	$Q(10)$ pe $\hat{z}^2 = 4{,}7$, testul comun de asimetrie 1,3: nerespins	$\hat{\nu} = 3{,}18 < 4$: $\mathrm{Var}(z_t^2) = \infty$, deci calibrarea χ^2 nu este justificată	teste pe $\lvert\hat{z}_t\rvert$
EUR/RON	exces de kurtosis 3 190	un singur reziduu de 154 (mai 2025) domină	inspectarea celor mai mari reziduuri și un model cu scor mărginit
Aur	EGARCH: $Q(10)$ pe $\hat{z}^2 = 48{,}6$	grupare a volatilității rămasă, deși BIC este bun	alegere prin diagnostic, nu doar prin BIC

- Examinați întotdeauna cele mai mari reziduuri: o singură observație poate domina toate diagnosticele

MFM_ch5_innovations

Compararea metodelor de prognoză (1/3): limita DM și testul Giacomini–White

- **Întrebarea**: cum comparăm prognozele unor modele imbricate, cu parametri estimați?
- **Limita testului DM** West (1996), Clark & McCracken (2001)
  - Cu parametri estimați, modele imbricate și fereastră în expansiune, diferența de pierderi degenerează sub H_0
  - DM nu mai urmează legea $N(0,1)$
- **Testul Giacomini–White** Giacomini & White (2006) testează **metoda** de prognoză
  - Modelul plus o fereastră mobilă de $W = 1\,000$ de zile
- Zgomotul estimării nu dispare, deci testul se aplică și modelelor imbricate
  - Sub condițiile teoremei: momente finite, dependență limitată, Ω nesingulară
- $GW = n\,\bar{Z}^{\top}\hat{\Omega}^{-1}\bar{Z} \to \chi^2_2$ sub H_0: $\mathbb{E}[d_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = 0$, cu $Z_{t+1} = (1, d_t)^{\top} d_{t+1}$
  - d_{t+1}: diferența de pierderi
  - $\bar{Z}$: media lui Z_{t+1}
  - $\hat{\Omega} = n^{-1}\sum Z_{t+1} Z_{t+1}^{\top}$: momentul secund necentrat
  - n: numărul de prognoze
- Respingem la 5% dacă $GW > 5{,}99$

Compararea metodelor de prognoză (2/3): Model Confidence Set

- **Întrebarea**: care modele rămîn candidate pentru „cel mai bun", dacă le comparăm pe toate?
- Cu șase modele, comparațiile față de GARCH-t înseamnă cinci teste
  - **Model Confidence Set (MCS)** Hansen, Lunde & Nason (2011) compară toate cele 15 perechi
- Testele multiple cresc rata respingerilor false
- MCS elimină cel mai slab model pînă cînd acuratețea egală nu mai este respinsă
- Mulțimea finală conține cel mai bun model cu probabilitatea $\geq 1 - \alpha$, aici $\alpha = 10\%$
- Bootstrap staționar: reeșantionează blocuri de lungime aleatoare (geometrică)
  - În medie 10 zile, astfel încît dependența serială se păstrează

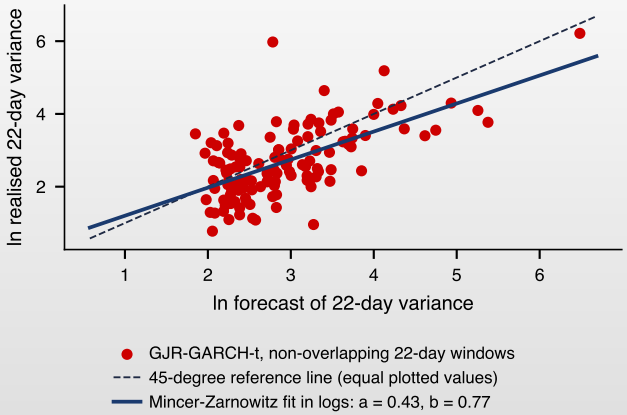
Compararea metodelor de prognoză (3/3): rezultatele pentru S&P 500

- **Giacomini–White**: fereastră mobilă, 2 693 de prognoze, fiecare model față de GARCH-t
  - Respinge doar EWMA și Hist-20
- **Model Confidence Set (MCS) 90%**: fereastră în expansiune, QLIKE, bootstrap staționar
  - Păstrează cele patru modele GARCH, elimină EWMA și Hist-20
- Aceeași concluzie ca testul DM
- GW, cu fereastră mobilă, are inferența calibrată sub condițiile teoremei
  - MCS (fereastră în expansiune) se citește cu aceeași rezervă ca DM
  - Tabelul complet și statistica MCS: Anexă

Model	GW p	MCS p
GARCH-N	0,058	0,588
GARCH-t	–	0,341
GJR-t	0,285	1,000
EGARCH-t	0,202	0,588
EWMA	0,004	0,008
Hist-20	$<0{,}001$	0,002

MFM_ch5_inference

Prognoze pe o lună: Mincer–Zarnowitz în logaritmi (1/2)



- Prognoza GJR-t a dispersiei pe 22 de zile față de suma realizată a 22 de pătrate ale randamentelor
  - 122 de ferestre nesuprapuse
- Regresia $\ln Y = a + b \ln \hat{h} + u$, Y: suma realizată, $\hat{h}$: prognoza
- R^2 în logaritmi 0,39
- Panta în logaritmi $b = 0{,}77$ (SE 0,07): doar descriptivă
  - Deoarece $\mathbb{E}[\ln Y \mid \mathcal{F}] \neq \ln \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}]$
  - Deci $b < 1$ nu dovedește prognoze prea dispersate

MFM_ch5_forecast_evaluation

Prognoze pe o lună: Mincer–Zarnowitz în logaritmi (2/2)

- În niveluri b este doar 0,66: două ferestre COVID-19 domină
- De aceea comparăm prognozele pe 22 de zile cu QLIKE Patton (2011)
  - GARCH-N 4,12, GARCH-t 4,13, GJR-t 4,14, EWMA 4,26 (mai mic = mai bun)
- La o lună, asimetria GJR nu mai aduce un cîștig

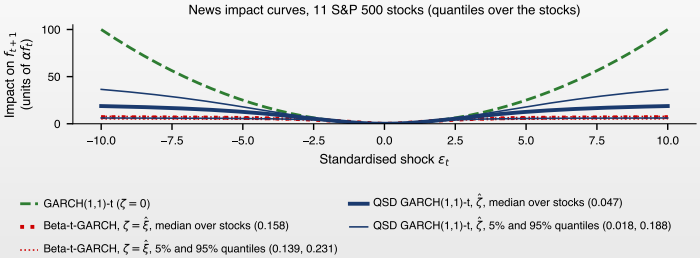
MFM_ch5_forecast_evaluation

QSD: eșantionul cursului și rezultatele studiului

- Eșantionul cursului: 11 acțiuni mari (lucrarea: 400)
  - 1995 (sau mai tîrziu) – februarie 2019, 4 986–6 081 randamente fiecare
- $X_t = \mathrm{VIX}_t^2/252$
- $\zeta = 0$ respinsă pentru 9 din 11 (lucrarea: 89,5%)
- $\xi = \zeta$ respinsă pentru 8 din 11 (lucrarea: 53,5%)
- Mediana lui $1/\hat{\zeta}$: 21,4 (QSD) față de 6,32 (Beta-t-GARCH)
- În lucrare: 9,48 față de 5,07
- 11 companii selectate, încă listate: rezultate imprecise și nereprezentative

MFM_ch5_quasi_score_driven

QSD: impactul știrilor (cf. lucrarea, Fig. 3)



- Funcțiile de actualizare la cuantile ale celor 11 estimări, la același αf_t
  - Contribuția lui ϵ_t la f_{t+1}, în unități de αf_t
  - GARCH-t adaugă $\epsilon_t^2\, \alpha f_t$
- Un șoc de 5 abateri standard adaugă 25 (GARCH-t), 12,6 (QSD median) și 6,2 (Beta-t-GARCH median)
- Un șoc de 10 abateri standard adaugă 100 (GARCH-t), 18,8 (QSD median)
  - 7,0 (Beta-t-GARCH median, cu limita $(1+\zeta)/\zeta = 7{,}3$)
- Atenuarea QSD este intermediară între GARCH-t și Beta-t-GARCH

MFM_ch5_quasi_score_driven

Datele folosite în acest capitol

Serie	Proprietar / sursă	Început	Obs.	Obs. pe an	Vol. (% anual)	Exces de kurtosis
S&P 500	S&P Dow Jones Indices	2000	6 717	251,5	19,2	10,7
BET	Bursa de Valori București	2000	6 670	249,8	22,1	11,1
BET-TR	Bursa de Valori București	2014	2 992	249,7	15,4	17,8
Bitcoin (BTC/USD)	burse cripto (compozit)	2014	4 384	365,3	66,6	12,0
EUR/RON, curs de referință	BNR	2005	5 352	252,4	4,4	15,1
Aur (XAU/USD)	piața spot	2000	6 949	260,2	17,6	7,7

- Indici bursieri și aur: doar zilele lucrătoare
- Vol.: volatilitatea de selecție anualizată cu numărul de observații pe an al fiecărei serii

MFM_ch5_arch_effects

Înapoi

Teste ale scorului unilaterale și problema Davies

- Alternativa este unilaterală ($\alpha_i \geq 0$): testul χ^2 bilateral pierde putere
  - Lee & King (1993): test al scorului unilateral, construit pe suma componentelor scorului, $N(0,1)$ sub H_0, respinge doar în coada superioară
- Față de GARCH(1,1), ipoteza nulă $\alpha = 0$ lasă β neidentificat (problema Davies)
  - Statistica LM ARCH(q) este și testul scorului față de GARCH(p,q): aceeași statistică servește ambele alternative (Lee & King (1993))

înapoi

Robert Engle și Premiul Nobel din 2003



Robert F. Engle (2022)

Foto: Jon Demske (2022); CC BY-SA 4.0; Wikimedia Commons



Clive W.J. Granger (2008)

Foto: Olaf Storbeck (2008); CC BY-SA 2.0; Wikimedia Commons

- Premiul Nobel 2003
  - Engle „pentru metode de analiză a seriilor de timp economice cu volatilitate variabilă în timp (ARCH)"
  - Împărțit cu Clive Granger (cointegrare)
- Prelegerea Nobel: Engle (2004), despre risc și volatilitate în practica financiară
- Tim Bollerslev, doctorandul lui Engle, a generalizat ARCH la GARCH în 1986

Înapoi

Kurtosis-ul: rotunjirea și o traiectorie simulată lungă

- S&P 500, GARCH-N: condiția de moment este 0,990509, deci $K = 12{,}2$ are numitorul $1 - 0{,}990509$
  - Rotunjirea la $\hat{\alpha} = 0{,}120$, $\hat{\beta} = 0{,}860$ dă 0,9892 și $K = 11{,}0$: raportați astfel de funcții din estimări nerotunjite
- GARCH(1,1) simulat de pe slide-ul de simulare, un milion de zile
  - Exces de kurtosis 2,47 (teoretic 3,06)
  - Autocorelația de ordin 1 a lui ε_t^2: 0,26
  - Kurtosis-ul de selecție converge încet: precizia lui depinde de momentul de ordin opt, infinit pentru acești parametri

înapoi

QMLE: variante ale teoremei

- Media estimată: scorul capătă termenul $\varepsilon_t \left(\partial \mu_t / \partial \theta\right) / \sigma_t^2$
- Covariația nu mai este $(\kappa_z - 1) J^{-1}$: blocul mediei depinde și de asimetria lui z_t
- IGARCH ($\alpha + \beta = 1$): staționaritatea strictă rămîne valabilă Lumsdaine (1996)
  - QMLE rămîne consistent și asimptotic Normal
- Cazul exploziv, $\mathbb{E} \ln(\alpha z_t^2 + \beta) > 0$
  - Jensen & Rahbek (2004) estimează (α, β) cu ω fixat, deoarece ω nu poate fi estimat consistent

înapoi

Corecția Li–Mak pentru autocorelațiile pătratelor reziduurilor

- Autocorelațiile pătratelor reziduurilor $\hat{r}_k$: $\sqrt{n}\,\hat{r} \to N(0, C)$, $C = I - H' J^{-1} H/(\kappa_z - 1)$ Li & Mak (1994)
  - $\hat{r} = (\hat{r}_1, \ldots, \hat{r}_m)'$
  - I: matricea identitate
  - C: covarianța corectată, mai mică decît I pe diagonală
  - g_t, J: ca în teorema QMLE
  - $H_k = \mathbb{E}[g_t(z_{t-k}^2 - 1)]$: cît din dependența de ordin k absoarbe dispersia estimată
  - regula ARMA χ^2_{m-p-q} nu se aplică
  - Media μ este și ea estimată: C se calculează din covarianța comună a lui $\hat{r}$ și a scorului QMLE pentru $(\mu, \omega, \alpha, \beta)$, inclusiv termenii încrucișați cu $\mathbb{E}z_t^3$
- S&P 500, QMLE Gaussian pentru GARCH(1,1): $C_{1,1} = 0{,}78$, $C_{5,5} = 0{,}93$, $C_{10,10} = 0{,}97$
  - Corecția este cea mai mare la laguri mici, unde $\hat{\alpha}$ a preluat deja dependența
  - Statistica corectată $n\hat{r}' C^{-1} \hat{r}$ este χ^2_{10} sub H_0

MFM_ch5_inference

Înapoi

S&P 500: evaluarea prognozelor, toate statisticile

Model	QLIKE	MSE	DM t față de GARCH-t	MZ b	MZ R^2	Wald p
GARCH-N	0,750	22,3	−1,47	0,97	0,250	1,00
GARCH-t	0,756	22,8	–	0,88	0,238	0,80
GJR-t	0,731	21,8	−1,22	0,84	0,276	0,68
EGARCH-t	0,745	21,3	−0,36	1,24	0,293	0,71
EWMA	0,814	24,7	3,47	0,89	0,172	0,69
Hist-20	0,888	26,1	4,10	0,68	0,152	0,03

- Pierderi medii pe 2 693 de zile
- DM pe QLIKE, HAC cu 5 laguri
- DM t negativ: modelul este mai bun decît GARCH-t
- MZ: $r_t^2 = a + b\, h_t$
- Wald p: testul $a = 0$, $b = 1$

MFM_ch5_forecast_evaluation

Înapoi

Giacomini–White și MCS: tabelul complet și setările

Model	QLIKE (W)	t necond.	GW	p	MCS p
GARCH-N	0,750	1,86	5,70	0,058	0,588
GARCH-t	0,743	–	–	–	0,341
GJR-t	0,737	−0,19	2,51	0,285	1,000
EGARCH-t	0,745	0,06	3,19	0,202	0,588
EWMA	0,814	3,19	11,31	0,004	0,008
Hist-20	0,888	3,87	16,35	$<0{,}001$	0,002

- GW: statistica din textul principal, χ^2_2 sub H_0 (5,99 la 5%)
- t necond.: testul necondiționat (doar instrumentul 1)
  - O statistică t Diebold–Mariano pe pierderile cu fereastră mobilă
- Fereastră mobilă $W = 1\,000$ de zile, reestimată în fiecare ianuarie, 2 693 de prognoze
- Teste față de GARCH-t
  - t necondiționat folosește HAC cu 5 laguri
  - GW folosește momentul secund necentrat, fără HAC
- MCS pe prognozele cu fereastră în expansiune: QLIKE
  - Statistica T_R: cel mai mare $|t|$ al diferențelor de pierderi pe perechi
  - Bootstrap staționar (bloc mediu 10, 10 000 de extrageri)

înapoi
MFM_ch5_inference

Modele bazate pe scor, Realized GARCH și modele cu componente

- **Bazate pe scor (GAS)** Creal, Koopman & Lucas (2013): $\sigma^2_{t+1} = \omega + \alpha\, s_t + \beta\, \sigma^2_t$
  - s_t: scorul scalat al densității Student-t în raport cu σ^2_t
  - Scorul este mărginit în z_t: o valoare extremă ca reziduul EUR/RON de 154 modifică dispersia mult mai puțin decît în GARCH
- **Realized GARCH** Hansen, Huang & Shek (2012)
  - Adaugă o ecuație de măsurare care leagă σ^2_t de o dispersie realizată
  - Folosește informația intrazilnică și reacționează mai repede
  - Puntea spre Capitolul 9
- **GARCH-MIDAS** (*GARCH with Mixed Data Sampling*, GARCH cu eșantionare mixtă a datelor, componentă de termen lung) Engle, Ghysels & Sohn (2013): $\sigma^2_t = \tau_t\, g_t$
  - O componentă lentă de termen lung τ_t determinată de date macro (frecvențe mixte)
  - g_t: o componentă GARCH(1,1) de medie 1 pentru variațiile pe termen scurt
  - Un nivel de termen lung variabil în timp preia schimbările de nivel care deplasează $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$ spre 1

Înapoi

Studiu de caz, metoda completă (1/2)

- **Motivația**: GARCH este determinat de ε_t^2 oricare ar fi densitatea
  - Deci un șoc extrem izolat poate produce o reacție excesivă a volatilității
  - Reacția durează zile sau săptămîni (Secțiunea 1 din lucrare)
  - Cu o densitate asimetrică la stînga, un model pur bazat pe scor crește volatilitatea mai mult după randamente pozitive: opusul efectului de levier (Exemplul 2)
  - Modelele QSD, ec. (3): $f_{t+1} = \omega + \alpha\,\psi(y_t, X_t, f_t, \theta) + \beta f_t$, ψ scorul scalat al unei funcții de actualizare ρ care nu coincide neapărat cu $\log p$
  - Teoria: consistență, normalitate asimptotică, testele LR și LM cu limite χ^2 (Secțiunea 3)
- **Estimarea**: $\zeta = 0$ rămîne în interiorul spațiului parametrilor prin ec. (31)–(32)
  - $\zeta \in (-1, 1/2)$
  - $\Psi(x) = x\,(1 - e^{-cx})/(1 + e^{-cx})$ aplicată ponderii, $c = 1\,000$
  - Testul PIT Diebold, Gunther & Tay (1998) cu corecția Pierce (1982) pentru parametri estimați prin verosimilitate maximă: se respinge dacă $|\sum_t \hat{u}_t - T/2| / \sqrt{T(1/12 - B\,\mathcal{I}(\theta)^{-1} B^\top)} > 1{,}96$
  - $B = \lim_{T\to\infty} T^{-1}\mathbb{E}[\partial \sum_t u_t / \partial\theta^\top]$, $\mathcal{I}$: informația Fisher pe o observație, T: lungimea eșantionului
  - Detectează o medie PIT deplasată, nu orice abatere de la uniformitate

înapoi

Studiu de caz, metoda completă (2/2)

- **Date**: 400 de acțiuni (Secțiunea 5)
  - Se elimină acțiunile cu mai puțin de 4 000 de observații sau cu probleme de convergență
  - Varianta asimetrică, ec. (47): o distribuție Student-t asimetrică pentru ϵ_t, cu parametrul de asimetrie κ, și parametri separați (ζ, τ) pentru actualizare
  - $\tau < 0{,}5$ produce efectul de levier oricare ar fi κ (Secțiunea 5.2)

Studiu de caz, un exemplu și limitele indicate de autori

- Centene, 4 330 de zile: $\hat{\xi} \approx 0{,}26$ (circa 4 grade de libertate) în toate cele trei modele, dar $\hat{\zeta} = 0{,}048$ (SE 0,027)
- LR 8,81 ($p = 0{,}003$) pentru $\xi = \zeta$ și 8,42 ($p = 0{,}004$) pentru $\zeta = 0$ (Tabelul 5)
- După o zi de crah din martie–aprilie 2008 (Fig. 4)
  - Volatilitatea GARCH-t rămîne mult peste cea Beta-t-GARCH
  - QSD se află între ele
- **Limitele** indicate de autori
  - Rezultatele mai bune decît cele ale GARCH-t și Beta-t-GARCH nu garantează adecvarea modelului QSD Student-t: testul PIT respinge cele trei modele pentru 40,0–46,0% din acțiuni (Tabelul 4)
  - În recursia nemodificată (30), $\zeta < 0$ sau $\zeta > 1/2$ nu definesc un model de volatilitate propriu-zis, iar $\zeta = 1/2$ cu $\varpi = 0$ este degenerat (Secțiunea 4.1)
  - Legea $N(T/2, T/12)$ pentru $\sum_t u_t$ este valabilă doar pentru parametri cunoscuți (corecția: slide-ul anterior)
- **Extinderi deschise** (Seminarul 5, C3)
  - Depășește actualizarea mărginită QSD modelul GJR-GARCH-t în QLIKE, în afara eșantionului, mai ales după martie 2020?
  - Reduce această actualizare influența reziduului EUR/RON de 154?

Înapoi

Bucla descoperirii: prompturi reutilizabile (1/2)

- Instrumentele sînt interschimbabile
  - Un asistent AI (Claude, ChatGPT, Gemini, GitHub Copilot)
  - Instrumente de căutare a literaturii științifice (Semantic Scholar, Elicit, Google Scholar)
- **Literatura**
  - *„Listează comparațiile out-of-sample dintre prognozele dispersiei bazate pe GARCH, HAR și învățare automată publicate după 2015, cu DOI, activ, funcție de pierdere, test și orizont."*
  - Verificăm fiecare DOI în Crossref
  - Verificăm că pierderea este robustă la o aproximare zgomotoasă Patton (2011)
- **Ipoteze**
  - *„Pentru afirmația că asimetria îmbunătățește prognozele pe o zi, listează mecanismele concurente (leverage effect, feedback de volatilitate, cîteva zile de criză) și ce prezice fiecare pentru d_t după semnul lui r_{t-1} și pe subperioade."*
- **Date și cod**
  - *„Scrie cod Python cu `arch` care reestimează GARCH-t și GJR-t în fiecare ianuarie pe o fereastră în expansiune, din fișierele de prețuri zilnice ale cursului, și salvează prognozele dispersiei pe o zi; niciun parametru nu folosește date de după originea prognozei."*
  - Replicăm întîi: QLIKE 0,756 (GARCH-t) și 0,731 (GJR-t), DM $t = -1{,}22$

Înapoi

Bucla descoperirii: prompturi reutilizabile (2/2)

- **Robustețe**
  - *„Scrie un plan pre-înregistrat: împărțiri după semnul lui r_{t-1} și pe subperioade, MSE pe lîngă QLIKE, orizontul de 22 de zile, lagul HAC și o corecție Bonferroni sau Model Confidence Set."*
  - Un placebo cu împărțiri aleatoare este calibrat doar dacă realocă blocuri de zile, păstrînd gruparea volatilității
- **Critica**
  - *„Joacă rolul unui referent: ar putea aproximarea r_t^2, un singur an de criză sau lagul HAC să creeze rezultatul meu? Propune cîte un test pentru a verifica fiecare explicație."*
- **Raportul**
  - Toate împărțirile și pierderile încercate, valorile p ajustate, codul
  - Valorile de inițializare ale generatoarelor de numere aleatoare și versiunile pachetelor
- O specificație aleasă după ce am văzut rezultatele este exploratorie și se raportează ca atare
- **Perioade influente**: un an de criză poate domina $\bar{d}$
- Raportăm subperioadele și declarăm dinainte dacă vreun an poate fi exclus

Înapoi

Punctul de plecare pentru proiect, complet

- Ramura cu dispersie realizată (HAR): 40 de acțiuni americane mari
  - Setul de date al cursului cu dispersii realizate la 5 minute, ianuarie 2015 – ianuarie 2026
- Pentru indicele S&P 500 și pentru BET nu există date intrazilnice
  - Deci această ramură se aplică acțiune cu acțiune
- Replicăm întîi tabelul QLIKE și împărțirile din mini-studiul de caz
- Livrabile
  - O pre-înregistrare de o pagină: modele, pierderi, împărțiri, rata de eroare și ce ar infirma afirmația
  - Cod pe datele de piață ale cursului, Model Confidence Set la 10%, o autocritică în stilul unui referent
  - `AI_USE.md` și `AI_ERRORS.md`
- Codul mini-studiului de caz: Quantlets/Ch_05/ai_discovery_case.py

Înapoi

Resurse suplimentare

- Cărți
  - Franke, Härdle & Hafner (2019), capitolele despre AutoRegressive Integrated Moving Average (ARIMA) și GARCH pentru serii financiare
  - Francq & Zakoïan (2019): teoria matematică a modelelor GARCH
- Cursuri Quantinar
  - Statistics of Financial Markets
  - Applied Time Series Analysis with Python
- Cod
  - Toate graficele și tabelele: Quantlets/Ch_05
  - Pachetul Python `arch`, de Kevin Sheppard (documentație)
- Lucrări conexe: entropia ca semnal de risc de coadă (*tail risk*), dincolo de dispersie
  - Pele, Lazar & Dufour (2017): entropia randamentelor intrazilnice EUR/JPY, Value at Risk și expected shortfall
  - Pele & Mazurencu-Marinescu-Pele (2019): entropia intrazilnică a Bitcoin și Value at Risk zilnic
  - Pele, Lazar & Mazurencu-Marinescu-Pele (2019): entropia cozii și expected shortfall

înapoi

Acronime folosite în acest material (1/3)

- **ACF**: AutoCorrelation Function — *funcția de autocorelație*
- **AI**: Artificial Intelligence — *inteligență artificială*
- **AIC**: Akaike Information Criterion — *criteriul informațional Akaike*
- **AR**: AutoRegressive (model) — *model autoregresiv*
- **ARCH**: AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity — *heteroscedasticitate condiționată autoregresivă*
- **ARIMA**: AutoRegressive Integrated Moving Average (model) — *model autoregresiv integrat cu medie mobilă*
- **ARMA**: AutoRegressive Moving Average (model) — *model autoregresiv cu medie mobilă*
- **BET**: Bucharest Exchange Trading (index) — *indicele de referință al Bursei de Valori București*
- **BET-TR**: BET Total Return (index) — *indicele BET cu dividendele reinvestite*
- **BIC**: Bayesian Information Criterion — *criteriul informațional bayesian*
- **BTC**: Bitcoin
- **BNR**: Banca Națională a României
- **COVID-19**: COronaVIrus Disease 2019 — *boala provocată de coronavirus, 2019*
- **DCC**: Dynamic Conditional Correlation — *corelație condiționată dinamică*
- **DOI**: Digital Object Identifier — *identificatorul permanent al unei publicații*
- **DM**: Diebold–Mariano (test) — *testul Diebold–Mariano de comparare a prognozelor*
- **EGARCH**: Exponential GARCH — *GARCH exponențial*
- **EUR**: euro, international currency code — *euro, codul monetar internațional*

Acronime folosite în acest material (2/3)

- **EWMA**: Exponentially Weighted Moving Average — *medie mobilă ponderată exponențial*
- **FIGARCH**: Fractionally Integrated GARCH — *GARCH integrat fracționar*
- **GARCH**: Generalised AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity — *heteroscedasticitate condiționată autoregresivă generalizată*
- **GARCH-M**: GARCH-in-Mean — *GARCH cu volatilitatea în ecuația mediei*
- **GARCH-MIDAS**: GARCH with Mixed Data Sampling (long-run component) — *GARCH cu eșantionare mixtă a datelor (componentă de termen lung)*
- **GARCH-N**: GARCH with Normal innovations — *GARCH cu inovații Normale*
- **GAS**: Generalised Autoregressive Score (model) — *model cu scor autoregresiv generalizat*
- **GED**: Generalised Error Distribution — *distribuția generalizată a erorilor*
- **GJR**: Glosten–Jagannathan–Runkle (asymmetric GARCH) — *GARCH asimetric Glosten–Jagannathan–Runkle*
- **GJR-GARCH**: Glosten–Jagannathan–Runkle GARCH — *GARCH asimetric Glosten–Jagannathan–Runkle*
- **GW**: Giacomini–White (test) — *testul Giacomini–White*
- **HAC**: Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent (standard errors) — *erori standard robuste la heteroscedasticitate și autocorelație*
- **HAR**: Heterogeneous AutoRegressive (model) — *model autoregresiv heterogen*
- **IGARCH**: Integrated GARCH — *GARCH integrat*
- **LM**: Lagrange Multiplier — *multiplicatorul Lagrange*
- **LR**: Likelihood Ratio (test) — *testul raportului de verosimilitate*

Acronime folosite în acest material (3/3)

- **MCS**: Model Confidence Set — *mulțimea de încredere a modelelor*
- **MF2-GARCH**: Multiplicative Factor Multi-Frequency GARCH — *GARCH multiplicativ cu mai multe frecvențe*
- **MLE**: Maximum Likelihood Estimation — *estimarea prin metoda verosimilității maxime*
- **MSE**: Mean Squared Error — *eroarea pătratică medie*
- **MZ**: Mincer–Zarnowitz (regression) — *regresia Mincer–Zarnowitz*
- **NIC**: News Impact Curve — *curba de impact a știrilor*
- **PIT**: Probability Integral Transform — *transformarea integrală de probabilitate*
- **QLIKE**: Quasi-LIKElihood (loss function) — *funcția de pierdere de tip cvasi-verosimilitate*
- **QMLE**: Quasi-Maximum Likelihood Estimator — *estimatorul de cvasi-verosimilitate maximă*
- **QQ**: Quantile–Quantile (plot) — *graficul cuantilă–cuantilă*
- **QSD**: Quasi Score-Driven (model) — *model bazat pe un cvasi-scor*
- **RMSE**: Root Mean Squared Error — *rădăcina erorii pătratice medii*
- **RON**: Romanian leu, international currency code — *leul românesc, codul monetar internațional*
- **SE**: Standard Error — *eroarea standard*
- **USD**: US dollar, international currency code — *dolarul american, codul monetar internațional*
- **VIX**: Chicago Board Options Exchange Volatility Index — *indicele de volatilitate al bursei de opțiuni din Chicago*
- **XAU**: gold, international currency code (one troy ounce) — *aur, codul monetar internațional (o uncie troy)*

Bibliografie (1/6)

- Andersen, T.G., Bollerslev, T. (1998). Answering the skeptics: yes, standard volatility models do provide accurate forecasts. *International Economic Review*, 39(4), 885–905.
- Andrews, D.W.K. (2000). Inconsistency of the bootstrap when a parameter is on the boundary of the parameter space. *Econometrica*, 68(2), 399–405.
- Andrews, D.W.K. (2001). Testing when a parameter is on the boundary of the maintained hypothesis. *Econometrica*, 69(3), 683–734.
- Baillie, R.T., Bollerslev, T., Mikkelsen, H.O. (1996). Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 74(1), 3–30.
- Berkes, I., Horváth, L., Kokoszka, P. (2003). GARCH processes: structure and estimation. *Bernoulli*, 9(2), 201–227.
- Blasques, F., Francq, C., Laurent, S. (2023). Quasi score-driven models. *Journal of Econometrics*, 234(1), 251–275.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3), 307–327.
- Bollerslev, T. (1987). A conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return. *Review of Economics and Statistics*, 69(3), 542–547.

Bibliografie (2/6)

- Bollerslev, T., Wooldridge, J.M. (1992). Quasi-maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time-varying covariances. *Econometric Reviews*, 11(2), 143–172.
- Christensen, K., Siggaard, M., Veliyev, B. (2023). A machine learning approach to volatility forecasting. *Journal of Financial Econometrics*, 21(5), 1680–1727.
- Clark, T.E., McCracken, M.W. (2001). Tests of equal forecast accuracy and encompassing for nested models. *Journal of Econometrics*, 105(1), 85–110.
- Conrad, C., Engle, R.F. (2025). Modelling volatility cycles: the MF2-GARCH model. *Journal of Applied Econometrics*, 40(4), 438–454.
- Creal, D., Koopman, S.J., Lucas, A. (2013). Generalized autoregressive score models with applications. *Journal of Applied Econometrics*, 28(5), 777–795.
- Diebold, F.X., Gunther, T.A., Tay, A.S. (1998). Evaluating density forecasts with applications to financial risk management. *International Economic Review*, 39(4), 863–883.
- Diebold, F.X., Mariano, R.S. (1995). Comparing predictive accuracy. *Journal of Business & Economic Statistics*, 13(3), 253–263.
- Engle, R.F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, 50(4), 987–1007.
- Engle, R.F. (2004). Risk and volatility: econometric models and financial practice. *American Economic Review*, 94(3), 405–420.

Bibliografie (3/6)

- Engle, R.F., Ghysels, E., Sohn, B. (2013). Stock market volatility and macroeconomic fundamentals. *Review of Economics and Statistics*, 95(3), 776–797.
- Engle, R.F., Lilien, D.M., Robins, R.P. (1987). Estimating time varying risk premia in the term structure: the ARCH-M model. *Econometrica*, 55(2), 391–407.
- Engle, R.F., Ng, V.K. (1993). Measuring and testing the impact of news on volatility. *Journal of Finance*, 48(5), 1749–1778.
- Fan, J., Qi, L., Xiu, D. (2014). Quasi-maximum likelihood estimation of GARCH models with heavy-tailed likelihoods. *Journal of Business & Economic Statistics*, 32(2), 178–191.
- Francq, C., Zakoïan, J.-M. (2004). Maximum likelihood estimation of pure GARCH and ARMA-GARCH processes. *Bernoulli*, 10(4), 605–637.
- Francq, C., Zakoïan, J.-M. (2019). GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications, ed. a 2-a. Wiley.
- Franke, J., Härdle, W.K., Hafner, C.M. (2019). Statistics of Financial Markets: An Introduction, ed. a 5-a. Springer.
- Giacomini, R., White, H. (2006). Tests of conditional predictive ability. *Econometrica*, 74(6), 1545–1578.

Bibliografie (4/6)

- Glosten, L.R., Jagannathan, R., Runkle, D.E. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *Journal of Finance*, 48(5), 1779–1801.
- Hall, P., Yao, Q. (2003). Inference in ARCH and GARCH models with heavy-tailed errors. *Econometrica*, 71(1), 285–317.
- Hamilton, J.D., Susmel, R. (1994). Autoregressive conditional heteroskedasticity and changes in regime. *Journal of Econometrics*, 64(1–2), 307–333.
- Hansen, B.E. (1994). Autoregressive conditional density estimation. *International Economic Review*, 35(3), 705–730.
- Hansen, P.R., Huang, Z., Shek, H.H. (2012). Realized GARCH: a joint model for returns and realized measures of volatility. *Journal of Applied Econometrics*, 27(6), 877–906.
- Hansen, P.R., Lunde, A. (2005). A forecast comparison of volatility models: does anything beat a GARCH(1,1)? *Journal of Applied Econometrics*, 20(7), 873–889.
- Hansen, P.R., Lunde, A., Nason, J.M. (2011). The model confidence set. *Econometrica*, 79(2), 453–497.
- J.P. Morgan/Reuters (1996). RiskMetrics — Technical Document, ed. a 4-a. New York.

Bibliografie (5/6)

- Jensen, S.T., Rahbek, A. (2004). Asymptotic inference for nonstationary GARCH. *Econometric Theory*, 20(6), 1203–1226.
- Lamoureux, C.G., Lastrapes, W.D. (1990). Persistence in variance, structural change, and the GARCH model. *Journal of Business & Economic Statistics*, 8(2), 225–234.
- Lee, J.H.H., King, M.L. (1993). A locally most mean powerful based score test for ARCH and GARCH regression disturbances. *Journal of Business & Economic Statistics*, 11(1), 17–27.
- Li, W.K., Mak, T.K. (1994). On the squared residual autocorrelations in non-linear time series with conditional heteroskedasticity. *Journal of Time Series Analysis*, 15(6), 627–636.
- Lumsdaine, R.L. (1996). Consistency and asymptotic normality of the quasi-maximum likelihood estimator in IGARCH(1,1) and covariance stationary GARCH(1,1) models. *Econometrica*, 64(3), 575–596.
- Mandelbrot, B. (1963). The variation of certain speculative prices. *Journal of Business*, 36(4), 394–419.
- McLeod, A.I., Li, W.K. (1983). Diagnostic checking ARMA time series models using squared-residual autocorrelations. *Journal of Time Series Analysis*, 4(4), 269–273.
- Mincer, J., Zarnowitz, V. (1969). The evaluation of economic forecasts. În J. Mincer (ed.), *Economic Forecasts and Expectations: Analysis of Forecasting Behavior and Performance*, NBER.

Bibliografie (6/6)

- Nelson, D.B. (1990). Stationarity and persistence in the GARCH(1,1) model. *Econometric Theory*, 6(3), 318–334.
- Nelson, D.B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach. *Econometrica*, 59(2), 347–370.
- Patton, A.J. (2011). Volatility forecast comparison using imperfect volatility proxies. *Journal of Econometrics*, 160(1), 246–256.
- Pele, D.T., Lazar, E., Dufour, A. (2017). Information entropy and measures of market risk. *Entropy*, 19(5), 226.
- Pele, D.T., Lazar, E., Mazurencu-Marinescu-Pele, M. (2019). Modeling expected shortfall using tail entropy. *Entropy*, 21(12), 1204.
- Pele, D.T., Mazurencu-Marinescu-Pele, M. (2019). Using high-frequency entropy to forecast Bitcoin's daily Value at Risk. *Entropy*, 21(2), 102.
- Pierce, D.A. (1982). The asymptotic effect of substituting estimators for parameters in certain types of statistics. *The Annals of Statistics*, 10(2), 475–478.
- Self, S.G., Liang, K.-Y. (1987). Asymptotic properties of maximum likelihood estimators and likelihood ratio tests under nonstandard conditions. *Journal of the American Statistical Association*, 82(398), 605–610.
- Sheppard, K. arch: ARCH models and other tools for financial econometrics in Python (software documentation).
- West, K.D. (1996). Asymptotic inference about predictive ability. *Econometrica*, 64(5), 1067–1084.