









Modelarea piețelor financiare

Capitolul 6: Volatilitate multivariată și dependență



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București
IDA Institute Digital Assets
Blockchain Research Center
AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance
Academia Română, Institutul de Prognoză Economică
MSCA Digital Finance

Cînd se mișcă pieţele împreună?

> *"This paper shows that correlation coefficients are conditional on market volatility. Under certain assumptions, it is possible to adjust for this bias."*
>
> — *Forbes & Rigobon (2002)*

- Un portofoliu 60/40 din două fonduri tranzacționate la bursă (ETF, *exchange-traded funds*): SPY (*SPDR S&P 500 ETF Trust*), pe indicele S&P 500 (*Standard & Poor's 500*), și TLT (*iShares 20+ Year Treasury Bond ETF*), pe obligațiuni de stat americane cu scadențe de peste 20 de ani
  - volatilitatea este 10,4% cu corelația din 2002–2021 ($-0{,}40$) și 13,2% cu cea din 2022–2026 (0,11)
- Corelația SPY–TLT pe 252 de zile a fost pozitivă în 6% din zile înainte de 2022 și în 81% din zile începînd din ianuarie 2022
- 2008: varianța randamentelor S&P 500 pe 2 zile a fost de 7,5 ori nivelul din anul calm
  - cu β constant, o corelație de 0,4 în perioada calmă se măsoară atunci ca 0,77
  - după corecția Forbes–Rigobon, nici creșterea din criză pentru Euro Stoxx 50, nici cea pentru BET (*Bucharest Exchange Trading*, indicele de referință al Bursei de Valori București) nu mai este semnificativă (bootstrap staționar: $p = 0{,}98$ și 0,62)
- JPM (JPMorgan Chase & Co., simbolul bursier NYSE) și BAC (Bank of America Corporation, simbolul bursier NYSE): cînd JPM are una dintre cele mai proaste 5% zile ale sale, BAC se află în propriile 5% cele mai proaste zile în aproximativ 61% din cazuri

▸ Graficul central: Acțiuni și obligațiuni: o corelație care și-a schimbat semnul (1/2)

Cînd se mișcă piețele împreună și cît de sigure sînt estimările? (1/2)

Întrebările capitolului

- Partea I: de ce contează dependența și incertitudinea covarianței
  - GARCH multivariat (generalised autoregressive conditional heteroskedasticity)
  - DCC (dynamic conditional correlation, corelație condiționată dinamică)
  - distorsiunea Forbes–Rigobon
- Partea a II-a: copule și dependență în cozi
  - piețe europene și românești, bănci
  - volatilitate comună, DCC în dimensiuni mari și cercetare cu inteligența artificială (AI)

Ce trebuie să puteți face

- calculați o covarianță variabilă în timp
  - fereastră mobilă (*rolling window*), EWMA (exponentially weighted moving average), DCC
- derivați eroarea standard a unei corelații prin metoda delta
- derivați distorsiunea de volatilitate a corelațiilor din criză și o separați de contagiune (*contagion*, o creștere reală a legăturilor dintre piețe)
- calculați estimări de copule și teste de adecvare
- interpretați dependența în cozi
  - la un prag finit și la limită
- Aprofundări și Anexa: lectură pentru familiarizare

Cînd se mișcă piețele împreună și cît de sigure sînt estimările? (2/2)

- Se bazează pe
  - Capitolul 1 (cozi groase, gruparea volatilității, *volatility clustering*)
  - Capitolul 4 (Σ în alegerea portofoliului)
  - Capitolul 5 (GARCH univariat)
- Pregătește
  - Capitolul 7 (Value at Risk, VaR, și Expected Shortfall, ES, de portofoliu)
  - Capitolul 8 (backtesting)
  - Capitolul 18 (risc sistemic)
- Exemplele detaliate și subiectele avansate sînt în Aprofundări, după Sinteză
  - butonul din subsol duce la ele, iar butonul Înapoi revine la slide-ul de plecare

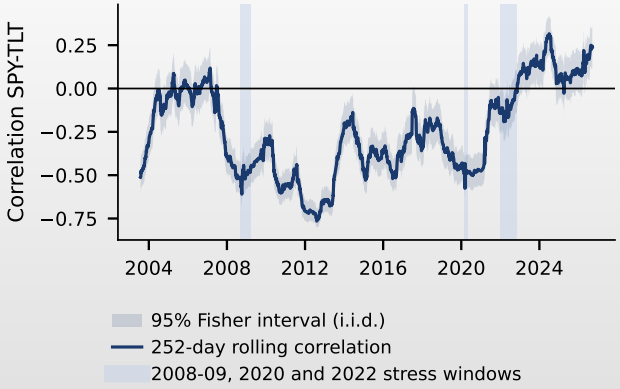
Rolul dependenței (1/2): diversificarea portofoliului

- **Diversificarea** (Markowitz (1952))
  - Varianța portofoliului depinde de corelație printr-un singur termen încrucișat
  - $\sigma_p^2 = w^\top \Sigma w = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\rho\,\sigma_1\sigma_2$
  - w: ponderea activului 1 ($1-w$: ponderea activului 2)
  - Σ: matricea de covarianță
  - σ_1, σ_2: volatilitățile celor două active
  - ρ: corelația dintre ele
  - Portofoliu 60/40 din SPY (fondul tranzacționat la bursă pe S&P 500) și TLT (fondul de obligațiuni de stat americane cu scadențe de peste 20 de ani)
  - Volatilități anualizate pe iulie 2002 – septembrie 2026: $\sigma_1 = 18{,}8\%$ (SPY), $\sigma_2 = 14{,}3\%$ (TLT); ponderi reechilibrate zilnic la 60/40
  - Separăm la ianuarie 2022, începutul șocului de inflație; testul de ruptură din Aprofundări datează schimbarea mai devreme, în august 2020
  - Volatilitatea portofoliului este 10,4% cu corelația din 2002–2021 ($-0{,}40$) și 13,2% cu cea din 2022–2026 (0,11)

Rolul dependenței (2/2): acoperire, contagiune și covariațe variabile

- **Hedging-ul** (acoperirea riscului unei poziții cu o poziție opusă)
  - Ce valoare din instrumentul de hedging F vindem pentru fiecare unitate de valoare deținută în poziția S, pentru a minimiza varianța
  - Raportul de hedging de varianță minimă $h^* = \rho\,\sigma_S/\sigma_F$: panta regresiei lui r_S pe r_F
  - Estimat pe randamente, h^* este un raport de valori: numărul de unități din F pe unitatea din S este $h^* P_S/P_F$ (P_S, P_F: prețurile, inclusiv mărimea contractului)
  - r_S, r_F: randamentele poziției și ale instrumentului de hedging
  - σ_S, σ_F: volatilitățile lor
  - Eficiența hedging-ului, ρ^2: proporția din varianță eliminată
  - Dacă se schimbă corelația, acoperirea de ieri devine inadecvată astăzi: o acoperire dinamică cere un ρ_t dinamic
- **Contagiune și interdependență** (Forbes & Rigobon (2002))
  - Contagiune: o *creștere semnificativă* a legăturilor dintre piețe după un șoc
  - Interdependența: legături prezente în toate stările (comerț, investitori comuni, factori macroeconomici comuni)
  - Corelațiile tind să crească exact cînd diversificarea este cea mai necesară
- Nou în acest capitol: matricea de covarianță la data t, Σ_t, variază în timp

Acțiuni și obligațiuni: o corelație care și-a schimbat semnul (1/2)



MFM_ch6_spy_tlt_rolling ▶ Interactiv

Acțiuni și obligațiuni: o corelație care și-a schimbat semnul (2/2)

- Corelația randamentelor zilnice SPY și TLT, pe o fereastră mobilă de 252 de zile
  - banda: intervalul Fisher de 95% (definit în secțiunea următoare), valid pentru date i.i.d. (independente și identic distribuite)
  - zonele umbrite: toamna 2008 – martie 2009, februarie–aprilie 2020, ianuarie–octombrie 2022
- Valorile corelației
  - minimă: $-0{,}77$ (8 august 2012)
  - maximă: 0,32 (1 iulie 2024)
  - ultima: 0,24 (18 septembrie 2026)
- Corelația a fost pozitivă
  - în 6% din zile înainte de 2022
  - în 81% din zile începînd din ianuarie 2022
- Semnul corelației depinde de tipul șocului
  - șocurile de creștere economică deplasează prețurile acțiunilor și ale obligațiunilor în direcții opuse (corelație negativă)
  - șocurile de inflație le afectează în aceeași direcție (corelație pozitivă, ca în 2022)
- Banda Fisher este prea îngustă aici
  - ignoră cozile groase și gruparea volatilității (secțiunea următoare)
- Tipul de dovadă: descriere (arată ce s-a întîmplat în date, fără un test al cauzei)

MFM_ch6_spy_tlt_rolling

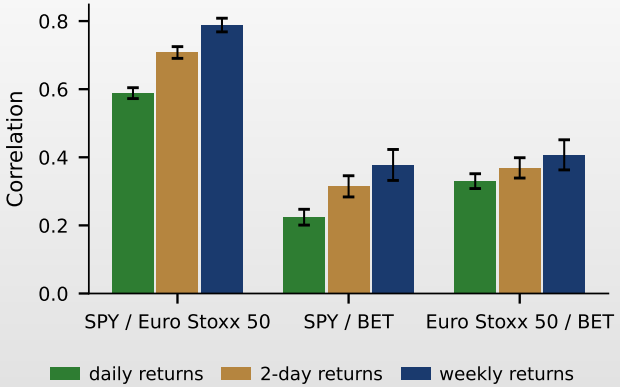
Cît de precisă este o corelație estimată?

- Întrebarea secțiunii: cum estimăm Σ și cît de incertă este fiecare corelație estimată?
- Prima capcană: orele de închidere diferă, deci frecvența datelor schimbă corelația
- A doua capcană: cozile groase și gruparea volatilității pot modifica substanțial incertitudinea, pe care intervalul Fisher o ignoră
- A treia capcană: lungimea ferestrei decide cît de repede vedem o schimbare de regim

Tranzacționarea asincronă și distorsiunea corelațiilor zilnice

- Orele de închidere diferă
  - Bursa de Valori București și bursele din zona euro se închid cu cîteva ore înaintea bursei din New York
  - Știrile din SUA (Statele Unite ale Americii) de după închiderea europeană intră în prețurile europene abia a doua zi
- Consecință, la dependență pozitivă (ca între piețele de acțiuni)
  - corelația din aceeași zi este deplasată spre zero
  - corelația decalată este pozitivă
- Soluții
  - Frecvență mai mică: randamente pe 2 zile sau săptămînale, în zilele comune de tranzacționare
  - Adăugarea termenului decalat: $\rho_0 + \rho_{+1}$ (ρ_0: corelația din aceeași zi, ρ_{+1}: SUA ieri cu Europa azi)
  - Suma $\rho_0 + \rho_{+1}$ este o aproximare grosieră a corelației sincrone, valabilă doar pentru un decalaj de o zi, fără autocorelație și cu variațe egale
- Regula folosită peste tot
  - întîi aliniem *prețurile* pe zilele comune de tranzacționare
  - apoi calculăm randamentele

Corelații zilnice, pe 2 zile și săptămînale, 2000–2026 (1/2)



MFM_ch6_async ▶ Interactiv

Corelații zilnice, pe 2 zile și săptămînale, 2000–2026 (2/2)

- SPY, Euro Stoxx 50 și BET în zilele comune de tranzacționare
  - BET: indicele de referință al Bursei de Valori București
  - liniile verticale de pe bare: intervale Fisher de 95%
- Corelația SPY–Euro Stoxx 50
  - 0,59 pe randamente zilnice, 0,71 pe randamente pe 2 zile și 0,79 pe randamente săptămînale
  - corelația dintre SPY de ieri și Euro Stoxx 50 de azi: 0,20
- Corelația SPY–BET
  - 0,22 pe randamente zilnice, față de 0,38 pe randamente săptămînale
  - corelația decalată (SPY ieri, BET azi): 0,17
- Euro Stoxx 50 și BET au închideri aproape sincrone
  - corelația lor este 0,33 zilnic și 0,41 săptămînal
- Datele săptămînale sînt mai puțin afectate de asincronism
  - dar dau 1 367 în loc de 6 446 observații: intervale mai largi
- Tipul de dovadă: comparație între proceduri (arată care metodă funcționează mai bine pe aceleași date, nu de ce)

MFM_ch6_async

Frecvențele de eșantionare: randamente zilnice, la două zile și săptămînale

- Randamentele sînt logaritmice, $r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1}$
  - calculate după alinierea prețurilor pe zilele comune de tranzacționare
- Zilnic: DCC, intervalele HAC și hedging-ul, unde contează viteza de reacție
  - HAC: eroare standard robustă la heteroscedasticitate și autocorelație, definită mai jos
- Pe 2 zile: testele Forbes–Rigobon, pentru a absorbi diferențele dintre orele de închidere
  - în aceste teste randamentele pe 2 zile se suprapun: două randamente consecutive au o zi comună
  - în graficul cu trei frecvențe nu se suprapun
- Săptămînal (închiderile de vineri): corelațiile de depășire, integrarea piețelor și rețelele de bănci
  - aplicații din secțiunile despre copule și aplicații, care combină fusuri orare diferite

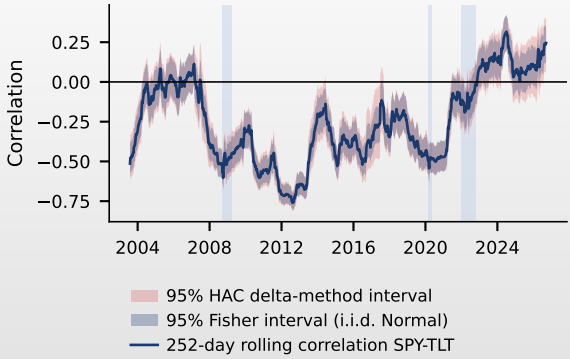
Covarianța de selecție și inferența pentru o corelație (1/2): estimatorul și intervalul Fisher

- Matricea de covarianță de selecție și corelația Pearson pentru N active pe T zile
  - $\hat{\Sigma} = \frac{1}{T-1} \sum_t (r_t - \bar{r})(r_t - \bar{r})^\top, \quad \hat{\rho}_{ij} = \hat{\Sigma}_{ij} / \sqrt{\hat{\Sigma}_{ii}\hat{\Sigma}_{jj}}$
  - $r_t \in \mathbb{R}^N$: vectorul celor N randamente din ziua t, $t = 1, \ldots, T$
  - $\bar{r}$: vectorul mediilor de selecție
  - $\hat{\Sigma}_{ij}$: elementul (i, j) al matricei
  - $N(N+1)/2$ elemente distincte de estimat: 125 250 pentru $N = 500$
- **Transformarea Fisher**: $z = \operatorname{artanh} \hat{\rho} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\hat{\rho}}{1-\hat{\rho}}$
  - este aproximativ Normală, cu o variață care nu depinde de ρ
  - $z \approx N\big(\operatorname{artanh} \rho,\ 1/(T-3)\big)$ pentru perechi i.i.d. cu distribuția Normală bivariată
  - Interval de 95% $\tanh(z \pm 1{,}96/\sqrt{T-3})$
  - Exemplu: pentru $T = 252$ și $\rho = 0{,}5$, semilărgimea intervalului este de aproximativ 0,09

Covarianța de selecție și inferența pentru o corelație (2/2): metoda delta și HAC

- Metoda delta: aproximăm liniar $\hat{\rho}$, funcție netedă de momentele de selecție, și scriem eroarea $\hat{\rho} - \rho$ ca o medie de contribuții zilnice ψ_t
  - $\hat{\rho} - \rho \approx \frac{1}{T} \sum_t \psi_t, \quad \psi_t = \tilde{x}_t \tilde{y}_t - \frac{\rho}{2}(\tilde{x}_t^2 + \tilde{y}_t^2)$
  - $\tilde{x}_t$, $\tilde{y}_t$: cele două randamente standardizate la media 0 și varianța 1
  - ψ_t: contribuția zilei t la eroarea de estimare
  - gruparea volatilității nu schimbă această formă, ci doar varianța lui ψ_t
- Eroarea standard (SE, standard error) din varianța pe termen lung a lui ψ_t: varianța plus autocovariațele ei
  - Estimatorul HAC (heteroskedasticity and autocorrelation consistent) ponderează autocovariațele pînă la lagul L cu ponderi descrescătoare (nucleul Bartlett, Newey & West (1987))
  - Condiții: staționaritate, momente de ordinul patru finite (puse sub semnul întrebării în Capitolul 1) și dependență slabă
  - Numărul de laguri după regula uzuală $L = \lfloor 4(T/100)^{2/9} \rfloor$: $L = 9$ pentru $T = 4\,891$, $L = 6$ pentru $T = 1\,182$, $L = 4$ pentru o fereastră de 252 de zile
  - Pentru perechi i.i.d. cu distribuția Normală, $\mathrm{Var}(\psi_t) = (1 - \rho^2)^2$, adică varianța Fisher
  - Cozile groase și GARCH pot modifica substanțial această varianță, în ambele sensuri (derivarea în Anexă)
- Exemplu: SPY–TLT zilnic, 2002–2021 ($T = 4\,891$, $\hat{\rho} = -0{,}403$). Eroarea standard a lui $\hat{\rho}$ este:
  - 0,0120 după formula Fisher
  - 0,0217 cu momentele de ordinul patru, fără autocorelație ($L = 0$)
  - 0,0227 cu HAC ($L = 9$)

Intervale Fisher față de HAC: SPY și TLT (1/2)



MFM_ch6_corr_inference ▶ Interactiv

Intervale Fisher față de HAC: SPY și TLT (2/2)

- Corelația pe o fereastră mobilă de 252 de zile, din 5 în 5 zile
  - intervalul Fisher de 95%
  - intervalul HAC de 95% prin metoda delta (Bartlett, $L = 4$)
- Intervalul HAC este mai larg decît cel Fisher în 91% din ferestre și mai îngust în 9%
  - raportul dintre lățimea HAC și lățimea Fisher: mediana 1,24, cuantila de 90% 1,54
- Corelația este semnificativ diferită de zero
  - în 73% din ferestre după Fisher și în 65% după HAC
  - concluzia testului se schimbă în 8,2% din ferestre
  - rezultate punctuale, fereastră cu fereastră, nu un test simultan
- Pe perioadele întregi, raportul dintre SE HAC și SE Fisher
  - 1,9 în 2002–2021 și 1,4 din 2022
  - numai corecția pentru momentele de ordinul patru dă deja 1,8 în 2002–2021 (1,28 din 2022)
  - cozile groase contează mai mult decît autocorelația
- Regula pentru randamente zilnice: raportăm intervale HAC prin metoda delta
  - valabile sub staționaritate și dependență slabă
  - și numai dacă momentele de ordinul patru sînt finite, ceea ce estimările Hill din Capitolul 1 pun sub semnul întrebării
  - HAC tratează dependența, dar nu compensează lipsa momentelor
- Tipul de dovadă: comparație între proceduri

MFM_ch6_corr_inference

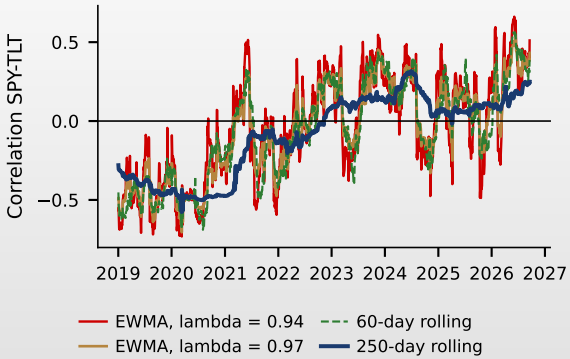
Ferestre mobile

- **Fereastra mobilă** de lungime m: $\hat{\Sigma}_t = \frac{1}{m} \sum_{s=t-m}^{t-1} r_s r_s^\top$
  - media fixată la zero pentru date zilnice
  - r_s: vectorul randamentelor din ziua s
  - m: numărul de zile trecute folosite
- Pozitiv semidefinită
  - pentru orice vector de ponderi v, $v^\top \hat{\Sigma}_t v = \frac{1}{m} \sum_s (v^\top r_s)^2 \geq 0$
  - deci orice variantă de portofoliu este ≥ 0
- Singulară dacă $m < N$
  - pozitiv definită doar dacă cei m vectori de randamente generează $\mathbb{R}^N$
  - o matrice singulară nu se poate inversa, deci nu dă ponderi de variantă minimă
- **Saltul la ieșirea din fereastră** (*ghost effect*): o zi extremă intră cu ponderea $1/m$ și iese brusc după m zile
  - estimarea sare atunci, deși piața nu s-a schimbat
- Compromisul
  - o fereastră scurtă reacționează repede, dar este zgomotoasă
  - una lungă este stabilă, dar vede tîrziu o schimbare de regim

EWMA (RiskMetrics)

- **EWMA** (exponentially weighted moving average, media mobilă ponderată exponențial, J.P. Morgan/Reuters (1996))
  - $\Sigma_t = \lambda \Sigma_{t-1} + (1-\lambda) r_{t-1} r_{t-1}^\top = (1-\lambda) \sum_{k \geq 1} \lambda^{k-1} r_{t-k} r_{t-k}^\top$
  - $\lambda \in (0,1)$: factorul de descreștere
  - k: vechimea observației în perioade, cu ponderea $(1-\lambda)\lambda^{k-1}$
- Valori uzuale: $\lambda = 0{,}94$ pentru date zilnice și $\lambda = 0{,}97$ pentru date lunare
- Timpul de înjumătățire $\ln 0{,}5 / \ln \lambda$: după cîte perioade ponderea unei observații scade la jumătate
  - 11,2 perioade pentru $\lambda = 0{,}94$ și 22,8 pentru $\lambda = 0{,}97$
- Eșantionul efectiv $(1+\lambda)/(1-\lambda)$
  - circa 32 de zile pentru $\lambda = 0{,}94$
- Pozitiv semidefinită și fără salt la ieșirea din fereastră
- Limita: un singur λ pentru toate elementele și fără revenire la medie (prognozele nu converg spre un nivel pe termen lung)
  - adică un GARCH(1,1) integrat fără constantă (Capitolul 5)
- λ joacă rolul lui m: același compromis între viteza de reacție și zgomot

EWMA față de ferestre mobile, SPY–TLT din 2019



- Doi estimatori EWMA ($\lambda = 0{,}94$ și $0{,}97$) și două ferestre mobile (60 și 250 de zile) pe aceleași date
- Zgomotul: abaterea standard a variației zilnice a corelației estimate
  - $0{,}060$ pentru EWMA cu $\lambda = 0{,}94$
  - $0{,}032$ pentru EWMA cu $\lambda = 0{,}97$
  - $0{,}0088$ pentru fereastra de 250 de zile
- Semnalul de regim: 20 de zile consecutive cu corelația pozitivă
  - EWMA ($\lambda = 0{,}94$): începe la 12 aprilie 2022, confirmat la 10 mai
  - fereastra de 250 de zile: începe la 10 noiembrie, confirmat abia la 8 decembrie 2022
- La EWMA și la ferestrele mobile, λ și m sînt aleși de analist, nu estimați
- DCC (secțiunea următoare) estimează din date viteza de reacție și memoria corelației
- Tipul de dovadă: comparație între proceduri

MFM_ch6_ewma_rolling ▶ Interactiv

De la volatilitate univariată la volatilitate multivariată (1/2): modelul

- Întrebarea secțiunii: cum modelăm o matrice de covarianță care se schimbă zilnic?
  - matricea trebuie să rămînă pozitiv definită și să aibă puțini parametri
- În Capitolul 5 am modelat un singur activ: $r_t = \sigma_t z_t$, $\sigma_t^2 = \omega + \alpha r_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$
- Acum avem N active și o matrice de covarianță
  - $r_t = H_t^{1/2} z_t, \quad \mathbb{E}(z_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = 0, \quad \text{Var}(z_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = I_N, \quad$ deci $\text{Var}(r_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = H_t$
  - r_t, z_t: vectorii celor N randamente și ai celor N inovații
  - H_t: matricea $N \times N$ de covarianță condiționată, cunoscută la $t-1$ (notată Σ_t în secțiunea anterioară)
  - $H_t^{1/2}$: o rădăcină pătrată matriceală, $H_t^{1/2}(H_t^{1/2})^\top = H_t$
  - I_N: matricea identitate
  - $\mathcal{F}_{t-1}$: informația disponibilă pînă la $t-1$
- Orice model pentru H_t trebuie să asigure
  - caracterul pozitiv definit la orice t (orice portofoliu are varianță pozitivă)
  - un număr mic de parametri
  - o dinamică interpretabilă
- Log-cvasi-verosimilitatea Gaussiană, maximizată după parametrii lui H_t
  - $\ell = -\frac{1}{2} \sum_t \left(N \ln 2\pi + \ln |H_t| + r_t^\top H_t^{-1} r_t \right)$
  - $|H_t|$: determinantul lui H_t
  - „Cvasi": estimările rămîn consistente și dacă z_t nu are distribuția Normală, cu condiția ca H_t să fie corect specificată

De la volatilitate univariată la volatilitate multivariată (2/2): problema dimensiunii

- **VEC** (Bollerslev, Engle & Wooldridge (1988)):
  $\operatorname{vech}(H_t) = c + A \operatorname{vech}(r_{t-\mathbf{1}} r_{t-\mathbf{1}}^\top) + B \operatorname{vech}(H_{t-\mathbf{1}})$
  - vech: vectorul celor $N(N+1)/2$ elemente distincte ale unei matrice simetrice; A, B: matrice pătrate de această dimensiune
  - Fără garanția caracterului pozitiv definit
- **BEKK** (Baba–Engle–Kraft–Kroner, Engle & Kroner (1995)):
  $H_t = CC^\top + A^\top r_{t-\mathbf{1}} r_{t-\mathbf{1}}^\top A + B^\top H_{t-\mathbf{1}} B$
  - C: triunghiulară inferior; A, B: matrice $N \times N$
  - Pozitiv definită prin construcție (sumă de forme pătratice), dar elementele lui A, B nu au o interpretare directă (Anexă)
- **DCC**: $3N$ parametri GARCH univariați plus a, b
  - ținta $\bar{Q}$ se estimează separat (slide-ul următor)
- Numărul de parametri crește ca $N^{\mathbf{4}}$ (VEC) și ca $N^{\mathbf{2}}$ (BEKK)
  - pentru portofolii mari, modelele devin imposibil de estimat

Numărul de parametri

N	VEC	BEKK complet	DCC
2	21	11	$6+2$
5	465	65	$15+2$
10	6 105	255	$30+2$
50	3 252 525	6 275	$150+2$

Cazul a două active (1/2): modelul VEC

- Cu $N = 2$ active, matricea de covarianță are trei elemente distincte
  - $H_t = \begin{pmatrix} h_{11,t} & h_{12,t} \\ h_{12,t} & h_{22,t} \end{pmatrix}$, $\operatorname{vech}(H_t) = (h_{11,t}, h_{12,t}, h_{22,t})^\top$
  - $h_{11,t}$, $h_{22,t}$: variațele condiționate ale celor două active; $h_{12,t}$: covarianța lor condiționată
- **VEC diagonal**: fiecare element are propria ecuație de tip GARCH(1,1)
  - $h_{11,t} = c_1 + a_1 r^2_{1,t-1} + b_1 h_{11,t-1}$
  - $h_{12,t} = c_2 + a_2 r_{1,t-1} r_{2,t-1} + b_2 h_{12,t-1}$
  - $h_{22,t} = c_3 + a_3 r^2_{2,t-1} + b_3 h_{22,t-1}$
  - covarianța crește după o zi în care cele două randamente au același semn și scade după una cu semne opuse
- **VEC complet**: fiecare element depinde de toate cele trei, de exemplu
  - $h_{11,t} = c_1 + a_{11} r^2_{1,t-1} + a_{12} r_{1,t-1} r_{2,t-1} + a_{13} r^2_{2,t-1} + b_{11} h_{11,t-1} + b_{12} h_{12,t-1} + b_{13} h_{22,t-1}$
  - parametri: 3 în c, $3 \times 3 = 9$ în A și 9 în B, deci 21 (tabelul din slide-ul anterior)
  - forma generală $\operatorname{vech}(H_t) = c + A \operatorname{vech}(r_{t-1} r_{t-1}^\top) + B \operatorname{vech}(H_{t-1})$ este exact acest sistem, scris matriceal
- Problema: nimic nu împiedică $h^2_{12,t} > h_{11,t} h_{22,t}$, adică o „corelație" peste 1 în valoare absolută
  - de aici lipsa garanției caracterului pozitiv definit

BEKK, intuitiv

- Ideea: o variantă nu poate fi negativă dacă o scriem ca un pătrat
  - univariat: $\alpha r_{t-1}^{\mathbf{2}} = (a\, r_{t-1})^{\mathbf{2}}$ cu $a = \sqrt{\alpha}$, deci termenul de știri este mereu ≥ 0
  - BEKK face același lucru cu matrice: $A^\top r_{t-1} r_{t-1}^\top A = (A^\top r_{t-1})(A^\top r_{t-1})^\top$, „pătratul" unui vector
- Ce este $A^\top r_{t-1}$: șocurile de ieri, amestecate
  - activul 1 primește $a_{11} r_{1,t-1} + a_{21} r_{2,t-1}$: propriul șoc plus o parte din șocul celuilalt activ
  - cu A diagonală nu există amestec: fiecare activ reacționează doar la propriul șoc
- Pătratul unui vector este întotdeauna o matrice de covariață validă
  - pe diagonală stau pătrate (≥ 0), iar „corelația" acestui termen este exact $+1$ sau -1, după semnul lui $r_{1,t-1} r_{2,t-1}$
  - la fel $B^\top H_{t-1} B$ (o transformare a unei covariațe valide) și $CC^\top$; o sumă de covariațe valide este validă
  - de aceea H_t rămîne pozitiv definită fără nicio restricție asupra parametrilor
- Ce obținem: H_t = nivel de bază + reacția la știrile de ieri + memoria lui H_{t-1}
  - corelația lui H_t combină corelațiile celor trei termeni, cu ponderi date de contribuția fiecăruia la variațe: știrile aduc ± 1, deci zilele cu șocuri de același semn o împing în sus
- Prețul: A și B au N^2 elemente fiecare, iar un element nu descrie o singură variață sau covariață
  - de aceea în practică se folosește BEKK diagonal sau scalar ($A = a\, I_N$, $B = b\, I_N$), apropiat ca spirit de DCC

Cazul a două active (2/2): modelul BEKK

- Forma generală: $H_t = CC^\top + A^\top r_{t-\mathbf{1}} r_{t-\mathbf{1}}^\top A + B^\top H_{t-\mathbf{1}} B$
- **BEKK diagonal** cu $N = 2$: $A = \mathrm{diag}(a_{\mathbf{11}}, a_{\mathbf{22}})$, $B = \mathrm{diag}(b_{\mathbf{11}}, b_{\mathbf{22}})$
  - $h_{\mathbf{11},t} = (CC^\top)_{\mathbf{11}} + a_{\mathbf{11}}^{\mathbf{2}} r_{\mathbf{1},t-\mathbf{1}}^{\mathbf{2}} + b_{\mathbf{11}}^{\mathbf{2}} h_{\mathbf{11},t-\mathbf{1}}$
  - $h_{\mathbf{22},t} = (CC^\top)_{\mathbf{22}} + a_{\mathbf{22}}^{\mathbf{2}} r_{\mathbf{2},t-\mathbf{1}}^{\mathbf{2}} + b_{\mathbf{22}}^{\mathbf{2}} h_{\mathbf{22},t-\mathbf{1}}$
  - $h_{\mathbf{12},t} = (CC^\top)_{\mathbf{12}} + a_{\mathbf{11}} a_{\mathbf{22}}\, r_{\mathbf{1},t-\mathbf{1}} r_{\mathbf{2},t-\mathbf{1}} + b_{\mathbf{11}} b_{\mathbf{22}}\, h_{\mathbf{12},t-\mathbf{1}}$
- Comparat cu VEC diagonal: aceeași formă, dar coeficienții covarianței nu mai sînt liberi
  - sînt produsele coeficienților din cele două ecuații de varianță: $a_{\mathbf{11}} a_{\mathbf{22}}$ în locul lui $a_{\mathbf{2}}$, $b_{\mathbf{11}} b_{\mathbf{22}}$ în locul lui $b_{\mathbf{2}}$
  - $A^\top r_{t-\mathbf{1}} r_{t-\mathbf{1}}^\top A$ și $B^\top H_{t-\mathbf{1}} B$ sînt forme pătratice, deci pozitiv semidefinite; cu $CC^\top$ pozitiv definită, H_t rămîne pozitiv definită la orice t
  - 7 parametri: 3 în C (triunghiulară inferior), 2 în A, 2 în B
- **BEKK complet**: A, B matrice 2×2 oarecare, deci $3 + 4 + 4 = 11$ parametri
  - de exemplu $h_{\mathbf{11},t}$ conține $(a_{\mathbf{11}} r_{\mathbf{1},t-\mathbf{1}} + a_{\mathbf{21}} r_{\mathbf{2},t-\mathbf{1}})^{\mathbf{2}}$: depinde și de $r_{\mathbf{2},t-\mathbf{1}}^{\mathbf{2}}$ și de $r_{\mathbf{1},t-\mathbf{1}} r_{\mathbf{2},t-\mathbf{1}}$
  - de aceea elementele lui A și B nu au o interpretare directă

Corelația condiționată constantă și dinamică

- Descompunerea: covarianța = volatilități × corelații × volatilități
  - $H_t = D_t R_t D_t, \quad D_t = \text{diag}(\sigma_{\mathbf{1}t}, \ldots, \sigma_{Nt})$
  - σ_{it}: volatilitatea GARCH a activului i; R_t: matricea corelațiilor condiționate; $\varepsilon_{it} = r_{it}/\sigma_{it}$: reziduurile standardizate
- **CCC** (Bollerslev (1990)): $R_t = R$ constantă
  - constant conditional correlation, corelație condiționată constantă
- **DCC** (Engle (2002)): o recursie de tip GARCH pentru o matrice auxiliară Q_t
  - $Q_t = (1 - a - b)\,\bar{Q} + a\,\varepsilon_{t-\mathbf{1}}\varepsilon_{t-\mathbf{1}}^\top + b\,Q_{t-\mathbf{1}}, \quad a, b \geq 0,\ a + b < 1$
  - $R_t = \text{diag}(Q_t)^{-\mathbf{1}/\mathbf{2}}\, Q_t\, \text{diag}(Q_t)^{-\mathbf{1}/\mathbf{2}}$
  - $\bar{Q}$: matricea constantă (interceptul) a recursiei, cu $N(N-1)/2$ elemente libere
  - Fixarea țintei (*correlation targeting*) o înlocuiește cu covarianța de selecție $\hat{\bar{Q}} = \frac{\mathbf{1}}{T}\sum_t \varepsilon_t\varepsilon_t^\top$ (consistența acestei alegeri: slide-ul „Estimarea în doi pași (2/2)")
  - a: reacția la produsul șocurilor de ieri; b: memoria; $a + b$: persistența, adică cît de încet revine corelația spre țintă
  - A doua relație rescalează Q_t astfel încît diagonala să fie 1: R_t este o matrice de corelație validă
- Doi parametri guvernează toate cele $N(N-1)/2$ corelații
  - parcimonios, dar toate perechile au aceeași persistență
- Q_t este o pseudo-covarianță, nu o corelație: $\mathbb{E}_{t-\mathbf{1}}[\varepsilon_t\varepsilon_t^\top] = R_t \neq Q_t$

Cazul a două active: CCC și DCC

- Pasul de volatilitate: două modele GARCH(1,1) univariate, ca în Capitolul 5
  - $\sigma^{\mathbf{2}}_{i,t} = \omega_i + \alpha_i r^{\mathbf{2}}_{i,t-\mathbf{1}} + \beta_i \sigma^{\mathbf{2}}_{i,t-\mathbf{1}}$, $i = 1, 2$; $\quad \varepsilon_{i,t} = r_{i,t}/\sigma_{i,t}$
- Covarianța este corelația înmulțită cu cele două volatilități: $h_{\mathbf{12},t} = \rho_{\mathbf{12},t}\, \sigma_{\mathbf{1},t}\sigma_{\mathbf{2},t}$
  - CCC: $\rho_{\mathbf{12},t} = \rho_{\mathbf{12}}$ constantă, deci covarianța se mișcă doar prin volatilități
- DCC: trei recursii, toate cu aceiași a și b
  - $q_{\mathbf{11},t} = (1 - a - b)\,\bar{q}_{\mathbf{11}} + a\,\varepsilon^{\mathbf{2}}_{\mathbf{1},t-\mathbf{1}} + b\,q_{\mathbf{11},t-\mathbf{1}}$, analog pentru $q_{\mathbf{22},t}$
  - $q_{\mathbf{12},t} = (1 - a - b)\,\bar{q}_{\mathbf{12}} + a\,\varepsilon_{\mathbf{1},t-\mathbf{1}}\varepsilon_{\mathbf{2},t-\mathbf{1}} + b\,q_{\mathbf{12},t-\mathbf{1}}$
  - $\rho_{\mathbf{12},t} = q_{\mathbf{12},t}/\sqrt{q_{\mathbf{11},t}\,q_{\mathbf{22},t}}$: împărțirea aduce $\rho_{\mathbf{12},t}$ între -1 și 1
- Exemplu, SPY și TLT: $a = 0{,}052$, $b = 0{,}934$, $\bar{q}_{\mathbf{12}} = -0{,}248$ (estimările din slide-urile următoare)
  - $q_{\mathbf{12},t} = 0{,}014 \cdot (-0{,}248) + 0{,}052\,\varepsilon_{\mathbf{1},t-\mathbf{1}}\varepsilon_{\mathbf{2},t-\mathbf{1}} + 0{,}934\,q_{\mathbf{12},t-\mathbf{1}}$
  - o zi în care ambele active scad (sau cresc) puternic împinge corelația în sus, o zi cu semne opuse o împinge în jos; cu b mare, efectul dispare încet
- În general (slide-ul anterior): aceleași recursii pentru toate cele $N(N-1)/2$ perechi, scrise ca o singură ecuație matriceală în Q_t

Estimarea în doi pași (1/2): împărțirea verosimilității

- Log-verosimilitatea Gaussiană se împarte într-o parte de volatilitate și o parte de corelație
  - $\ell = \underbrace{-\frac{1}{2}\sum_t \left(N \ln 2\pi + 2\ln|D_t| + r_t^\top D_t^{-2} r_t\right)}_{\ell_V} \underbrace{-\frac{1}{2}\sum_t \left(\ln|R_t| + \varepsilon_t^\top R_t^{-1}\varepsilon_t - \varepsilon_t^\top \varepsilon_t\right)}_{\ell_C}$
  - ℓ_V: partea de volatilitate, depinde doar de parametrii GARCH
  - ℓ_C: partea de corelație, depinde de (a, b), date fiind volatilitățile
  - $|D_t|$, $|R_t|$: determinanții lui D_t și R_t
- De unde vine împărțirea
  - înlocuim $H_t = D_t R_t D_t$ și $\varepsilon_t = D_t^{-1} r_t$ în log-cvasi-verosimilitatea din secțiunea anterioară
  - Determinantul: $|H_t| = |D_t|^2 |R_t|$, deci $\ln|H_t| = 2\ln|D_t| + \ln|R_t|$
  - Forma pătratică: $r_t^\top H_t^{-1} r_t = r_t^\top D_t^{-1} R_t^{-1} D_t^{-1} r_t = \varepsilon_t^\top R_t^{-1} \varepsilon_t$
  - Adunăm și scădem $\varepsilon_t^\top \varepsilon_t = r_t^\top D_t^{-2} r_t = \sum_i r_{it}^2/\sigma_{it}^2$: atunci $\ell_V = \sum_i \left[-\frac{1}{2}\sum_t (\ln 2\pi + \ln \sigma_{it}^2 + r_{it}^2/\sigma_{it}^2)\right]$, suma celor N log-verosimilități GARCH Gaussiene univariate
- Pasul 1: estimăm N modele GARCH(1,1) univariate, păstrăm σ_{it} și ε_{it}
- Pasul 2: fixăm $\bar{Q}$ la covarianța de selecție a lui ε_t și maximizăm ℓ_C după (a, b)
- Cîștigul: în loc de o maximizare comună, N maximizări univariate și una cu doi parametri; costul: o inferență mai dificilă (slide-ul următor)

Estimarea în doi pași (2/2): ținta și inferența

- Fixarea țintei la covarianța de selecție face estimatorul DCC standard inconsistent în general
  - de ce: luăm media recursiei, folosind $\mathbb{E}[\varepsilon_{t-\mathbf{1}}\varepsilon_{t-\mathbf{1}}^\top] = \mathbb{E}[R_{t-\mathbf{1}}]$
  - Staționaritatea dă $(1-b)\,\mathbb{E}[Q_t] = (1-a-b)\,\bar{Q} + a\,\mathbb{E}[R_t]$
  - $\hat{\bar{Q}} = \frac{\mathbf{1}}{T}\sum_t \varepsilon_t\varepsilon_t^\top$ estimează $\mathbb{E}[R_t]$, care este egală cu interceptul $\bar{Q}$ doar dacă $\mathbb{E}[Q_t] = \mathbb{E}[R_t]$
  - Egalitatea nu are loc în general: R_t rescalează Q_t cu propria diagonală, aleatoare
  - DCC-ul corectat al lui Aielli (2013) folosește $\mathrm{diag}(Q_{t-\mathbf{1}})^{\mathbf{1}/\mathbf{2}}\varepsilon_{t-\mathbf{1}}$ în locul lui $\varepsilon_{t-\mathbf{1}}$, astfel încît $\mathbb{E}[Q_t] = \bar{Q}$, iar fixarea țintei rămîne consistentă
- Erorile standard din pasul 2 tratează estimările GARCH și $\bar{Q}$ drept cunoscute
  - propagăm eroarea lor cu matricea de covarianță de tip sandviș (*sandwich*) a ambilor pași, estimați împreună (Newey & McFadden (1994))
  - sau prin bootstrap pe ambii pași: reeșantionăm datele, reestimăm ambii pași și folosim dispersia estimărilor (Anexă)
- Testul CCC față de DCC: $H_\mathbf{0} : a = 0$
  - sub $H_\mathbf{0}$, Q_t nu mai depinde de b, deci b nu este identificat, iar distribuția $\chi^\mathbf{2}$ este doar orientativă
  - valoarea p (*p-value*) se obține prin bootstrap: simulăm date sub CCC și reestimăm

Estimările DCC pentru SPY și TLT (1/2)

Pasul 1: GARCH(1,1), randamente în %

	ω	α	β	$\alpha+\beta$
SPY	0,0283	0,127	0,848	0,975
TLT	0,0057	0,049	0,943	0,993

Pasul 2: DCC(1,1) și trei erori standard

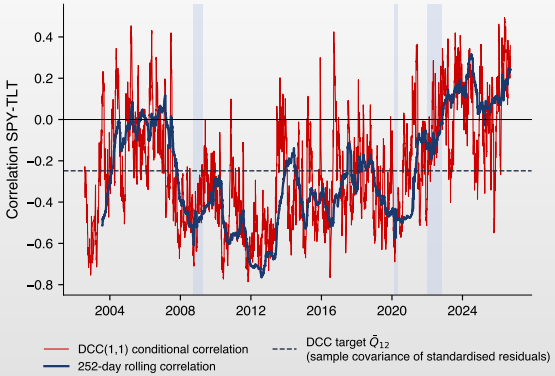
	estimare	hessiană	boot. pasul 2	boot. ambii
a	0,0522	0,0059	0,0051	0,0052
b	0,9335	0,0084	0,0077	0,0077
$a+b$	0,9857	–	0,0038	0,0040

- Date zilnice între 31 iulie 2002 și 18 septembrie 2026, $T = 6\,073$
  - ținta $\hat{\bar{Q}}_{\mathbf{12}} = -0{,}248$
- Persistența $a + b = 0{,}986$
  - indicatorul euristic $\ln 0{,}5 / \ln 0{,}986 \approx 48$ de zile, nu timpul exact de înjumătățire al lui Q_t
  - $\mathbb{E}_t[\varepsilon_{t+\mathbf{1}}\varepsilon_{t+\mathbf{1}}^\top] = R_{t+\mathbf{1}} \neq Q_{t+\mathbf{1}}$, deci abaterea lui Q nu scade exact cu $(a+b)^h$
  - răspunsul efectiv al corelației se obține prin simulare condiționată
- Testul LR (*Likelihood Ratio*, testul raportului de verosimilitate) față de CCC:
  $LR = 2(\hat{\ell}^{DCC} - \hat{\ell}^{CCC}) = 2(460{,}26 - 193{,}54) = 533{,}4$
  - bootstrap pe ambii pași sub CCC ($B = 199$): maximul simulat sub H_0 este 15,7
  - deci $p = 1/(B+1) = 0{,}005$, cea mai mică valoare posibilă: CCC este respins

Estimările DCC pentru SPY și TLT (2/2)

- În acest experiment bootstrap, reestimarea GARCH crește dispersia lui $\hat{a}$ cu 2% și a lui $\hat{b}$ cu 1%
  - cu $B = 199$, eroarea Monte Carlo a unei abateri standard bootstrap este de circa 5%
  - aici incertitudinea din pasul 1 este deci mică, dar rezultatul nu este general: contribuția pasului 1 poate rămîne de ordinul întîi și cînd T crește
- SE din hessiană depășesc abaterile standard bootstrap, dar aceasta nu dovedește că intervalele lor acoperă valoarea adevărată mai des decît nivelul nominal
- Corelația SPY–TLT reacționează puțin la șocul unei zile (a mic), dar își păstrează mult timp nivelul (b mare)
- Volatilitatea TLT este mai persistentă decît cea a SPY ($\alpha + \beta$: 0,993 față de 0,975)
  - dar reacționează mai puțin la știri (α mai mic)
- Aceste estimări DCC standard ilustrează metoda: cu fixarea țintei, ele sînt în general inconsistente (Estimarea în doi pași (2/2))

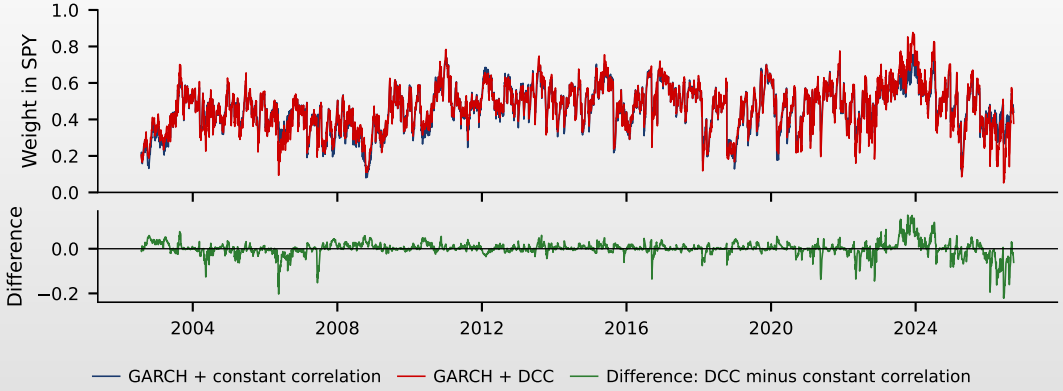
Corelația DCC dintre SPY și TLT, 2002–2026



- Corelația condiționată DCC(1,1), corelația pe fereastră mobilă de 252 de zile și ținta $\hat{Q}_{12} = -0{,}248$
- DCC standard ilustrează metoda, sub rezerva inconsistenței țintei (Estimarea în doi pași)
- Corelația DCC variază între $-0{,}79$ (2 noiembrie 2011) și 0,49 (21 mai 2026)
- Ultima valoare: 0,36
- Corelația DCC medie
  - $-0{,}54$ între 15 septembrie și 31 decembrie 2008
  - $-0{,}56$ în 2012, 0,00 în 2022
- Din ianuarie 2022 corelația DCC este deasupra țintei în 92% din zile, față de 36% înainte
- Ipoteza unei singure corelații pe termen lung este deci discutabilă
- Tipul de dovadă: descriere

MFM_ch6_dcc_spy_tlt ▶ Interactiv

Aplicație: ponderi de variantă minimă cu DCC (1/2)



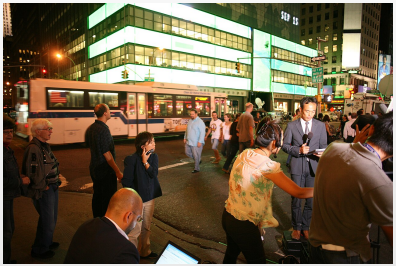
MFM_ch6_dcc_minvar ▶ Interactiv

Aplicație: ponderi de variață minimă cu DCC (2/2)

- Ponderea SPY în portofoliul zilnic SPY–TLT de variață minimă
  - $w_t = (\sigma^2_{2t} - \sigma_{12,t})/(\sigma^2_{1t} + \sigma^2_{2t} - 2\sigma_{12,t})$, trunchiată la $[0, 1]$ (fără vînzări în lipsă)
  - $\sigma_{12,t} = \rho_t \sigma_{1t} \sigma_{2t}$: covariația condiționată
- Volatilitățile GARCH sînt aceleași, iar corelația provine din DCC sau este constantă
  - corelația constantă este egală cu corelația randamentelor pe tot eșantionul 2002–2026 ($-0{,}30$)
- Volatilitatea anualizată a portofoliului
  - 10,99% pentru 60/40 fix
  - 9,10% pentru GARCH cu corelație constantă
  - 9,06% pentru GARCH cu DCC
- Cea mai mare parte a cîștigului vine din volatilitățile GARCH, iar DCC adaugă puțin
  - ponderile DCC și cu corelație constantă diferă în medie cu 0,019 și cel mult cu 0,22 (8 iunie 2026)
- Ilustrare în eșantion (*in-sample*): parametrii sînt estimați pe aceleași date pe care se evaluează
  - un test corect reestimează pe ferestre cu lungime crescătoare și adaugă costurile de tranzacționare (Capitolul 4)
  - evaluarea în afara eșantionului (*out-of-sample*): Capitolul 8
- Tipul de dovadă: comparație între proceduri

MFM_ch6_dcc_minvar

Contagiune sau interdependență?



Sediul Lehman Brothers, New York, 15 septembrie 2008, ziua cererii de faliment

Foto: Robert Scoble (2008); CC BY 2.0; Wikimedia Commons

- Constatare frecventă: corelațiile măsurate în criză sînt mai mari decît în perioadele calme
- O corelație mare în criză nu este încă contagiune
  - trebuie să o depășească semnificativ pe cea din perioada calmă
- Două explicații foarte diferite
  - **Contagiune**: se schimbă însuși mecanismul de transmitere
  - **Distorsiune de volatilitate** (de heteroscedasticitate): mecanismul rămîne neschimbat, dar o piață-sursă mai volatilă crește mecanic corelația
- Forbes & Rigobon (2002): după corecție, cea mai mare parte a „contagiunii" s-a dovedit interdependență (legături prezente în toate stările)
  - în crizele din 1987, 1994 și 1997
- Longin & Solnik (2001), Ang & Chen (2002): corelațiile cresc pe piețele în scădere, nu pe cele în creștere
  - o asimetrie pe care distribuția Normală nu o poate produce

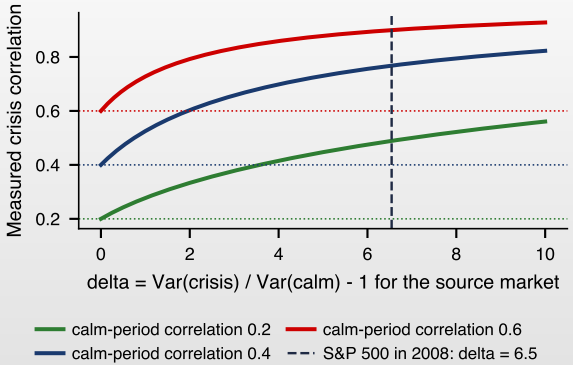
Distorsiunea de heteroscedasticitate (1/2): corelația în perioada calmă

- Modelul: $y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t$, $\mathrm{Cov}(x_t, \varepsilon_t) = 0$, β și σ_ε^2 constante
  - x_t: randamentul pieței-sursă
  - y_t: randamentul celeilalte piețe
  - β: coeficientul de transmitere
  - ε_t: șocul propriu al lui y, cu varianța σ_ε^2
  - σ_x^2: varianța lui x
- Două momente ale modelului
  - $\mathrm{Cov}(x_t, y_t) = \beta\sigma_x^2$ și $\mathrm{Var}(y_t) = \beta^2\sigma_x^2 + \sigma_\varepsilon^2$, deoarece ε_t este necorelat cu x_t
- Corelația: $\rho^2 = \dfrac{\beta^2\sigma_x^2}{\beta^2\sigma_x^2 + \sigma_\varepsilon^2} = \left(1 + \dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{\beta^2\sigma_x^2}\right)^{-1}$
- Același lucru printr-un singur număr: raportul semnal–zgomot $k = \beta^2\sigma_x^2/\sigma_\varepsilon^2$
  - $\rho^2 = \dfrac{k}{1+k}$, echivalent $k = \dfrac{\rho^2}{1-\rho^2}$: corelația depinde de σ_x^2 doar prin k
  - o piață-sursă mai volatilă (σ_x^2 mai mare) crește k, deci și $|\rho|$, cu β neschimbat

Distorsiunea de heteroscedasticitate (2/2): de la calm la criză

- În criză (indicele c): $\sigma^2_{x,c} = (1+\delta)\,\sigma^2_x$
  - $\delta > 0$: creșterea relativă a variației piței-sursă
  - nimic altceva nu se schimbă
- Crește doar σ^2_x, deci $k_c = (1+\delta)\,k$ și
  - $\rho^2_c = \dfrac{k_c}{1+k_c} = \dfrac{(1+\delta)\rho^2/(1-\rho^2)}{1+(1+\delta)\rho^2/(1-\rho^2)} = \dfrac{(1+\delta)\rho^2}{1+\delta\rho^2}$
- Atunci $\rho_c = \rho\sqrt{\dfrac{1+\delta}{1+\delta\rho^2}}$, deci $|\rho_c| > |\rho|$ pentru $0 < |\rho| < 1$
  - corelația măsurată crește în valoare absolută deși β este același
- Inversînd: $\rho^* = \dfrac{\rho_c}{\sqrt{1+\delta(1-\rho^2_c)}}$ este corelația din criză corectată pentru creșterea volatilității
- Verificare rapidă: varianța piței-sursă se dublează ($\delta = 1$), iar $\rho = 0{,}5$
  - $k = 0{,}25/0{,}75 = 1/3$, $k_c = 2/3$, $\rho^2_c = (2/3)/(5/3) = 0{,}4$, deci $\rho_c = 0{,}632$: o creștere de 0,13 fără nicio schimbare a lui β
  - Corecția: $\rho^* = 0{,}632/\sqrt{1+1\cdot(1-0{,}4)} = 0{,}632/1{,}265 = 0{,}5$, deci regăsim valoarea din perioada calmă

Creșterea corelației cauzată numai de volatilitate



- Corelația măsurată în criză ρ_c în funcție de δ, pentru trei corelații din perioada calmă
  - β este constant: crește doar volatilitatea pieței-sursă
- Linia verticală: fereastra de criză din 2008
  - varianța randamentelor S&P 500 pe 2 zile a fost de 7,5 ori nivelul din anul calm ($\delta = 6{,}54$)
- La acest δ, o corelație de 0,4 în perioada calmă se măsoară în criză ca 0,77
  - una de 0,2 se măsoară ca 0,49
- Pentru un investitor: o creștere a corelației de această mărime în criză nu dovedește singură contagiune

MFM_ch6_fr_bias ▶ Interactiv

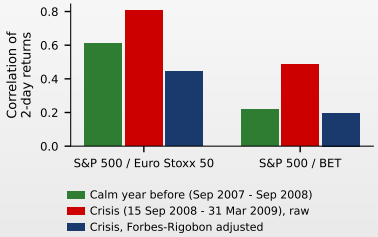
Testul Forbes–Rigobon și inferența lui

- Procedura
  - Alegem piața-sursă x, o fereastră calmă și una de criză
  - Folosim randamente pe 2 zile (orele de închidere diferă)
  - Calculăm $\delta = \hat{\sigma}^2_{x,c}/\hat{\sigma}^2_{x,calm} - 1$ și ρ^*
  - Testăm $H_0 : \rho^* \leq \rho_{calm}$ (fără contagiune) cu statistici Fisher z, convenția din Forbes & Rigobon (2002)
- Inferența
  - Cu δ fixat, $\mathrm{Var}(\operatorname{artanh}\rho^*) \approx 1/[n_c(1+\delta(1-\rho_c^2))] < 1/n_c$ (n_c: observațiile din criză): testul Fisher este conservator (respinge H_0 prea rar)
  - Dar δ este estimat și randamentele pe 2 zile se suprapun: folosim bootstrap staționar pe ferestrele calmă și de criză, reeșantionate împreună, și testăm $D = \rho^* - \rho_{calm}$
  - Bootstrap staționar: reeșantionează blocuri de zile consecutive (începuturi aleatoare, lungimi geometrice, în medie 10 zile; $B = 1\,999$ extrageri), păstrînd dependența serială din fiecare bloc

Ipoteze de reținut

- Niciun șoc comun omis
  - un factor global care afectează ambele piețe crește atît σ_x, cît și σ_ε
  - iar corecția este excesivă (Corsetti, Pericoli & Sbracia (2005); Anexă)
- Nicio legătură inversă de la y la x (fără endogenitate)
- Alegerea ferestrelor contează
  - o deplasare a ferestrelor cu cîteva săptămîni poate inversa rezultatele
- Varianța reziduală σ^2_ε nu se schimbă între perioade

2008: corelații de criză brute față de cele corectate



- Corelația randamentelor pe 2 zile cu S&P 500
  - anul calm, criza (brută) și criza după corecția Forbes–Rigobon
- Ambele creșteri brute (Euro Stoxx 50 și BET) sînt semnificative la 5%, niciuna nu rămîne semnificativă după corecție
- Bootstrap staționar: intervalul de 90% pentru δ este [3,9; 9,6]
- Euro Stoxx 50: intervalul de 90% pentru ρ^* este [0,38; 0,52], iar valoarea p bootstrap este 0,98
- BET: intervalul de 90% pentru ρ^* este [0,16; 0,24], iar valoarea p bootstrap este 0,62
  - SE bootstrap a lui ρ^* este 0,025, față de 0,047 cu formula Normală
- Concluzie: nicio dovadă de contagiune după corecția pentru volatilitate, în ipotezele modelului
- Rezerve
  - în 2008 un șoc global comun a lovit toate piețele, deci corecția poate fi excesivă (Corsetti, Pericoli & Sbracia (2005))
  - testul are și putere mică (aplicația pentru 2020: Seminarul B3)
- Tipul de dovadă: asociere (variabilele se mișcă împreună; nu dovedește o relație cauzală)

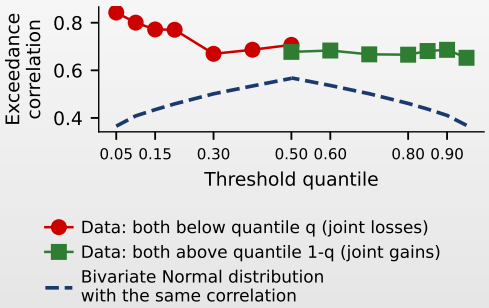
MFM_ch6_forbes_rigobon

▶ Interactiv

Corelațiile de depășire

- Întrebarea secțiunii: cît de probabile sînt pierderile extreme simultane?
  - și ce model al dependenței le poate reproduce, cînd corelația nu o poate face?
- **Corelația de depășire** (*exceedance correlation*, Longin & Solnik (2001)): corelația condiționată de faptul că ambele randamente depășesc un prag
- Coada inferioară (*lower tail*) la cuantila q: $\rho^-(q) = \mathrm{Corr}\big(x, y \mid x \le F_x^{-1}(q),\, y \le F_y^{-1}(q)\big)$
  - $F_x^{-1}(q)$: cuantila de ordin q a lui x
  - de ex. $q = 0{,}10$: cele mai proaste 10% dintre săptămîni
- Coada superioară (*upper tail*): la fel, cu $x \ge F_x^{-1}(1-q)$, $y \ge F_y^{-1}(1-q)$
- Referința: pentru distribuția Normală bivariată, $\rho^{\pm}(q) \to 0$ cînd $q \to 0$
  - Condiționarea pe valori extreme reduce corelația chiar dacă structura dependenței rămîne neschimbată: comparăm cu curba Normală, nu cu ρ

Corelații de depășire: S&P 500 și Euro Stoxx 50



- Randamente săptămînale 2000–2026 ($n = 1\,393$)
  - în zilele comune de tranzacționare S&P 500 și Euro Stoxx 50
  - corelația pe tot eșantionul: $\hat{\rho} = 0{,}78$
  - linia întreruptă: distribuția Normală bivariată cu aceeași corelație
- La $q = 0{,}10$
  - corelația pe pierderile comune: $\rho^- = 0{,}80$ (86 săptămîni)
  - corelația pe cîștigurile comune: $\rho^+ = 0{,}69$ (70 săptămîni)
  - referința Normală la același q: 0,41
- Ambele cozi sînt mult peste referința Normală
  - pierderile comune sînt mai puternic corelate decît cîștigurile comune
- Un singur coeficient nu poate descrie acest lucru
  - este necesar un model al întregii structuri de dependență: o copulă (definită mai jos)
- Tipul de dovadă: descriere

MFM_ch6_exceedance ▶ Interactiv

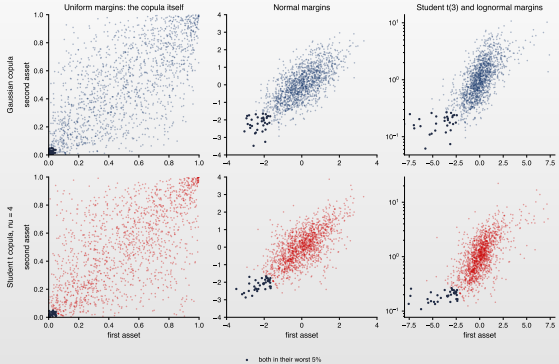
Limitele corelației liniare

- Embrechts, McNeil & Straumann (2002): trei erori frecvente despre corelația liniară
- Corelația măsoară doar dependența *liniară*
  - nu este invariantă la transformări monotone: $\text{Corr}(x, y) \neq \text{Corr}(e^x, e^y)$
- Marginalele și corelația nu determină distribuția comună
  - Două portofolii cu aceleași marginale și același ρ pot avea Value at Risk foarte diferite (Capitolul 7)
- Corelațiile posibile: pentru marginale date, $\rho \in [\rho_{\min}, \rho_{\max}]$
  - atinse de perechi contramonotone (una este funcție descrescătoare de cealaltă) și comonotone (funcție crescătoare)
  - Exemplu cu distribuții lognormale: $X = e^{\sigma_1 Z}$, $Y = e^{\pm\sigma_2 Z}$, cu Z din distribuția Normală standard (cu $+$ variabilele sînt comonotone, cu $-$ contramonotone)
  - $\rho_{\max} = \dfrac{e^{\sigma_1\sigma_2} - 1}{\sqrt{(e^{\sigma_1^2} - 1)(e^{\sigma_2^2} - 1)}}$, iar $\rho_{\min}$ se obține cu $e^{-\sigma_1\sigma_2}$ la numărător
  - Pentru $\sigma_1 = 1$ și $\sigma_2 = 3$: $\rho_{\max} = 0{,}162$ și $\rho_{\min} = -0{,}008$, deci variabile perfect dependente pot fi aproape necorelate
- Soluția: separăm marginalele de structura de dependență (slide-ul următor)

Ce este o copulă, intuitiv (1/2)

- Pasul 1: înlocuim fiecare randament cu percentila lui
  - $u = 0{,}05$ este o zi printre cele mai proaste 5% ale acelui activ, $u = 0{,}5$ o zi obișnuită
- Pasul 2: norul de puncte (u, v) din pătratul $[0, 1]^2$ este **copula**
  - arată doar cît de des zilele bune și cele proaste ale celor două active coincid
  - volatilitatea, cozile groase și unitățile fiecărui activ (marginalele) dispar; rămîne doar legătura
- Marginalele spun cum se mișcă fiecare activ; copula spune cum se mișcă împreună
  - aceeași copulă se poate combina cu orice marginale (teorema lui Sklar, slide-ul următor)
- În date: cînd JPM are una dintre cele mai proaste 5% zile, BAC are și ea una în aproximativ 61% din cazuri
  - aceasta este o proprietate a copulei, nu a marginalelor

Ce este o copulă, intuitiv (2/2)



- 1 500 de perechi simulate cu același τ Kendall (0,5); fiecare rînd păstrează o copulă (Gaussiană sus, Student t cu $\nu = 4$ jos), fiecare coloană schimbă marginalele
- Punctele închise: ambele active în cele mai proaste 5% zile, 34 de perechi la Gaussiana, 40 la copula t

Teorema lui Sklar: marginale plus copulă

- O **copulă** este o funcție de repartiție comună pe $[0,1]^d$ cu marginale uniforme: descrie doar legătura dintre variabile, după ce fiecare a fost adusă pe scara probabilităților $[0,1]$
- Sklar (1959): pentru orice repartiție comună F cu marginalele $F_1, \ldots, F_d$ există o copulă C
  - astfel încît $F(x_1, \ldots, x_d) = C(F_1(x_1), \ldots, F_d(x_d))$
  - d: numărul de variabile
  - F_i: funcția de repartiție marginală a lui x_i
  - $u_i = F_i(x_i) \in [0,1]$: nivelul ei de probabilitate
  - C este unică dacă marginalele sînt continue
  - Invers, orice copulă și orice marginale dau o repartiție comună validă
  - Cu densități: $f(x) = c(F_1(x_1), \ldots, F_d(x_d)) \prod_i f_i(x_i)$, c densitatea copulei, f_i densitățile marginale (copula comonotonă nu are densitate)
- Marginalele conțin volatilitatea, asimetria și cozile groase ale fiecărui activ (Capitolele 1 și 5)
- Copula conține toată dependența
  - este invariantă la transformări crescătoare ale fiecărei variabile, spre deosebire de ρ
- Trei copule de referință și marginile Fréchet–Hoeffding $W \leq C \leq M$ (Nelsen (2006))
  - Independența: $\Pi(u,v) = uv$
  - Comonotonia: $M(u,v) = \min(u,v)$
  - Contramonotonia: $W(u,v) = \max(u+v-1, 0)$

Corelații de rang: Kendall și Spearman

- **Tau al lui Kendall** (Kendall (1938)): perechi concordante minus perechi discordante
  - $\tau = P\big[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\big] - P\big[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0\big]$
  - (X_1, Y_1), (X_2, Y_2): două extrageri independente ale perechii
  - Perechi concordante: ambele coordonate variază în același sens
  - Forma în copule: $\tau = 4 \iint C \, dC - 1 = 4\,\mathbb{E}[C(U, V)] - 1$
- **Rho al lui Spearman** (Spearman (1904)): corelația Pearson a rangurilor
  - Forma în copule: $\rho_S = 12 \iint (C(u, v) - uv)\, du\, dv$
- Ambele iau valori în $[-1, 1]$ și depind doar de copulă: 1 pentru M, 0 pentru Π, -1 pentru W
  - deci, spre deosebire de ρ, nu se schimbă la transformări crescătoare ale variabilelor
- θ: parametrul copulei

Legătura cu parametrii copulelor

Copula	τ
Gaussiană, t	$\frac{2}{\pi} \arcsin \rho$
Clayton	$\theta/(\theta + 2)$
Gumbel	$1 - 1/\theta$
Frank	$1 - \frac{4}{\theta}\left[1 - D_1(\theta)\right]$

- $D_1(\theta) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \frac{t}{e^t - 1} dt$ (funcția Debye)
- Gaussiană: $\rho_S = \frac{6}{\pi} \arcsin(\rho/2)$
- Exemplu, copula Gaussiană cu $\rho = 0{,}5$: $\tau = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{6} = 1/3$ și $\rho_S = \frac{6}{\pi} \arcsin 0{,}25 = 0{,}483$

Cinci familii de copule (1/2)

Familia	$C(u,v)$	Parametru
Gaussiană	$\Phi_{\mathbf{2},\rho}\left(\Phi^{-\mathbf{1}}(u), \Phi^{-\mathbf{1}}(v)\right)$	$-1 < \rho < 1$
Student t (Demarta & McNeil (2005))	$t_{\mathbf{2},\rho,\nu}\left(t_\nu^{-\mathbf{1}}(u), t_\nu^{-\mathbf{1}}(v)\right)$	$-1 < \rho < 1,\ \nu > 0$
Clayton (Clayton (1978))	$(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\mathbf{1}/\theta}$	$\theta > 0$
Gumbel (Gumbel (1960))	$\exp\big(-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{\mathbf{1}/\theta}\big)$	$\theta \geq 1$
Frank (Frank (1979))	$-\frac{\mathbf{1}}{\theta}\ln\Big(\mathbf{1} + \frac{(e^{-\theta u}-\mathbf{1})(e^{-\theta v}-\mathbf{1})}{e^{-\theta}-\mathbf{1}}\Big)$	$\theta \neq 0$

- Notații din tabel
  - $\Phi, \Phi^{-\mathbf{1}}$, $\Phi_{\mathbf{2},\rho}$: funcția de repartiție, cuantila și funcția de repartiție bivariată (corelația ρ) ale distribuției Normale
  - t_ν, $t_{\mathbf{2},\rho,\nu}$: analoagele Student t cu ν grade de libertate; θ: parametrul de dependență
- De ce aceste cinci: acoperă cele patru tipare de dependență în cozi (tendința extremelor de a apărea împreună, definită mai jos)
  - niciuna (Gaussiană, Frank), ambele simetric (t), doar coada inferioară (Clayton), doar coada superioară (Gumbel)
- Eliptice (Gaussiană, t): provin din distribuțiile Normală și Student t multivariate
  - se extind la d dimensiuni cu o matrice de corelație, alegerea standard în sistemele de risc
  - pentru $\nu \to \infty$, copula t devine copula Gaussiană

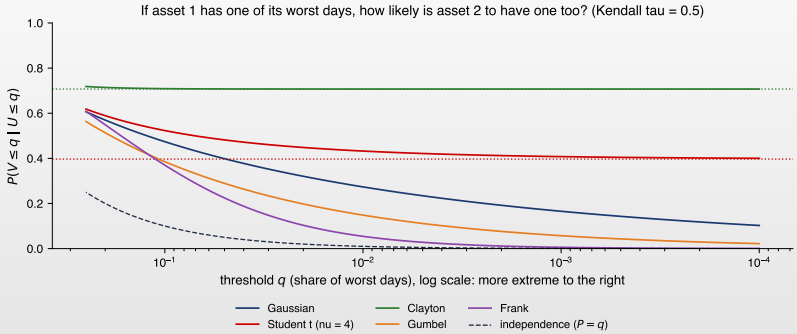
Cinci familii de copule (2/2)

- De unde vin numele: copula Gaussiană este legătura dintr-o pereche cu distribuția Normală bivariată (corelația ρ), după ce fiecare variabilă este adusă pe $[0, 1]$ cu Φ
  - numele spune de unde vine legătura, nu că randamentele sînt Normale: marginalele pot fi oricare (copula, intuitiv)
  - copula Student t: la fel, din distribuția t bivariată; Clayton, Gumbel și Frank poartă numele autorilor care le-au propus
- Arhimediene (Clayton, Gumbel, Frank): $C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))$, φ: generator (descrescător, $\varphi(1) = 0$)
  - Au un singur parametru, formă închisă și se simulează ușor
  - Dar sînt simetrice la permutarea variabilelor și puțin flexibile în dimensiuni mari
  - de exemplu, Clayton: $\varphi(t) = (t^{-\theta} - 1)/\theta$; Gumbel: $\varphi(t) = (-\ln t)^{\theta}$
  - numele: generatorul transformă combinarea în adunare; aplicată de n ori aceluiași $u < 1$, copula dă $\varphi^{-1}(n\varphi(u)) \to 0$, ca în axioma lui Arhimede ($n\varepsilon$ depășește orice prag pentru n suficient de mare)
- Rotirea cu 180° transferă dependența în cozi în coada opusă
  - copula de supraviețuire a perechii $(1 - U, 1 - V)$, unde U și V sînt variabilele uniforme ale copulei
  - de exemplu, Gumbel rotit are dependență doar în coada inferioară (crahuri comune)
  - densitățile și generatorii în ▸ Anexă

Dependența în cozi, intuitiv (1/2)

- Întrebarea: în zilele foarte proaste ale unui activ, cît de des are și celălalt o zi foarte proastă?
- Numărăm: luăm cele mai proaste 1% zile ale primului activ și vedem în cîte dintre ele al doilea este și el în cele mai proaste 1% zile ale sale
  - active independente: doar în 1% din cazuri
  - copula Gaussiană cu τ Kendall 0,5: 27,3% la pragul de 1% și 16,5% la 0,1%; proporția scade spre 0
  - copula Student t ($\nu = 4$) cu același τ: 43,2% la 1% și 40,8% la 0,1%; proporția rămîne în jur de 40%
- **Dependența în cozi** λ este valoarea spre care tinde această proporție cînd pragul devine tot mai extrem
  - $\lambda = 0$: crahurile comune devin tot mai rare față de cele individuale; $\lambda > 0$: o parte fixă a crahurilor rămîne comună
- Pentru risc: la aceeași τ, portofoliul pierde simultan pe ambele active mult mai des cînd $\lambda > 0$
  - în date, la pragul de 5%: zilele foarte proaste ale JPM coincid cu ale BAC în aproximativ 61% din cazuri

Dependența în cozi, intuitiv (2/2)



- Axa orizontală: pragul q, tot mai extrem spre dreapta; axa verticală: proporția zilelor proaste comune, $P(V \leq q \mid U \leq q)$
- Liniile punctate: limitele λ_L, 0,707 (Clayton) și 0,397 (Student t); Gaussiana, Gumbel și Frank tind la 0, deși au același τ

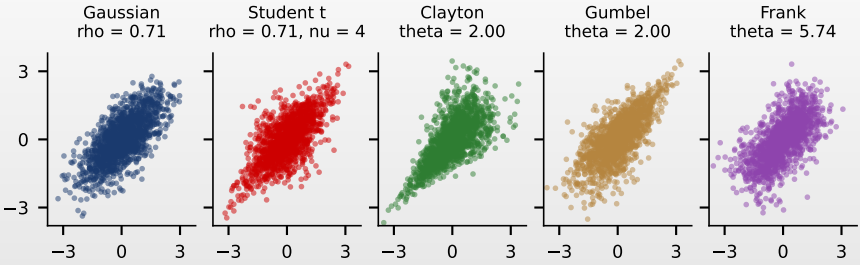
Dependența în cozi

- Întrebarea: dacă un activ are o zi extremă, cît de probabil este ca și celălalt să aibă una?
- Coada inferioară:
  $\lambda_L = \lim_{q \downarrow \mathbf{0}} P(V \leq q \mid U \leq q) = \lim_{q \downarrow \mathbf{0}} C(q,q)/q$
  - $U = F_{\mathbf{1}}(X_{\mathbf{1}})$, $V = F_{\mathbf{2}}(X_{\mathbf{2}})$; q: probabilitatea din coadă
- Coada superioară: $\lambda_U = \lim_{q \downarrow \mathbf{0}} P(V > 1 - q \mid U > 1 - q)$
- $\lambda > 0$: probabilitatea unei extreme comune rămîne pozitivă oricît de extrem ar fi pragul
- $\lambda = 0$: independență asimptotică, probabilitatea condiționată a unei extreme comune tinde la 0 cînd pragul devine tot mai extrem
- Dependența în cozi este o proprietate a copulei, invizibilă în ρ (slide-ul următor)
- La un q finit, $C(q,q)/q$ este o probabilitate condiționată, nu încă limita: din date estimăm doar astfel de valori
- $t_{\nu+\mathbf{1}}$ în tabel: funcția de repartiție Student t cu $\nu + 1$ grade de libertate

Forme închise

	λ_L	λ_U
Gaussiană	0	0
Student t	$2\, t_{\nu+\mathbf{1}}\Big(-\sqrt{\frac{(\nu+\mathbf{1})(\mathbf{1}-\rho)}{\mathbf{1}+\rho}} \Big)$	la fel
Clayton	$2^{-\mathbf{1}/\theta}$	0
Gumbel	0	$2 - 2^{\mathbf{1}/\theta}$
Frank	0	0

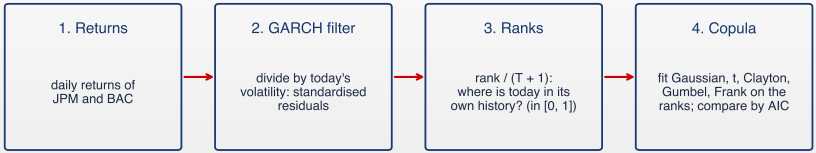
Cinci copule cu același tau al lui Kendall



- 1 500 de perechi simulate din fiecare copulă cu $\tau = 0{,}5$, pe marginale Normale $(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v))$
  - parametrii care dau $\tau = 0{,}5$: $\rho = 0{,}707$ pentru Gaussiană și t (copula t cu $\nu = 4$), $\theta = 2{,}0$ pentru Clayton și Gumbel, $\theta = 5{,}74$ pentru Frank
- În cozi: copulele Gaussiană și Frank devin rarefiate, copula t rămîne densă în ambele
  - Clayton se concentrează în coada inferioară (crahuri comune), Gumbel în coada superioară
- Același tau al lui Kendall nu determină riscul extremelor simultane: contează familia copulei

MFM_ch6_copula_zoo ▶ Interactiv

Estimarea copulelor, intuitiv

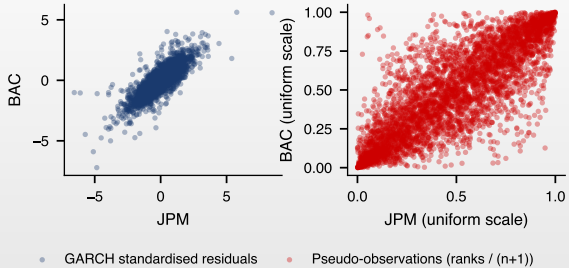


- Pasul 2, filtrul GARCH: -3% înseamnă altceva într-o zi calmă decît în criză
  - împărțim fiecare randament la volatilitatea zilei, ca să comparăm zile din regimuri diferite
- Pasul 3, rangurile: fiecare zi devine percentila ei în propria istorie a activului
  - nu presupunem nicio formă pentru marginale; o marginală greșită nu poate strica estimarea copulei
- Pasul 4, verosimilitatea: pentru fiecare familie alegem parametrul care face cele mai probabile perechile de percentile observate
  - densitatea copulei este mare acolo unde punctele sînt dese, de exemplu în colțul zilelor proaste comune
- Comparăm apoi familiile între ele: criteriul AIC (*Akaike Information Criterion*, criteriul informațional Akaike) penalizează parametrii în plus; pentru JPM și BAC cîștigă copula t (slide-urile următoare)

Estimarea copulelor

- **Verosimilitate maximă completă**: marginalele și copula estimate simultan
  - Eficientă, dar costisitoare computațional și sensibilă la erorile de specificare
- **IFM** (funcții de inferență pentru marginale, Joe (2005)): doi pași
  - Pasul 1: estimăm marginale parametrice (de exemplu GARCH cu Student t)
  - Calculăm $\hat{u}_{it} = \hat{F}_i(x_{it})$, unde $\hat{F}_i$ este funcția de repartiție marginală estimată
  - Pasul 2: maximizăm $\sum_t \ln c(\hat{u}_{\mathbf{1}t}, \hat{u}_{\mathbf{2}t}; \theta)$, unde c este densitatea copulei
- **CML** (verosimilitate maximă canonică, Genest, Ghoudi & Rivest (1995)): fără marginale parametrice
  - Pseudo-observații (ranguri rescalate): $\hat{u}_{it} = \text{rang}(x_{it})/(T+1)$
  - Apoi maximizăm verosimilitatea copulei
  - Robustă la marginale specificate greșit
  - Numitorul $T+1$ menține $\hat{u}$ la distanță de 0 și 1
- Pentru randamente: filtrăm întîi fiecare serie cu GARCH
  - fără filtrare, gruparea volatilității ar amesteca dependența cu variația volatilității
  - apoi folosim rangurile reziduurilor standardizate (CML, metoda folosită în continuare)
  - inferența CML statică prezentată aici presupune inovații i.i.d.; filtrarea GARCH nu garantează singură această proprietate
- Alegerea modelului: majoritatea familiilor comparate nu sînt imbricate (niciuna nu este caz particular al alteia)
  - excepție: Gaussiana este copula t cu $\nu = \infty$; pentru ea folosim LR calibrat prin bootstrap (Seminarul 6, B2)
  - pentru celelalte folosim AIC $= 2k - 2\ell$ (criteriul Akaike) și BIC $= k \ln T - 2\ell$ (criteriul bayesian)
  - k: numărul de parametri, iar ℓ: log-verosimilitatea maximă

De la reziduuri la pseudo-observații: JPM și BAC



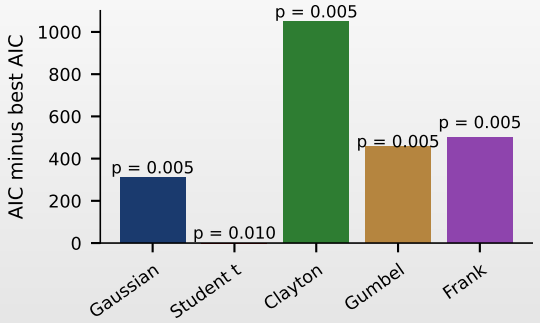
- JPMorgan Chase (JPM) și Bank of America (BAC), zilnic 2010–2026 ($T = 4\,202$), filtrate GARCH(1,1)
- Tau al lui Kendall: $\hat{\tau} = 0{,}641$
- Rho al lui Spearman: $\hat{\rho}_S = 0{,}822$
- Norul de puncte cu marginale uniforme este dens în ambele cozi: crahuri comune și creșteri comune
  - întrebarea următoare: ce familie de copule reproduce acest tipar?

MFM_ch6_copula_banks ▶ Interactiv

Testele de adecvare, intuitiv

- Întrebarea: arată datele ca și cum ar fi fost generate de copula estimată?
- Ideea testului Rosenblatt: dacă modelul este corect, fiecare pereche (u, v) se transformă în două numere fără nicio legătură între ele
  - primul rămîne u; al doilea spune unde cade v în distribuția pe care modelul o prevede pentru v, știind u
  - cu un model bun, norul transformat umple pătratul $[0,1]^2$ uniform, fără zone mai dese
- Statistica S_n măsoară cît de departe este norul transformat de un nor uniform: 0 la potrivire perfectă, valori mari la potrivire slabă
  - JPM și BAC: t 0,082, Frank 0,365, Gaussiană 0,968, Clayton 1,24, Gumbel 1,42
- Valoarea p prin bootstrap: simulăm de B ori date din copula estimată, refacem tot calculul și numărăm cît de des S_n simulat este cel puțin cît cel observat
  - aici nicio simulare nu atinge valoarea observată, deci p este minimul posibil, $1/(B+1)$: toate familiile sînt respinse
- Cu 4 202 zile testul vede și abateri mici: o respingere spune că modelul nu este exact, nu cît de greșit este; pentru alegere folosim și AIC

Estimările copulelor și adecvarea lor: JPM și BAC (1/2)



Numbers above bars: goodness-of-fit p-value
(Rosenblatt Cramer-von Mises, parametric bootstrap)

MFM_ch6_copula_banks ▶ Interactiv

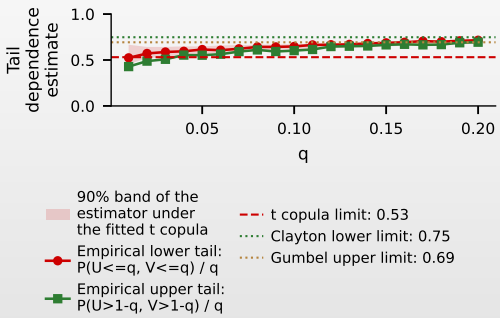
Estimările copulelor și adecvarea lor: JPM și BAC (2/2)

	$\hat{\theta}$ sau $\hat{\rho}$	$\hat{\nu}$	λ_L	λ_U
Gaussiană	0,833	–	0,000	0,000
Student t	0,842	4,24	0,531	0,531
Clayton	2,384	–	0,748	0,000
Gumbel	2,587	–	0,000	0,693
Frank	9,152	–	0,000	0,000

- λ_L, λ_U din tabel: dependența în cozi implicată de parametrii estimați
- Barele (slide-ul anterior) arată distanța AIC față de cel mai bun model
  - numerele de deasupra lor: valorile p bootstrap ale testului de adecvare (tabelul complet în ▸ Anexă)
- Copula Student t are cel mai mic AIC, la mare distanță de celelalte
- Testul Rosenblatt (Aprofundări) verifică dacă datele, transformate cu copula estimată, devin uniforme independente: respinge toate familiile
  - fiecare valoare p este minimul posibil, $1/(B+1)$
- Statistica testului (mai mică înseamnă adecvare mai bună): t 0,082, Frank 0,365, Gaussiană 0,968, Clayton 1,24, Gumbel 1,42
  - Frank este a doua după adecvare, dar a patra după AIC
- Pentru un manager de risc: copula t este cea mai bună dintre cele cinci, dar nu este un model exact
- Tipul de dovadă: comparație între proceduri

MFM_ch6_copula_banks

Dependența empirică în cozi: JPM și BAC



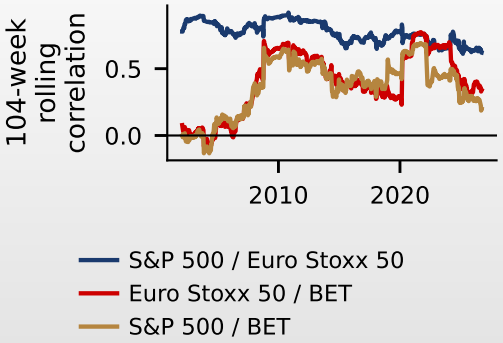
- $\hat{\lambda}_L(q) = \hat{C}(q,q)/q$ și $\hat{\lambda}_U(q)$ pentru q între 1% și 20%
  - banda: intervalul punctual de 90% pe date simulate din copula t estimată (parametri fixați, nesimultan pe praguri)
- La $q = 5\%$: $\hat{\lambda}_L = 0{,}61$ și $\hat{\lambda}_U = 0{,}55$
  - la $q = 1\%$: $\hat{\lambda}_L = 0{,}52$ și $\hat{\lambda}_U = 0{,}43$
- Cînd JPM are una dintre cele mai proaste 5% zile
  - BAC se află în propriile 5% cele mai proaste zile în aproximativ 61% din cazuri
- Coada inferioară la 5%: în banda copulei t (0,57–0,65)
- Coada superioară (0,55 la 5%): sub banda copulei t
  - cîștigurile comune sînt mai slabe decît prezice modelul
- La $q = 1\%$ rămîn doar 42 de zile în coadă, deci estimarea este imprecisă
- Tipul de dovadă: descriere
  - diferența $\hat{\lambda}_L - \hat{\lambda}_U$ nu este semnificativă (Aprofundări)

MFM_ch6_copula_banks ▶ Interactiv

Copula Gaussiană în criza din 2008

- Li (2000) a modelat timpii pînă la faliment ai mai multor debitori cu o copulă Gaussiană
  - Un singur parametru de corelație, calibrat pe spread-urile de piață
  - Evalua portofolii întregi de credite și a devenit standardul pentru tranșele de obligațiuni garantate cu datorii (CDO)
- Dependență asimptotică zero în cozi ($\lambda_L = \lambda_U = 0$)
  - pentru falimentele comune cele mai extreme dă probabilități mai mici decît modelele cu dependență în cozi calibrate pe aceleași date
- O corelație statică, calibrată în anii calmi
  - aceleași probleme evidențiate în acest capitol de Forbes–Rigobon și de DCC
- Lecția: pentru extremele comune este nevoie de o copulă cu dependență în cozi, reestimată cînd se schimbă regimul

Acțiuni din SUA, zona euro și România, 2000–2026 (1/2)



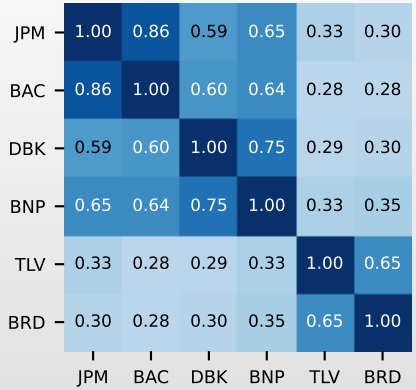
MFM_ch6_integration ▶ Interactiv

Acțiuni din SUA, zona euro și România, 2000–2026 (2/2)

- Întrebarea secțiunii: este piața românească tot mai integrată cu cele mari?
  - și se mai poate diversifica între sistemele bancare în crize?
- Corelații pe o fereastră mobilă de 104 săptămîni
  - din randamente săptămînale calculate cu închiderile de vineri, în zilele comune de tranzacționare
- Corelația Euro Stoxx 50–BET calculată pe fiecare subperioadă întreagă: 0,33 în 2000–2009, 0,45 în 2010–2019 și 0,61 din 2020
  - corelația S&P 500–Euro Stoxx 50 în aceleași perioade: 0,84, 0,78 și 0,70
- Corelația Euro Stoxx 50–BET pe fereastra mobilă sare în crize și revine parțial după aceea
  - 2008: de la 0,31 (sfîrșitul lui 2007) la 0,65 (sfîrșitul lui 2009)
  - 2020: de la 0,29 (sfîrșitul lui 2019) la 0,76 (sfîrșitul lui 2021), apoi 0,34 în septembrie 2026
- Integrare sau distorsiunea de volatilitate Forbes–Rigobon? (Seminarul C2)
  - în 2008, creșterea corelației BET–S&P 500 nu rămîne semnificativă după corecție (secțiunea Forbes–Rigobon)
- Pentru un investitor din zona euro, BET diversifică în medie mai puțin decît în 2000–2009, și cel mai puțin în crize
- Tipul de dovadă: descriere

MFM_ch6_integration

Bănci: corelațiile randamentelor săptămînale, 2010–2026 (1/2)



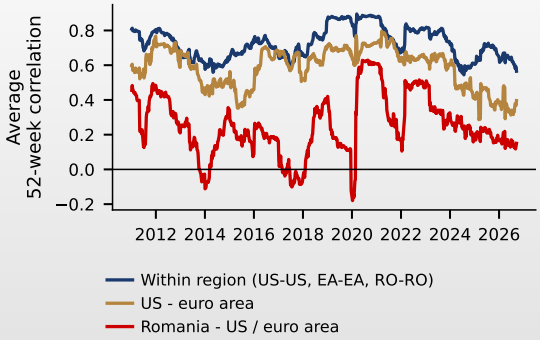
MFM_ch6_banks ▶ Interactiv

Bănci: corelațiile randamentelor săptămînale, 2010–2026 (2/2)

- Întrebarea: se mișcă băncile mai mult cu țara lor decît cu băncile din alte regiuni?
- Băncile
  - SUA: JPM și BAC
  - Zona euro: DBK (Deutsche Bank) și BNP (BNP Paribas)
  - România: TLV (Banca Transilvania) și BRD (BRD-Groupe Société Générale)
- 871 săptămîni, din 15 ianuarie 2010
  - alegerea: două dintre cele mai mari bănci listate din fiecare sistem, cu date continue din 2010
- Corelația dintre cele două bănci ale aceleiași regiuni
  - 0,86 în SUA, 0,75 în zona euro și 0,65 în România
- Legăturile dintre regiuni sînt cele mai slabe pentru România
  - BNP–TLV 0,33, JPM–BRD 0,30
- Randamentele băncilor au factori comuni la nivel de țară
  - riscul suveran, dobînzile interne, reglementarea
  - rămîne această diversificare și în crize? (slide-ul următor)

MFM_ch6_banks

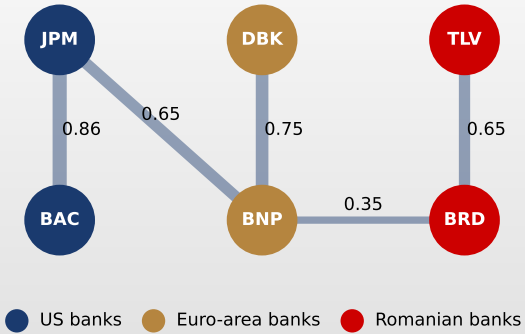
Corelațiile dintre bănci în timp



- Media corelațiilor pe perechi, pe 52 de săptămîni, ale randamentelor săptămînale
  - în interiorul regiunilor (în legendă: US: SUA, EA: zona euro, RO: România)
  - între SUA și zona euro, între România și celelalte
- Media pe toată perioada
  - 0,73 în interiorul regiunilor, 0,59 între SUA și zona euro, 0,25 între România și celelalte
- În martie–iunie 2020, aceleași medii au fost 0,87, 0,69 și 0,56
  - într-un șoc global, legătura României a crescut de peste două ori
  - ultimele valori, în aceeași ordine: 0,57, 0,40 și 0,15
- Diversificarea între sisteme bancare funcționează în perioade normale
  - și slăbește exact în evenimentele sistemice
- Tipul de dovadă: descriere

MFM_ch6_banks ▶ Interactiv

O rețea de corelații între bănci



- Arborele de acoperire minimă (Mantegna (1999)) pe $d_{ij} = \sqrt{2(1-\rho_{ij})}$
  - cele 5 legături care unesc toate cele 6 bănci fără cicluri, cu suma minimă a distanțelor
- Muchiile: JPM–BAC (0,86); JPM–BNP (0,65); DBK–BNP (0,75); BNP–BRD (0,35); TLV–BRD (0,65)
  - România este legată de restul rețelei prin BNP–BRD
- Distanța $\sqrt{(1-\rho)/2}$ din Capitolul 4 dă același arbore
  - ambele distanțe cresc cu $1-\rho$
- Arborele este neorientat și contemporan: nu identifică canalele de transmitere
  - ci sugerează doar ipoteze pentru măsurile de rețea din Capitolul 18
  - literatura în ▸ Anexă

MFM_ch6_banks ▶ Interactiv

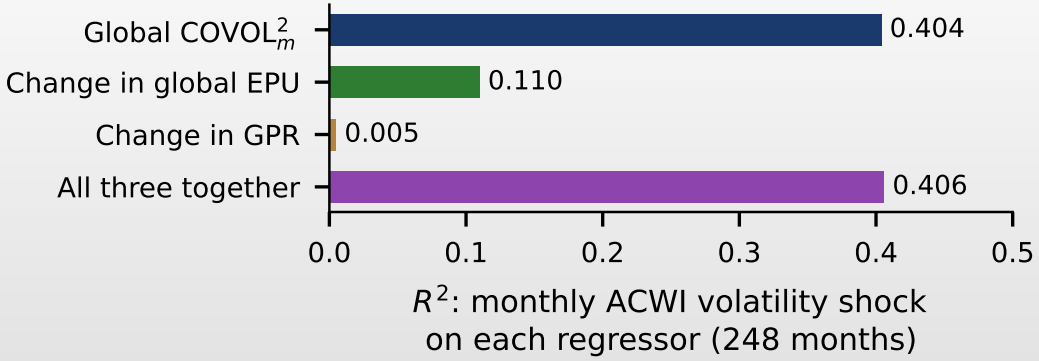
Studiu de caz (1/2): ce evenimente lovesc simultan toate piețele?

- Întrebările din Engle & Campos-Martins (2023)
  - ce evenimente modifică simultan volatilitățile aproape tuturor țărilor și claselor de active?
  - cît de mare este acest șoc comun?
- Mărimea zilnică a șocului comun este COVOL global (common volatility, volatilitatea comună)
- Ideea nouă: un DCC corect dă reziduuri e_t cu $E_{t-\mathbf{1}}(e_t e_t^\top) = I$
  - dar necorelat nu înseamnă independent: pătratele pot varia împreună
  - $\Psi_t = E_{t-\mathbf{1}}\left[(e_t^{\mathbf{2}} - \iota)(e_t^{\mathbf{2}} - \iota)^\top\right]$
  - e_t: vectorul celor N reziduuri DCC din ziua t
  - $e_t^{\mathbf{2}}$: pătratul lui, element cu element
  - ι: vectorul de unu
  - $E_{t-\mathbf{1}}$: media condiționată, dată fiind informația pînă la $t-1$
  - Elemente nenule în afara diagonalei, $\Psi_{ij,t} \neq 0$: pătratele șocurilor activelor i și j sînt mari în aceleași zile
  - Analogul transversal al modelului ARCH (autoregressive conditional heteroskedasticity, Capitolul 5): pătrate corelate între active în aceeași zi, nu în timp
  - Herskovic, Kelly, Lustig & Van Nieuwerburgh (2016) documentează un asemenea factor în volatilitatea idiosincratică a acțiunilor americane

Studiu de caz (2/2): un factor comun scalează toate variațiile

- Modelul: un singur factor comun x_t scalează varianța fiecărui reziduu
  - $e_{it} = \sqrt{s_i x_t + 1 - s_i}\,\varepsilon_{it}$, ε_{it} i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$, $x_t > 0$, $E_{t-\mathbf{1}}(x_t) = 1$
  - x_t: pătratul COVOL global din ziua t ($x_t > 1$: o zi cu șoc comun)
  - $s_i \in [0,1]$: încărcarea (*loading*) activului i, ponderea lui x_t în varianța sa condiționată $g_{it} = s_i x_t + 1 - s_i = 1 + s_i(x_t - 1)$
- Estimarea: sînt identificate doar produsele $s_i(x_t - 1)$
  - deci scara trebuie fixată printr-o normalizare
  - Încărcări egale $s_i = 1$: $\hat{x}_t = \frac{\mathbf{1}}{N}\sum_i e_{it}^{\mathbf{2}}$, media transversală a pătratelor reziduurilor, pe scara variației reziduurilor
  - Încărcări diferite: estimare alternantă prin verosimilitate maximă, pe rînd pentru x_t (o secțiune transversală pe zi) și s_i (o serie temporală pe activ), cu $s^\top s = 1$ și media $x_t = 1$
  - Cu $s^\top s = 1$, încărcările sînt mărimi relative, nu proporții din variață (încărcări egale ar însemna $s_i = 1/\sqrt{N}$)
- Testul ξ: media pe zile și pe perechi a produselor $(e_{it}^{\mathbf{2}} - 1)(e_{jt}^{\mathbf{2}} - 1)$, standardizată
  - sub H_0: $\Psi_{ij} = 0$, $i \neq j$, are distribuția Normală standard
  - respingerea lui H_0: pătratele reziduurilor variază împreună, deci există un șoc comun de volatilitate
- Date: 47 de ETF-uri de țară listate la NYSE, 2000–2021, și 23 de serii pe clase de active din SUA
  - ETF: exchange-traded funds, fonduri tranzacționate la bursă; NYSE: New York Stock Exchange
  - detalii în Anexă

Șocurile realizate față de indicii de știri (1/2)



MFM_ch6_covol

Șocurile realizate față de indicii de știri (2/2)

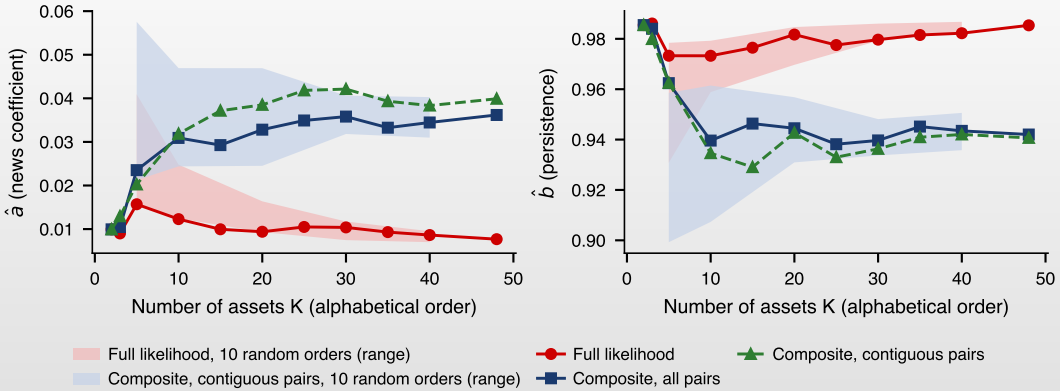
- Întrebarea: explică indicii de știri șocul global de volatilitate la fel de bine ca COVOL? (248 de luni, tabelul 8 din Engle & Campos-Martins (2023))
- Regresăm lunar șocul de volatilitate ACWI (MSCI All Country World Index) pe fiecare indice
  - Regresia pe COVOL_m^2, media lunară a lui $\hat{x}_t$ minus 1: $R^2 = 0{,}404$ (R^2: proporția de variață explicată)
  - Regresia pe variația EPU (economic policy uncertainty, incertitudinea politicii economice, Baker, Bloom & Davis (2016)): $R^2 = 0{,}110$
  - Regresia pe GPR (geopolitical risk, riscul geopolitic, Caldara & Iacoviello (2022)): $R^2 = 0{,}005$
  - Adăugînd ambii indici de știri la COVOL_m^2, R^2 crește doar la 0,406
  - Interpretarea: indicii de știri măsoară percepția riscului, iar COVOL șocurile reflectate efectiv în prețuri
- Zilele de vîrf din articol: 9 martie 2020 ($\hat{x}_t = 51{,}4$) și 24 iunie 2016 (Brexit)
- 28 aprilie 2020 este tot o zi de vîrf, dar cu randament mediu pozitiv (+2,33%)
  - COVOL măsoară mărimea șocului comun, nu semnul lui (tabelul evenimentelor în Anexă)
- Pentru administratorul de risc: corelațiile dintre ETF-urile de țară cresc odată cu COVOL (aceeași Anexă), deci diversificarea slăbește în zilele cu șoc comun
- Tipul de dovadă: asociere
  - autorii găsesc pătratele încă corelate după un factor, posibil un al doilea factor

MFM_ch6_covol

DCC în dimensiuni mari: estimarea cu un număr mare de active

- Întrebarea din Pakel, Shephard, Sheppard & Engle (2021): pot fi estimați parametrii dinamici (a, b) ai DCC pe sute de active?
  - VaR-ul unui portofoliu mare și hedging-ul cer corelațiile condiționate ale tuturor activelor
- Afirmația articolului, pentru BEKK scalar (A, B multipli ai matricei unitate) și DCC-ul corectat (cDCC, secțiunea DCC): cu fixarea țintei, verosimilitatea completă dă $(\hat{a}, \hat{b})$ puternic deplasați când crește K
  - K: numărul de active; ținta $\bar{Q}$ are $K(K-1)/2$ corelații, estimate înaintea lui (a, b)
  - acești parametri incidentali (necesari, dar fără interes direct) cresc ca număr odată cu K, iar erorile lor se acumulează în verosimilitate
  - fiecare evaluare a verosimilității inversează T matrici $K \times K$: costul crește cu K^3
- Remediul: verosimilitatea compusă (composite likelihood, CL), suma verosimilităților bivariate ale perechilor de active
  - $\ell_{CL}(a, b) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{P}} \ell_{ij}(a, b)$; fiecare pereche folosește blocul ei 2×2 din $\hat{\bar{Q}}$
  - $\mathcal{P}$: toate cele $K(K-1)/2$ perechi sau doar perechile contigue $(1,2), (2,3), \ldots, (K-1, K)$
  - nu inversează matrici mari, iar teoria articolului permite ca K să crească odată cu T
- Datele articolului: acțiunile din S&P 100 și din S&P 500, zilnic, 1997–2006

Estimările DCC cînd crește numărul de active



MFM_ch6_vast_dcc ▶ Interactiv

Metoda și ce schimbă adaptarea din curs

- Datele: toate cele 48 de acțiuni și ETF-uri listate în SUA din datele cursului cu istoric complet din 18 iulie 2013
  - 16 acțiuni și 32 de ETF-uri pe acțiuni, obligațiuni și mărfuri
  - 3 245 de zile comune, pînă la 18 septembrie 2026
- Pasul 1: GARCH(1,1) cu distribuția Normală pe fiecare serie; pasul 2: DCC cu fixarea țintei, ca în secțiunea DCC
- Secțiunea transversală crește în ordinea alfabetică a tickerelor, ca în articol
  - $K = 2, 3, 5, 10, 15, \ldots, 40, 48$
  - pentru fiecare K: verosimilitatea completă, CL pe toate perechile și CL pe perechile contigue
  - la $K = 2$ cele trei estimatoare coincid: există o singură pereche
- Robustețe: 10 ordini aleatoare ale activelor, pentru $K \in \{5, 10, 20, 30, 40\}$ (benzile din grafic)
  - activele incluse și perechile contigue depind de ordine, iar rezultatul nu trebuie să depindă de ordinea alfabetică
- Ce diferă față de articol
  - 48 de active de tipuri diferite, nu doar acțiuni, și perioada 2013–2026
  - DCC-ul standard al capitolului, cu ținta egală cu covariança reziduurilor standardizate; articolul analizează BEKK scalar și cDCC-ul lui Aielli (2013)
  - deci o adaptare comparativă pe DCC standard, nu o replicare a rezultatului teoretic
  - fără erori standard pentru CL, care ar cere o matrice sandviș

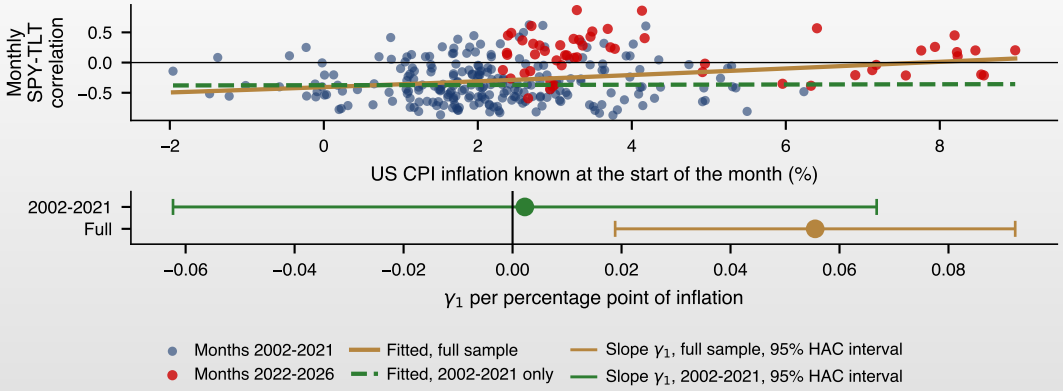
Rezultatul: cu verosimilitatea completă, corelațiile reacționează mult mai lent

- La $K = 48$, verosimilitatea completă dă $\hat{a} = 0{,}0077$ (SE 0,0002) și $\hat{b} = 0{,}9854$
  - CL pe toate perechile: $\hat{a} = 0{,}0362$, $\hat{b} = 0{,}9420$; CL pe perechile contigue: $\hat{a} = 0{,}0399$, $\hat{b} = 0{,}9407$
  - SE: eroarea standard din Hessiana pasului 2
- Pentru $K \geq 10$, $\hat{a}$ al verosimilității complete rămîne între 0,008 și 0,012, iar $\hat{a}$ CL pe toate perechile între 0,029 și 0,036
  - la $K = 40$, pe cele 10 ordini aleatoare: $\hat{a}$ complet între 0,007 și 0,010, $\hat{a}$ CL contigue între 0,031 și 0,040
- Consecința: corelația medie condiționată a celor 48 de active (media pe perioadă 0,34)
  - abaterea ei standard în timp este 0,034 cu estimările complete și 0,058 cu CL
  - intervalul: 0,28–0,47 față de 0,23–0,57
  - indicatorul euristic $\ln 0{,}5 / \ln(a + b)$, aproximativ zilele după care efectul unui șoc asupra corelației scade la jumătate: 99 de zile, respectiv 31 de zile
  - pentru un portofoliu mare, estimatorul ales decide cît de repede se adaptează corelațiile, deci VaR-ul și hedging-ul, după un șoc
- Tipul de dovadă: comparație între proceduri
  - datele singure nu spun care (a, b) este cel adevărat
  - simulările articolului susțin avantajul CL în modelele și configurațiile analizate; nu demonstrează absența deplasării în aplicația noastră
  - un singur (a, b) pentru 48 de active diferite poate fi el însuși o specificare greșită
  - testul economic, hedging-ul și VaR-ul în afara eșantionului (Capitolul 8), rămîne de făcut

O întrebare deschisă: va rămîne pozitivă corelația acțiuni–obligațiuni?

- Întrebarea: este corelația pozitivă acțiuni–obligațiuni de după 2022 un regim durabil?
  - este acest regim guvernat de inflație?
  - poate fi prognozată corelația?
- Campbell, Pflueger & Viceira (2020): semnul corelației urmează relația inflație–producție și regimul politicii monetare
  - Molenaar, Sénéchal, Swinkels & Wang (2024) extind analiza la mai multe țări și la o istorie lungă
- Faptele capitolului: corelația SPY–TLT este pozitivă din 2022
  - ruptura este datată în august 2020 (Aprofundări)
- Ipoteza: $z_m = \operatorname{artanh} \rho_m = \gamma_0 + \gamma_1 \pi_{m-2} + u_m$
  - ρ_m: corelația realizată lunară, în transformarea Fisher; u_m: eroarea
  - π: inflația anuală CPI (consumer price index) din SUA
- H_0: $\gamma_1 = 0$, față de H_1: $\gamma_1 > 0$, cu statistica t HAC
- Infirmarea: nesemnificația nu ajunge; trebuie un γ_1 estimat precis în interiorul unei marje fixate dinainte (test de echivalență), cînd inflația a variat, dar regimul nu
- Bucla: un asistent AI schițează, iar cercetătorul verifică
  - AI: harta literaturii, ipotezele concurente, codul, un plan de robustețe și o critică de referent
  - cercetătorul verifică fiecare DOI (*Digital Object Identifier*, identificatorul digital al unei publicații), replică întîi cifrele capitolului și fixează planul înainte de prima rulare
  - prompturile în ▸ Anexă

Mini-studiu de caz: inflația și corelația acțiuni–obligațiuni (1/2)



MFM_ch6_ai_inflation ▶ Interactiv

Mini-studiu de caz: inflația și corelația acțiuni–obligațiuni (2/2)

- Corelația lunară SPY–TLT din randamente zilnice față de inflația cunoscută la începutul lunii m
  - CPI pentru luna $m-1$ apare abia la mijlocul lunii m, deci ultima valoare cunoscută este $\pi_{m-\mathbf{2}}$
  - folosim versiunea curentă a CPI, deci un test retrospectiv, nu în timp real
- Pe tot eșantionul (288 de luni): $\hat{\gamma}_{\mathbf{1}} = 0{,}056$ pe punct procentual de inflație
  - SE HAC 0,019, $t = 2{,}97$, $R^{\mathbf{2}} = 0{,}047$
  - corelația medie ρ este $-0{,}12$ în lunile cu inflația peste 3% (89 de luni) și $-0{,}30$ în celelalte luni
- Numai pe 2002–2021 (233 de luni, dintre care 53 cu inflația peste 3%): $\hat{\gamma}_{\mathbf{1}} = 0{,}002$, $t = 0{,}07$
  - intervalul HAC de 95% pentru $\gamma_{\mathbf{1}}$ pe 2002–2021: $[-0{,}062;\ 0{,}067]$, care include și panta pe tot eșantionul
- Nu găsim dovezi ale unei asocieri pozitive înainte de 2022, dar estimarea este imprecisă
  - deci nici nu infirmăm ipoteza: intervalul este prea larg pentru un test de echivalență
  - o diferență între pante ar cere un model cu indicator de regim și interacțiune
  - o singură schimbare de regim nu separă nivelul inflației de regimul politicii (Campbell, Pflueger & Viceira (2020))
- Tipul de dovadă: asociere

MFM_ch6_ai_inflation

Verificările cercetătorului și un punct de plecare pentru proiect

Verificări înaintea oricărei afirmații

- Deplasarea de anticipare (*look-ahead bias*) și calendarele
  - calendarul publicărilor și versiunile datelor (decalajul tratează întîrzierea publicării, nu revizuirile)
  - aliniem prețurile pe zilele comune înainte de a calcula randamentele
- Regresor persistent și puține regimuri: statistici t mari pot apărea din întîmplare
  - folosim subeșantioane, laguri HAC lungi și un placebo: inflația înlocuită cu serii simulate de aceeași persistență
- Distorsiunea Forbes–Rigobon: control pentru volatilitatea realizată
- Testare multiplă: fixăm dinainte măsurile și ferestrele
- Referințe inventate
  - un DOI care nu duce la nicio lucrare este eliminat și notat în `AI_ERRORS.md`

Punct de plecare pentru proiect

- Prognozează mai bine în afara eșantionului corelația SPY–TLT un DCC cu țintă variabilă?
  - reperul: DCC-ul simplu
  - ținta depinde de inflație și de dobînda de politică monetară
  - replicăm întîi: $a + b = 0{,}986$, $\hat{\bar{Q}}_{12} = -0{,}248$ și panta $\hat{\gamma}_1 = 0{,}056$
- Livrabile
  - o pre-înregistrare de o pagină: ipoteza, datele și testele, fixate înainte de prima rulare
  - codul pe datele de piață ale cursului plus CPI
  - testul Diebold–Mariano, care compară erorile de prognoză ale celor două modele, și o autocritică de referent
  - declarația folosirii AI, în `AI_USE.md`

Lista de decizie: întrebare, estimator, incertitudine, eșec

Întrebarea	Estimatorul	Incertitudinea	Eșuează cînd
S-a schimbat o corelație?	Pearson pe prețuri aliniate	HAC prin metoda delta	Fisher sub gruparea volatilității; date zilnice între fusuri orare
Covarianța pentru riscul de azi?	EWMA, DCC	bootstrap pe ambii pași	ținta $\bar{Q}$ se modifică odată cu regimul
Cînd a avut loc ruptura?	Wied–Krämer–Dehling pe reziduuri GARCH	limita punții browniene	reziduuri GARCH estimate (valoare p aproximativă); variante nemodelate
Contagiune?	Forbes–Rigobon ρ^*	bootstrap staționar, δ estimat	un șoc comun sau legătură inversă
Extreme comune?	copulă pe pseudo-observații GARCH	sandviș de rang, bootstrap parametric	copula Gaussiană ($\lambda = 0$), copulă statică cînd dependența variază în timp

⊡ Urmează: Capitolul 7 transformă covariațele DCC și copulele simulate în VaR și ES de portofoliu

Verificarea înțelegerii

- De ce este prea îngust intervalul Fisher pentru corelația SPY–TLT pe date zilnice?
  - ce două caracteristici ia în calcul intervalul HAC?
- De ce este corelația din aceeași zi dintre SPY și Euro Stoxx 50 deplasată spre zero?
  - cum reduc randamentele pe 2 zile sau săptămînale această deplasare?
- Ce sursă de incertitudine ignoră erorile standard din pasul 2 al DCC?
  - cum o readuce bootstrap-ul pe ambii pași?
- O corelație din criză este mai mare decît cea din perioada calmă
  - ce trebuie să calculați înainte de a numi creșterea contagiune?
  - ce ipoteză poate face corecția excesivă?
- Cinci copule au același tau al lui Kendall, $\tau = 0{,}5$
  - de ce pot avea totuși probabilități diferite ale crahurilor comune?
- De ce poate eșua verosimilitatea completă a DCC pe zeci de active?
  - ce schimbă verosimilitatea compusă?

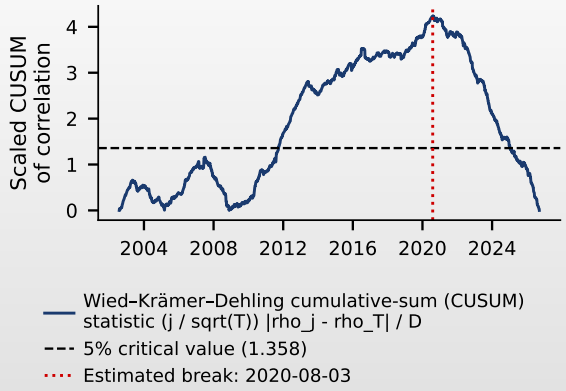
Decizia practică

- **Ce aleg**: volatilități GARCH(1,1) cu o corelație DCC(1,1) pentru covarianța zilnică
  - SPY–TLT: $a + b = 0{,}986$; CCC este respins (LR 533,4, valoarea p bootstrap 0,005)
  - Pentru extremele comune: o copulă Student t pe pseudo-observațiile GARCH (cel mai mic AIC la JPM–BAC)
- **În ce condiții**
  - Prețuri aliniate pe zilele comune de tranzacționare; randamente pe 2 zile sau săptămînale între fusuri orare diferite
  - Un singur regim pentru ținta $\bar{Q}$: corelația SPY–TLT are o ruptură în august 2020
  - O a doua ruptură, în iulie 2007, este doar o candidată exploratorie (Aprofundări)
  - Intervale HAC prin metoda delta pentru corelații, valabile doar cu momente de ordinul patru finite
- **Ce rezultat m-ar face să renunț**
  - Un cîștig DCC care rămîne nesemnificativ în afara eșantionului, ca la hedging-ul BET (26,2% față de 24,7% din variață eliminată, valoarea p unilaterală 0,098): atunci ajunge o corelație constantă pe regim
  - O țintă $\bar{Q}$ care se mută cu regimul, ca după 2022 (traiectoria DCC deasupra țintei în 92% din zile): atunci estimăm ținta separat pe fiecare regim

Testarea corelației constante la o dată necunoscută

- Întrebarea: s-a schimbat corelația și, dacă da, cînd, fără a alege data în avans?
- Tse (2000): test de tip multiplicator Lagrange pentru H_0: corelație constantă
  - contra $\rho_{ij,t} = \rho_{ij} + \kappa_{ij}\,\varepsilon_{i,t-1}\varepsilon_{j,t-1}$ (H_0: $\kappa_{ij} = 0$)
  - se calculează doar din modelul CCC estimat, fără a estima modelul alternativ
- Alegerea datei rupturii de pe un grafic și testarea ei ulterioară cu un test Fisher z la dată fixă
  - duc la un nivel efectiv prea mare: testul respinge o H_0 adevărată mai des decît în 5% din cazuri
  - data este ea însăși aleasă pe baza datelor
- Wied, Krämer & Dehling (2012): $Q_T = \max_{2 \le j \le T} \dfrac{j}{\sqrt{T}\,\hat{D}} \left|\hat{\rho}_j - \hat{\rho}_T\right|$
  - Compară corelația primelor j zile, $\hat{\rho}_j$, cu $\hat{\rho}_T$ din tot eșantionul
  - data estimată a rupturii, $\hat{j} = \arg\max$: ziua în care diferența standardizată este cea mai mare
  - $\hat{D}^2$: varianța pe termen lung a lui $\hat{\rho}$ prin metoda delta, nucleu Bartlett cu lățimea $\lfloor T^{1/4} \rfloor$ ($\lfloor\cdot\rfloor$: partea întreagă)
  - Sub H_0 (corelație, medii și variațe constante): $Q_T \to \sup_{0 \le s \le 1} |B(s)|$, cu $s = j/T$
  - B: o punte browniană, o mișcare browniană fixată la 0 în $s = 0$ și în $s = 1$
  - Valoarea critică la 5%: 1,358
  - Variațele trebuie să fie constante, deci îl aplicăm reziduurilor standardizate GARCH

Datarea rupturii corelației SPY–TLT (1/2)



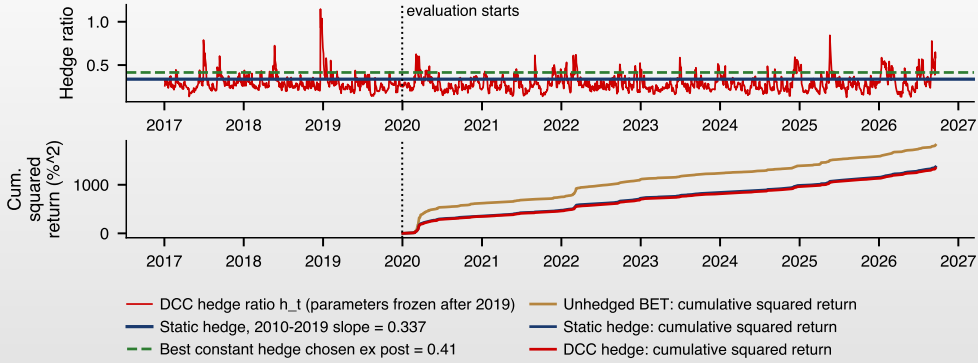
MFM_ch6_corr_inference

Datarea rupturii corelației SPY–TLT (2/2)

- Procesul Wied–Krämer–Dehling pe reziduurile standardizate GARCH(1,1)
  - $T = 6\,073$, lățimea nucleului 8
  - linia întreruptă: valoarea critică la 5%
- $Q_T = 4{,}25$ față de 1,358: corelația constantă este respinsă ($p < 0{,}001$)
- Ruptura estimată are loc pe 3 august 2020, nu în ianuarie 2022
  - corelația reziduurilor este $-0{,}36$ înainte de ruptură și 0,07 după
- Segmentarea binară, exploratorie: testul repetat pe fiecare subperioadă
  - înainte de ruptura principală: $Q = 3{,}01$ și o ruptură candidată pe 9 iulie 2007
  - după ruptura principală (din august 2020): $Q = 1{,}56 > 1{,}358$, $p = 0{,}015$ nominal
- Legea limită a lui Q_T este demonstrată pentru serii observate direct, nu pentru reziduuri estimate
  - de aceea valorile p de aici sînt aproximative
  - testele repetate pe segmente alese după prima ruptură nu păstrează nivelul global de 5%
- Consecință pentru DCC: o singură țintă $\bar{Q}$ pe 2002–2026 poate amesteca regimuri diferite
  - confirmarea cere un bootstrap al întregii proceduri: filtrarea GARCH, testele și selecția segmentelor

MFM_ch6_corr_inference

Acoperire dinamică în afara eșantionului: BET cu Euro Stoxx 50 (1/2)



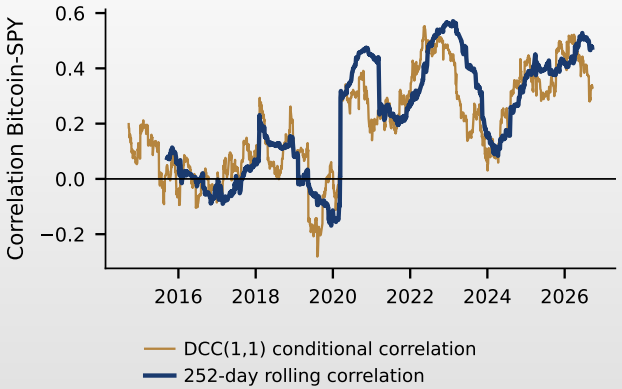
MFM_ch6_corr_inference

Acoperire dinamică în afara eșantionului: BET cu Euro Stoxx 50 (2/2)

- Investitorul în BET acoperă riscul vînzînd h unități Euro Stoxx 50 pentru fiecare unitate BET
  - pe BET nu există futures lichide
  - cele două piețe se închid aproape sincron
- Estimare zilnică din 5 ianuarie 2010 pînă la sfîrșitul lui 2019 ($n = 2\,491$)
- Evaluare în afara eșantionului în 2020–2026 ($n = 1\,663$), cu parametrii ținuți fixi
  - panoul de sus arată din 2017
- Acoperire statică: panta regresiei BET pe Euro Stoxx 50 din fereastra de estimare, $h = 0{,}337$
- Acoperire DCC: $h_t = \rho_t \sigma_{S,t} / \sigma_{F,t}$
  - S: BET, F: Euro Stoxx 50; ρ_t și volatilitățile din DCC, cu $\hat{a} = 0{,}009$, $\hat{b} = 0{,}964$
  - media 0,29 și valori între 0,13 și 0,84 în 2020–2026
- Varianța eliminată în 2020–2026
  - 24,7% cu acoperirea statică, 26,2% cu acoperirea DCC
  - 25,6% cu cea mai bună acoperire constantă aleasă ex post ($h = 0{,}41$)
- Testul Diebold & Mariano (1995): $t = 1{,}29$, p unilateral $= 0{,}098$
  - d_t: pătratul randamentului acoperit static minus pătratul celui acoperit DCC; testul t al mediei lui d_t folosește SE HAC
  - deci cîștigul DCC este mic și nesemnificativ la 5%

MFM_ch6_corr_inference

Bitcoin și acțiunile americane: corelația DCC (1/2)



MFM_ch6_dcc_btc_spy

Bitcoin și acțiunile americane: corelația DCC (2/2)

- Bitcoin și SPY în zilele comune de tranzacționare din 18 septembrie 2014 ($T = 3\,018$)
  - mișcările Bitcoin din weekend intră în randamentul de luni
- Corelația DCC medie este 0,04 înainte de 2020 și 0,31 din ianuarie 2020
  - vîrful, 0,55, este atins pe 19 mai 2022
- Corelația este foarte persistentă: $a = 0{,}015$, $b = 0{,}982$, $a + b = 0{,}9968$
- Testul LR față de CCC: 105,6
  - bootstrap sub CCC ($B = 199$): $p = 1/(B + 1) = 0{,}005$, minimul posibil
  - CCC este respins
- De la activ de diversificare la activ de risc
  - corelația din tot eșantionul (0,24) ascunde două regimuri
- Liu & Tsyvinski (2021), Pele et al. (2023)
  - pînă în 2018, criptoactivele au avut expuneri mici la factorii pieței de acțiuni
  - după 2020 DCC arată o legătură mult mai strînsă cu acțiunile

MFM_ch6_dcc_btc_spy

Exemplu lucrat: criza din 2008 pas cu pas (1/2): corecția

- Pasul 1, piața-sursă: S&P 500
  - anul calm: 14 septembrie 2007 – 12 septembrie 2008 ($n = 242$ randamente pe 2 zile)
  - criza: 15 septembrie 2008 – 31 martie 2009 ($n = 130$)
- Pasul 2: varianța S&P 500 în criză raportată la cea din anul calm, $1 + \delta = 7{,}54$, deci $\delta = 6{,}54$
- Pasul 3: corecția $\rho^* = \rho_c / \sqrt{1 + \delta(1 - \rho_c^2)}$ pentru fiecare piață (ρ_{calm}, ρ_c: corelațiile cu S&P 500 în anul calm și în criză)
- Euro Stoxx 50: $\rho_{calm} = 0{,}610$, $\rho_c = 0{,}804$
  - $\rho^* = 0{,}804 / \sqrt{1 + 6{,}54\,(1 - 0{,}804^2)} = 0{,}442$
- BET: $\rho_{calm} = 0{,}216$, $\rho_c = 0{,}485$
  - $\rho^* = 0{,}485 / \sqrt{1 + 6{,}54\,(1 - 0{,}485^2)} = 0{,}198$
- Ambele corelații brute din criză le depășesc mult pe cele din perioada calmă
  - după corecție, ambele scad sub ele; slide-ul următor testează dacă diferențele sînt semnificative

Exemplu lucrat: criza din 2008 pas cu pas (2/2): testarea

- Test Fisher unilateral pentru $H_0 : \rho_1 \leq \rho_{calm}$, cu $\rho_1 = \rho_c$ (brut) sau $\rho_1 = \rho^*$ (corectat)
  - $z = \dfrac{\operatorname{artanh}\rho_1 - \operatorname{artanh}\rho_{calm}}{\sqrt{1/(n_c-3) + 1/(n_{calm}-3)}}, \quad p = 1 - \Phi(z)$
- Randamentele pe 2 zile se suprapun, deci volumele eșantioanelor se ajustează
  - Folosim volumele efective $n_{calm} = 121$ și $n_c = 65$, jumătate din 242 și 130
  - Pentru perechi zilnice i.i.d. Normale, aproximația Bartlett dă un volum efectiv apropiat de $2n/3$, deci înjumătățirea este o alegere prudentă în acest caz de referință, nu o regulă generală
- Euro Stoxx 50, brut: $z = \dfrac{\operatorname{artanh} 0{,}804 - \operatorname{artanh} 0{,}610}{\sqrt{1/62 + 1/118}} = 2{,}56$
  - valoarea p unilaterală: 0,005; cu ρ^*, $z = -1{,}49$ și $p = 0{,}932$
- BET
  - $z = 1{,}97$ brut ($p = 0{,}024$), $z = -0{,}12$ corectat ($p = 0{,}548$)
- Verificare: cu toate cele 130 și 242 randamente suprapuse
  - statistica brută pentru Euro Stoxx 50 ar fi $z = 3{,}66$, cu $p \approx 0{,}0001$
  - tratarea randamentelor suprapuse ca independente supraevaluează dovezile
- Testul Fisher consideră δ cunoscut; bootstrap-ul staționar îl reestimează și dă $p = 0{,}98$ (Euro Stoxx 50) și 0,62 (BET)

Inferența pentru parametrii copulelor (1/2): inversarea lui tau al lui Kendall

- **Inversarea lui** $\hat{\tau}$: $\hat{\tau}$ este o U-statistică, adică o medie pe toate perechile de observații
- Eroarea ei standard vine din proiecția Hoeffding, care aproximează U-statistica printr-o medie de termeni independenți (Anexa, „Estimatorii de rang și precizia lor")
- Pentru $\hat{\theta} = g(\hat{\tau})$, metoda delta (Genest & Rivest (1993)) înmulțește eroarea standard a lui $\hat{\tau}$ cu panta $|g'(\hat{\tau})|$
  - g: inversa legăturii $\tau(\theta)$ din slide-ul „Corelații de rang"; estimările: tabelul estimărilor
  - Copule eliptice: $\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho$ pentru *orice* ν, deci τ identifică ρ, niciodată ν
  - JPM–BAC: $\hat{\tau} = 0{,}641$ (SE 0,0065), deci $\hat{\rho}_\tau = \sin(\pi\hat{\tau}/2) = 0{,}845$ (SE 0,0055)
  - Estimarea CML: $\hat{\rho} = 0{,}842$ (SE 0,0053): practic aceeași estimare și aceeași precizie

Inferența pentru parametrii copulelor (2/2): ranguri, adecvare și filtrare GARCH

- **CML: rangurile sînt estimate**, iar SE din inversa hessianei ignoră această incertitudine; sub specificare greșită, ea poate fi prea mică sau prea mare
- Matricea sandviș Genest, Ghoudi & Rivest (1995) adaugă termenii datorați rangurilor
  - Cu matricea sandviș, SE crește cu 60% pentru ρ al copulei Gaussiene (S&P 500–Euro Stoxx 50, săptămînal, de la 0,0086 la 0,0138)
  - Pentru JPM–BAC, SE crește cu 17% pentru ρ al copulei t (de la 0,0046 la 0,0053) și cu 1% pentru ν
- Nu tot plusul de 60% este prețul rangurilor
  - Dacă copula Gaussiană ar fi corectă, estimarea marginalelor prin ranguri ar înmulți SE cu $\sqrt{1+\rho^2}$ (Anexă)
  - La corelația săptămînală 0,78 factorul ar fi 1,27; simularea Monte Carlo la $\rho = 0{,}8$ dă 1,28
  - Factorul observat, 1,60, indică o copulă Gaussiană specificată greșit
  - Matricea sandviș rămîne validă și în acest caz (adecvarea: Seminarul B2)
- **După filtrarea GARCH** (Chen & Fan (2006))
  - CML pe rangurile reziduurilor estimate are aceeași limită ca pe inovațiile adevărate
  - Condiții: inovații i.i.d. cu copula C_θ și un GARCH corect specificat
  - Atunci matricea sandviș rămîne validă și, spre deosebire de DCC, nu este nevoie de corecția pasului 1 (Monte Carlo în Anexă)

Adecvarea: testul Rosenblatt

- Dacă $(U, V) \sim C_\theta$, atunci $E_1 = U$ și $E_2 = h(V \mid U) = \partial C_\theta(U, V)/\partial u$ sînt uniforme independente
  - h: funcția de repartiție condiționată a lui V dat fiind U; testăm deci dacă (E_1, E_2) sînt uniforme independente
- Statistica (Genest, Rémillard & Beaudoin (2009)): $S_n = n \int_{[0,1]^2} \left(D_n(e) - e_1 e_2\right)^2 de$
  - $e = (e_1, e_2) \in [0, 1]^2$
  - $D_n(e)$: proporția celor n perechi cu $E_1 \leq e_1$ și $E_2 \leq e_2$
  - $e_1 e_2$: aceeași proporție sub independență
  - $S_n \geq 0$, iar valorile mari înseamnă adecvare slabă
- valoarea p prin bootstrap parametric, deoarece θ este estimat
  - Simulăm n perechi din $C_{\hat{\theta}}$, le transformăm din nou în pseudo-observații prin ranguri, reestimăm, recalculăm $S_n^{(b)}$
  - $p = (1 + \#\{S_n^{(b)} \geq S_n\})/(B + 1)$
  - Pentru JPM–BAC $B = 200$ (100 pentru Student t)
  - Cea mai mică valoare p posibilă este deci $1/201 \approx 0{,}005$ ($1/101 \approx 0{,}010$ pentru t)
- Pe reziduuri GARCH, Rémillard (2017) arată că testele bazate pe ranguri își păstrează limita
  - și bootstrap-ul parametric se aplică
- Cu $T = 4\,202$ testul are putere mare împotriva abaterilor mici
  - o respingere nu indică ce caracteristică a dependenței lipsește din model

Semnificația asimetriei cozilor

- Schmidt & Stadtmüller (2006): $\hat{\lambda}_L = \frac{n}{k}\,\hat{C}_n\left(\frac{k}{n}, \frac{k}{n}\right)$, estimatorul din grafic cu $q = k/n$
  - n: volumul eșantionului
  - k: numărul de observații din coadă
  - $\hat{C}_n$: copula empirică
  - Un k mai mare scade varianța, dar crește deplasarea (condițiile în Anexă)
- $H_0 : \lambda_L(q) = \lambda_U(q)$ la un q fixat (probabilități la prag, nu limitele)
- Bootstrap pe perechile de reziduuri, cu rangurile recalculate, $B = 999$

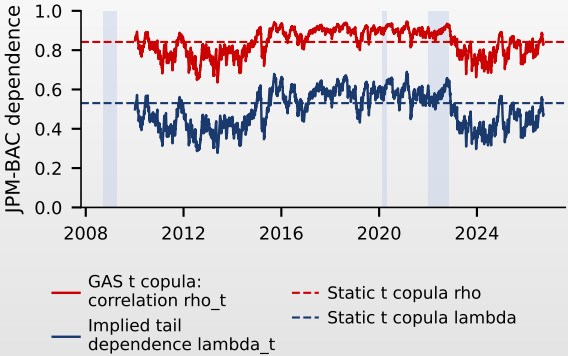
q	k	$\hat{\lambda}_L - \hat{\lambda}_U$	interval de 95%, i.i.d.	interval de 95%, blocuri
5%	210	0,062	[−0,014; 0,148]	[−0,014; 0,138]
1%	42	0,095	[−0,095; 0,286]	[−0,119; 0,286]

- Varianta pe blocuri permite dependența serială a indicatorilor de coadă (*tail indicators*)
  - bootstrap staționar, bloc mediu de 1,6 și 1,0 zile, regula Politis & White (2004)
- Toate intervalele conțin zero: asimetria nu este detectată statistic
  - testul verifică doar egalitatea celor două probabilități la prag, nu nivelul lor și nici întreaga copulă
  - deci nu validează specificarea t, pe care testul global de adecvare o respinge

Copula dinamică, intuitiv

- Copula statică presupune aceeași legătură între JPM și BAC în toată perioada, deși băncile se mișcă mai strîns împreună în crize
- Ideea: lăsăm corelația copulei, ρ_t, să se schimbe de la o zi la alta, așa cum GARCH lasă volatilitatea să se schimbe
- Regula de actualizare (GAS): în fiecare zi întrebăm dacă perechea de azi $(\hat{u}_t, \hat{v}_t)$ ar fi fost mai probabilă cu o corelație mai mare sau mai mică, și mutăm puțin corelația în acea direcție
  - o zi în care ambele bănci au percentile extreme în același sens împinge corelația în sus; o zi cu mișcări opuse o împinge în jos
  - A spune cît reacționăm la ziua de azi (0,025, puțin), B cît păstrăm din trecut (0,9926, mult): corelația se mișcă lent
  - tanh ține ρ_t între -1 și 1
- Rezultatul: ρ_t între 0,64 (2013) și 0,95 (2021); dependența în cozi λ_t între 0,28 și 0,69, față de 0,53 în copula statică
- De ce contează: o parte din extremele comune ale copulei statice venea din amestecul perioadelor calme cu cele de criză ($\hat{\nu}$ crește de la 4,24 la 5,35)

O copulă t dinamică pentru JPM și BAC (1/2)



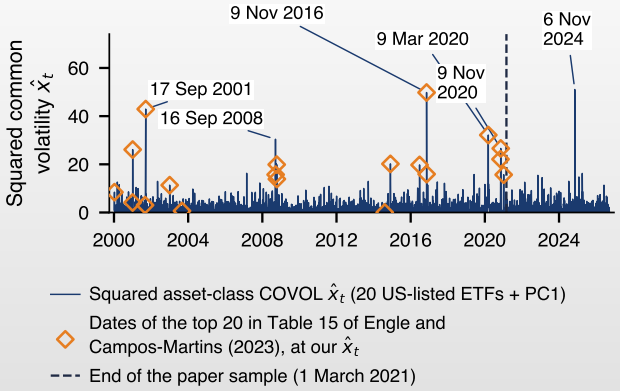
MFM_ch6_copula_inference

O copulă t dinamică pentru JPM și BAC (2/2)

- Copula t GAS (generalised autoregressive score, Creal, Koopman & Lucas (2013)), pe aceleași pseudo-observații
  - $\rho_t = \tanh f_t$, $f_{t+1} = \omega + A\, s_t + B f_t$
  - f_t: corelația transformată, pe toată axa reală; ω: constanta
  - $s_t = \partial \ln c(\hat{u}_t, \hat{v}_t; \rho_t, \nu)/\partial f_t$: scorul, nerescalat; f_t se mută în direcția care crește verosimilitatea observației de azi
  - A: reacția la scor; B: persistența
- Estimări: $A = 0{,}025$, $B = 0{,}9926$, $\nu = 5{,}35$ (în copula statică $\nu = 4{,}24$)
- ρ_t variază între 0,64 (23 mai 2013) și 0,95 (18 februarie 2021)
  - λ_t (dependența în cozi implicată de ρ_t și ν) între 0,28 și 0,69, față de valoarea statică 0,53
  - benzile umbrite: toamna 2008 – martie 2009, februarie–aprilie 2020, ianuarie–octombrie 2022
- Cînd ρ variază în timp, $\hat{\nu}$ crește (cozi mai subțiri)
  - o parte din dependența în cozi a copulei statice reflecta variația în timp a dependenței
- Statistica LR față de copula t statică: 245,5
  - sub $A = 0$, B nu este identificat, deci χ^2 nu se aplică
  - valoarea p se obține prin bootstrap (Seminarul B6)
- Variația în timp este o explicație compatibilă cu respingerea tuturor familiilor statice

MFM_ch6_copula_inference

COVOL pe clase de active cu ETF-urile cursului, 2000–2026 (1/2)



MFM_ch6_covol

COVOL pe clase de active cu ETF-urile cursului, 2000–2026 (2/2)

- 20 de ETF-uri listate în SUA și PC1 (prima componentă principală)
  - 4 ianuarie 2000 – 18 septembrie 2026, 6 717 zile
  - modelul: media AR(1) (autoregresivă de ordinul 1) cu PC1, varianța GARCH(1,1), apoi estimarea alternantă
- Romburile: cele 20 de date din tabelul 15 din Engle & Campos-Martins (2023)
  - plasate la valoarea replicării noastre din acea zi
  - zilele cu piața închisă: la prima zi de tranzacționare
- Zilele de vîrf pînă la 1 martie 2021, sfîrșitul eșantionului din articol:
  - 9 noiembrie 2016 ($\hat{x}_t = 49{,}8$): alegerile din SUA din 2016
  - 17 septembrie 2001 ($\hat{x}_t = 42{,}9$): redeschiderea după 11 septembrie
  - 9 martie 2020 ($\hat{x}_t = 32{,}2$): crahul din pandemia COVID-19
- 13 dintre cele mai mari 20 de zile ale replicării noastre dinainte de martie 2021
  - apar printre cele 20 de date din tabelul 15: replicarea regăsește majoritatea evenimentelor din articol
- Cu $s^\top s = 1$ și media $\hat{x}_t = 1$, scara depinde de panel
  - valorile replicării nu se compară cu cele din articol: comparăm clasamente, nu niveluri
- Cea mai mare valoare din tot eșantionul: 6 noiembrie 2024 ($\hat{x}_t = 51{,}1$)
  - ziua de după alegerile din SUA din 2024
  - randamentul mediu al ETF-urilor în acea zi a fost 0,95%: un șoc comun mare într-o zi de creștere

MFM_ch6_covol

Pentru aprofundare — cursuri, cod și date

Cursuri avansate pe quantinar.com

- Measuring Statistical Risk
- Multivariate Statistical Analysis
- Minimum Spanning Tree
- FRM: Financial Risk Meter

Cod, date și manuale

- Toate graficele și tabelele: github.com/danpele/MFM/tree/main/Quantlets/Ch_06
- Manuale: Franke, Härdle & Hafner (2019); Härdle & Simar (2019); Nelsen (2006)

înapoi

Inferența pentru o corelație, metoda delta

- $\hat{\rho} = g(\hat{m})$, unde $\hat{m}$ este media empirică a lui $m_t = (x_t,\ y_t,\ x_t^2,\ y_t^2,\ x_t y_t)$
  - g: funcția care transformă aceste cinci momente în corelație; ∇g: gradientul lui g
- Metoda delta: $\sqrt{T}(\hat{\rho} - \rho) \to N(0,\ \nabla g^\top \Omega \nabla g)$
  - Ω: covariança pe termen lung a lui m_t, estimată HAC cu nucleu Bartlett și L laguri (Newey & West (1987))
- Aceeași formă, cu contribuțiile zilnice ψ_t (funcția de influență): $\hat{\rho} - \rho \approx \frac{1}{T}\sum_t \psi_t$ din textul principal
- Condiții: staționaritate, momente finite de ordin mai mare decît 4 pentru (x_t, y_t) și dependență slabă (mixing)
  - cu momente de ordinul patru infinite limita Normală nu mai este valabilă
  - nici bootstrap-ul obișnuit nu remediază automat lipsa momentelor: rezerva privește și bootstrap-ul Forbes–Rigobon și testele pe pierderi pătratice
- Intervalul HAC, calculat pe scara Fisher: $\tanh\left(\operatorname{artanh}\hat{\rho} \pm 1{,}96\,\widehat{\mathrm{SE}}_{\mathrm{HAC}}/(1-\hat{\rho}^2)\right)$
  - unde $\widehat{\mathrm{SE}}_{\mathrm{HAC}} = \sqrt{\nabla\hat{g}^\top \hat{\Omega}\, \nabla\hat{g}/T}$; $1/(1-\hat{\rho}^2)$ este derivata lui artanh (metoda delta)
- Intervalul Fisher clasic înlocuiește $\widehat{\mathrm{SE}}_{\mathrm{HAC}}/(1-\hat{\rho}^2)$ cu $1/\sqrt{T-3}$
- Exemplu: ultima fereastră mobilă de 252 de zile din textul principal, încheiată pe 17 septembre 2026
  - $\hat{\rho} = 0{,}245$, intervalul Fisher [0,13; 0,36], intervalul HAC [0,07; 0,41]
  - cel mai mare raport dintre lățimea HAC și cea Fisher, pe toate ferestrele: 2,02

înapoi

Modelele VEC și BEKK

- **VEC** (Bollerslev, Engle & Wooldridge (1988)): în ecuația din textul principal, c este un vector constant
- VEC: $N(N+1)/2 \cdot [1 + N(N+1)]$ parametri: vectorul c plus matricele A și B, fiecare cu $[N(N+1)/2]^2$ elemente
- **BEKK** (Engle & Kroner (1995)): pozitiv definită prin construcție dacă $CC^\top$ este pozitiv definită
- BEKK: $N(N+1)/2 + 2N^2$ parametri (C triunghiulară, A și B de $N \times N$), greu de interpretat
  - verosimilitatea este plată în dimensiuni mari
- DCC: $3N + 2$ parametri, GARCH univariat pentru fiecare variantă plus a și b; ținta $\bar{Q}$ se estimează separat

Înapoi

Estimatori în doi pași, covarianța corectă

- Întrebarea: cum includem în erorile standard ale lui (a, b) eroarea de estimare din pasul 1?
- Sistemul ecuațiilor de estimare
  - $\sum_t s_{1t}(\theta_1) = 0$ (pasul 1: GARCH și, cu fixarea țintei, vech $\bar{Q}$)
  - $\sum_t s_{2t}(\theta_1, \theta_2) = 0$ (pasul 2, $\theta_2 = (a, b)$)
- s_{jt}: scorul pasului j în ziua t; $A_{jk} = \mathbb{E}\left[\partial s_{jt}/\partial \theta_k^\top\right]$
  - A_{21} măsoară cît reacționează scorul corelației la parametrii GARCH
- Newey & McFadden (1994), Secțiunea 6: $\sqrt{T}(\hat{\theta}_2 - \theta_2) \to N(0, V_2)$
  - $V_2 = A_{22}^{-1}\,\Omega\,A_{22}^{-1\top}$, cu Ω varianța pe termen lung a scorului ajustat $u_t = s_{2t} - A_{21}A_{11}^{-1}s_{1t}$
- Erorile standard obișnuite din pasul 2 folosesc doar s_{2t}
  - omit $A_{21}A_{11}^{-1}s_{1t}$, eroarea de estimare GARCH transmisă în pasul 2
- Momentul țintei nu este o diferență de martingal: $\mathbb{E}_{t-1}[\varepsilon_t\varepsilon_t^\top - \bar{Q}] = R_t - \bar{Q}$
  - deci Ω se estimează HAC
  - varianța contemporană a lui u_t ajunge doar dacă întregul sistem, inclusiv momentul țintei, este o diferență de martingal
- Engle & Sheppard (2001) derivă V_2 pentru DCC
- O alternativă simplă este bootstrap-ul întregii proceduri în doi pași (slide-ul următor)

Înapoi

Bootstrap pe ambii pași DCC

- Scopul: erori standard pentru (a, b) care includ incertitudinea ambilor pași; bootstrap parametric pe reziduuri, $B = 199$
  - decorelăm reziduurile cu factorul Cholesky al lui R_t și le reeșantionăm
  - simulăm inovații DCC cu $(\hat{a}, \hat{b}, \bar{Q})$
- Doar pasul 2: reestimăm (a, b) pe inovațiile simulate
- Ambii pași: reconstruim randamentele cu GARCH-ul estimat
  - reestimăm GARCH, $\bar{Q}$ și (a, b) pe aceleași inovații
- Bootstrap-ul sub CCC pentru testul LR folosește același mecanism cu $a = b = 0$
  - inovații cu corelație constantă, randamente GARCH simulate, ambii pași reestimați

înapoi

Robert Engle și modelul DCC



Robert F. Engle la conferința Western Economic Association International, Santiago, 2017

Foto: Econterms (2017); CC BY-SA 4.0; Wikimedia Commons

- Premiul Nobel pentru științe economice 2003 pentru modelele ARCH (Capitolul 5)
- Engle (2002): „Dynamic Conditional Correlation"
  - Păstrează flexibilitatea GARCH univariat pentru fiecare variantă
  - Descrie evoluția corelațiilor printr-o ecuație simplă, ai cărei parametri pot fi estimați
- Rafinare: DCC-ul corectat al lui Aielli (2013), care face din $\bar{Q}$ o țintă consistentă

Înapoi

Teste de contagiune dincolo de Forbes–Rigobon

- Corsetti, Pericoli & Sbracia (2005): cu un factor comun, corecția Forbes–Rigobon este excesivă
  - deplasează testul spre „nicio contagiune"
  - autorii propun o versiune bazată pe un model factorial
- Rigobon (2003): identificare prin heteroscedasticitate
  - schimbarea variației între regimuri identifică coeficientul structural β, o idee de tip variabile instrumentale
- Critica factorului comun se aplică și crizei din 2008 (Seminarul A1, B3)

înapoi

Densitățile și construcția copulelor

- Densitatea Gaussiană: $c = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(- \frac{\rho^2(x^2+y^2)-2\rho xy}{2(1-\rho^2)} \right)$
  - $x = \Phi^{-1}(u)$, $y = \Phi^{-1}(v)$
- Copula t: dependența în cozi este mare pentru ν mic
- Generatorii arhimedieni φ din $C(u,v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))$
  - Clayton: $\varphi(t) = (t^{-\theta} - 1)/\theta$
  - Gumbel: $\varphi(t) = (-\ln t)^{\theta}$
  - Frank: $\varphi(t) = -\ln \frac{e^{-\theta t}-1}{e^{-\theta}-1}$
- Cozi asimetrice
  - Clayton pentru crahurile comune ale randamentelor; Gumbel, aplicată pierderilor (randamente cu semn schimbat), descrie aceleași crahuri
- Rotirea cu 180° (copula de supraviețuire) $\bar{C}(u,v) = u + v - 1 + C(1-u, 1-v)$ transferă dependența în coada opusă

Înapoi

Estimările copulelor pentru JPM și BAC, tabelul complet

Copula	$\hat{\theta}$ sau $\hat{\rho}$	$\hat{\nu}$	ℓ	ΔAIC	λ_L	λ_U	p adecvare
Gaussiană	0,833	–	2 486,0	309,3	0,000	0,000	0,005
Student t	0,842	4,24	2 641,7	0,0	0,531	0,531	0,010
Clayton	2,384	–	2 116,7	1 048,0	0,748	0,000	0,005
Gumbel	2,587	–	2 412,2	456,9	0,000	0,693	0,005
Frank	9,152	–	2 390,8	499,8	0,000	0,000	0,005

- CML pe pseudo-observațiile reziduurilor GARCH
- ℓ: log-verosimilitatea maximă; λ_L, λ_U: dependența în cozi implicată de parametri
- ΔAIC: distanța față de cel mai bun model
- p de adecvare: testul Rosenblatt cu bootstrap parametric

Înapoi

Estimatorii de rang și precizia lor

- $\hat{\tau}$ este o U-statistică
  - proiecția Hoeffding dă $\sqrt{n}(\hat{\tau} - \tau) \to N\big(0,\ 16\mathrm{Var}[2C(U,V) - U - V]\big)$
- Estimare: $\widehat{\mathrm{SE}}(\hat{\tau}) = 4\,\mathrm{sd}\big(2\hat{C}_n(\hat{U}_i, \hat{V}_i) - \hat{U}_i - \hat{V}_i\big)/\sqrt{n}$, cu $\hat{C}_n$ copula empirică
- Inversarea lui $\hat{\tau}$ dă o valoare inițială robustă pentru maximizarea verosimilității
- Matricea sandviș CML (Genest, Ghoudi & Rivest (1995)): $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \to N(0,\ A^{-1}\Sigma A^{-1})$
  - A: informația Fisher a copulei
- $\Sigma = \mathrm{Var}\big[\dot{\ell}_\theta(U,V) + W_1(U) + W_2(V)\big]$, unde $\dot{\ell}_\theta$ este scorul lui $\ln c$
- $W_1(u) = \int\int 1\{u \le u'\}\,\partial_u \dot{\ell}_\theta(u', v')\,dC(u', v')$
  - corecția pentru estimarea marginalelor prin ranguri; W_2: analog pentru v
- Copula Gaussiană: varianța $(1-\rho^2)^2$ pentru CML, față de $(1-\rho^2)^2/(1+\rho^2)$ cu marginale cunoscute
- Raportul erorilor standard este deci $\sqrt{1+\rho^2}$, factorul din Aprofundări

înapoi

Chen și Fan (2006), filtrarea GARCH și limita

- Modelul: $r_{it} = \mu_i + \sigma_{it}\varepsilon_{it}$ cu σ_{it} GARCH
- Inovațiile $(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t})$ i.i.d. cu copula C_θ
- Chen & Fan (2006): CML pe rangurile reziduurilor *estimate* $\hat{\varepsilon}_{it}$
  - are aceeași distribuție limită ca CML pe rangurile inovațiilor adevărate ε_{it}
- Monte Carlo: 500 eșantioane, $T = 2\,000$
  - copulă Gaussiană $\rho = 0{,}8$, inovații Student t(5), GARCH ca cel estimat pentru JPM și BAC
  - Abaterea standard a lui $\hat{\rho}$ în simulări: 0,0081 cu inovațiile adevărate și 0,0082 cu reziduurile GARCH
  - Media erorilor standard estimate: 0,0081 pentru matricea sandviș și 0,0063 pentru inversa hessianei
- Concluzia: filtrarea GARCH practic nu schimbă precizia; matricea sandviș o estimează corect, inversa hessianei o subestimează

Înapoi

Dependența neparametrică în cozi, condiții

- Schmidt & Stadtmüller (2006): estimatorul $\hat{\lambda}_L$ din textul principal este consistent și asimptotic Normal dacă
  - $k \to \infty$, $k/n \to 0$ și copula de coadă există
  - este îndeplinită o condiție de ordinul doi pentru deplasare: $\sqrt{k}\, A(n/k) \to 0$
  - $A(\cdot)$: viteza cu care $C(q,q)/q$ se apropie de λ_L
- Bootstrap-ul i.i.d. al perechilor de reziduuri presupune o copulă statică a inovațiilor
- Bootstrap-ul staționar pe blocuri păstrează dependența serială a diferenței
  - $1\{U \le q,\, V \le q\} - 1\{U > 1-q,\, V > 1-q\}$
  - media ei împărțită la q estimează $\lambda_L - \lambda_U$

Înapoi

Dependența în dimensiuni mari și în timp

- DCC pentru N mare: verosimilitatea completă este lentă și deplasată
- Remedii
  - verosimilitate compusă pe perechi de active (Pakel, Shephard, Sheppard & Engle (2021))
  - DCC-NL (*Dynamic Conditional Correlation with NonLinear shrinkage*, corelație condiționată dinamică cu contracție neliniară a țintei), contracția neliniară (*shrinkage*) a țintei $\bar{Q}$ (Engle, Ledoit & Wolf (2019); contracția din Capitolul 4)
- Construcțiile de tip vine (*vine copulas*, Aas, Czado, Frigessi & Bakken (2009)): $d(d-1)/2$ copule bivariate, unele condiționate
  - în arbori imbricați, fiecare cu propria familie și propriile cozi
- Copule arhimediene ierarhice (Okhrin, Okhrin & Schmid (2013)): grupuri imbricate după tăria dependenței
  - de exemplu bănci într-o țară și țări într-o regiune
- Copule dinamice: parametrii ghidați de scor (Creal, Koopman & Lucas (2013); modelul GAS din Aprofundări)
  - se extind la multe active prin copule factoriale
- Oh & Patton (2018) măsoară riscul sistemic variabil în timp în spread-urile CDS (credit default swap)
- Copule condiționate: Patton (2006)

Înapoi

De la corelații la riscul sistemic

- Rețelele de corelații sînt primul pas spre măsurile de risc sistemic din Capitolul 18
  - Conectivitate din cauzalitate Granger: Billio, Getmansky, Lo & Pelizzon (2012)
  - Indici de spillover din descompunerea variației: Diebold & Yilmaz (2009)
  - Conectivitate prin regresii cuantilice: CoVaR (VaR-ul sistemului condiționat de dificultățile unei instituții), Adrian & Brunnermeier (2016)
  - Rețele de evenimente extreme: Financial Risk Meter aplicat firmelor energetice din UE (Uniunea Europeană), Toma, Dima, Grecu, Pele & Lessmann (2026)
- Șocurile petroliere și piața de acțiuni din SUA: Kilian & Park (2009)
- Prețurile energiei și piețele de acțiuni din UE, Grecu, Cramer, Pele & Lessmann (2025)
  - dependența pe regiuni și grupe industriale
- Rețelele de corelații moștenesc toate problemele corelațiilor
  - neliniaritate, variație în timp, cozi

Înapoi

COVOL: date și estimare

- **Modelul** (ec. 8–11 din Engle & Campos-Martins (2023)): pentru $i \neq j$, $\Psi_{ij,t} = s_i s_j v_t$, $v_t = \mathrm{Var}_{t-\mathbf{1}}(x_t)$
  - e_{it}: reziduul standardizat al activului i; $\Psi_{ij,t} = \mathrm{Cov}_{t-\mathbf{1}}(e_{it}^{\mathbf{2}}, e_{jt}^{\mathbf{2}})$
  - deci Ψ are un singur factor, iar prima lui componentă principală dă valorile inițiale (ec. 12–13)
  - Încărcări egale (înainte de normalizarea $s^\top s = 1$): $g_{it} = x_t$, iar media transversală $\hat{x}_t = \frac{\mathbf{1}}{N} \sum_i e_{it}^{\mathbf{2}}$ din textul principal este estimatorul de verosimilitate maximă (ec. 17)
- **Estimarea** (Secțiunea 5.3): maximizăm $-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \sum_{i,t} \left[\ln g_{it} + e_{it}^{\mathbf{2}} / g_{it} \right]$
  - $g_{it} = s_i x_t + 1 - s_i$, alternînd x_t și s_i pînă la convergență
  - După fiecare pas: $s^\top s = 1$, media lui x_t egală cu 1 (Observația 2)
  - Testul ξ (ec. 27): media standardizată a produselor $(e_{it}^{\mathbf{2}} - 1)(e_{jt}^{\mathbf{2}} - 1)$ pe cele $N(N-1)/2$ perechi, $\mathcal{N}(0,1)$ sub $H_{\mathbf{0}}$
- **Date** (Secțiunea 7.1, tabelul B.1): cele 47 de ETF-uri de țară listate la NYSE
  - randamente logaritmice zilnice în USD (*US dollar*, dolarul american), 2 iunie 2000 – 1 martie 2021
  - aceeași oră de închidere, deci fără asincronism; panel neechilibrat
  - Media: AR(1) plus doi factori, ACWI și PC1 a randamentelor ETF-urilor
  - Variațele: GARCH(1,1)
  - COVOL estimat pe cele 47 de serii de reziduuri și pe cei doi factori
  - În plus: 23 de serii pe clase de active din SUA (Secțiunea 9) și simulări Monte Carlo pentru estimator și pentru test (Secțiunile 5.4, 6.1)

Înapoi

COVOL: rezultatele principale

Ziua	$\hat{x}_t$	$\bar{r}_t$ (%)	Evenimentul (eticheta din articol)
9 martie 2020	51,416	−9,650	COVID-19: Italia în carantină; războiul prețului petrolului
24 iunie 2016	49,190	−7,270	Brexit
5 august 2019	39,457	−2,574	Războiul comercial: China își devalorizează moneda
28 aprilie 2020	38,883	2,334	COVID-19: vînzări masive de acțiuni tehnologice
17 septembrie 2001	30,077	−8,630	NYSE se redeschide după 11 septembrie

$\bar{r}_t$: randamentul mediu al ETF-urilor de țară. Tabelul arată primele cinci dintre cele mai mari douăzeci de valori din tabelul 6 din Engle & Campos-Martins (2023)

- Încărcările (tabelul 7): cele mai mari le au PC1 (0,261) și ACWI (0,250)
  - printre țări: Franța 0,217 și Spania 0,200, față de Noua Zeelandă 0,065 și Polonia 0,080
  - factorii au încărcări mai mari decît componentele idiosincratice, deci corelațiile cresc odată cu COVOL (ec. 41)
- Regresiile pe COVOL_m^2, media lunară a lui $\hat{x}_t$ minus 1
  - pătratul reziduului ACWI: coeficientul 0,326 (SE 0,025), $R^2 = 0{,}404$ (tabelul 8)
  - corelația medie pe perechi de ETF-uri crește cu 0,053 pentru fiecare unitate de COVOL_m^2 (SE 0,009, tabelul 10, coloana 4)
  - variația VIX (indicele Cboe al volatilității implicite a S&P 500) pe COVOL_m^2: coeficientul 4,034 (SE 0,249), $R^2 = 0{,}517$ (tabelul 12)

Înapoi

COVOL: protocolul replicării

- **Replicare**: versiunea pe clase de active (Secțiunea 9)
  - cu ETF-urile listate în SUA din datele de piață ale cursului, care se închid toate la aceeași oră
- ETF-urile
  - 11 sectoriale, Russell 1000 Growth și Value, Russell 2000
  - pieţele dezvoltate şi emergente din afara SUA
  - aur, obligaţiuni de stat pe termen lung, obligaţiuni corporative, petrol
- Un singur factor, PC1, pe un panel neechilibrat
- $\hat{x}_t$ prin ec. 17, apoi iterația din Secțiunea 5.3
- Testul ξ înainte și după împărțirea lui e_{it}^2 la $\hat{g}_{it}$ (Secțiunea 7.2)
- Tabelul 15 din articol plasează între primele patru zile
  - 9 noiembrie 2016 (43,04) și 9 martie 2020 (40,47)
- Dolarul și împărțirea Russell 2000 pe creștere/valoare nu sînt în datele cursului, deci panelul replicării diferă de cel din articol

Înapoi

COVOL: limitele și datele de după 2021

- Limite menționate de autori
  - după împărțirea la $\hat{g}_{it}$ pătratele sînt încă corelate, posibil un al doilea factor (Secțiunea 7.2)
  - COVOL multifactorial rămîne deschis (Secțiunea 9)
- Cu $s^\top s = 1$ încărcările scad cînd N crește
  - R_s^2: potrivirea dintre încărcările estimate și cele adevărate
  - R_s^2 este 0,640 pentru $N = 50$, $T = 1000$, față de 0,924 pentru $N = 10$ (tabelul 2)
- Testul pierde putere cînd încărcările diferă, deci autorii recomandă $T \geq 1000$
- După eșantionul articolului
  - 3 aprilie 2025 ($\hat{x}_t = 16{,}2$, randamentul mediu $-3{,}67\%$), după anunțarea taxelor vamale ale SUA
  - 10 noiembrie 2022 ($\hat{x}_t = 15{,}4$, $+4{,}56\%$), cînd inflația din SUA a ieșit sub așteptări
- Întrebare deschisă (Seminarul C3)
  - au alegerile, taxele vamale și știrile despre inflație un singur factor comun?
- Întrebare deschisă: explică COVOL_m^2 corelațiile DCC lunare și după includerea variației VIX?

Bucla descoperirii, prompturi reutilizabile (1/2)

- Instrumentele sînt interschimbabile
  - un asistent AI (Claude, ChatGPT, Gemini, GitHub Copilot)
  - motoare de căutare a literaturii științifice (Semantic Scholar, Elicit, Google Scholar)
- **Literatura**
  - *„Listează studiile publicate după 2015 despre determinanții corelației acțiuni–obligațiuni, cu DOI, eșantion, măsura corelației, strategia de identificare și estimarea principală."*
  - Verificăm în Crossref fiecare DOI și verificăm estimarea în articol, nu în rezumat
- **Ipoteze**
  - *„Dă explicații concurente pentru schimbarea de semn din 2022 (nivelul inflației, regimul politicii monetare, un șoc al primei de termen, un episod izolat de înăsprire a politicii monetare) și ce implică fiecare pentru ρ înainte de 2022 și în afara eșantionului."*
- **Date și cod**
  - *„Scrie cod Python care aliniază prețurile ajustate SPY și TLT din datele de piață ale cursului pe zilele comune de tranzacționare, calculează corelațiile realizate lunare și adaugă inflația CPI din SUA publicată înainte de începutul fiecărei luni."*
  - Replicăm întîi corelația SPY–TLT medie: $-0{,}40$ în 2002–2021 și $0{,}11$ în 2022–2026

Înapoi

Bucla descoperirii, prompturi reutilizabile (2/2)

- **Robustețe**
  - *„Scrie un plan pre-înregistrat: subeșantionul de dinainte de 2022, inflația de bază în loc de cea totală, randamente săptămînale în loc de zilnice, DCC în loc de corelația realizată, control pentru volatilitatea realizată, lag HAC 12."*
  - Placebo: înlocuim π cu serii simulate de tip mers aleator (*random walk*), de aceeași persistență
  - Un regresor persistent poate da statistici t mari din întîmplare
- **Critica**
  - *„Joacă rolul unui referent: este γ_1 identificat de un singur episod și l-ar explica distorsiunea de volatilitate Forbes–Rigobon? Indică testele care ar evidenția fiecare dintre aceste probleme."*
- **Raportul**: fiecare măsură a inflației, fereastră și frecvență încercată
  - estimările pe subeșantioane, alături de cele pe tot eșantionul
  - orice specificație aleasă după ce am văzut rezultatele este exploratorie și se raportează ca atare
- Codul mini-studiului de caz: Quantlets/Ch_06/ai_discovery_case.py
- Inflația: indicele prețurilor de consum pentru toți consumatorii urbani din SUA
  - sursa: U.S. Bureau of Labor Statistics

Înapoi

Acronime folosite în acest material (1/4)

- **ACWI**: All Country World Index — *indicele global al acțiunilor din toate țările (MSCI)*
- **AI**: Artificial Intelligence — *inteligență artificială*
- **AIC**: Akaike Information Criterion — *criteriul informațional Akaike*
- **AR**: AutoRegressive (model) — *model autoregresiv*
- **ARCH**: AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity — *heteroscedasticitate condiționată autoregresivă*
- **BAC**: Bank of America Corporation (NYSE ticker) — *Bank of America Corporation (simbolul bursier NYSE)*
- **BEKK**: Baba–Engle–Kraft–Kroner (multivariate GARCH model) — *modelul GARCH multivariat Baba–Engle–Kraft–Kroner*
- **BET**: Bucharest Exchange Trading (index) — *indicele de referință al Bursei de Valori București*
- **BIC**: Bayesian Information Criterion — *criteriul informațional bayesian*
- **BNP**: BNP Paribas SA (Euronext Paris ticker; Banque Nationale de Paris) — *BNP Paribas SA (simbolul bursier Euronext Paris)*
- **BRD**: BRD–Groupe Société Générale (BVB ticker) — *BRD–Groupe Société Générale (simbolul bursier BVB)*
- **CCC**: Constant Conditional Correlation (model) — *modelul cu corelație condiționată constantă*
- **CDO**: Collateralised Debt Obligation — *obligațiune garantată cu un portofoliu de datorii*

Acronime folosite în acest material (2/4)

- **CDS**: Credit Default Swap — *swap pe riscul de credit (contract de asigurare împotriva neplății)*
- **CL**: Composite Likelihood — *verosimilitate compusă (suma verosimilităților perechilor de active)*
- **CML**: Canonical Maximum Likelihood — *verosimilitate maximă canonică (pe pseudo-observații)*
- **CoVaR**: Conditional Value-at-Risk — *VaR-ul sistemului condiționat de starea unei instituții*
- **COVID-19**: COronaVIrus Disease 2019 — *boala provocată de coronavirus, 2019*
- **COVOL**: COmmon VOLatility (global COVOL: the size of the volatility shock common to all assets) — *volatilitatea comună (COVOL global: mărimea șocului de volatilitate comun tuturor activelor)*
- **CPI**: Consumer Price Index — *indicele prețurilor de consum*
- **DBK**: Deutsche Bank AG (Xetra ticker) — *Deutsche Bank AG (simbolul bursier Xetra)*
- **DCC**: Dynamic Conditional Correlation — *corelație condiționată dinamică*
- **DCC-NL**: Dynamic Conditional Correlation with NonLinear shrinkage — *corelație condiționată dinamică cu contracție neliniară a țintei*
- **DOI**: Digital Object Identifier — *identificatorul digital al unei publicații*
- **EA**: Euro Area — *zona euro*

Acronime folosite în acest material (3/4)

- **EPU**: Economic Policy Uncertainty (index) — *indicele incertitudinii politicii economice*
- **ES**: Expected Shortfall — *pierderea așteptată în coadă*
- **ETF**: Exchange-Traded Fund — *fond tranzacționat la bursă*
- **EWMA**: Exponentially Weighted Moving Average — *medie mobilă ponderată exponențial*
- **FRM**: Financial Risk Meter — *indicatorul de risc financiar sistemic Financial Risk Meter*
- **GARCH**: Generalised AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity — *heteroscedasticitate condiționată autoregresivă generalizată*
- **GAS**: Generalised Autoregressive Score (model) — *model cu scor autoregresiv generalizat*
- **GPR**: GeoPolitical Risk (index) — *indicele riscului geopolitic*
- **HAC**: Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent (standard errors) — *erori standard robuste la heteroscedasticitate și autocorelație*
- **i.i.d.**: independent and identically distributed — *independente și identic distribuite*
- **IFM**: Inference Functions for Margins — *funcții de inferență pentru marginale (estimare în doi pași)*
- **JPM**: JPMorgan Chase & Co. (NYSE ticker) — *JPMorgan Chase & Co. (simbolul bursier NYSE)*
- **LR**: Likelihood Ratio (test) — *testul raportului de verosimilitate*

Acronime folosite în acest material (4/4)

- **MSCI**: Morgan Stanley Capital International (index provider) — *furnizorul de indici Morgan Stanley Capital International*
- **NYSE**: New York Stock Exchange — *Bursa din New York*
- **PC1**: first Principal Component — *prima componentă principală*
- **SE**: Standard Error — *eroarea standard*
- **SPY**: SPDR S&P 500 ETF Trust — *fondul tranzacționat la bursă pe S&P 500*
- **SUA**: Statele Unite ale Americii
- **TLT**: iShares 20+ Year Treasury Bond ETF — *fondul de obligațiuni de stat americane cu scadențe de peste 20 de ani*
- **TLV**: Banca Transilvania (BVB ticker) — *Banca Transilvania (simbolul bursier BVB)*
- **UE**: Uniunea Europeană
- **US**: United States — *Statele Unite ale Americii*
- **USD**: United States Dollar — *dolarul american*
- **VaR**: Value-at-Risk — *valoarea la risc*
- **VEC**: VECtorised multivariate GARCH model (vech of the covariance matrix) — *modelul GARCH multivariat vectorizat (vech al matricei de covarianță)*
- **VIX**: Cboe Volatility Index — *indicele de volatilitate implicită al Cboe pentru S&P 500*

Bibliografie (1/5)

- Aas, K., Czado, C., Frigessi, A., Bakken, H. (2009). Pair-copula constructions of multiple dependence. *Insurance: Mathematics and Economics*, 44(2), 182–198.
- Adrian, T., Brunnermeier, M.K. (2016). CoVaR. *American Economic Review*, 106(7), 1705–1741.
- Aielli, G.P. (2013). Dynamic conditional correlation: on properties and estimation. *Journal of Business & Economic Statistics*, 31(3), 282–299.
- Ang, A., Chen, J. (2002). Asymmetric correlations of equity portfolios. *Journal of Financial Economics*, 63(3), 443–494.
- Baker, S.R., Bloom, N., Davis, S.J. (2016). Measuring economic policy uncertainty. *Quarterly Journal of Economics*, 131(4), 1593–1636.
- Billio, M., Getmansky, M., Lo, A.W., Pelizzon, L. (2012). Econometric measures of connectedness and systemic risk in the finance and insurance sectors. *Journal of Financial Economics*, 104(3), 535–559.
- Bollerslev, T. (1990). Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: a multivariate generalized ARCH model. *Review of Economics and Statistics*, 72(3), 498–505.
- Bollerslev, T., Engle, R.F., Wooldridge, J.M. (1988). A capital asset pricing model with time-varying covariances. *Journal of Political Economy*, 96(1), 116–131.
- Caldara, D., Iacoviello, M. (2022). Measuring geopolitical risk. *American Economic Review*, 112(4), 1194–1225.
- Campbell, J.Y., Pflueger, C., Viceira, L.M. (2020). Macroeconomic drivers of bond and equity risks. *Journal of Political Economy*, 128(8), 3148–3185.
- Chen, X., Fan, Y. (2006). Estimation and model selection of semiparametric copula-based multivariate dynamic models under copula misspecification. *Journal of Econometrics*, 135(1–2), 125–154.
- Clayton, D.G. (1978). A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence. *Biometrika*, 65(1), 141–151.
- Corsetti, G., Pericoli, M., Sbracia, M. (2005). 'Some contagion, some interdependence': more pitfalls in tests of financial contagion. *Journal of International Money and Finance*, 24(8), 1177–1199.

Bibliografie (2/5)

- Creal, D., Koopman, S.J., Lucas, A. (2013). Generalized autoregressive score models with applications. *Journal of Applied Econometrics*, 28(5), 777–795.
- Demarta, S., McNeil, A.J. (2005). The t copula and related copulas. *International Statistical Review*, 73(1), 111–129.
- Diebold, F.X., Mariano, R.S. (1995). Comparing predictive accuracy. *Journal of Business & Economic Statistics*, 13(3), 253–263.
- Diebold, F.X., Yilmaz, K. (2009). Measuring financial asset return and volatility spillovers, with application to global equity markets. *Economic Journal*, 119(534), 158–171.
- Embrechts, P., McNeil, A.J., Straumann, D. (2002). Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls. În M.A.H. Dempster (ed.), *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, 176–223. Cambridge University Press.
- Engle, R.F. (2002). Dynamic conditional correlation: a simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models. *Journal of Business & Economic Statistics*, 20(3), 339–350.
- Engle, R.F., Campos-Martins, S. (2023). What are the events that shake our world? Measuring and hedging global COVOL. *Journal of Financial Economics*, 147(1), 221–242.
- Engle, R.F., Kroner, K.F. (1995). Multivariate simultaneous generalized ARCH. *Econometric Theory*, 11(1), 122–150.
- Engle, R.F., Ledoit, O., Wolf, M. (2019). Large dynamic covariance matrices. *Journal of Business & Economic Statistics*, 37(2), 363–375.
- Engle, R.F., Sheppard, K. (2001). Theoretical and empirical properties of dynamic conditional correlation multivariate GARCH. NBER Working Paper 8554.
- Forbes, K.J., Rigobon, R. (2002). No contagion, only interdependence: measuring stock market comovements. *Journal of Finance*, 57(5), 2223–2261.
- Frank, M.J. (1979). On the simultaneous associativity of F(x, y) and x + y − F(x, y). *Aequationes Mathematicae*, 19, 194–226.

Bibliografie (3/5)

- Franke, J., Härdle, W.K., Hafner, C.M. (2019). Statistics of Financial Markets: An Introduction, ed. a 5-a. Springer.
- Genest, C., Ghoudi, K., Rivest, L.-P. (1995). A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distributions. *Biometrika*, 82(3), 543–552.
- Genest, C., Rémillard, B., Beaudoin, D. (2009). Goodness-of-fit tests for copulas: a review and a power study. *Insurance: Mathematics and Economics*, 44(2), 199–213.
- Genest, C., Rivest, L.-P. (1993). Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas. *Journal of the American Statistical Association*, 88(423), 1034–1043.
- Grecu, R.A., Cramer, A.A., Pele, D.T., Lessmann, S. (2025). The link between energy prices and stock markets in European Union countries. *The North American Journal of Economics and Finance*, 78, 102420.
- Gumbel, E.J. (1960). Bivariate exponential distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 55(292), 698–707.
- Härdle, W.K., Simar, L. (2019). Applied Multivariate Statistical Analysis, ed. a 5-a. Springer.
- Herskovic, B., Kelly, B., Lustig, H., Van Nieuwerburgh, S. (2016). The common factor in idiosyncratic volatility: quantitative asset pricing implications. *Journal of Financial Economics*, 119(2), 249–283.
- Joe, H. (2005). Asymptotic efficiency of the two-stage estimation method for copula-based models. *Journal of Multivariate Analysis*, 94(2), 401–419.
- J.P. Morgan/Reuters (1996). RiskMetrics – Technical Document, ed. a 4-a. New York.
- Kendall, M.G. (1938). A new measure of rank correlation. *Biometrika*, 30(1–2), 81–93.
- Kilian, L., Park, C. (2009). The impact of oil price shocks on the U.S. stock market. *International Economic Review*, 50(4), 1267–1287.
- Li, D.X. (2000). On default correlation: a copula function approach. *Journal of Fixed Income*, 9(4), 43–54.
- Liu, Y., Tsyvinski, A. (2021). Risks and returns of cryptocurrency. *Review of Financial Studies*, 34(6), 2689–2727.

Bibliografie (4/5)

- Longin, F., Solnik, B. (2001). Extreme correlation of international equity markets. *Journal of Finance*, 56(2), 649–676.
- Mantegna, R.N. (1999). Hierarchical structure in financial markets. *European Physical Journal B*, 11(1), 193–197.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7(1), 77–91.
- Molenaar, R., Sénéchal, E., Swinkels, L., Wang, Z. (2024). Empirical evidence on the stock–bond correlation. *Financial Analysts Journal*, 80(3), 17–36.
- Nelsen, R.B. (2006). An Introduction to Copulas, ed. a 2-a. Springer.
- Newey, W.K., McFadden, D. (1994). Large sample estimation and hypothesis testing. În R.F. Engle, D.L. McFadden (ed.), *Handbook of Econometrics*, Vol. 4, 2111–2245. Elsevier.
- Newey, W.K., West, K.D. (1987). A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix. *Econometrica*, 55(3), 703–708.
- Oh, D.H., Patton, A.J. (2018). Time-varying systemic risk: evidence from a dynamic copula model of CDS spreads. *Journal of Business & Economic Statistics*, 36(2), 181–195.
- Okhrin, O., Okhrin, Y., Schmid, W. (2013). On the structure and estimation of hierarchical Archimedean copulas. *Journal of Econometrics*, 173(2), 189–204.
- Pakel, C., Shephard, N., Sheppard, K., Engle, R.F. (2021). Fitting vast dimensional time-varying covariance models. *Journal of Business & Economic Statistics*, 39(3), 652–668.
- Patton, A.J. (2006). Modelling asymmetric exchange rate dependence. *International Economic Review*, 47(2), 527–556.
- Pele, D.T., Wesselhöfft, N., Härdle, W.K., Kolossiatis, M., Yatracos, Y.G. (2023). Are cryptos becoming alternative assets?. *European Journal of Finance*, 29(10), 1064–1105.

Bibliografie (5/5)

- Politis, D.N., White, H. (2004). Automatic block-length selection for the dependent bootstrap. *Econometric Reviews*, 23(1), 53–70.
- Rémillard, B. (2017). Goodness-of-fit tests for copulas of multivariate time series. *Econometrics*, 5(1), 13.
- Rigobon, R. (2003). Identification through heteroskedasticity. *Review of Economics and Statistics*, 85(4), 777–792.
- Schmidt, R., Stadtmüller, U. (2006). Non-parametric estimation of tail dependence. *Scandinavian Journal of Statistics*, 33(2), 307–335.
- Sklar, A. (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, 8, 229–231.
- Spearman, C. (1904). The proof and measurement of association between two things. *American Journal of Psychology*, 15(1), 72–101.
- Toma, F.-M., Dima, D.M., Grecu, R., Pele, D.T., Lessmann, S. (2026). Energy Financial Risk Meter: systemic risk in the EU energy sector. SSRN Working Paper.
- Tse, Y.K. (2000). A test for constant correlations in a multivariate GARCH model. *Journal of Econometrics*, 98(1), 107–127.
- Wied, D., Krämer, W., Dehling, H. (2012). Testing for a change in correlation at an unknown point in time using an extended functional delta method. *Econometric Theory*, 28(3), 570–589.