









# Modelarea piețelor financiare

## Capitolul 7: VaR și Expected Shortfall



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București
IDA Institute Digital Assets
Blockchain Research Center
AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance
Academia Română, Institutul de Prognoză Economică
MSCA Digital Finance

# Cît de mari sînt pierderile extreme zilnice?



Freddy Delbaen. **Foto: ETH-Bibliothek Zürich (1997); CC BY-SA 4.0; Wikimedia Commons**

*"We present and justify a set of four desirable properties for measures of risk, and call the measures satisfying these properties 'coherent.'"*

— *Artzner, Delbaen, Eber & Heath (1999)*

- S&P 500 (*Standard & Poor's*), 2000–2026: VaR 1% istoric (Value-at-Risk, pierderea depășită în 1% din zile) este 3,45%
  - ES 1% (Expected Shortfall, pierderea medie în cel mai rău 1% dintre zile) este 5,03%; cea mai mare pierdere este 12,77% (16 martie 2020)
- Două obligațiuni independente, fiecare pierde 100 cu probabilitatea 0,9%: VaR 1% este 0 pentru fiecare și 100 pentru portofoliu
  - ES 1% este 90 pentru fiecare obligațiune și 100,81 pentru portofoliu, sub suma de 180
- Pe ultimele 500 de zile, ES 2,5% se sprijină pe doar $n\alpha = 12{,}5$ pierderi
  - intervalul HAC (robust la heteroscedasticitate și autocorelare) are lățimea de 2,55 puncte procentuale
- Zilele cu o pierdere peste VaR 1% pe o zi, 2006–2026 (țința: 1%)
  - 1,67% pentru simularea istorică pe 500 de zile, 1,54% pentru simularea istorică filtrată (FHS), 2,34% pentru GARCH (*Generalised AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity*, heteroscedasticitate condiționată autoregresivă generalizată) cu șocuri Normale

▸ Graficul central: Simularea istorică și simularea istorică filtrată: S&P 500 (1/2)

# Cît de mari sînt pierderile extreme zilnice și cu ce precizie le putem estima?

## Întrebările capitolului

- Două măsuri ale cozii: VaR și ES
  - VaR (Value-at-Risk, valoarea la risc): un prag de pierdere
  - ES (Expected Shortfall): pierderea medie dincolo de prag
- Partea I: definiții, coerență, metode de estimare necondiționate și precizia lor
- Partea a II-a: prognoze condiționate, teoria valorilor extreme, orizontul și portofoliul
  - prognoze condiționate: simularea istorică filtrată (FHS) și modelarea directă a cuantilei (CAViaR)
  - reglementarea, două studii de caz și un exemplu de buclă de cercetare asistată de AI (inteligență artificială)
- Exerciții rezolvate, Seminarul 7: A1, A2, A3, A5, B1, B4

## Rezultatele învățării

- derivați VaR și ES pentru distribuția Normală și pentru distribuția Student-$t$
- interpretați coerența: de ce ES este subaditiv, iar VaR nu
- calculați ambele măsuri, fiecare cu o eroare standard sau un interval
  - istoric, parametric, prin simulare filtrată și prin teoria valorilor extreme
- calculați măsurile pe 10 zile și contribuțiile Euler ale activelor
- interpretați regulile Basel, inclusiv FRTB
  - FRTB (Fundamental Review of the Trading Book): standardul din 2019 pentru riscul de piață
- Aprofundări și Anexa: lectură pentru familiarizare

## Ce pierderi măsurăm și în ce unități?

- Exemplul principal: pierderile zilnice ale S&P 500, 2000–2026
- Comparații pe BET, Bitcoin, EUR (moneda euro)/RON și aur
  - BET: indicele principal al Bursei de Valori București (BVB)
  - EUR/RON: cursul de referință al Băncii Naționale a României (BNR), în lei (RON) pentru un euro (EUR)
- Date pînă la 18 septembrie 2026 (inventarul complet în Anexă)
- Unități: randamente log zilnice în %, $r_t = 100\,(\ln P_t - \ln P_{t-1})$
  - $P_t$: prețul de închidere din ziua $t$
- De ce 2000–2026: selecția cuprinde trei crize (2000–2002, 2008, 2020)
  - deci coada conține destule pierderi extreme

# Pierderea potențială: RiskMetrics și VaR



Clădirea J.P. Morgan & Co., 23 Wall Street, New York

Foto: Beyond My Ken (2012); CC BY-SA 4.0; Wikimedia Commons

- Conducerea și autoritățile au nevoie de **un singur număr**: un prag de pierdere depășit rar
  - folosit la stabilirea limitelor și a cerințelor de **capital**
- J.P. Morgan a publicat **RiskMetrics** în octombrie 1994
  - o metodologie și un set de date gratuite pentru riscul de piață
- Documentul tehnic (ed. a 4-a, 1996) a devenit referința pentru VaR J.P. Morgan/Reuters (1996)
- Manuale: Franke, Härdle & Hafner (2019), McNeil, Frey & Embrechts (2015), Daníelsson (2011)

## Pierderi și convenția de semn

- Randamentul pe o zi: $X_{t+1} = r_{t+1}$, randamentul log în %
- **Pierderea**: $L_{t+1} = -X_{t+1}$, o **pierdere log**
  - $L > 0$ înseamnă că poziția a pierdut bani
- În bani, cu $V_t$ valoarea poziției: pierderea $= V_t\,(1 - e^{-L_{t+1}/100}) \approx V_t L_{t+1}/100$ pentru $L$ mic
- De ce log: randamentele log se adună în timp, cele simple se adună între active
  - în timp: orizontul $h$; între active: portofoliul
- Transformarea $L \mapsto 1 - e^{-L/100}$ este crescătoare
  - deci VaR în bani este $V_t(1 - e^{-\mathrm{VaR}_\alpha/100})$
  - ES în bani se calculează pe fiecare scenariu, apoi se face media
- **Convenția de semn**: VaR și ES sînt numere **pozitive** atunci cînd sînt pierderi

## Orizontul și nivelul: de ce 1 zi, 10 zile, 1% și 2,5%

- **Orizontul** $h$: numărul de zile pe care se măsoară pierderea
- $h = 1$ zi: orizontul limitelor de tranzacționare și al backtesting-ului (compararea prognozelor cu pierderile realizate), cu o observație nouă în fiecare zi
- $h = 10$ zile: timpul presupus de Basel pentru lichidarea unei poziții Basel Committee (1996)
- **Nivelul** $\alpha$: **probabilitatea cozii**
  - scriem „VaR 1%", „ES 2,5%"
- $\alpha = 1\%$: nivelul VaR din amendamentul Basel din 1996 Basel Committee (1996), în medie o depășire la 100 de zile
- $\alpha = 2{,}5\%$: nivelul ES din FRTB Basel Committee (2019)
  - ales pentru că, sub distribuția Normală, ES 2,5% este aproape egal cu VaR 1%

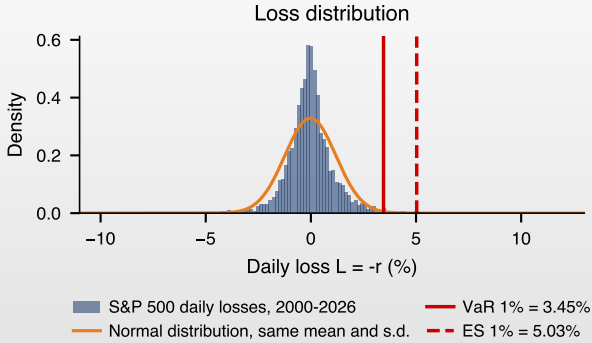
# Definiții (1/2): valoarea la risc (VaR)

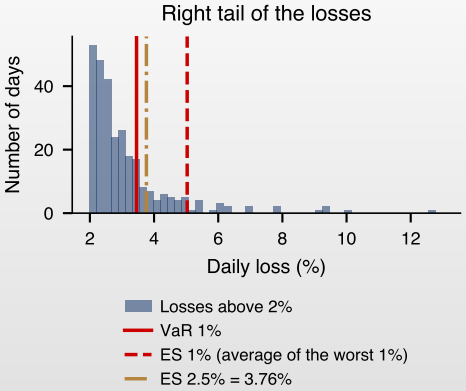
- Întrebarea secțiunii: ce pierdere este depășită doar în $\alpha$ din zile?
  - și cît pierdem, în medie, dincolo de ea?
- **VaR** la nivelul $\alpha$: pierderea depășită cu probabilitatea $\alpha$
  - exact pentru $L$ continuă, cel mult $\alpha$ în general
  - $\mathrm{VaR}_\alpha(X) = -\inf\{x \in \mathbb{R} : P(X \leq x) > \alpha\} = -q_\alpha(X)$
  - $X$: randamentul poziției pe orizontul ales
  - $q_\alpha(X)$: cuantila de ordin $\alpha$ a lui $X$, negativă pentru $\alpha$ mic, deci VaR este o pierdere pozitivă
  - Pentru o pierdere continuă $L = -X$: $\mathrm{VaR}_\alpha = q_{1-\alpha}(L)$, cuantila superioară a pierderii
- Interpretarea VaR 1%
  - „Cu probabilitatea de 1%, pierderea de mîine va depăși $\mathrm{VaR}_{1\%}$"
  - VaR **nu** spune cît de mare este pierderea dincolo de acest prag

# Definiții (2/2): Expected Shortfall

- **Expected Shortfall** (pierderea așteptată în coadă): media tuturor cuantilelor din coada de probabilitate $\alpha$
  - $\mathrm{ES}_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha q_u(X)\,du$
  - echivalent, $\mathrm{ES}_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \mathrm{VaR}_u(X)\,du$
  - $u$: variabila de integrare, o probabilitate a cozii între 0 și $\alpha$
- Pentru o distribuție continuă: pierderea medie în zilele de dincolo de VaR
  - $\mathrm{ES}_\alpha(X) = -\mathbb{E}[X \mid X \le q_\alpha(X)]$
  - Întotdeauna $\mathrm{ES}_\alpha \ge \mathrm{VaR}_\alpha$: ES descrie **întreaga** coadă, VaR doar pragul ei
  - Două portofolii cu același VaR pot avea ES foarte diferite
- Alte denumiri: Conditional VaR (CVaR), Tail VaR, Average VaR Rockafellar & Uryasev (2002), Acerbi & Tasche (2002)

# VaR și ES pentru S&P 500 (1/2)




MFM_ch7_loss_distribution ▶ Interactiv

# VaR și ES pentru S&P 500 (2/2)

- Stînga: pierderile zilnice 2000–2026 față de distribuția Normală cu aceeași medie și abatere standard
- Dreapta: coada distribuției
- $\mathrm{VaR}_{1\%}$ istoric $= 3{,}45\%$: pierderea l-a depășit în 68 din 6 717 zile (1,01%)
- $\mathrm{ES}_{1\%} = 5{,}03\%$ este pierderea medie în cel mai rău 1% dintre zile
- La nivelul 2,5%: VaR istoric este 2,51%, iar ES este 3,76%
- Cea mai mare pierdere: 12,77%, pe 2020-03-16, adică circa zece abateri standard
  - crahul din pandemia COVID-19
- Distribuția Normală se potrivește în centru, dar are cozi mult prea subțiri (Capitolul 1)
- Tipul de dovadă: descriere (arată ce s-a întîmplat în date, fără un test al cauzei)

MFM_ch7_loss_distribution

# Formula explicită a ES pentru distribuția Normală (1/2)

- Cadrul: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, un randament cu distribuția Normală, de medie $\mu$ și abatere standard $\sigma$
  - $\Phi$, $\varphi$: funcția de repartiție și densitatea distribuției Normale standard $N(0,1)$
  - $z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha) < 0$: cuantila de ordin $\alpha$ a distribuției Normale standard, de exemplu $z_{1\%} = -2{,}326$
- VaR: media minus $|z_\alpha|$ abateri standard, cu semn schimbat
  - $\mathrm{VaR}_\alpha = -(\mu + \sigma z_\alpha)$
- ES: aceeași formă, cu factorul mai mare $\varphi(z_\alpha)/\alpha$ în locul lui $-z_\alpha$
  - $\mathrm{ES}_\alpha = -\mu - \dfrac{\sigma}{\alpha} \displaystyle\int_{-\infty}^{z_\alpha} u\varphi(u)\, du$
  - Integrala este egală cu $-\varphi(z_\alpha)$, deoarece $\varphi'(u) = -u\varphi(u)$
  - Rezultă $\mathrm{ES}_\alpha = -\mu + \sigma \dfrac{\varphi(z_\alpha)}{\alpha}$

## Formula explicită a ES pentru distribuția Normală (2/2)

- Constante utile
  - $-z_{1\%} = 2{,}326$, $\varphi(z_{1\%})/0{,}01 = 2{,}665$
  - $-z_{2{,}5\%} = 1{,}960$, $\varphi(z_{2{,}5\%})/0{,}025 = 2{,}338$
  - Deci, sub distribuția Normală, ES 2,5% este aproape egal cu VaR 1% (2,338 față de 2,326 abateri standard)
- S&P 500: $\hat{\mu} = 0{,}025\%$, $\hat{\sigma} = 1{,}213\%$
- $\mathrm{VaR}_{1\%}$ Normal $= 2{,}80\%$ față de 3,45% istoric
  - Formula: $\mathrm{VaR}_{1\%} = -\hat{\mu} + \hat{\sigma}\,(-z_{1\%})$
  - Calculul: $-0{,}025 + 1{,}213 \times 2{,}326 \approx 2{,}80\%$
  - VaR istoric este de 1,24 ori mai mare decît VaR Normal
- Sub distribuția Normală, pentru $\mu$ dat, VaR și ES nu aduc informație dincolo de $\sigma$

# Distribuția Student-$t$: VaR și ES

- Modelul: randamentul este o variabilă Student-$t$ deplasată și rescalată, $X = m + s\,T$ cu $T \sim t_\nu$
  - $m$: parametrul de poziție
  - $s > 0$: scala
  - $\nu$: gradele de libertate, iar un $\nu$ mai mic înseamnă cozi mai grele
  - $t_\alpha = t_\nu^{-1}(\alpha) < 0$: cuantila de ordin $\alpha$ a lui $t_\nu$
  - $g_\nu$: densitatea lui $t_\nu$
- VaR ca la distribuția Normală, cu $t_\alpha$ în locul lui $z_\alpha$
- ES primește un factor suplimentar $(\nu + t_\alpha^2)/(\nu - 1) > 1$, datorat cozii grele
  - $\mathrm{VaR}_\alpha = -(m + s\,t_\alpha), \qquad \mathrm{ES}_\alpha = -m + s\,\dfrac{g_\nu(t_\alpha)}{\alpha}\,\dfrac{\nu + t_\alpha^2}{\nu - 1}$ (pentru $\nu > 1$)
  - Dispersia $s^2\nu/(\nu - 2)$ există doar pentru $\nu > 2$, deci $s$ nu este abaterea standard

# Măsuri de risc coerente (1/2): cele patru axiome

- Întrebarea secțiunii: ce proprietăți trebuie să aibă un număr folosit drept capital?
  - astfel încît diversificarea să nu fie penalizată
- O **măsură de risc** $\rho$ asociază unei pierderi $L$ (o variabilă aleatoare) un număr, capitalul necesar
- Măsura este **coerentă** dacă satisface patru axiome Artzner, Delbaen, Eber & Heath (1999)
  - $L_1, L_2$: două pierderi
  - $c$: o sumă sigură (constantă)
  - $\lambda \geq 0$: un factor de scală (mărimea poziției)
- **Monotonă**: $L_1 \leq L_2 \Rightarrow \rho(L_1) \leq \rho(L_2)$
  - O poziție care pierde mereu mai mult cere mai mult capital
- **Invariantă la translație**: $\rho(L + c) = \rho(L) + c$
  - Adăugarea unei pierderi sigure $c$ crește capitalul exact cu $c$
- **Pozitiv omogenă**: $\rho(\lambda L) = \lambda \rho(L)$
  - Dublarea poziției dublează capitalul
- **Subaditivă**: $\rho(L_1 + L_2) \leq \rho(L_1) + \rho(L_2)$
  - Reunirea a două poziții nu cere niciodată mai mult capital decît păstrarea lor separată: diversificarea nu adaugă risc

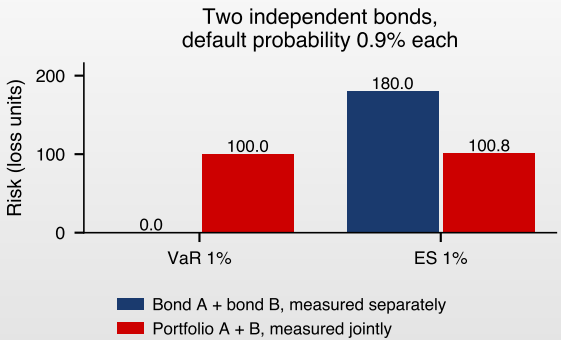
# Măsuri de risc coerente (2/2): implicațiile axiomelor

- **Limitele de risc**
  - Prin subaditivitate, riscul întregii bănci nu depășește suma limitelor de risc ale birourilor de tranzacționare, $\sum_i \rho_i$
  - **Fără arbitraj de reglementare** prin divizarea firmei
- **Optimizare**: omogenitate + subaditivitate $\Rightarrow$ convexitate în ponderile portofoliului
  - Orice minim local este global
  - Unicitatea ar cere convexitate **strictă**, pe care ES pe scenarii nu o are (este liniar pe porțiuni)
- VaR satisface primele trei axiome, dar **nu** și subaditivitatea în general
  - Excepție: pierderi cu distribuție eliptică comună (Normală sau Student-$t$ multivariată) și $\alpha < 50\%$, cînd VaR și ES sînt ambele $\mu_p + \sigma_p \times$ constantă McNeil, Frey & Embrechts (2015)
  - $\mu_p$, $\sigma_p$: media și abaterea standard a pierderii portofoliului (rafinările pentru cozi grele: Anexă)

# Contraexemplu: două obligațiuni, pas cu pas

- Obligațiunile A și B sînt independente
- Fiecare pierde 100 cu probabilitatea $p = 0{,}9\%$ (neplată) și 0 altfel
- $X$: variația valorii, $X = -L$
- Formula generală pentru o pierdere discretă $L = -X$: $\mathrm{ES}_\alpha = \frac{1}{\alpha}\left(\mathbb{E}[L\,1\{L > \mathrm{VaR}_\alpha\}] + \mathrm{VaR}_\alpha\left(\alpha - P(L > \mathrm{VaR}_\alpha)\right)\right)$
  - $1\{\cdot\}$: indicatorul, 1 dacă are loc condiția și 0 altfel
  - Primul termen: pierderile strict dincolo de VaR
  - Al doilea termen: restul probabilității cozii $\alpha$, plasat chiar în VaR
- **O obligațiune**: $P(X \le -100) = p = 0{,}9\%$, nu peste 1%, deci $q_{\mathbf{1\%}} = 0$ și $\mathrm{VaR}_{\mathbf{1\%}}(A) = \mathrm{VaR}_{\mathbf{1\%}}(B) = 0$
  - $\mathrm{ES}_{\mathbf{1\%}}(A) = (100 \cdot 0{,}009 + 0 \cdot 0{,}001)/0{,}01 = 90$
- **Portofoliul A + B**: $P(X \le -100) = 1 - (1-p)^{\mathbf{2}} = 1{,}79\% > 1\%$
  - $P(X \le -200) = p^{\mathbf{2}} = 0{,}0081\%$, deci $q_{\mathbf{1\%}} = -100$
  - $\mathrm{VaR}_{\mathbf{1\%}}(A+B) = 100 > 0 + 0 = \mathrm{VaR}_{\mathbf{1\%}}(A) + \mathrm{VaR}_{\mathbf{1\%}}(B)$
- $\mathrm{ES}_{\mathbf{1\%}}(A+B) = 100{,}81 \le 180 = \mathrm{ES}_{\mathbf{1\%}}(A) + \mathrm{ES}_{\mathbf{1\%}}(B)$

# Subadditivitatea VaR și ES: un contraexemplu




- Albastru: suma celor două măsuri individuale
- Roșu: măsura portofoliului combinat
- VaR sare de la $0 + 0$ la 100 la reunirea obligațiunilor (contraexemplul de pe slide-ul anterior)
- O limită VaR ar recompensa **concentrarea**: deținerea doar a obligațiunii A pare fără risc
- ES ține cont de mărimea pierderilor din coadă și este coerent Acerbi & Tasche (2002)
- VaR încalcă subaditivitatea în practică la cîștigurile asimetrice
  - mai ales portofoliile de credit (neplăți) și opțiunile

MFM_ch7_subadditivity ▶ Interactiv

## Verificare rapidă: care poziție este mai riscantă?

- Două poziții, pierderi în %, nivelul $\alpha = 10\%$
- **A**: pierderea $L_A$ uniformă pe $[0, 10]$, toate valorile la fel de probabile
  - Calculează $\mathrm{VaR}_{10\%}(A)$ și $\mathrm{ES}_{10\%}(A)$ din definiții
- **B**: pierdere 0 cu probabilitatea 0,95, pierdere 20 cu probabilitatea 0,05
  - Calculează $\mathrm{VaR}_{10\%}(B)$ și $\mathrm{ES}_{10\%}(B)$ cu formula ES discretă de pe slide-ul celor două obligațiuni
- Ce poziție consideră mai riscantă fiecare măsură?
- Ce nu vede VaR?
- Răspunsurile sînt în ▸ Anexă

## Coerență și robustețe

- **Robustețe calitativă** Cont, Deguest & Scandolo (2010)
  - o mică schimbare a distribuției datelor modifică doar puțin distribuția estimatorului
  - VaR istoric este calitativ robust în distribuțiile cu $\alpha$-cuantilă unică
  - ES istoric **nu** este: o singură pierdere extremă îl poate modifica oricît de mult (secțiunea „Precizia estimărilor VaR și ES")
- S&P 500, ultimele 500 de zile: eliminăm cea mai mare pierdere (6,16%, 2025-04-04)
  - $\mathrm{ES}_{2,5\%}$ trece de la 2,98% la 2,64%
  - $\mathrm{VaR}_{1\%}$ trece de la 2,73% la 2,68%
- Există un compromis între subadditivitate și robustețe
  - subadditivitatea cere informație din coada de dincolo de cuantilă
  - exact această informație face ES sensibil la observații izolate
- FRTB a ales coerența pentru capital (ES 2,5%) și a păstrat VaR pentru backtesting
  - VaR este robust
  - prognozele VaR se pot compara direct printr-un scor (elicitabilitatea, slide-ul următor)

# Elicitabilitatea: dificultatea evaluării ES

- O **funcție de scor** $S(v, X)$: o penalizare calculată din prognoza $v$ și din rezultatul $X$
  - o valoare mai mică înseamnă o prognoză mai bună
- O măsură de risc este **elicitabilă** dacă minimizează unic $\mathbb{E}[S(v, X)]$ pentru un scor $S$
  - un astfel de $S$ se numește scor strict consistent
  - VaR: cuantila $q_\alpha(X)$ minimizează pierderea pinball $\mathbb{E}[(1\{X \leq v\} - \alpha)(v - X)]$
  - Pierderea pinball penalizează cu $1 - \alpha$ pe unitate cînd $X$ cade sub $v$ și cu $\alpha$ pe unitate cînd rămîne deasupra
- ES, considerat separat, **nu** este elicitabil Gneiting (2011)
  - nu există o funcție de scor strict consistentă doar pentru ES
- Perechea (VaR, ES) este elicitabilă împreună Fissler & Ziegel (2016)
  - scoruri comune precum FZ0 ordonează prognozele (VaR, ES) (Anexă; Capitolul 8)
  - FZ0: scorul Fissler–Ziegel din Patton, Ziegel & Chen (2019)
  - $S(cv, ce; cY) = S(v, e; Y) + \ln c$: diferențele dintre scoruri, nu scorul însuși, sînt omogene de grad zero

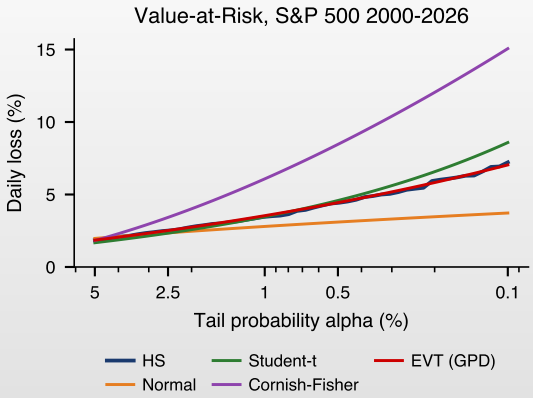
## Simularea istorică

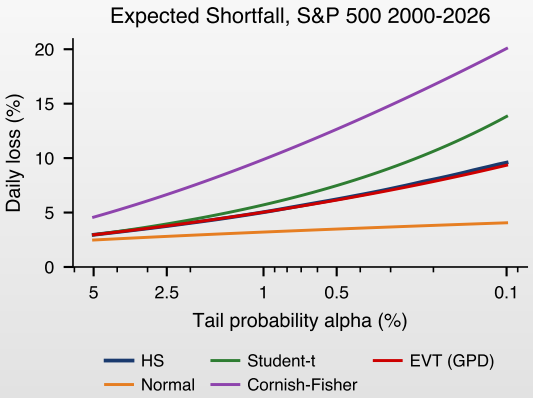
- Întrebarea secțiunii: cum estimăm VaR și ES din date?
  - și cît depinde rezultatul de ipoteza despre coadă?
- Luăm ultimele $n$ pierderi zilnice $L_{t-n+1}, \dots, L_t$ și le ordonăm: $L_{(1)} \leq \cdots \leq L_{(n)}$
  - $L_{(i)}$: a $i$-a cea mai mică pierdere
  - $\widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha = L_{(j)} + (\ell - j)\,(L_{(j+1)} - L_{(j)})$, cu $\ell = 1 + (n-1)(1-\alpha)$ și $j = \lfloor \ell \rfloor$: cuantila empirică de ordin $1-\alpha$, interpolată liniar
  - $\widehat{\mathrm{ES}}_\alpha = \frac{1}{n\alpha}\left[\sum_{i=1}^{m} L_{(n-i+1)} + (n\alpha - m)\, L_{(n-m)}\right]$, cu $m = \lfloor n\alpha \rfloor$: integrala funcției cuantilă empirice pe cea mai rea fracțiune $\alpha$ a pierderilor
  - Cele mai mari $m$ pierderi primesc ponderea 1, iar următoarea, $L_{(n-m)}$, ponderea fracționară $n\alpha - m$
  - Alternativa, media depășirilor selectate: media simplă a celor $k_\alpha$ pierderi $\geq \widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha$; diferă de $\widehat{\mathrm{ES}}_\alpha$ cînd $n\alpha$ nu este întreg
- Alegerea ferestrei $n$: un compromis între reacție și precizie
  - estimarea pe 250 de zile reacționează mai repede, iar cea pe 1 000 de zile este mai precisă
  - Cu $n = 500$: 5 pierderi se află dincolo de VaR 1%
  - ES 2,5% dă ponderea 1 celor mai mari 12 pierderi și ponderea 0,5 celei de-a 13-a ($n\alpha = 12{,}5$)
- Nicio pierdere mai mare decît cea mai rea din fereastră nu poate apărea în estimare
- **Saltul la ieșirea din fereastră** (*ghost effect*): după $n$ zile, o zi de criză iese din fereastră și VaR scade brusc

## Cornish–Fisher: corecția cuantilei Normale și limitele ei

- Ajustăm cuantila Normală pentru **asimetrie** $S = \mathbb{E}[(X-\mu)^3]/\sigma^3$ și **excesul de kurtosis** $K = \mathbb{E}[(X-\mu)^4]/\sigma^4 - 3$ Cornish & Fisher (1938)
  - $\tilde{z}_\alpha = z_\alpha + \frac{(z_\alpha^2-1)S}{6} + \frac{(z_\alpha^3-3z_\alpha)K}{24} - \frac{(2z_\alpha^3-5z_\alpha)S^2}{36}, \quad \mathrm{VaR}_\alpha = -(\mu+\sigma\tilde{z}_\alpha)$
  - $\tilde{z}_\alpha$: cuantila corectată; pentru $S = K = 0$ se obține VaR Normal
  - Pentru $\alpha$ sub circa 4% ($|z_\alpha| > \sqrt{3}$): $S < 0$ (coada stîngă a randamentelor mai lungă) sau $K > 0$ (cozi grele) împing $\tilde{z}_\alpha$ sub $z_\alpha$ și cresc VaR, iar termenul în $S^2$ acționează în sens opus
  - La $\alpha = 5\%$, termenul în $K$ are semnul opus
- ES: media lui $-(\mu+\sigma\tilde{z}_u)$ pe $u \in (0,\alpha)$, calculată numeric
- O dezvoltare în jurul distribuției Normale: precisă doar pentru $S$ și $K$ **mici**
- Pentru $K$ mare, transformarea $z \mapsto \tilde{z}$ nici măcar nu este monotonă (Seminarul 7, A6)
- Randamentele S&P 500: $S = -0{,}35$, $K = 10{,}7$: mult în afara acestui domeniu
  - $K$ de selecție presupune moment de ordin patru finit, pus sub semnul întrebării în Capitolul 1
  - $\mathrm{VaR}_{1\%}^{CF} = 6{,}08\%$ față de valoarea istorică 3,45%: termenul de kurtosis supraestimează puternic VaR

# Cinci metode la diferite niveluri de risc (1/2)




MFM_ch7_var_levels ▶ Interactiv

# Cinci metode la diferite niveluri de risc (2/2)

- Axa orizontală: $\alpha$ de la 5% la 0,1%, pe scară logaritmică
  - axa verticală: VaR (stînga) și ES (dreapta), pierderi zilnice S&P 500 2000–2026, în %
- În legendă, HS (historical simulation) este simularea istorică
- EVT: coada GPD, prezentată în secțiunea „Teoria valorilor extreme"
  - EVT: extreme value theory, teoria valorilor extreme
  - GPD: generalised Pareto distribution, distribuția Pareto generalizată
- VaR 0,1% (depășit în medie o zi la patru ani)
  - 7,22% istoric, 7,04% cu EVT
  - 8,58% cu Student-$t$ și 15,06% cu Cornish–Fisher
- Distribuția Normală dă doar 3,72%, aproximativ jumătate din valoarea istorică
- Diferența dintre metode **crește** cînd $\alpha$ scade, mai mult pentru ES decît pentru VaR
- EVT și estimarea istorică coincid pînă la 0,5%, iar mai jos EVT extrapolează o coadă estimată
- Tipul de dovadă: comparație între proceduri (arată care metodă funcționează mai bine pe aceleași date, nu de ce)

MFM_ch7_var_levels

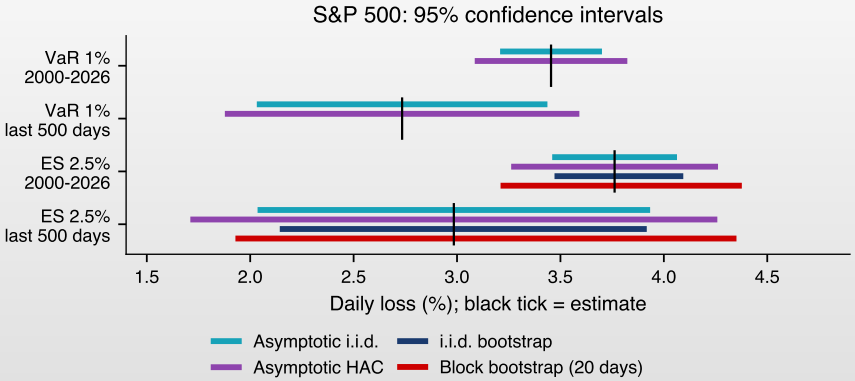
# Erori standard pentru VaR și ES (1/2): VaR

- Întrebarea secțiunii: cît s-ar schimba VaR și ES estimate pe o altă selecție de aceeași lungime?
- **VaR**: pierderi i.i.d. (independente și identic distribuite) cu densitatea $f$ continuă și pozitivă în $\mathrm{VaR}_\alpha$
  - $\mathrm{SE}(\widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha) \approx \frac{1}{f(\mathrm{VaR}_\alpha)} \sqrt{\frac{\alpha(1-\alpha)}{n}}$ (SE: eroarea standard)
  - $\sqrt{\alpha(1-\alpha)/n}$: SE a proporției de zile dincolo de VaR
  - Împărțirea la densitatea $f(\mathrm{VaR}_\alpha)$ o transformă într-o eroare pe scala pierderii
  - Densitatea în coadă este mică, deci SE este mare
  - Exemplu cu $\sigma = 1{,}2\%$ și $n = 500$: SE pentru $\mathrm{VaR}_{1\%}$ este de 0,20 puncte procentuale (pp) sub distribuția Normală
  - Sub o $t_4$ (Student-$t$ cu 4 grade de libertate) cu același $\sigma$, SE este de 0,43 pp

# Erori standard pentru VaR și ES (2/2): ES

- **ES** Chen (2008): funcția de influență (*influence function*) $\mathrm{IF}(x) = \mathrm{VaR}_\alpha + (x - \mathrm{VaR}_\alpha)_+/\alpha - \mathrm{ES}_\alpha$, nemărginită în $x$
  - $\mathrm{IF}(x)$: efectul unei observații suplimentare $x$ asupra estimării
  - IF crește nelimitat cu $x$, deci o singură pierdere extremă poate deplasa ES oricît de mult
- Eroarea standard
  - Dacă $\mathbb{E}[L^2] < \infty$: $\mathrm{SE}(\widehat{\mathrm{ES}}_\alpha) \approx \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{\mathrm{Var}((L - \mathrm{VaR}_\alpha)_+)}{n}}$, unde Var este dispersia
  - Estimarea VaR nu adaugă niciun termen de ordinul întîi (Rockafellar–Uryasev)
  - Pentru cozi de tip Pareto cu indicele cozii (*tail index*) $a > 2$, eroarea **relativă** scade ca $1/\sqrt{n\alpha}$: numărul de observații din coadă determină precizia Yamai & Yoshiba (2005), Pele & Mazurencu-Marinescu-Pele (2026)
- Cu gruparea volatilității (*volatility clustering*)
  - Înlocuim dispersiile cu dispersiile de termen lung HAC (consistente la heteroscedasticitate și autocorelare) Newey & West (1987) ale lui $1\{L_t > \mathrm{VaR}_\alpha\}$ și $(L_t - \mathrm{VaR}_\alpha)_+$
  - Sau folosim un bootstrap pe blocuri, care reeșantionează blocuri de zile consecutive (derivările: ▸ Anexă)

# Precizia pentru S&P 500 (1/2)




MFM_ch7_precision ▶ Interactiv

# Precizia pentru S&P 500 (2/2)

- Intervale de 95% (bare), cu estimările marcate prin liniuțe negre
- Tabelul complet: Anexă
  - calculul bootstrap: Seminarul 7, B2
- Pe selecția completă, gruparea volatilității lărgește intervalul ES
  - de la 0,60 pp (i.i.d.) la 1,00 pp (HAC)
- Bootstrap-ul arată același efect: 0,62 pp i.i.d., față de 1,17 pp pe blocuri
- Pe ultimele 500 de zile, ES 2,5% se sprijină pe doar $n\alpha = 12{,}5$ pierderi
  - intervalul HAC are lățimea de 2,55 pp
- Aceste intervale privesc VaR și ES **necondiționate**
- Riscul de mîine este o întrebare condiționată (secțiunea următoare)
- Intervalul HAC pentru ES cere moment de ordin doi finit al excesului peste VaR, $\mathbb{E}[(L-v)_+^2] < \infty$ (indicele cozii peste 2, estimat în Capitolul 1), plus staționaritate și dependență slabă
  - inferența GARCH-QML (*GARCH Quasi-Maximum Likelihood*, estimarea GARCH prin cvasi-verosimilitate maximă) are alte condiții: moment de ordin patru finit al inovațiilor standardizate $z_t$
- Tipul de dovadă: descriere

MFM_ch7_precision

## Verificare rapidă: cîte zile sînt necesare pentru un VaR precis?

- Pierderi zilnice i.i.d. Normale, cu media 0 și $\sigma = 1\%$; nivelul $\alpha = 5\%$
  - deci $\mathrm{VaR}_{5\%} = 1{,}645\%$
  - densitatea în acest punct este $f(\mathrm{VaR}_{5\%}) = \varphi(1{,}645)/\sigma = 0{,}1031$
  - (a) Cu $n = 1\,000$ de zile, care este SE a $\mathrm{VaR}_{5\%}$ istoric și jumătatea lățimii intervalului de 95%?
  - (b) Cîte zile înjumătățesc această SE?
  - (c) Cu $n = 1\,000$, din cîte pierderi este media $\mathrm{ES}_{1\%}$ istoric și de ce este acesta un semnal de alarmă?
- Răspunsurile sînt în ▸ Anexă

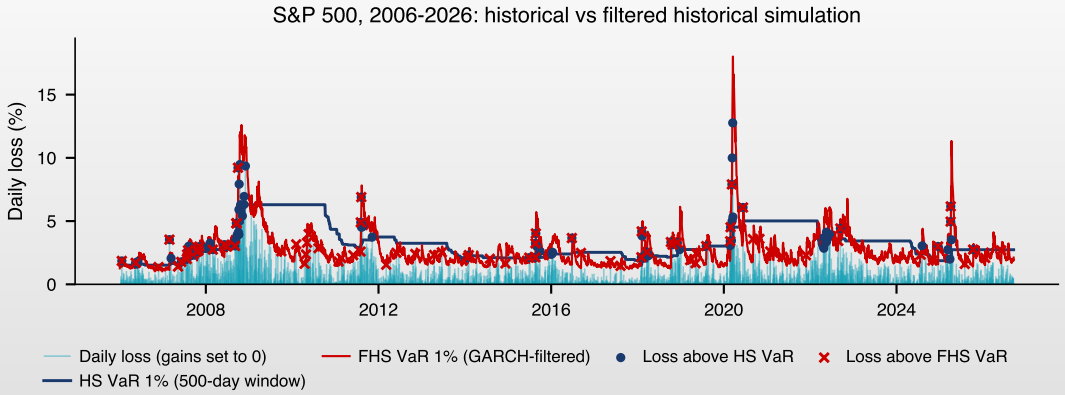
# Simularea istorică filtrată (1/2): modelul

- Întrebarea secțiunii: cum adaptăm VaR și ES la volatilitatea de azi, nu la media ultimilor ani?
- Ideea Barone-Adesi, Giannopoulos & Vosper (1999), Hull & White (1998)
  - distribuția empirică furnizează **forma** șocurilor, iar modelul GARCH **scala** curentă
  - GARCH: generalised autoregressive conditional heteroskedasticity, heteroscedasticitate condiționată autoregresivă generalizată
  - $r_t = \mu_t + \sigma_t z_t$, $\mu_t = c + \phi r_{t-1}$, $\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 (r_{t-1} - \mu_{t-1})^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$ (Capitolul 5, Bollerslev (1986); $\alpha_1$ este un coeficient GARCH, nu nivelul $\alpha$)
- Notațiile
  - $\mu_t$: media condiționată, un AR(1) (model autoregresiv de ordinul 1) în randamentul anterior, cu constanta $c$ și coeficientul $\phi$
  - $\sigma_t$: volatilitatea condiționată
  - $z_t$: șoc i.i.d. cu media 0 și dispersia 1, cu distribuție nespecificată
  - $\omega > 0$: constanta
  - $\alpha_1 \geq 0$: reacția la pătratul surprizei de ieri
  - $\beta_1 \geq 0$: ponderea dispersiei de ieri
  - $\alpha_1 + \beta_1$: persistența
  - $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ asigură o dispersie necondiționată finită (aproape de 1: șocurile se sting lent)

## Simularea istorică filtrată (2/2): trei pași

- Pasul 1: estimăm modelul AR(1)-GARCH(1,1) prin cvasi-verosimilitate maximă
  - verosimilitate Normală, robustă la alte distribuții ale șocurilor
- Pasul 2: reziduuri standardizate $\hat{z}_t = (r_t - \hat{\mu}_t)/\hat{\sigma}_t$
  - aproximativ i.i.d., dar tot cu cozi grele
- Pasul 3: rescalăm cu volatilitatea de mîine
  - $\mathrm{VaR}_{\alpha,t+1} = -\hat{\mu}_{t+1} + \hat{\sigma}_{t+1}\,\hat{\xi}_\alpha$, $\hat{\xi}_\alpha = -q_\alpha(\hat{z})$; $\quad \mathrm{ES}_{\alpha,t+1} = -\hat{\mu}_{t+1} - \hat{\sigma}_{t+1}\,\bar{z}_\alpha$
  - $\hat{\mu}_{t+1}$, $\hat{\sigma}_{t+1}$: prognozele modelului pentru mîine
  - $\hat{\xi}_\alpha$: cuantila empirică de ordin $\alpha$ a reziduurilor, cu semn schimbat (nu forma $\xi$ din EVT)
  - $\bar{z}_\alpha$: media celei mai mici fracțiuni $\alpha$ a reziduurilor $\hat{z}_t$, cu ponderea fracționară de la simularea istorică

# Simularea istorică și simularea istorică filtrată: S&P 500 (1/2)




MFM_ch7_hs_fhs_sp500 ▶ Interactiv

# Simularea istorică și simularea istorică filtrată: S&P 500 (2/2)

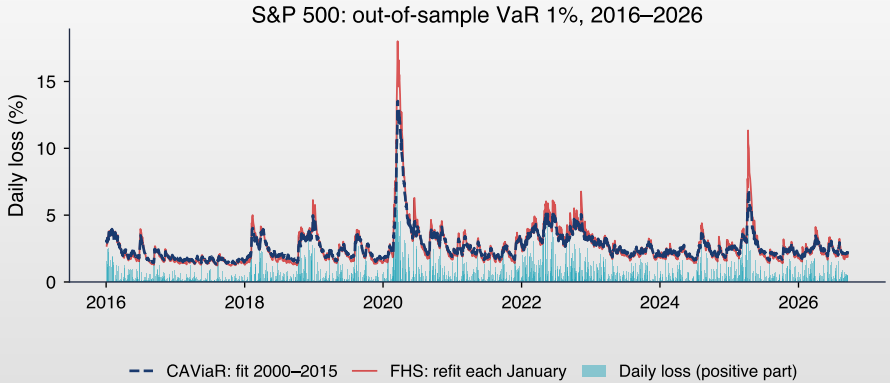
- Linii: $\mathrm{VaR}_{1\%}$ prognozat pentru ziua următoare; bare: pierderea zilnică
  - albastru închis pentru simularea istorică pe 500 de zile, roșu pentru FHS
- Puncte: pierderile peste VaR
  - albastre: peste VaR istoric; cruciulițe roșii: peste VaR FHS
- GARCH re-estimat în fiecare ianuarie pe toate datele anterioare
  - deci fiecare prognoză folosește doar informația disponibilă la momentul ei
- Proporția zilelor cu pierdere peste VaR 1% în 2006–2026 (5 210 zile, cu ținta de 1%)
  - 1,67% pentru simularea istorică pe 500 de zile, 1,54% pentru FHS
  - 2,34% pentru GARCH cu șocuri Normale
- Depășirile VaR istoric apar în **grupuri** (2008, 2020)
  - fereastra reacționează cu luni de întîrziere
- VaR FHS distribuie depășirile mai uniform în timp
  - a atins 18,01% pe 2020-03-18, la două zile după cea mai mare pierdere (teste în Capitolul 8)
- Tipul de dovadă: comparație între proceduri

MFM_ch7_hs_fhs_sp500

## Modelarea directă a cuantilei: CAViaR

- CAViaR Engle & Manganelli (2004): cuantila urmează propria recursie
  - CAViaR: Conditional Autoregressive Value at Risk, valoarea la risc condițională autoregresivă
- Specificația SAV:
  - $\mathrm{VaR}_t = \beta_0 + \beta_1 \mathrm{VaR}_{t-1} + \beta_2 |r_{t-1}|, \quad q_t = -\mathrm{VaR}_t$
  - SAV (symmetric absolute value, valoarea absolută simetrică): $\beta_1 \in (0,1)$ este persistența, iar $\beta_2 > 0$ reacția la randamentul absolut de ieri
  - O mișcare mare, în orice sens, crește VaR
  - $q_t$: cuantila randamentului
- **Regresie cuantilă** Koenker & Bassett (1978): minimizăm pierderea pinball
  - fără ipoteze asupra distribuției șocurilor
  - $\hat{\beta} = \arg\min_\beta \sum_t (\alpha - 1\{r_t < q_t(\beta)\})(r_t - q_t(\beta))$
  - $q_t(\beta)$: traiectoria cuantilei dată de $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)$
  - Elicitabilitatea este folosită direct în estimare (setările optimizării în Anexă)
- S&P 500, $\alpha = 1\%$, estimat pe 2000–2015 (4 024 de zile): $\hat{\beta}_0 = 0{,}090$, $\hat{\beta}_1 = 0{,}897$, $\hat{\beta}_2 = 0{,}246$
  - Timpul de înjumătățire al unui șoc asupra VaR: $\ln 0{,}5 / \ln \hat{\beta}_1 = 6{,}4$ zile
- CAViaR reacționează liniar la $|r_{t-1}|$, GARCH la $r_{t-1}^2$

# CAViaR față de simularea istorică filtrată în afara eșantionului (1/2)



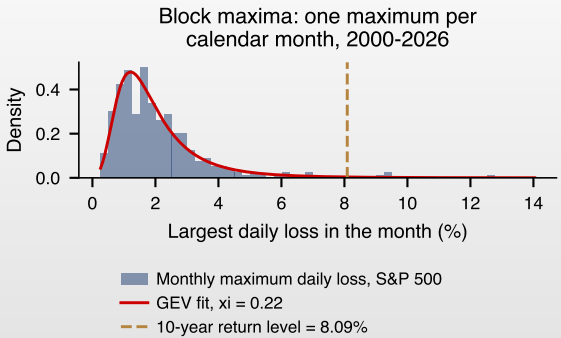

MFM_ch7_caviar ▶ Interactiv

# CAViaR față de simularea istorică filtrată în afara eșantionului (2/2)

- Linia întreruptă albastră: CAViaR; linia roșie: FHS
  - barele: pierderea zilnică (partea pozitivă)
  - simularea istorică nu este desenată, doar raportată
- S&P 500, 2016–2026 (2 693 de zile, în afara eșantionului de estimare, *out-of-sample*): CAViaR cu parametrii fixați pe 2000–2015
- FHS re-estimat în fiecare ianuarie (o schemă diferită de re-estimare)
- Rata depășirilor VaR 1%
  - 1,30% (35 de zile) pentru CAViaR, 1,30% (35) pentru FHS
  - 1,41% (38) pentru simularea istorică pe 500 de zile
- Pierderea pinball medie, în aceeași ordine: 0,039, 0,037 și 0,052
  - o valoare mai mică este preferabilă
- Criza COVID-19, 20 februarie – 30 aprilie 2020 (50 de zile), pentru CAViaR, FHS și simularea istorică:
  - numărul de depășiri: 6, 3 și 9
  - VaR maxim: 13,5%, 18,0% și 4,5%
- După un crah, VaR FHS crește cel mai mult
- Numărul de depășiri nu este suficient pentru a ierarhiza modelele
  - semnificația se testează în Capitolul 8
- Tipul de dovadă: comparație între proceduri

MFM_ch7_caviar

# Maximele lunare ale pierderilor S&P 500




- Întrebarea: cît de mare este pierderea zilnică pe care S&P 500 o depășește o dată la zece ani?
- Histograma: cea mai mare pierdere zilnică din fiecare lună (321 de luni, 2000–2026)
  - curba roșie: GEV (*Generalised Extreme Value*, distribuția generalizată a valorilor extreme) estimată prin verosimilitate maximă
- Estimări: $\hat{\xi} = 0{,}22$ (tip Fréchet, deci o coadă de tip putere), $\hat{\mu} = 1{,}37$, $\hat{\sigma} = 0{,}79$
- Nivelul de revenire, depășit în medie o dată în perioada dată: 8,09% la 10 ani (linia întreruptă), 10,95% la 30 de ani
- Cel mai mare maxim lunar observat: 12,77%
- Maximele lunare nu dau direct un VaR zilnic
  - conversia presupune zile independente, ipoteză încălcată de gruparea volatilității (▸ Anexă)
- O singură valoare pe lună irosește informație
  - metoda următoare folosește toate pierderile mari

MFM_ch7_gev ▸ Interactiv

# Maxime pe blocuri și distribuția GEV (1/2)

- Împărțim selecția în blocuri de $n$ zile
- Păstrăm maximul fiecărui bloc $M_n = \max(L_1, \ldots, L_n)$
  - Teorema Fisher–Tippett–Gnedenko Fisher & Tippett (1928), Gnedenko (1943): dacă $(M_n - b_n)/a_n$ are o limită nedegenerată pentru pierderi i.i.d., aceasta este distribuția generalizată a valorilor extreme (GEV, generalised extreme value)
  - $a_n > 0$, $b_n$: constante de normalizare, care rescalează și recentrează maximul
- Funcția de repartiție GEV a maximului unui bloc
  - $H_\xi(x) = \exp\left\{-\left(1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}\right\}$, $1 + \xi(x-\mu)/\sigma > 0$ ($\xi = 0$: $\exp\{-e^{-(x-\mu)/\sigma}\}$)
  - $\mu$: poziția
  - $\sigma > 0$: scala
  - $\xi$: forma (tipul cozii, pe slide-ul GEV (2/2); simbolurile refolosite: ▸ Anexă)

# Maxime pe blocuri și distribuția GEV (2/2)

- **Forma** $\xi$ determină tipul cozii
  - $\xi > 0$: Fréchet, coadă de tip putere cu indicele cozii $1/\xi$ (randamentele financiare)
  - $\xi = 0$: domeniul Gumbel, excesele normalizate au limită exponențială (de ex. distribuția Normală, distribuția lognormală)
  - în domeniul Gumbel, coada lognormalei este totuși mai grea decît orice coadă exponențială
  - $\xi < 0$: Weibull, coadă mărginită
- **Nivelul de revenire** pentru $k$ blocuri: depășit în medie o dată la $k$ blocuri
  - $x_k = H_\xi^{-1}(1 - 1/k) = \mu + \frac{\sigma}{\xi}\left[(-\ln(1 - 1/k))^{-\xi} - 1\right]$
  - 10 ani: $k = 120$ de luni
- **Mărimea blocului**: o lună (circa 21 de zile de tranzacționare) este un compromis Embrechts, Klüppelberg & Mikosch (1997), Longin (2000)
  - blocuri mai lungi apropie maximul de limita GEV, dar lasă mai puține maxime

# Depășiri de prag și distribuția GPD (1/2)

- Fixăm un prag ridicat $u$
- Modelăm **excesele** $Y = L - u$, condiționat de $L > u$
  - Teorema Pickands–Balkema–de Haan Pickands (1975), Balkema & de Haan (1974): pentru o clasă largă de distribuții, cînd $u$ se apropie de capătul drept al distribuției, excesele urmează o distribuție Pareto generalizată
- Funcția de repartiție GPD a excesului
  - $G_{\xi,\beta}(y) = 1 - (1 + \xi y/\beta)^{-1/\xi}$ $(\xi \neq 0)$, $1 - e^{-y/\beta}$ $(\xi = 0)$
  - Domeniul: $y \geq 0$ și, dacă $\xi < 0$, $y < -\beta/\xi$
  - Scala $\beta > 0$: mărimea tipică a unui exces
  - Forma $\xi$: aceeași ca la GEV, iar $\xi > 0$ înseamnă coadă grea

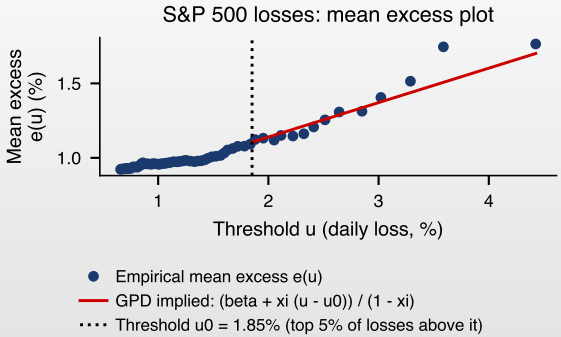
# Depășiri de prag și distribuția GPD (2/2)

- Estimatorul cozii cu $N_u$ depășiri din $n$ observații McNeil, Frey & Embrechts (2015)
  - $\widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha = u + \frac{\hat\beta}{\hat\xi}\left[\left(\frac{n}{N_u}\,\alpha\right)^{-\hat\xi} - 1\right], \qquad \widehat{\mathrm{ES}}_\alpha = \frac{\widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha}{1-\hat\xi} + \frac{\hat\beta - \hat\xi u}{1-\hat\xi}$ ($\alpha < N_u/n$, $\hat\xi \neq 0$, iar ES cere $\hat\xi < 1$)
  - În cuvinte: VaR este pragul $u$ plus cuantila GPD a excesului care lasă probabilitatea $\alpha$ în coadă
  - $N_u/n$ este proporția zilelor peste $u$
  - ES adaugă la VaR excesul mediu de dincolo de VaR, care crește cu $\hat\xi$
  - $\hat\xi \geq 1$ înseamnă medie infinită
- Compromis deplasare–dispersie
  - un $u$ mic încalcă teorema limită
  - un $u$ mare lasă puține depășiri

## Alegerea pragului: funcția de exces mediu

- **Funcția de exces mediu**: $e(u) = \mathbb{E}[L - u \mid L > u]$
- Empiric: media exceselor peste $u$, reprezentată în funcție de $u$
- Pentru o coadă GPD, $e(u)$ este **liniară** în $u$
  - $e(u) = \dfrac{\beta + \xi(u - u_0)}{1 - \xi}$ pentru $u \geq u_0$, finită doar dacă $\xi < 1$
  - Panta $\xi/(1-\xi)$ este pozitivă pentru cozi grele și nulă pentru cozi exponențiale
  - $u_0$: cel mai mic prag peste care este valabilă GPD
  - $\beta$: scala GPD în $u_0$
- Regula practică: alegem $u$ acolo unde graficul devine aproximativ liniar
- Verificăm stabilitatea lui $\hat{\xi}$ pentru mai multe praguri
- Estimatorul Hill Hill (1975), pe cele mai mari $k+1$ pierderi (aici $k$ nu numără blocuri), $L^{(1)} \geq \cdots \geq L^{(k+1)}$
  - $\hat{\xi}^H = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \ln L^{(i)} - \ln L^{(k+1)}$
  - indicele cozii este $1/\hat{\xi}^H$ (Capitolul 1)

# Graficul excesului mediu: S&P 500



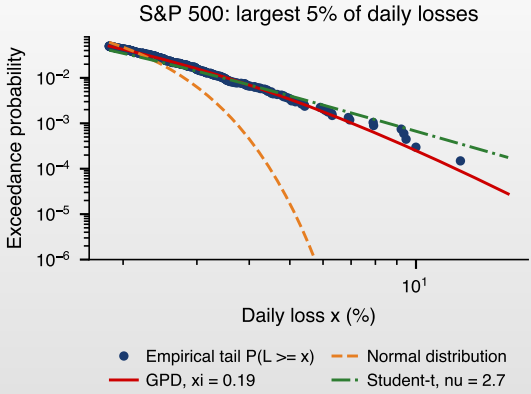

- Pragurile sînt depășite de 20% pînă la 0,5% dintre pierderile zilnice
- Linia roșie: GPD estimată pe cele mai mari 5%
- Excesul mediu crește cu $u$: compatibil cu o coadă GPD cu $\xi > 0$
  - nu linia orizontală a unei cozi exponențiale
  - de verificat prin stabilitatea parametrilor și alte diagnostice
- Pragul $u_0 = 1{,}85\%$ este cuantila 95% a pierderilor
  - lasă $N_u = 336$ depășiri
  - deasupra lui, graficul este aproximativ liniar
- Excesul mediu empiric în jurul lui $u_0$ este 1,09%
  - GPD estimată prin verosimilitate maximă: $\hat{\beta}/(1-\hat{\xi}) = 1{,}11\%$
- Panta GPD: $\hat{\xi}/(1-\hat{\xi}) = 0{,}23$
- Dincolo de VaR 1% punctele au o dispersie mare: fiecare este media a foarte puține pierderi

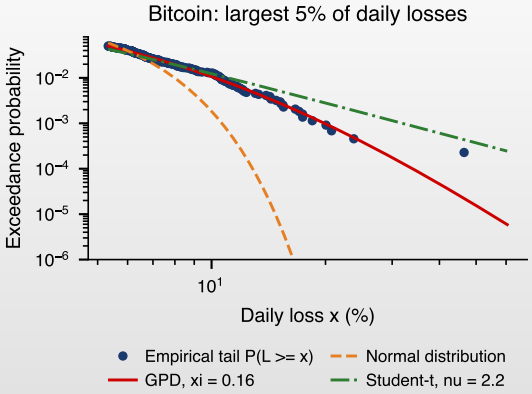
MFM_ch7_mean_excess ▶ Interactiv



▸ Aprofundări: estimatorul GPD, pas cu pas

# Cozi GPD: S&P 500 și Bitcoin (1/2)




MFM_ch7_gpd_tail ▶ Interactiv

# Cozi GPD: S&P 500 și Bitcoin (2/2)

- Scală log–log: probabilitatea unei pierderi zilnice peste $x$, pentru cele mai mari 5% dintre pierderi
- Coada Normală cade mult sub date
- Coada Student-$t$ ($\nu = 2{,}7$) urmează GPD în interiorul datelor
  - dincolo de date este mai grea: indicele cozii 2,7 față de 5,3
- S&P 500: $\hat{\xi} = 0{,}19$ (SE 0,065), deci indicele cozii este 5,3
- Bitcoin: $\hat{\xi} = 0{,}16$ (SE 0,078) și $\mathrm{VaR}_{1\%} = 10{,}23\%$ (toate cele cinci serii: Anexă)
- $\mathrm{SE}(\hat{\xi}) = (1 + \hat{\xi})/\sqrt{N_u}$ presupune depășiri independente
- Gruparea depășirilor în timp o subestimează (Aprofundări)
- Tipul de dovadă: descriere

MFM_ch7_gpd_tail

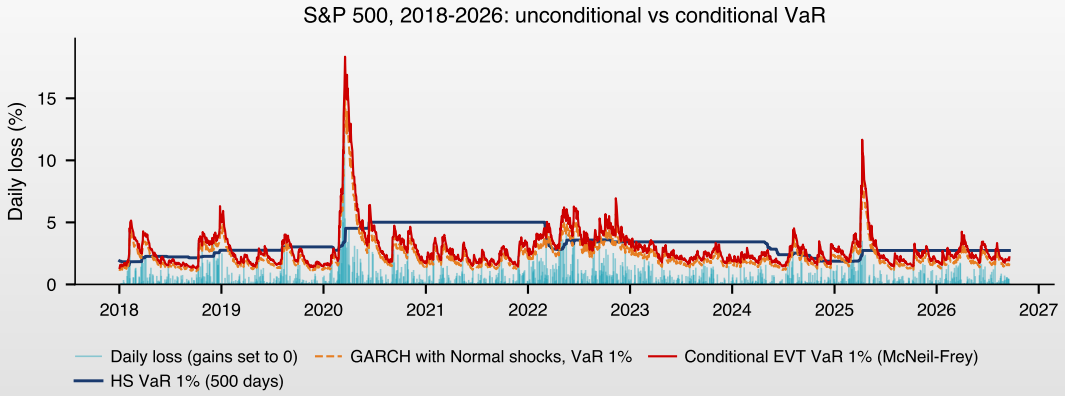
# EVT condiționată (McNeil și Frey)

- McNeil & Frey (2000): aceiași pași ca la FHS, cu un singur pas schimbat
- Filtrul: AR(1)-GARCH(1,1) prin cvasi-verosimilitate maximă, reziduuri $\hat{z}_t$, prognoze $\hat{\mu}_{t+1}$, $\hat{\sigma}_{t+1}$
- **Pasul cozii**: o GPD în locul cuantilei empirice $-q_\alpha(\hat{z})$
  - GPD estimată pe cele mai mari 10% valori ale lui $-\hat{z}$ (pragul $u_z$, $N_z$ depășiri din $n$ reziduuri)
  - Formulele de depășire a pragului (POT, peaks over threshold), aplicate reziduurilor:

$$\hat{z}_\alpha^{GPD} = u_z + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}}\left[\left(\frac{n}{N_z}\alpha\right)^{-\hat{\xi}} - 1\right], \qquad \hat{e}_\alpha^{GPD} = \frac{\hat{z}_\alpha^{GPD} + \hat{\beta} - \hat{\xi}u_z}{1-\hat{\xi}}$$

  - $\mathrm{VaR}_{\alpha,t+1} = -\hat{\mu}_{t+1} + \hat{\sigma}_{t+1}\hat{z}_\alpha^{GPD}$, $\qquad \mathrm{ES}_{\alpha,t+1} = -\hat{\mu}_{t+1} + \hat{\sigma}_{t+1}\hat{e}_\alpha^{GPD}$
- Pragul de 10% urmează McNeil & Frey (2000) ($N_z = 100$ depășiri din 1 000 de reziduuri)
  - reziduurile filtrate au cozi mai subțiri și extreme negrupate, deci pragul poate coborî
- O coadă parametrică netedă, extrapolată dincolo de date
  - avantajul apare mai ales în extremitatea cozii (VaR 0,5%, VaR 0,1%), unde există doar cîteva reziduuri
- S&P 500, prima zi de tranzacționare de după 18 septembrie 2026
  - VaR 1% = 2,03% cu EVT condiționată, față de 1,97% cu FHS
  - intervalul bootstrap FHS de 90%, [1,90; 2,09]%, include valoarea EVT condiționată

# EVT condiționată pentru S&P 500 (1/2)




MFM_ch7_cond_evt ▶ Interactiv

# EVT condiționată pentru S&P 500 (2/2)

- $\mathrm{VaR}_{1\%}$ prognozat pentru ziua următoare, 2018–2026, cu parametrii re-estimați în fiecare ianuarie
- Rata depășirilor (2 190 de zile, cu ținta de 1%)
  - 1,23% pentru EVT condiționată, 2,42% pentru GARCH cu șocuri Normale
  - 1,60% pentru simularea istorică pe 500 de zile
- GARCH cu șocuri Normale urmărește corect creșterile și scăderile riscului
  - dar VaR-ul lui este prea mic
- EVT condiționată păstrează dinamica și corectează nivelul
  - contează coada șocurilor, nu doar scala lor
- Tipul de dovadă: comparație între proceduri
  - doar ratele depășirilor; testele sînt în Capitolul 8

MFM_ch7_cond_evt

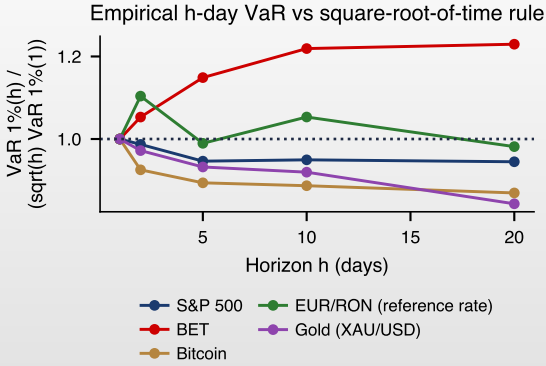
## Regula rădăcinii pătrate a timpului: ipoteze

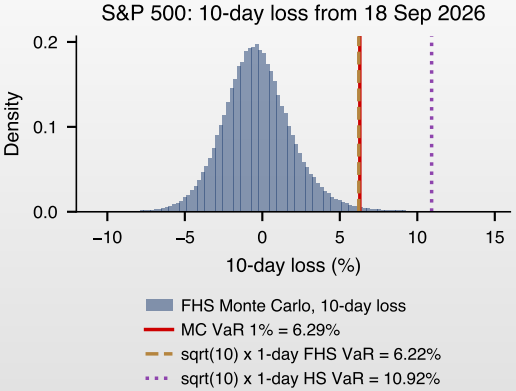
- Întrebarea: cînd putem obține riscul pe $h$ zile înmulțind riscul pe o zi cu $\sqrt{h}$?
- Pierderi zilnice i.i.d. $N(0, \sigma^2)$: $\mathrm{VaR}_\alpha^{(h)} = \sqrt{h}\,\mathrm{VaR}_\alpha^{(1)}$, $\mathrm{ES}_\alpha^{(h)} = \sqrt{h}\,\mathrm{ES}_\alpha^{(1)}$
  - $\mathrm{VaR}_\alpha^{(h)}$, $\mathrm{ES}_\alpha^{(h)}$: măsurile pentru pierderea însumată pe $h$ zile
  - Abaterea standard a unei sume de $h$ termeni i.i.d. crește ca $\sqrt{h}$
  - Regula cere medie zero, fără autocorelație, volatilitate constantă și șocuri Normale
- Basel 1996 a permis $\sqrt{10} = 3{,}162$ Basel Committee (1996)
- Fiecare ipoteză este încălcată de date
  - Capitolele 1, 2, 5
  - slide-ul următor arată în ce direcție greșește regula

## Cînd greșește regula $\sqrt{h}$

- **Autocorelația**: $\mathrm{Var}(r_{t+1} + \cdots + r_{t+h}) = h\sigma^2\,\mathrm{VR}(h)$
  - raportul variațelor (*variance ratio*) $\mathrm{VR}(h) = 1$ fără autocorelație (Capitolul 2)
  - $\mathrm{VR}(h) > 1$ (autocorelație pozitivă): $\sqrt{h}$ **subestimează** dispersia pe $h$ zile
  - VaR și ES urmează dispersia doar într-o familie locație-scală, de ex. distribuția Normală
- **Gruparea volatilității**: volatilitatea revine la medie pe $h$ zile
  - Volatilitate scăzută azi: dispersia pe $h$ zile depășește $h\,\sigma^2_{t+1}$, deci $\sqrt{h}$ tinde să dea un risc prea mic
  - Volatilitate ridicată azi: $\sqrt{h}$ tinde să dea un risc prea mare
  - Pentru cuantilă, direcția se verifică prin Monte Carlo filtrat, cu traiectorii simulate din modelul GARCH (slide-urile următoare)
- **Cozi grele**: pentru șocuri i.i.d., $\sqrt{h}$ poate **supraestima** cuantila extremă Daníelsson (2011)
  - indicele cozii $a > 2$: $P(L > x)$ scade ca $x^{-a}$ (variație regulată)
  - cu $h$ fix și $\alpha \to 0$, cuantila sumei crește ca $h^{1/a} < \sqrt{h}$
  - la nivelurile finite din curs (1%, 2,5%) este o aproximație, nu o regulă
- Cu salturi, regula poate evalua foarte greșit riscul pe mai multe zile Daníelsson & Zigrand (2006)

# Regula rădăcinii pătrate în date (1/2)




MFM_ch7_horizon ▶ Interactiv

# Regula rădăcinii pătrate în date (2/2)

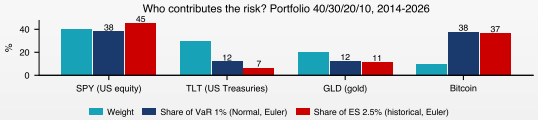
- Stînga: $\mathrm{VaR}_{1\%}$ empiric al pierderilor suprapuse pe $h$ zile, împărțit la $\sqrt{h}$ ori valoarea pe o zi
  - sume suprapuse: mult mai puține observații independente
- Dreapta: Monte Carlo filtrat (MC în legendă), 200 000 de traiectorii
- La $h = 10$, în panoul din stînga, $\sqrt{h}$ este prea mic pentru BET și EUR/RON
  - raportul este 1,22 pentru BET (autocorelația de ordin 1: 0,109)
  - raportul este 1,05 pentru EUR/RON
- Raportul este 0,95 pentru S&P 500, 0,92 pentru aur și 0,89 pentru Bitcoin
  - aici regula este conservatoare
- $\mathrm{VaR}_{1\%}$ pe 10 zile pentru S&P 500
  - 6,29% prin Monte Carlo filtrat
  - 6,22% ca $\sqrt{10}\times$ VaR filtrat pe o zi și 10,92% ca $\sqrt{10}\times$ VaR istoric pe o zi
- Diferența mare față de 10,92% vine din trecerea de la VaR necondiționat (istoric) la VaR condiționat (filtrat)
- Tipul de dovadă: descriere

MFM_ch7_horizon

## Verificare rapidă: de la o zi la zece zile

- Un birou de tranzacționare raportează $\mathrm{VaR}_{1\%} = 2\%$ pe o zi, din pierderi i.i.d. Normale cu media 0
  - (a) Cît este $\mathrm{VaR}_{1\%}$ pe 10 zile după regula rădăcinii pătrate a timpului?
  - (b) Randamentele se dovedesc pozitiv autocorelate, cu $\mathrm{VR}(10) = 1{,}21$, și rămîn Normale. Cît este acum $\mathrm{VaR}_{1\%}$ pe 10 zile?
  - (c) Fără autocorelație, dar volatilitatea GARCH de azi este mult sub nivelul ei de termen lung. Este $\sqrt{10}\times$ VaR condiționat pe o zi prea mic sau prea mare și de ce?
- Răspunsurile sînt în Anexă

# Contribuțiile activelor la risc




- Întrebarea: cît scade riscul prin diversificare și ce activ produce riscul rămas?
- Ponderi: SPY 40%, TLT 30%, GLD 20%, Bitcoin 10%, cu rebalansare zilnică
  - SPY: ETF pe S&P 500 (ETF: exchange-traded fund, fond tranzacționat la bursă)
  - TLT: ETF pe obligațiuni de stat americane pe termen lung; GLD: ETF pe aur
- Randamente simple în 3 017 zile comune, 2014–2026
  - turcoaz: ponderile; albastru, roșu: cotele din $\mathrm{VaR}_{\mathbf{1\%}}$ Normal și din $\mathrm{ES}_{\mathbf{2,5\%}}$ istoric (contribuțiile Euler, slide-urile următoare)
- $\mathrm{VaR}_{\mathbf{1\%}}$-ul portofoliului: 1,77%, față de 3,11% nediversificat ($-43\%$)
- $\mathrm{ES}_{\mathbf{2,5\%}}$-ul portofoliului: 2,16%, față de 3,88% nediversificat ($-44\%$)
- Bitcoin: 10% din capitalul investit, 37,8% din VaR și 36,6% din ES
- TLT: 30% din capital, doar 6,6% din ES
  - a pierdut în medie 0,47% în cele mai rele 2,5% dintre zilele portofoliului
- Tipul de dovadă: descriere

# VaR de portofoliu și alocarea Euler (1/2)

- Cadrul: pierderea portofoliului $L_p = -w^\top R$
  - $w$: vectorul ponderilor
  - $R$: vectorul randamentelor simple, cu matricea de covarianță $\Sigma$
  - $\sigma_i$: abaterea standard a activului $i$
- Randamente cu distribuție Normală, neglijînd media
  - VaR este un multiplu al abaterii standard a portofoliului
  - $\mathrm{VaR}_\alpha(L_p) = z_{1-\alpha}\sigma_p, \quad \sigma_p = \sqrt{w^\top \Sigma w}$; $z_{1-\alpha} = -z_\alpha > 0$
  - Pentru ponderi nenegative $w \geq 0$, VaR nediversificat $\sum_i z_{1-\alpha} w_i \sigma_i$ (suma VaR-urilor individuale) este mai mare, cu excepția corelațiilor egale cu 1

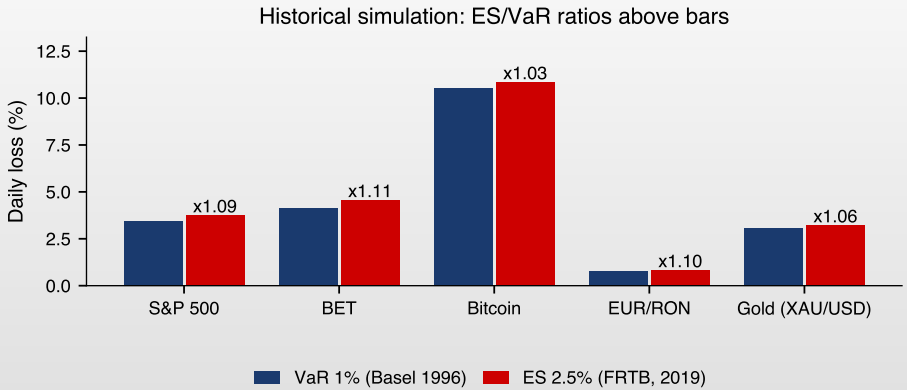
# VaR de portofoliu și alocarea Euler (2/2)

- **VaR marginal**: variația VaR-ului portofoliului la o creștere marginală a ponderii $w_i$
  - $\partial \mathrm{VaR}_\alpha / \partial w_i = z_{1-\alpha} (\Sigma w)_i / \sigma_p$; $(\Sigma w)_i$: covarianța activului $i$ cu portofoliul
- **VaR pe componente** $C_i = w_i \, \partial \mathrm{VaR}_\alpha / \partial w_i$: partea din VaR atribuită activului $i$
  - Teorema lui Euler pentru o funcție omogenă de grad 1: $\sum_i w_i \, \partial \rho / \partial w_i = \rho$, deci componentele se adună, $\sum_i C_i = \mathrm{VaR}_\alpha$ Tasche (2008)
- ES, fără ipoteză de distribuție (pierderi continue)
  - pierderea medie a activului $i$ în zilele din coada portofoliului
  - $C_i^{ES} = \mathbb{E}[-w_i R_i \mid L_p \geq \mathrm{VaR}_\alpha(L_p)]$, $\sum_i C_i^{ES} = \mathrm{ES}_\alpha(L_p)$, estimată istoric ca media ponderată fracționar pe zilele din coadă (ponderile ES istoric)
  - Un $C_i$ negativ înseamnă că activul **acoperă** riscul portofoliului
- De ce Euler Tasche (2008)
  - omogenitatea de grad 1 face ca suma contribuțiilor să fie riscul total, dar și alte reguli de alocare au această proprietate
  - Euler este caracterizată de compatibilitatea cu RORAC (*return on risk-adjusted capital*, randamentul capitalului ajustat la risc), pentru $\rho$ diferențiabilă
  - adică arată corect unde o pondere mai mare îmbunătățește randamentul pe unitatea de risc

## VaR ajustat la lichiditate

- Întrebarea: cît adaugă la VaR costul de a vinde poziția într-o piață agitată?
- VaR presupune vînzarea la prețul mediu (*mid*) $=$ (bid $+$ ask)$/2$, dintre prețul oferit (*bid*) și cel cerut (*ask*)
  - o vînzare imediată se face la bid și costă jumătate din **spread-ul relativ** $S = (\text{ask} - \text{bid})/\text{mid}$
- Spread-ul se lărgește tocmai în perioadele de scădere a pieței
- Bangia, Diebold, Schuermann & Stroughair (2001): LVaR (*Liquidity-adjusted Value-at-Risk*), $\mathrm{LVaR}_\alpha = \mathrm{VaR}_\alpha + \frac{1}{2}(\mu_S + k\,\sigma_S)$
  - $\mu_S$, $\sigma_S$: media și abaterea standard a lui $S$ (aici $S$ este spread-ul, nu asimetria)
  - $k$: numărul de abateri standard care duc spread-ul la nivelul lui de stres (nu $k$ din EVT)
- Banca Transilvania, poziție de 1 milion de lei (RON)
  - VaR 1% istoric pe o zi, pe ultimele 496 de zile, este 3,16%
- Cu valorile presupuse $\mu_S = 0{,}5\%$, $\sigma_S = 0{,}3\%$ și $k = 3$: $\mathrm{LVaR} = 3{,}86\%$ $(+22\%)$
  - În bani: VaR $\approx 31\,581$ RON, costul spread-ului $\frac{1}{2}(0{,}5 + 3 \times 0{,}3)\% = 0{,}70\% \to 7\,000$ RON, LVaR $\approx 38\,581$ RON
- Pozițiile mari mișcă și prețul (lichiditate endogenă)
  - de aceea FRTB tratează lichiditatea prin orizonturi de lichiditate de pînă la 120 de zile

# VaR 1% față de ES 2,5% pe cinci active (1/2)




MFM_ch7_basel ▶ Interactiv

# VaR 1% față de ES 2,5% pe cinci active (2/2)

- Simulare istorică, pierderi zilnice, selecțiile complete
- Numărul de deasupra fiecărei perechi: $\mathrm{ES}_{\mathbf{2,5\%}}/\mathrm{VaR}_{\mathbf{1\%}}$
- Reperul Normal: raportul 2,338/2,326 $\approx$ 1,005, deci același capital pentru cozi subțiri
- Student-$t$: raportul este 1,01 la $\nu = 30$ și 1,07 la $\nu = 4$
- Raportul în date
  - 1,09 pentru S&P 500, 1,11 pentru BET, 1,03 pentru Bitcoin
  - 1,10 pentru EUR/RON și 1,06 pentru aur
- Trecerea de la VaR 1% la ES 2,5% crește măsura pe o zi cu 3–11%
- ES 2,5% nu depășește neapărat VaR 1%
  - inegalitatea $\mathrm{ES}_\alpha \geq \mathrm{VaR}_\alpha$ este garantată doar la același nivel $\alpha$
- Calibrarea pe perioada de stres și orizonturile de lichiditate au un efect mai mare
  - Seminarul 7, C2
- Tipul de dovadă: descriere

MFM_ch7_basel

# De la Basel 1996 la FRTB (2019)

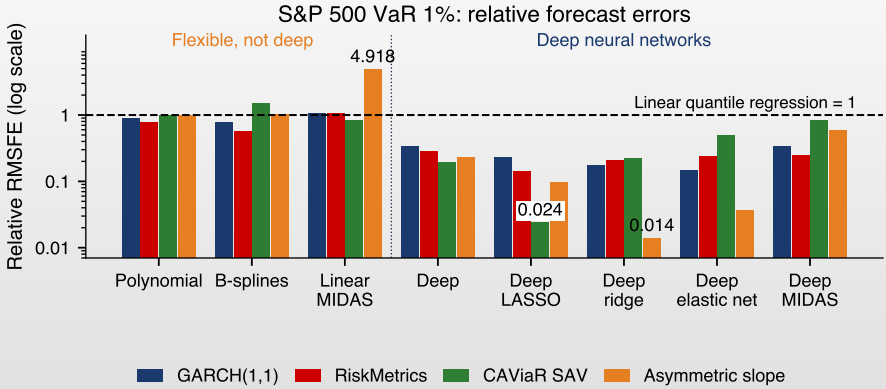
| | Basel 1996 Basel Committee (1996) | FRTB 2019 Basel Committee (2019) |
|---|---|---|
| Măsura de risc | VaR 1%, calculat zilnic | ES 2,5%, calculat zilnic pentru fiecare birou de tranzacționare |
| Orizontul | 10 zile, cu scalarea prin $\sqrt{10}$ permisă | bază de 10 zile, scalată prin orizonturi de lichiditate (acțiuni cu capitalizare mare 10, mică 20, spread-uri de credit pînă la 120 de zile) |
| Datele | cel puțin un an de istorie | calibrat pe cea mai severă perioadă de stres de 12 luni |
| Capitalul | max(VaR de ieri, multiplicator $\geq 3 \times$ media VaR pe 60 de zile), iar multiplicatorul crește cu 0–1 după rezultate slabe la backtesting (zonele semafor, Capitolul 8) | multiplicator $m_c = 1{,}5$, crescut după rezultate slabe la backtesting |
| Backtesting | excepțiile VaR 1% (Capitolul 8) | VaR 1% și VaR 2,5% pe o zi: VaR se testează, ES stabilește capitalul |

- Critica de după 2008
  - VaR ignoră mărimea pierderilor din coadă
  - ferestrele de un an exclud crizele mai vechi

# Studiu de caz (1/3): poate o rețea neuronală adîncă îmbunătăți prognoza VaR?

- **Întrebarea** Chronopoulos, Raftapostolos & Kapetanios (2024) (*Journal of Financial Econometrics*)
  - Poate o rețea neuronală adîncă să îmbunătățească prognoza VaR învățînd o relație **neliniară, cu formă necunoscută**, între cuantila condiționată și predictori?
- Date (Secțiunea 3 a articolului): randamentele log zilnice ale S&P 500
  - septembrie 1985 – august 2020
- Niveluri: $\alpha = 1\%, 5\%, 10\%$
- Predictorii $x_t$: volatilitatea GARCH sau RiskMetrics, variabilele de stare CAViaR
- Ultimele 2 000 de zile formează eșantionul de evaluare, în afara eșantionului de estimare
  - cu o singură fereastră fixă de calibrare (detaliile: ▸ Anexă)
- Reperul: regresia cuantilă liniară Koenker & Bassett (1978) pe aceiași predictori
  - adică o specificație liniară de tip CAViaR

# Studiu de caz (2/3): erorile relative, $\alpha = 1\%$




MFM_ch7_crk_table6 ▶ Interactiv

# Studiu de caz (3/3): ce arată și ce nu arată rezultatele

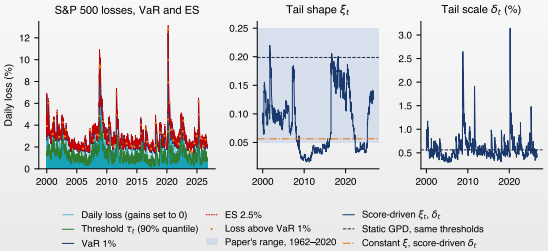
- Chronopoulos, Raftapostolos & Kapetanios (2024), Tabelul 6: RMSFE (*Root Mean Squared Forecast Error*, rădăcina erorii pătratice medii de prognoză) relativ la regresia cuantilă liniară, pe scară logaritmică
  - linia întreruptă marchează 1
- Modelele flexibile fără rețele: 7 din 12 bare sînt la 1 sau peste
  - polinomial, B-spline, MIDAS liniar
  - MIDAS: mixed data sampling, regresie cu date de frecvențe diferite
- Toate cele 16 bare ale rețelelor adînci și cele 4 ale MIDAS adînc sînt sub 1
  - între 0,014 și 0,850
- Toate sînt semnificative în testul DM (testul Diebold–Mariano de comparare a prognozelor), cu excepția MIDAS adînc pentru SAV
- Atenție: RMSFE este minimizată de **media** condiționată, nu de cuantilă
- Precizia cuantilelor cere pierderea pinball
- Rămîne de văzut dacă reducerea maximă, de 98%, se păstrează la reestimarea pe o fereastră mobilă (*rolling window*)
  - reducerea a fost obținută cu o singură fereastră fixă de calibrare (Seminarul 7, C3)
- Tipul de dovadă: comparație între proceduri
  - rezultatele nu separă contribuțiile arhitecturii, penalizării și validării încrucișate (CV)

MFM_ch7_crk_table6

# Al doilea studiu de caz (1/4): se schimbă forma cozii în timp?

- D'Innocenzo, Lucas, Schwaab & Zhang (2024), *Journal of Business & Economic Statistics*: forma și scala cozii pierderilor variază de la o zi la alta
  - pragul $\tau_t$: cuantila de 90% a pierderii, dinamică, ca în Patton, Ziegel & Chen (2019)
  - excesele peste prag urmează o GPD cu forma $\xi_t$ și scala $\delta_t$
  - $\xi_t$ și $\delta_t$ se actualizează după fiecare exces cu scorul, derivata log-verosimilității: un model **condus de scor** (*score-driven*)
- De ce contează: EVT condiționată McNeil & Frey (2000) ține $\xi$ fix
  - o coadă GPD condiționată cu $\xi_t = 0{,}25$ are momente finite ale excesului doar pentru ordine $p < 1/\xi_t = 4$
  - momentul de ordin patru al excesului este infinit (în coada modelată, nu neapărat în distribuția necondiționată)
  - un $\xi_t$ mai mare crește ES mai mult decît VaR
- Afirmațiile lucrării, pe S&P 500 (iul. 1962 – dec. 2020, 14 726 de zile, 1 495 de excese)
  - $\xi_t$ variază între circa 0,05 și 0,25
  - crahurile izolate (Black Monday 1987, crahul fulger (*flash crash*) din 2010) cresc mai ales $\xi_t$
  - crizele lungi (2008–2009, COVID-19 în 2020) cresc mai ales $\delta_t$
  - 1,0% din pierderi depășesc VaR 1% filtrat

# Al doilea studiu de caz (2/4): forma și scala cozii S&P 500, 2000–2026




- Traiectorii filtrate retrospectiv, cu parametri și cuantilă de pornire estimate pe toată selecția; recursia pentru $\tau_t$, $\xi_t$, $\delta_t$, VaR și ES este cauzală condiționat de aceștia
- Stînga: VaR 1% atinge maximul de 12,4% pe 17 mart. 2020
- Mijloc: $\xi_t$ între 0,016 (17 mart. 2011) și 0,22 (18 sept. 2001)
  - banda: intervalul raportat în lucrare
  - linia portocalie: $\xi = 0{,}056$, cînd doar $\delta_t$ este dinamic
- Dreapta: $\delta_t$ între 0,30% și 3,15% (17 mart. 2020)
- Liniile întrerupte: GPD statică pe aceleași praguri ($\hat{\xi} = 0{,}20$)

MFM_ch7_tailshape ▶ Interactiv

# Al doilea studiu de caz (3/4): modelul și replicarea pe datele cursului

- Pragul: $\tau_{t+\mathbf{1}} = (1 - b_\tau)\,\hat{q}_{\mathbf{0,9}} + a_\tau\,(1\{L_t > \tau_t\} - 0{,}1) + b_\tau\,\tau_t$
  - $\hat{q}_{\mathbf{0,9}}$: cuantila de 90% a pierderilor; $a_\tau$, $b_\tau$ minimizează pierderea pinball la 90%
- Excesul $x_t = L_t - \tau_t > 0$ urmează o GPD$(\xi_t, \delta_t)$, cu $f_t = (\ln \xi_t, \ln \delta_t)'$
  - $f_{t+\mathbf{1}} = \omega + A\,s_t + B\,f_t$, cu $A = \mathrm{diag}(a_\xi, a_\delta)$ și $B = \mathrm{diag}(b_\xi, b_\delta)$
  - $s_t$: scorul scalat cu informația Fisher; $s_t = 0$ în zilele fără exces
- VaR și ES la nivelul $\alpha$: $\mathrm{VaR}_t = \tau_t + \dfrac{\delta_t}{\xi_t}\left[\left(\dfrac{\alpha}{p_t}\right)^{-\xi_t} - 1\right]$, $\mathrm{ES}_t = \dfrac{\mathrm{VaR}_t + \delta_t - \xi_t \tau_t}{1 - \xi_t}$
  - $p_t$: proporția zilelor cu exces pînă la $t - 1$
- Replicarea: aceeași specificație, pe datele cursului (2000–2026, 6 717 zile, 680 de excese) în locul CRSP (Center for Research in Security Prices), 1962–2020
  - stările sînt trunchiate numeric: $\ln \xi_t \in [-6; 1{,}5]$ și $\ln \delta_t \in [-6; 4]$
  - comparația prin AIC (criteriul informațional Akaike) cu o GPD statică și cu $\xi$ constant și $\delta_t$ dinamic, pe aceleași praguri
- Aceeași estimare doar pe 2000–2015 (404 excese) eșuează numeric: stările ating limitele
  - $\xi_t$ stă la limita inferioară $e^{-\mathbf{6}} = 0{,}0025$ în 3 939 din 4 024 de zile
  - $\xi_t$ stă la limita superioară $e^{\mathbf{1{,}5}} = 4{,}48$ în 5 zile, în care ES este infinit
  - cu limita inferioară mutată la $e^{-\mathbf{12}}$, optimul o urmează, iar log-verosimilitatea rămîne practic aceeași
  - limita exponențială ($\xi = 0$, $\delta_t$ dinamic): AIC 454, față de 458 cu $\xi_t$ dinamic și 515 pentru GPD statică

# Al doilea studiu de caz (4/4): scala cozii variază clar, forma doar slab

| Mărimea | Lucrarea, 1962–2020 | Datele cursului, 2000–2026 |
|---|---|---|
| $a_\xi$; $b_\xi$ (forma) | 0,025; 0,9993 | 0,130; 0,9975 |
| $a_\delta$; $b_\delta$ (scala) | 0,112; 0,995 | 0,160; 0,986 |
| $a_\tau$; $b_\tau$ (pragul) | 0,241; 0,989 | 0,365; 0,985 |
| Pierderi peste VaR 1% | 1,0% | 0,91% (61 de zile) |
| Pierderea medie peste VaR 1%; ES 1% mediu pe toate zilele | 3,54%; 3,12% | 4,02%; 3,65% |

- AIC, mai mic este mai bine: 774 cu $\xi_t$ și $\delta_t$ dinamice, 772 cu $\xi$ constant, 853 pentru GPD statică
- Dinamica formei adaugă doar 1,04 la log-verosimilitate, pentru doi parametri în plus
- Crahuri izolate: $\xi_t$ crește mai mult decît $\delta_t$ după 11 sept. 2001 ($+113\%$ față de $+91\%$) și după Brexit ($+189\%$ față de $+114\%$), dar nu după flash crash ($-12\%$ față de $+18\%$)
- Crize lungi: sept. 2008 – mart. 2009, $\xi_t$ $-58\%$ și $\delta_t$ $+113\%$; febr. – apr. 2020, $\xi_t$ $+60\%$ și $\delta_t$ $+136\%$
- În cele 163 de zile peste VaR 2,5%, ES 2,5% prognozat este în medie 3,18%, iar pierderea medie 3,18%
- În cele 61 de zile peste VaR 1%, ES 1% prognozat este în medie 4,05%, iar pierderea medie 4,02%
- Tipul de dovadă: descriere în eșantion (*in-sample*; parametrii folosesc toată selecția)
  - limita: fără comparație în afara eșantionului pe 2016–2026, deoarece estimarea pe 2000–2015 eșuează numeric (GPD statică: $\hat{\xi} = 0{,}12$)
  - apropierea de $\xi = 0$ nu împiedică în sine prognoza: limita exponențială este o alternativă de testat

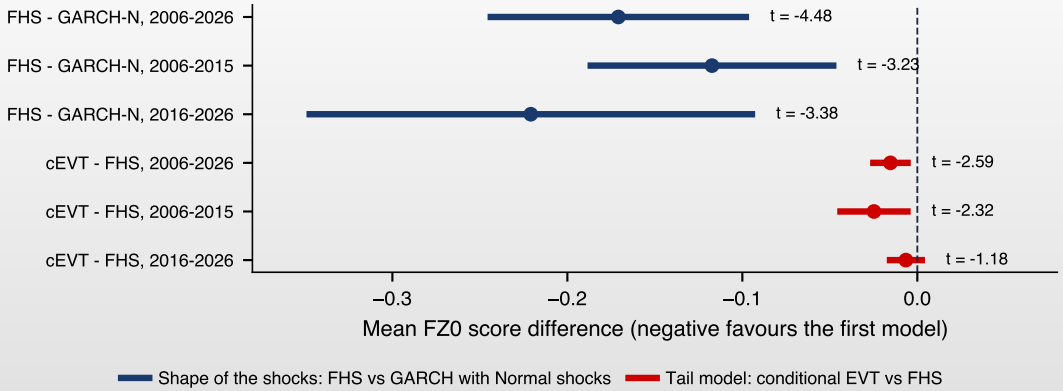
# Pot datele zilnice ordona modelele (VaR, ES)? (1/2): scorul și testul

- Dificultăți pentru (VaR 1%, ES 1%) Fissler & Ziegel (2016), Nolde & Ziegel (2017), Patton, Ziegel & Chen (2019), Bayer & Dimitriadis (2022), Pele & Mazurencu-Marinescu-Pele (2026)
  - ES singur nu este elicitabil
  - toate zilele intră în scorul FZ0, dar observațiile extreme sînt rare și influențează mult precizia comparației
- Scorul FZ0: o penalizare comună pentru o prognoză (VaR, ES), dat fiind randamentul realizat
- O valoare mai mică este mai bună Patton, Ziegel & Chen (2019)
  - $S(v, e; Y) = -\frac{1}{\alpha e} 1\{Y \le v\}(v - Y) + \frac{v}{e} + \ln(-e) - 1$
  - $Y$: randamentul realizat
  - $v_t = -\mathrm{VaR}_{\alpha,t}$ și $e_t = -\mathrm{ES}_{\alpha,t}$: cuantila și media cozii prognozate, ambele negative
  - Primul termen penalizează randamentele sub $v$
- Testul: $d_t = S_t^A - S_t^B$, diferența zilnică dintre scorurile modelelor A și B
  - $H_0$: $\mathbb{E}[d_t] = 0$ (precizie egală) față de $H_1$: $\mathbb{E}[d_t] \neq 0$
  - Statistica Diebold–Mariano $t = \bar{d}/\widehat{\mathrm{SE}}_{\mathrm{HAC}}(\bar{d})$, cu $\bar{d}$ media lui $d_t$, este aproximativ $N(0,1)$ sub $H_0$
  - Dacă $t < -1{,}96$, modelul A este semnificativ mai bun la 5%
  - Raportăm intervalul pentru $\mathbb{E}[d_t]$ separat pe subperioadele fixate înainte de analiză (2006–2015, 2016–2026)

# Pot datele zilnice ordona modelele (VaR, ES)? (2/2): ce verifică cercetătorul

- Un asistent AI poate schița harta literaturii, codul și un raport de referent
- Cercetătorul verifică
  - Semnul și nivelul: VaR 1% $= -q_{1\%}$, pozitiv pentru o pierdere (recalculăm FZ0 pentru o zi, pas cu pas)
  - Fără deplasarea de anticipare (*look-ahead bias*), adică informație din viitor: fiecare prognoză folosește doar date de dinaintea zilei ei
  - Scorul: doar scoruri comune (VaR, ES), niciodată MSE (eroarea pătratică medie) pentru ES singur Gneiting (2011)
  - Puterea testului: numărăm zilele din coadă pe care se bazează comparația
  - Fiecare DOI (Digital Object Identifier, identificatorul digital al articolului) este verificat (prompturile reutilizabile: ▸ Anexă)

# Mini-studiu de caz: ordonarea modelelor ES (1/2)




MFM_ch7_ai_discovery_case ▶ Interactiv

# Mini-studiu de caz: ordonarea modelelor ES (2/2)

- Afirmația testată: „EVT condiționată este cel mai bun model (VaR 1%, ES 1%) pentru S&P 500”
- Replicăm întîi rata de depășire FHS: 1,54% (80 din 5 210 zile, 2006–2026)
- Scorul FZ0 mediu: 1,267 pentru EVT condiționată, 1,282 pentru FHS și 1,453 pentru GARCH–Normal
- Barele: intervale HAC de 95% pentru $\mathbb{E}[d_t]$
  - în grafic, cEVT = EVT condiționată, iar GARCH-N = GARCH cu șocuri Normale
- Statisticile $t$ Diebold–Mariano:
  - o valoare negativă înseamnă că primul model are scorul mai bun; valoarea critică la 5% este $-1{,}96$
  - FHS față de GARCH–Normal: 2006–2026 $t = -4{,}48$; 2006–2015 $t = -3{,}23$; 2016–2026 $t = -3{,}38$
  - EVT condiționată față de FHS: 2006–2026 $t = -2{,}59$; 2006–2015 $t = -2{,}32$; 2016–2026 $t = -1{,}18$
- Regula de decizie: un cîștig este considerat demonstrat doar dacă este semnificativ la 5%
  - semnificativ în **ambele** subperioade fixate înainte de analiză (pre-înregistrate)
- Statistica $t$ pe întreaga perioadă este raportată, dar nu este decisivă
- Forma șocurilor contează, iar rezultatul este robust
  - șocurile Normale pierd în ambele jumătăți ale perioadei
- Cîștigul EVT față de FHS este de zece ori mai mic
  - semnificativ în 2006–2015, dar nu și în 2016–2026 ($[-0{,}017; 0{,}004]$)
  - după regula de mai sus, cîștigul nu este demonstrat, dar nici echivalența celor două modele nu este dovedită
- Tipul de dovadă: comparație între proceduri

MFM_ch7_ai_discovery_case

## Punct de plecare pentru proiectul de echipă

- Întrebarea: bate un model semiparametric dinamic (VaR, ES) Patton, Ziegel & Chen (2019) FHS și EVT condiționată?
  - prognoze în afara eșantionului, la ES 2,5%
  - Piețe: S&P 500, BET și Bitcoin
  - Modelul testat: modelul GAS (*generalised autoregressive score*, scor autoregresiv generalizat) cu un factor din Patton, Ziegel & Chen (2019) (Secțiunea 2.3 a articolului), estimat prin minimizarea pierderii FZ0
  - Statut: o extindere opțională, pentru aprofundare
  - Lista proiectelor de echipă din seminar: Seminarul 7, C2 și C3
- Replicăm întîi: VaR 1% FHS pentru S&P 500 de 1,97% și ordonarea FZ0 din mini-studiul de caz
- Livrabile
  - O pre-înregistrare de o pagină: modele, niveluri, scoruri, subperioade, putere (zile din coadă) și ce ar infirma afirmația
  - Codul, pe datele zilnice de piață ale cursului (punct de plecare: Quantlet)
  - Un tabel cu toate comparațiile și valorile p (*p-values*) ajustate
  - O autocritică în stilul unui referent
- Notăm prompturile și rezultatele acceptate în `AI_USE.md`
- Notăm fiecare eroare prinsă în `AI_ERRORS.md`
  - semn inversat, etichetă greșită a nivelului, deplasare de anticipare, DOI inventat

# Alegerea metodei

| Situația | Metoda | Eșuează cînd |
|---|---|---|
| Verificare rapidă, istorie lungă și stabilă | Simulare istorică, 500–1 000 de zile | volatilitatea se schimbă, iar estimarea nu poate depăși cea mai mare pierdere observată |
| Riscul zilnic după un șoc de volatilitate | FHS sau EVT condiționată, cu interval bootstrap | modelul GARCH este greșit specificat |
| VaR 0,5% și mai adînc, teste de stres | Depășiri de prag (GPD), condiționate sau nu | prag ales greșit sau depășiri grupate |
| Orizont de mai multe zile, opțiuni | Monte Carlo filtrat | domină riscul de model |
| Bugetarea riscului pe birouri sau active | Contribuții Euler la ES | fiecare contribuție se bazează pe puține zile din coadă |
| Capitalul reglementat | ES 2,5%, 10 zile, perioadă de stres, backtesting pe VaR | fereastra de stres este scurtă și zgomotoasă |

- Orice VaR sau ES este o estimare
  - îl raportăm cu numărul de observații din coadă și un interval

# Întrebări recapitulative și legătura cu Capitolul 8

## Întrebări de verificare

- De ce poate VaR recompensa concentrarea?
- De ce nu o poate recompensa ES?
- De ce depinde precizia ES de $n\alpha$ și nu de $n$?
- Cînd este scalarea cu $\sqrt{10}$ prea mică?
- Cînd este prea mare?

## Capitolul 8: backtesting

- Cît de des au depășit pierderile VaR?
- Au fost depășirile independente?
- Testele de acoperire și zonele de tip semafor din Basel
- Compararea prognozelor (VaR, ES) cu scoruri comune Fissler & Ziegel (2016)

Lecturi suplimentare: Franke, Härdle & Hafner (2019), Härdle, Chen & Overbeck (2017), Čížek, Härdle & Weron (2011), McNeil, Frey & Embrechts (2015)
Lucrări conexe, entropia și riscul de piață: Pele, Lazar & Dufour (2017), Pele & Mazurencu-Marinescu-Pele (2019), Pele, Lazar & Mazurencu-Marinescu-Pele (2019)

# Decizia practică

- **Ce aleg**
  - pentru VaR 1% și ES 1% de mîine: FHS, ca reper comparativ; S&P 500 după 18 septembrie 2026: VaR 1% $= 1{,}97\%$ (interval de 90%: $[1{,}90;\, 2{,}09]\%$), ES 1% $= 2{,}56\%$
  - avantajul FHS la scorul FZ0 față de GARCH cu șocuri Normale este relativ și nu validează acoperirea nominală (rata de depășire de 1%)
  - EVT condiționată la 1%: scor FZ0 mai bun decît FHS pe 2006–2026 ($t = -2{,}59$), dar nu în 2016–2026 ($t = -1{,}18$)
  - VaR 0,5% și VaR 0,1%: evaluare separată; rezultatele de la 1% nu arată superioritatea EVT la aceste niveluri
  - pentru ES 2,5% pe o fereastră istorică: estimarea fracționară cu interval HAC; S&P 500: 3,76%, SE HAC 0,26 pp pe 6 717 zile
- **În ce condiții**
  - diagnosticele nu indică dependență reziduală importantă la pragurile și lagurile examinate: indicele extremal este 0,99 după filtrare, față de 0,19 înainte
  - destule zile în coadă: pe 500 de zile, ES 2,5% se sprijină pe $n\alpha = 12{,}5$ pierderi, iar intervalul HAC are 2,55 pp
  - intervalul HAC pentru ES cere moment de ordin doi finit al excesului peste VaR, $\mathbb{E}[(L - v)_+^{\mathbf{2}}] < \infty$ (indicele cozii peste 2, estimat în Capitolul 1), plus staționaritate și dependență slabă
  - scalarea cu $\sqrt{10}$: lipsa autocorelației nu ajunge, contează și volatilitatea de azi și cozile; pentru BET raportul empiric este 1,22
- **Ce rezultat m-ar face să renunț**
  - acoperirea respinsă de testul Kupiec din Capitolul 8: aici deja 1,54%, 80 de depășiri în 5 210 zile față de 52,1 așteptate ($LR_{uc} = 12{,}97$, $p = 0{,}0003$), deci FHS rămîne doar reper comparativ
  - depășiri FHS grupate în testele de independență
  - o jumătate pre-înregistrată în care FHS nu mai bate GARCH cu șocuri Normale pe scorul FZ0 (aici $t = -3{,}23$ și $t = -3{,}38$)

## Distribuția Student-$t$ estimată pe S&P 500, pas cu pas

- Estimările de verosimilitate maximă pe randamentele zilnice în %: $\hat{m} = 0{,}068$, $\hat{s} = 0{,}702$, $\hat{\nu} = 2{,}666$
  - Abaterea standard implicată $\hat{s}\sqrt{\hat{\nu}/(\hat{\nu}-2)} = 1{,}40\%$, nu $\hat{\sigma} = 1{,}21\%$ din selecție
  - În formule intră scala $\hat{s}$, nu $\hat{\sigma}$
- **VaR**: cuantila $t_{1\%} = t_{\hat{\nu}}^{-1}(0{,}01) = -5{,}028$
  - $\mathrm{VaR}_{1\%} = -(\hat{m} + \hat{s}\, t_{1\%}) = -0{,}068 + 0{,}702 \times 5{,}028 \approx 3{,}46\%$
- **ES**: densitatea $g_{\hat{\nu}}(t_{1\%}) = 0{,}00490$, deci $g_{\hat{\nu}}(t_{1\%})/\alpha = 0{,}490$
- Factorul cozii: $(\hat{\nu} + t_{1\%}^2)/(\hat{\nu} - 1) = 16{,}77$
  - $\mathrm{ES}_{1\%} = -\hat{m} + \hat{s}\,\dfrac{g_{\hat{\nu}}(t_{1\%})}{\alpha}\,\dfrac{\hat{\nu} + t_{1\%}^2}{\hat{\nu} - 1} = -0{,}068 + 0{,}702 \times 0{,}490 \times 16{,}77 \approx 5{,}71\%$
- De ce ES este prea mare: cu $\hat{\nu}$ aproape de 2, factorul cozii este mare
  - ES este 5,71% față de 5,03% istoric, deși VaR se potrivește

MFM_ch7_methods_assets

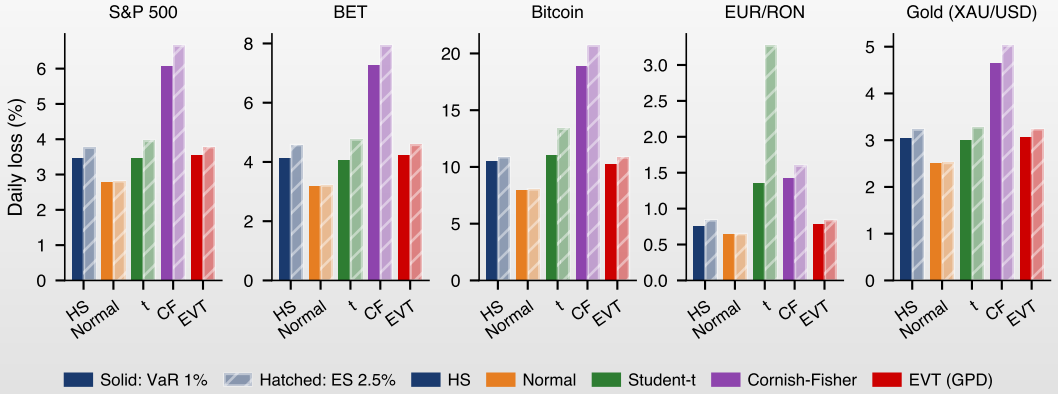
## Cum comparăm corect formele cozilor?

- Pentru a izola forma cozii, comparăm modelele la aceeași medie și aceeași abatere standard (Seminarul 7, A2)
- Exemplu: medie zero, abatere standard 2% și $\nu = 4$
  - scala Student-$t$ este $s = 2\sqrt{(4-2)/4} = 1{,}414\%$, iar scala Normală este 2%
- Cu $s = 2\%$ în ambele modele, abaterea standard Student-$t$ ar fi mai mare
  - diferența ar amesteca efectul scalei cu cel al formei cozii
- Estimate separat pe aceleași date, cele două modele au scale diferite
  - diferențele din secțiunea „Metode de estimare" amestecă cele două efecte

# ES ca problemă de optimizare: Rockafellar–Uryasev

- **Teoremă** Rockafellar & Uryasev (2000): pentru orice pierdere integrabilă $L$
  - $\mathrm{ES}_\alpha(L) = \min_{v\in\mathbb{R}} F(v), \quad F(v) = v + \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}[(L-v)_+], \quad (x)_+ = \max(x, 0)$
  - $v$: un prag candidat
  - $F(v)$: pragul plus depășirea medie a pierderii peste prag, mărită cu factorul $1/\alpha$
  - Punctul de minim este $\mathrm{VaR}_\alpha(L)$, iar valoarea minimă este $\mathrm{ES}_\alpha(L)$
  - $F(\mathrm{VaR}_\alpha)$ este formula ES discretă de pe slide-ul celor două obligațiuni
- $F$ este convexă în $v$ și, pentru pierderea unui portofoliu $-w^\top R$, convexă simultan în $(w, v)$
  - $w$: vectorul ponderilor
  - $R$: vectorul randamentelor activelor
  - Convexitatea, împreună cu omogenitatea pozitivă, dă subaditivitatea: $\mathrm{ES}_\alpha(L_1 + L_2) = 2\,\mathrm{ES}_\alpha(\frac{1}{2}L_1 + \frac{1}{2}L_2) \le \mathrm{ES}_\alpha(L_1) + \mathrm{ES}_\alpha(L_2)$ (demonstrația în Anexă)
  - Cu scenarii istorice, minimizarea ES devine o problemă de programare liniară (secțiunea „VaR de portofoliu și contribuțiile la risc")
- Pierderile S&P 500, $\alpha = 2{,}5\%$: punctul de minim este $\arg\min F = 2{,}51\%$, iar valoarea minimă $\min F = 3{,}76\%$
  - $\min F$ este exact ES 2,5% istoric
  - $\arg\min F$ coincide cu VaR 2,5% istoric doar după rotunjire: punctul de minim empiric este o statistică de ordine

# Metodele comparate pe cinci active (1/2)




MFM_ch7_methods_assets

# Metodele comparate pe cinci active (2/2)

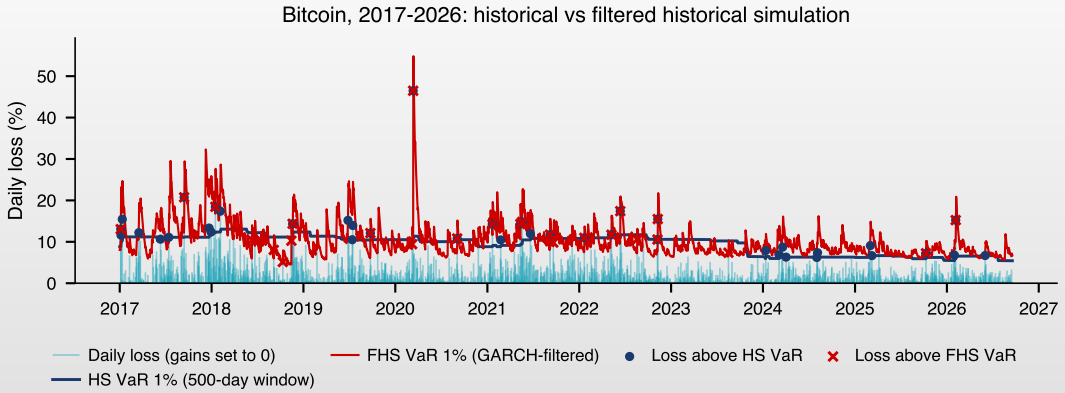
- Barele pline arată $\mathrm{VaR}_{1\%}$, iar cele haşurate $\mathrm{ES}_{2{,}5\%}$
- Pierderi zilnice în %, pe selecțiile complete (toate cifrele în Anexă)
- Etichetele barelor: CF = Cornish–Fisher, $t$ = Student-$t$
  - XAU/USD (XAU: codul ISO 4217 al aurului): prețul aurului în dolari americani pe uncie troy
- Distribuția Normală dă un VaR prea mic peste tot
  - pentru Bitcoin, $\mathrm{VaR}_{1\%}$ este 7,99%, față de 10,51% istoric
- Cornish–Fisher supraestimează VaR: excesul de kurtosis depășește 7 în toate seriile
  - pentru BET, 7,25% față de 4,13% istoric
- Student-$t$ eșuează pentru EUR/RON: $\hat{\nu} = 1{,}25$ (dispersie infinită)
  - ES 2,5% nerealist de 3,27%, față de 0,84% istoric
  - Numeroasele variații aproape nule ale cursului de referință împing $\hat{\nu}$ în jos
- EVT rămîne apropiată de simularea istorică pentru VaR 1% în toate cele cinci serii

MFM_ch7_methods_assets

# Bootstrap și HAC: cum se construiesc intervalele

- **Bootstrap** (i.i.d.): extragem cu revenire $n$ pierderi din selecție și recalculăm $\widehat{\mathrm{VaR}}$ sau $\widehat{\mathrm{ES}}$
  - Repetăm de $B = 2\,000$ de ori
  - Intervalul de 95% merge de la cuantila de 2,5% la cea de 97,5% a celor $B$ valori recalculate
- **Bootstrap pe blocuri suprapuse**: blocuri de 20 de zile consecutive în locul zilelor izolate
  - alăturăm $n/20$ astfel de blocuri
  - Perioadele calme și cele agitate rămîn întregi în interiorul fiecărui bloc, deci fiecare reeșantionare păstrează gruparea volatilității
- **Dispersia de termen lung HAC** a unei serii $y_t$: $\hat{\gamma}_0 + 2\sum_{j=1}^{m}\left(1 - \frac{j}{m+1}\right)\hat{\gamma}_j$
  - aici $y_t$ este $1\{L_t > \mathrm{VaR}_\alpha\}$ sau $(L_t - \mathrm{VaR}_\alpha)_+$
  - $\hat{\gamma}_j$: autocovarianța de selecție a lui $y_t$ la lagul $j$, iar $\hat{\gamma}_0$ dispersia ei
  - Ponderile Bartlett $1 - j/(m+1)$ micșorează lagurile îndepărtate
  - Lagul $m = \lfloor 4(n/100)^{2/9} \rfloor$ ($m = 10$ pe selecția completă S&P 500)
  - Ea înlocuiește dispersia i.i.d. $\hat{\gamma}_0$ în formulele SE
  - Exemplu: $\hat{\gamma}_0 = 1$, $\hat{\gamma}_1 = 0{,}3$, celelalte $\hat{\gamma}_j = 0$, $m = 1$: dispersia de termen lung este $1 + 2 \times 0{,}5 \times 0{,}3 = 1{,}3$, deci SE crește de $\sqrt{1{,}3} \approx 1{,}14$ ori
- Calcul complet pentru BET: Seminarul 7, B1 (intervale i.i.d., HAC și bootstrap pe blocuri pentru VaR 1%)

# Simularea istorică și simularea istorică filtrată: Bitcoin (1/2)




MFM_ch7_hs_fhs_btc

# Simularea istorică și simularea istorică filtrată: Bitcoin (2/2)

- Aceeași construcție, cu prognoze din ianuarie 2017, 7 zile pe săptămînă
- Proporția zilelor cu pierderi peste VaR (3 548 de zile)
  - 1,16% pentru simularea istorică, 0,76% pentru FHS
  - 1,58% pentru GARCH cu șocuri Normale
- VaR filtrat a atins 54,83% în martie 2020, după crahul din 2020-03-12
  - crahul: o pierdere log de 46,47%, adică o scădere a prețului de 37,17%
- Volatilitatea a scăzut după 2022
  - estimarea pe fereastra de 500 de zile se ajustează cu mare întîrziere
- Criptoactivele ca o clasă distinctă de active: Pele et al. (2023)

MFM_ch7_hs_fhs_btc

## Exemplu numeric: prognoza pentru S&P 500 în următoarea zi de tranzacționare

- AR(1)-GARCH(1,1) pe 2000–2026: $\hat{\phi} = -0{,}053$, $\hat{\omega} = 0{,}025$, $\hat{\alpha}_1 = 0{,}1204$, $\hat{\beta}_1 = 0{,}8604$
- Persistența $\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1 = 0{,}981$
  - Prognozele pentru prima zi de tranzacționare de după 18 septembrie 2026: $\hat{\mu}_{t+1} = 0{,}056\%$, $\hat{\sigma}_{t+1} = 0{,}725\%$
  - Abaterea standard de selecție este 1,21%, deci $\hat{\sigma}_{t+1}$ indică o piață calmă
- Cuantila reziduurilor $\hat{\xi}_{1\%} = -q_{1\%}(\hat{z}) = 2{,}79$, peste $-z_{1\%} = 2{,}326$
  - șocurile filtrate păstrează cozi grele
  - $\mathrm{VaR}_{1\%,t+1} = -0{,}056 + 0{,}725 \times 2{,}791 = 1{,}97\%$
  - Pasul ES: media celui mai mic 1% dintre reziduuri, cu semn schimbat, este 3,604 (Normală: 2,665), deci $\mathrm{ES}_{1\%,t+1} = -0{,}056 + 0{,}725 \times 3{,}604 \approx 2{,}56\%$
- VaR 1% istoric necondiționat: 3,45%
- Cu GARCH cu șocuri Normale, VaR 1% pentru aceeași zi este 1,63%
  - toate cele cinci active: Anexă

# Incertitudinea prognozei VaR pentru ziua următoare

- Două intrări estimate Francq & Zakoïan (2015)
  - parametrii GARCH $\theta = (c, \phi, \omega, \alpha_1, \beta_1)$, care intră prin $\hat{\sigma}_{t+1}$
  - cuantila reziduurilor $\hat{\xi}_\alpha$
  - Bootstrap pe reziduuri Christoffersen & Gonçalves (2005): simulăm traiectorii AR(1)-GARCH(1,1) cu $\hat{z}$ reeșantionate, re-estimăm pe fiecare traiectorie și prognozăm din istoria **originală** (algoritmul în Anexă)
- S&P 500, 999 de traiectorii bootstrap: $\mathrm{VaR}_{1\%}$ FHS $= 1{,}97\%$
  - intervalul de 90%: $[1{,}90; 2{,}09]\%$
  - la 95%, fiecare coadă ar avea doar circa 25 de valori
- Prima sursă de incertitudine: $\hat{\sigma}_{t+1} = 0{,}725\%$, cu intervalul $[0{,}708; 0{,}743]\%$
- A doua sursă: $\hat{\xi}_{1\%} = 2{,}79$, cu intervalul $[2{,}68; 2{,}88]$
  - Intervalul VaR dacă variază doar cuantila: $[1{,}89; 2{,}03]$
  - Intervalul VaR dacă variază doar $\sigma_{t+1}$: $[1{,}92; 2{,}02]$
  - Cuantila reziduurilor (circa 67 de reziduuri în coadă) este deci sursa principală de incertitudine
- GARCH cu șocuri Normale (1,63%) este mult sub interval
  - alegerea modelului pentru coadă contează mai mult decît eroarea de estimare a unui model dat

# Estimatorul GPD al cozii pe S&P 500, pas cu pas

- Intrări: $n = 6\,717$ pierderi zilnice, pragul $u = 1{,}852\%$, $N_u = 336$ depășiri
  - estimări de verosimilitate maximă: $\hat{\xi} = 0{,}188$, $\hat{\beta} = 0{,}898$
- Pasul 1: $\dfrac{n}{N_u}\,\alpha = \dfrac{67{,}17}{336} = 0{,}200$, proporția depășirilor aflate dincolo de VaR 1%
- $0{,}200^{-\hat{\xi}} = 1{,}353$
- Pasul 2: $\widehat{\mathrm{VaR}}_{1\%} = u + \dfrac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}}\,(1{,}353 - 1) = 1{,}852 + 4{,}779 \times 0{,}353 \approx 3{,}54\%$
- Pasul 3: $\widehat{\mathrm{ES}}_{1\%} = \dfrac{3{,}540}{0{,}812} + \dfrac{0{,}898 - 0{,}188 \times 1{,}852}{0{,}812} = \dfrac{3{,}540 + 0{,}550}{0{,}812} \approx 5{,}04\%$
- Valorile istorice, pentru comparație: 3,45% și 5,03%
  - estimările pentru toate cele cinci serii: Anexă

MFM_ch7_gpd_tail

## Extreme grupate: indicele extremal

- Pierderi staționare cu extreme grupate: dacă $nP(L > u_n) \to \tau$, atunci $P(M_n \leq u_n) \to e^{-\theta\tau}$, $\theta \in (0, 1]$ Embrechts, Klüppelberg & Mikosch (1997)
  - $u_n$: un prag care crește cu $n$
  - $\tau$: numărul mediu de depășiri ale lui $u_n$ în $n$ zile
  - $M_n$: maximul celor $n$ pierderi
  - $\theta$: indicele extremal
  - $1/\theta$: mărimea medie a unui grup de extreme
  - Pentru maxim, $n$ zile dependente se comportă ca $n\theta$ zile independente
- S&P 500, pragul GPD ($N = 336$ depășiri): estimatorul pe intervale Ferro & Segers (2003) dă $\hat{\theta} = 0{,}19$
  - adică 62 de grupuri de cîte 5,4 depășiri în medie
  - GPD estimată pe maximele grupurilor: $\hat{\xi} = 0{,}152$ (SE 0,146), față de 0,188 (SE 0,065) pe toate depășirile
  - $\hat{\xi}$ rămîne pozitiv, dar intervalul lui de 95% include acum 0
- Pe reziduurile GARCH standardizate, $\hat{\theta} = 0{,}99$
  - după filtrare, depășirile pragului nu mai apar grupate (estimatorul și separarea grupurilor: Anexă)
  - $\hat{\theta} \approx 1$ privește gruparea extremelor, nu independența întregii serii
- De aceea, EVT condiționată estimează GPD pe reziduurile filtrate

## Monte Carlo filtrat pe $h$ zile

- Simulăm multe traiectorii viitoare din modelul estimat
  - citim VaR și ES din pierderile simulate
  - tratează deodată autocorelația, gruparea volatilității și cozile grele, precum și cîștigurile neliniare (opțiuni)
- Pentru fiecare traiectorie $j = 1, \ldots, M$ ($M$: numărul de traiectorii simulate)
  - extragem $z_{t+1}^{(j)}, \ldots, z_{t+h}^{(j)}$ cu revenire din reziduurile standardizate $\hat{z}$
  - actualizăm $\sigma^{(j)}$ și $r^{(j)}$ zi de zi cu recursia AR(1)-GARCH(1,1), pornind de la starea de azi
  - agregăm: $L^{(j)} = -\sum_{i=1}^{h} r_{t+i}^{(j)}$, pierderea pe $h$ zile a traiectoriei $j$ ($i$: ziua din traiectorie)
- $\widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha$, $\widehat{\mathrm{ES}}_\alpha$ = estimările istorice pe cele $M$ pierderi simulate
- Eroarea de simulare scade ca $1/\sqrt{M}$

# Portofoliul cu ES minim: o problemă de programare liniară

- Cu $N$ scenarii istorice $R_s$, funcția Rockafellar–Uryasev devine o problemă de **programare liniară** Rockafellar & Uryasev (2000)
  - $\min_{w,v,u}\ v + \frac{1}{\alpha N}\sum_s u_s$ cu restricțiile $u_s \geq -w^\top R_s - v$, $u_s \geq 0$, $\sum_i w_i = 1$, $w \geq 0$
  - $s = 1, \ldots, N$: scenariile
  - $u_s$: o variabilă auxiliară egală, la optim, cu excesul $(-w^\top R_s - v)_+$ al scenariului $s$ peste pragul $v$
  - $v$ optim este VaR-ul portofoliului
  - Restricții: capital investit integral ($\sum_i w_i = 1$), fără vînzări în lipsă ($w \geq 0$)
- Aceleași patru active, 3 017 zile comune, $\alpha = 2{,}5\%$
  - ponderile optime sînt 31% SPY, 44% TLT, 25% GLD și 0% Bitcoin
  - $\mathrm{ES}_{2{,}5\%} = 1{,}67\%$, față de 2,16% pentru portofoliul 40/30/20/10
- Portofoliul de dispersie minimă fără vînzări în lipsă: 35% SPY, 43% TLT, 22% GLD, 0% Bitcoin
  - $\mathrm{ES}_{2{,}5\%} = 1{,}68\%$
- Pentru aceste active cele două criterii aproape coincid
  - ele diverg pentru opțiuni și credit
- Mai multe portofolii pot atinge același minim
  - raportăm soluția împreună cu scenariile ei din coadă

## Termenii FRTB: birouri și orizonturi

- Întrebarea: cum transformă FRTB un ES zilnic într-un capital?
  - un capital care ține cont de criză și de timpul de lichidare
- **MAR**: capitolul despre riscul de piață din cadrul Basel consolidat
  - MAR12, MAR33 etc. sînt capitolele lui (MAR33: calculul cerințelor de capital în abordarea pe modele interne)
- **Trading desk** (birou de tranzacționare): un grup bine delimitat de traderi și conturi
  - cu o singură strategie de afaceri
- În FRTB, modelele interne se aprobă separat pentru fiecare birou (MAR12)
- **Abordarea bazată pe modele interne**: capitalul din propriul model ES al băncii
  - model aprobat de autoritatea de supraveghere, în locul formulelor standardizate
- **Orizontul de lichiditate** (LH): timpul necesar pentru a închide sau acoperi o poziție
  - pe o piață în criză, fără a-i mișca prețul
- Fiecare factor de risc primește 10, 20, 40, 60 sau 120 de zile (MAR33.12)

# ES FRTB: orizonturi de lichiditate și perioada de stres

- ES pe orizonturi de lichiditate, cu $T = 10$ zile (MAR33):
  $\mathrm{ES} = \sqrt{\mathrm{ES}_T(P)^2 + \sum_{j\geq 2} \left(\mathrm{ES}_T(P,j)\sqrt{(\mathrm{LH}_j - \mathrm{LH}_{j-1})/T}\right)^2}$
  - $\mathrm{ES}_T(P,j)$: ES pe 10 zile cînd se mișcă doar factorii de risc cu $\mathrm{LH} \geq \mathrm{LH}_j$, ceilalți rămînînd constanți
  - $\mathrm{LH}_1 = 10 < \mathrm{LH}_2 = 20 < \cdots < \mathrm{LH}_5 = 120$ de zile
- **Perioada de stres**: fereastra de 12 luni care dă portofoliului curent cel mai mare ES
  - căutată cel puțin pînă în 2007 (MAR33.6–33.7)
  - Calibrarea: $\mathrm{ES} = \mathrm{ES}_{R,S}\,\mathrm{ES}_{F,C}/\mathrm{ES}_{R,C}$; $R/F$: setul redus/complet de factori, $S$: perioada de stres, $C$: ultimele 12 luni
- **Multiplicatorul**: capitalul este maximul dintre ultima valoare și $m_c\times$ media pe 60 de zile
  - $m_c = 1{,}5$ plus 0–0,5 după rezultate slabe la backtesting (MAR33.41–33.42)
- **Simplificarea didactică** din Seminarul 7, C2: $m_c \times \mathrm{ES}^{(10)}_{2,5\%}\sqrt{\mathrm{LH}/10}$
  - este formula de mai sus cînd toți factorii au același LH

## Studiu de caz: cuantila condiționată ca rețea neuronală

- Modelul (Ec. 5–10): cuantila condiționată a randamentului este o rețea neuronală a predictorilor
  - $Q_{r_t}(\alpha \mid x_t) \approx G_\alpha(x_t, w)$
  - $Q_{r_t}(\alpha \mid x_t)$: cuantila de ordin $\alpha$ a lui $r_t$, dat fiind $x_t$
  - $G_\alpha$: o rețea cu propagare înainte (feed-forward), cu straturi ascunse ReLU (rectified linear unit, $\max(\cdot, 0)$)
  - $w$: ponderile rețelei
- Estimarea: $w^*$ minimizează pierderea pinball plus o penalizare a lui $w$
  - penalizarea: niciuna, LASSO ($L_1$), ridge ($L_2$) sau elastic net (ambele)
- Arhitectura nu este fixată dinainte: se alege prin validare încrucișată pentru serii de timp
  - adîncimea și lățimea (din $\{1, 5, 10\}$), rata de învățare și penalizarea (Anexă)
- Ținta: cuantila randamentului zilnic peste 10 zile (Ec. 23)
  - $\widehat{\mathrm{VaR}}_{t+10 \mid \mathcal{F}_t} = -G_\alpha(x_t, w^*)$; $\mathcal{F}_t$: informația disponibilă în ziua $t$
- Evaluarea: RMSFE (rădăcina erorii pătratice medii de prognoză) relativă la reper
- O valoare sub 1 înseamnă o eroare mai mică decît a regresiei cuantile liniare
  - Semnificația: testul Diebold–Mariano (DM) al preciziei egale a prognozelor

# Datele folosite în acest capitol

| Seria | Tip | Perioada | Zile |
|---|---|---|---|
| S&P 500 | indice bursier SUA | 2000–2026 | 6 717 |
| BET | indice bursier BVB | 2000–2026 | 6 670 |
| Bitcoin | cripto-activ, 7 zile din 7 | 2014–2026 | 4 384 |
| EUR/RON | cursul de referință BNR | 2005–2026 | 5 352 |
| Aur | USD pe uncie troy, zile lucrătoare | 2000–2026 | 6 956 |
| Portofoliu | SPY, TLT, GLD (ETF-uri) și Bitcoin | 2014–2026 | 3 017 |
| Banca Transilvania | acțiune BVB (exemplul de lichiditate) | 2024–2026 | 496 |

- Valori zilnice de închidere pînă la 18 septembrie 2026
- Randamente log zilnice în %, $r_t = 100\,(\ln P_t - \ln P_{t-1})$
- Fiecare serie are propriul calendar
- Portofoliul folosește zilele în care există toate cele patru prețuri
- ETF-uri: prețuri ajustate pentru dividende
- SPY replică S&P 500, TLT obligațiunile de stat americane pe termen lung, GLD aurul

Înapoi

# Răspunsurile la verificările rapide

**Care poziție este mai riscantă?**

- A: $\mathrm{VaR}_{\mathbf{10\%}} = q_{\mathbf{0,9}}(L_A) = 9\%$
- $\mathrm{ES}_{\mathbf{10\%}}$ = media lui $L_A$ pe $[9, 10] = 9{,}5\%$
- B: $P(L_B > 0) = 5\% \leq 10\%$, deci $\mathrm{VaR}_{\mathbf{10\%}} = 0$
- $\mathrm{ES}_{\mathbf{10\%}} = (20 \times 0{,}05 + 0 \times 0{,}05)/0{,}10 = 10\%$
- VaR consideră A mai riscantă (9 față de 0), ES consideră B mai riscantă (10 față de 9,5): VaR nu vede șansa de 5% de a pierde 20

**Cîte zile sînt necesare pentru un VaR precis?**

- (a) SE $\approx \sqrt{0{,}05 \times 0{,}95/1\,000} \,/\, 0{,}1031 = 0{,}0069/0{,}1031 \approx 0{,}067$ pp
- Jumătatea intervalului de 95%: $1{,}96 \times 0{,}067 \approx 0{,}13$ pp
- (b) SE scade ca $1/\sqrt{n}$: $4 \times 1\,000 = 4\,000$ de zile, circa 16 ani de zile de tranzacționare
- (c) $n\alpha = 10$ pierderi: o singură zi extremă modifică mult media
- Precizia depinde de $n\alpha$, nu de $n$

**De la o zi la zece zile**

- (a) $2 \times \sqrt{10} = 6{,}32\%$
- (b) $6{,}32 \times \sqrt{1{,}21} = 6{,}32 \times 1{,}1 \approx 6{,}96\%$
- (c) Probabil prea mic: volatilitatea este de așteptat să crească spre nivelul ei de termen lung în cele zece zile, deci dispersia pe zece zile crește
- Pentru VaR, direcția se confirmă prin Monte Carlo filtrat, nu doar din dispersie

înapoi

# Demonstrația reprezentării Rockafellar–Uryasev

- **Enunț**: pentru pierderi continue, $\mathrm{ES}_\alpha(L) = \min_v F(v)$ Rockafellar & Uryasev (2000)
  - $F(v) = v + \mathbb{E}[(L - v)_+]/\alpha$
  - minimul este atins în $v = \mathrm{VaR}_\alpha$
- **Demonstrație**: $F$ este convexă, cu derivata la dreapta $1 - P(L > v)/\alpha$, care este $\geq 0$ exact cînd $v \geq \mathrm{VaR}_\alpha$
- Valoarea minimului: $F(\mathrm{VaR}_\alpha) = \mathrm{VaR}_\alpha + \mathbb{E}[(L - \mathrm{VaR}_\alpha)_+]/\alpha = \mathbb{E}[L \mid L \geq \mathrm{VaR}_\alpha] = \mathrm{ES}_\alpha$
- **Corolar**: $(w, v) \mapsto v + \mathbb{E}[(-w^\top R - v)_+]/\alpha$ este convexă simultan în ambele argumente
- Minimizarea în raport cu $v$ păstrează convexitatea
  - ES este convex în $w$
  - Împreună cu omogenitatea pozitivă, aceasta demonstrează subaditivitatea

Înapoi

# Condiții de subaditivitate pentru VaR

- Pierderi cu distribuție **eliptică comună**, $\alpha < 0{,}5$: VaR este subaditiv McNeil, Frey & Embrechts (2015)
  - slide-ul „Măsuri de risc coerente (2/2)"
  - Marginalele Normale sau $t$ nu sînt suficiente prin ele însele: distribuția comună trebuie să fie eliptică
- **Cozi grele, dar nu prea grele**: VaR este subaditiv departe în coadă Daníelsson et al. (2013)
  - pentru pierderi cu variație regulată multivariată și indicele cozii peste 1
  - asimptotic, cînd $\alpha \to 0$
  - Indicii cozii estimați pentru acțiuni și cursuri de schimb sînt în acest domeniu (între 4,8 și 6,5 în secțiunea „Teoria valorilor extreme"), dar rezultatul este asimptotic, nu o garanție la un $\alpha$ dat
- Subaditivitatea nu se mai menține în trei situații
  - salturi discrete (neplăți)
  - cozi extrem de grele
  - unele cîștiguri din opțiuni
- VaR față de ES în practică: ES are nevoie de mai multe date pentru aceeași precizie Yamai & Yoshiba (2005)

Înapoi

# Agregarea VaR în condiții de incertitudine privind dependența

- Marginale $F_1, \ldots, F_d$ cunoscute, copula necunoscută: $\underline{\mathrm{VaR}}_\alpha \leq \mathrm{VaR}_\alpha(\sum_i L_i) \leq \overline{\mathrm{VaR}}_\alpha$ Embrechts, Puccetti & Rüschendorf (2013)
  - marginile sînt minimul și maximul peste toate copulele (Capitolul 6)
  - $F_i$: funcția de repartiție a pierderii $L_i$ a activului $i$
  - $d$: numărul de active
  - Copula: structura de dependență care leagă marginalele
  - Valoarea comonotonă $\sum_i \mathrm{VaR}_\alpha(L_i)$ (toate pierderile variază perfect împreună) **nu** este capătul superior: VaR nu este subaditiv

înapoi

# Algoritmul de rearanjare și riscul modelului

- **Algoritmul de rearanjare**: discretizăm coada de dincolo de fiecare $\mathrm{VaR}_\alpha(L_i)$ în $N$ puncte (o coloană pe activ)
  - Ordonăm fiecare coloană invers față de suma celorlalte pînă cînd sumele pe rînduri devin uniforme
  - VaR maxim este aproximativ cea mai mică sumă pe rînd
- Portofoliul 40/30/20/10 din secțiunea „VaR de portofoliu și contribuțiile la risc"
  - $\mathrm{VaR}_{1\%}$ zilnic, marginale empirice, $N = 2\,000$
  - $\mathrm{VaR}_{1\%}$ cu dependența istorică (cuantila empirică a pierderii portofoliului): 1,95%
  - Cu dependență comonotonă (suma VaR-urilor empirice individuale): 3,63%
  - În cazul cel mai rău: 4,76%, adică de 1,31 ori valoarea comonotonă
  - Secțiunea „VaR de portofoliu și contribuțiile la risc" folosește formula Normală, de aceea dă 1,77% și 3,11% nediversificat pentru același portofoliu
- Incertitudinea privind dependența afectează capitalul bazat pe VaR
  - cu un ordin de mărime comparabil cu beneficiul diversificării

# VaR și ES pe metode și active

| | $\mathrm{VaR}_{1\%}$ (%) | | | | | $\mathrm{ES}_{2{,}5\%}$ (%) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Ist. | Distr. Normală | $t$ | CF | EVT | Ist. | Distr. Normală | $t$ | CF | EVT |
| S&P 500 | 3,45 | 2,80 | 3,46 | 6,08 | 3,54 | 3,76 | 2,81 | 3,95 | 6,65 | 3,78 |
| BET | 4,13 | 3,19 | 4,06 | 7,25 | 4,22 | 4,57 | 3,21 | 4,76 | 7,93 | 4,58 |
| Bitcoin | 10,51 | 7,99 | 11,06 | 18,89 | 10,23 | 10,86 | 8,03 | 13,37 | 20,69 | 10,84 |
| EUR/RON | 0,76 | 0,64 | 1,36 | 1,43 | 0,78 | 0,84 | 0,65 | 3,27 | 1,60 | 0,84 |
| Aur | 3,04 | 2,50 | 3,00 | 4,64 | 3,07 | 3,23 | 2,51 | 3,27 | 5,02 | 3,23 |

- Pierderi zilnice, selecțiile complete
- CF: Cornish–Fisher
- EVT: coada Pareto generalizată estimată pe cele mai mari 5% dintre pierderi
  - secțiunea „Teoria valorilor extreme"
- Excesul de kurtosis pe serii
  - 10,7 pentru S&P 500, 11,1 pentru BET, 12,0 pentru Bitcoin
  - 15,1 pentru EUR/RON și 7,7 pentru aur
- Bitcoin necesită o rezervă de aproximativ trei ori mai mare decît S&P 500
  - EUR/RON, de aproximativ o cincime

înapoi

# Teoria asimptotică pentru VaR și ES istorice

- **VaR**: pentru pierderi i.i.d. cu densitatea $f$ continuă și pozitivă în $\mathrm{VaR}_\alpha$,
  $\sqrt{n}\,(\widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha - \mathrm{VaR}_\alpha) \to N\left(0, \frac{\alpha(1-\alpha)}{f(\mathrm{VaR}_\alpha)^2}\right)$
  - $\to$: convergență în distribuție cînd $n \to \infty$
  - Dispersia limitei este dispersia asimptotică (avar), iar SE $= \sqrt{\mathrm{avar}/n}$
- **ES**: estimatorul istoric este asimptotic Normal Chen (2008)
  - funcția de influență IF este cea de pe slide-ul „Erori standard pentru VaR și ES (2/2)"
  - Niciun termen din estimarea VaR: $\partial F/\partial v = 0$ în $v = \mathrm{VaR}_\alpha$
  - Dacă $\mathbb{E}[(L - \mathrm{VaR}_\alpha)_+^2] < \infty$, dispersia limitei lui $\sqrt{n}(\widehat{\mathrm{ES}}_\alpha - \mathrm{ES}_\alpha)$ este avar $= \mathrm{Var}((L - \mathrm{VaR}_\alpha)_+)/\alpha^2$
  - Coadă de tip Pareto cu indicele $a > 2$, $\alpha \to 0$: $\mathrm{Var}((L - \mathrm{VaR}_\alpha)_+) \approx \frac{2\alpha \mathrm{VaR}_\alpha^2}{(a-1)(a-2)}$, deci SE $\propto \mathrm{VaR}_\alpha/\sqrt{n\alpha}$ ($\propto$: proporțional cu) Pele & Mazurencu-Marinescu-Pele (2026)

Înapoi

# Precizia pentru S&P 500, tabelul complet

| | $n$ | $\widehat{\mathrm{VaR}}_{1\%}$ | SE i.i.d. | SE HAC | $\widehat{\mathrm{ES}}_{2,5\%}$ | SE i.i.d. | SE HAC |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2000–2026 | 6 717 | 3,45 | 0,13 | 0,19 | 3,76 | 0,15 | 0,26 |
| Ultimele 500 de zile | 500 | 2,73 | 0,36 | 0,44 | 2,98 | 0,48 | 0,65 |

- Densitatea $f(\mathrm{VaR})$ prin nucleu Gaussian, cu lățimea de bandă $\hat{\sigma}\,(4/(3n))^{1/5}$
- HAC: nucleu Bartlett, lag 10 pe selecția completă și 5 pe ultimele 500 de zile Newey & West (1994)
- Selecția completă, $n = 6\,717$, $\sigma = 1{,}2\%$: SE a $\mathrm{VaR}_{1\%}$ ar fi
  - 0,055 sub distribuția Normală
  - 0,12 sub $t_4$
- Gruparea volatilității crește SE
  - cu 46–73% pe selecția completă
  - cu 22–35% pe ultimele 500 de zile

înapoi

# Filtrele GARCH și prognoza volatilității pentru ziua următoare

| | $\hat{\phi}$ | $\hat{\alpha}_1$ | $\hat{\beta}_1$ | $\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1$ | $\hat{\sigma}$ (selecție) | $\hat{\sigma}_{t+1}$ | $-q_{1\%}(\hat{z})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| S&P 500 | −0,053 | 0,1204 | 0,8604 | 0,981 | 1,21 | 0,73 | 2,79 |
| BET | 0,104 | 0,207 | 0,787 | 0,994 | 1,40 | 1,76 | 2,74 |
| Bitcoin | −0,009 | 0,127 | 0,843 | 0,970 | 3,49 | 3,00 | 2,88 |
| EUR/RON | 0,089 | 0,148 | 0,852 | 1,000 | 0,28 | 0,08 | 2,80 |
| Aur | −0,022 | 0,046 | 0,943 | 0,989 | 1,09 | 1,43 | 2,68 |

- $\hat{\sigma}_{t+1}$: prognoza pentru prima zi de tranzacționare de după 18 septembrie 2026, în %
  - 19 septembrie pentru Bitcoin
- EUR/RON: $\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1 = 1$, frontiera GARCH integrată
  - în limita preciziei numerice
  - deci varianța necondiționată nu este finită, iar prognoza nu revine la un nivel de termen lung
- $\hat{\sigma}$ (selecție) este abaterea standard empirică a randamentelor
  - nu reprezintă volatilitatea pe termen lung implicată de model
- Cuantila $-q_{1\%}(\hat{z})$ este între 2,68 și 2,88, peste $-z_{1\%} = 2{,}326$
  - șocurile filtrate păstrează cozi grele

Înapoi

# VaR și ES condiționate pentru următoarea zi de tranzacționare

| | $\mathrm{VaR}_{1\%}$ (%) | | | | $\mathrm{ES}_{1\%}$ (%) | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | GARCH | FHS | c-EVT | Ist. | GARCH | FHS | c-EVT | Ist. |
| S&P 500 | 1,63 | 1,97 | 2,03 | 3,45 | 1,88 | 2,56 | 2,56 | 5,03 |
| BET | 3,80 | 4,53 | 4,63 | 4,13 | 4,39 | 6,17 | 6,20 | 6,29 |
| Bitcoin | 6,89 | 8,56 | 8,68 | 10,51 | 7,90 | 12,23 | 12,19 | 14,30 |
| EUR/RON | 0,18 | 0,22 | 0,21 | 0,76 | 0,21 | 0,28 | 0,28 | 1,13 |
| Aur | 3,32 | 3,82 | 3,86 | 3,04 | 3,80 | 4,95 | 4,93 | 4,22 |

- GARCH: GARCH cu șocuri Normale
- c-EVT: teoria valorilor extreme condiționată (secțiunea „Teoria valorilor extreme")
- Ist.: necondiționat, întreaga selecție
- GARCH cu șocuri Normale dă cea mai mică valoare dintre cele trei metode condiționate
  - pe fiecare rînd
  - volatilitatea singură nu descrie coada

înapoi

# Riscul de estimare în VaR condiționat

- $\mathrm{VaR}_{\alpha,t+\mathbf{1}} = -\mu_{t+\mathbf{1}}(\theta) + \sigma_{t+\mathbf{1}}(\theta)\,\xi_\alpha$, $\xi_\alpha = -q_\alpha(z)$
  - **atît** $\theta$ (GARCH, prin QML), cît și $\xi_\alpha$ (o cuantilă a reziduurilor) sînt estimați
  - $\theta$: parametrii AR(1)-GARCH(1,1)
  - QML: cvasi-verosimilitate maximă
  - $\mu_{t+\mathbf{1}}(\theta)$, $\sigma_{t+\mathbf{1}}(\theta)$: prognozele implicate de ei
- Francq & Zakoïan (2015): estimăm împreună **parametrul de risc** $(\theta, \xi_\alpha)$
- VaR condiționat este asimptotic Normal
  - condiții: staționaritate strictă, $\mathbb{E}[z_t^{\mathbf{4}}] < \infty$ și o densitate pozitivă a lui $z$ în $q_\alpha(z)$
  - dispersia provine din $\hat{\theta}$, din $\hat{\xi}_\alpha$ și din covarianța lor
- **Bootstrap pe reziduuri** Christoffersen & Gonçalves (2005), pentru $b = 1, \ldots, B$
  - $B$: numărul de eșantioane bootstrap; steluța marchează o valoare calculată pe un eșantion bootstrap
  - simulăm o traiectorie AR(1)-GARCH(1,1) de lungimea selecției cu $\hat{z}$ reeșantionate și re-estimăm $\theta^*$ pe ea
  - calculăm $\sigma^*_{t+\mathbf{1}}$ din randamentele **originale** cu $\theta^*$
  - calculăm $\xi^*_\alpha$ din reziduurile traiectoriei
  - $\mathrm{VaR}^*_{t+\mathbf{1}} = -\mu^*_{t+\mathbf{1}} + \sigma^*_{t+\mathbf{1}}\xi^*_\alpha$
  - intervalul percentil de 90%: cuantilele de 5% și 95% ale celor $B$ valori $\mathrm{VaR}^*_{t+\mathbf{1}}$
- Cozile grele și asimetria lui $z$ încetinesc convergența
- Spierdijk (2016): intervale VaR pentru ARMA (autoregressive moving average)–GARCH

înapoi

# Setările estimării CAViaR și modelele comune (VaR, ES)

- Setările de estimare din Engle & Manganelli (2004): $10^4$ puncte de start aleatoare în $(0,1)^3$
  - cele mai bune 10 rafinate prin pași simplex și cvasi-Newton
- Valoarea de pornire a recursiei: $\mathrm{VaR}_1 = -\hat{q}_\alpha$
  - cuantila empirică de ordin $\alpha$ a primelor 300 de randamente, cu semn schimbat
- Aceste zile rămîn în eșantionul de estimare
- Perechea (VaR, ES) poate fi **estimată** prin minimizarea unui scor comun strict consistent Fissler & Ziegel (2016)
- Capitolul 8 folosește aceleași scoruri pentru a **evalua** prognozele
  - Patton, Ziegel & Chen (2019): modele semiparametrice dinamice pentru (VaR, ES), de ex. cu dinamică GAS (generalised autoregressive score, scor autoregresiv generalizat), estimate prin minimizarea pierderii FZ0, pentru care sînt demonstrate consistența și normalitatea asimptotică
  - Taylor (2019): recursii de tip CAViaR pentru VaR și ES, estimate printr-o verosimilitate Laplace asimetrică
  - Dimitriadis & Bayer (2019): regresie liniară a cuantilei și a ES pe covariate (volatilitate realizată și implicită), cu erori standard
- Firul comun: funcția de scor care ordonează prognozele este și funcția obiectiv care estimează modelul

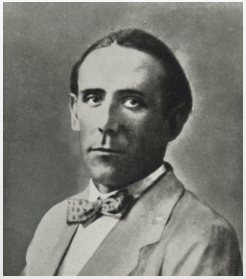
înapoi

# Notații în teoria valorilor extreme

- $\xi$: forma GEV/GPD
  - $\hat{\xi}_\alpha$ (cu nivel): cuantila reziduurilor FHS, $-q_\alpha(\hat{z})$
  - EVT condiționată o estimează dintr-o GPD și o notează $\hat{z}_\alpha^{GPD}$
- $\beta$: scala GPD
  - $\beta_1$: coeficient GARCH; $\beta_0, \beta_1, \beta_2$: coeficienți CAViaR
- $\mu$, $\sigma$: poziția și scala GEV în secțiunea despre maxime
  - în rest, media și volatilitatea condiționate
- $u$: pragul GPD
  - în definiția ES, $u$ este variabila de integrare
  - $u_s$: variabila auxiliară din programul liniar pentru ES minim
- $\alpha$: probabilitatea cozii
  - $\alpha_1$: coeficient GARCH
- $a = 1/\xi$: indicele cozii

Înapoi

# Emil Gumbel și statistica extremelor



Emil Julius Gumbel (1891–1966)

Foto: autor necunoscut (c. 1931); domeniu public; Wikimedia Commons

- Fisher & Tippett (1928): maximul multor variabile i.i.d., rescalat corespunzător, poate avea doar trei forme limită
- Gnedenko (1943) a demonstrat riguros rezultatul
- Gumbel (1958) a scris primul manual și a aplicat teoria la inundații, secete și durate de viață
  - Distribuția Gumbel este una dintre cele trei forme limită

Înapoi

# De la maxime lunare la un VaR zilnic

- Zile independente: $P(M_n \leq x) \approx P(L \leq x)^n$, deci $\mathrm{VaR}_\alpha \approx H^{-1}((1-\alpha)^n)$
  - $n = 20{,}9$ zile de tranzacționare pe lună; $H^{-1}$: funcția cuantilă a GEV estimate
  - $\mathrm{VaR}_{1\%} \approx H^{-1}(0{,}810) = 2{,}83\%$ față de valoarea istorică 3,45%; $\mathrm{VaR}_{0{,}1\%} \approx 6{,}19\%$
- Gruparea volatilității încalcă ipoteza de independență, iar aproximarea subestimează aici VaR
- Cu indicele extremal: $P(M_n \leq x) \approx F(x)^{n\theta}$, $F$: funcția de repartiție a pierderii zilnice
  - Cu $\hat{\theta} = 0{,}35$ (pragul la VaR 1%): $\mathrm{VaR}_{1\%} \approx H^{-1}(0{,}929) = 4{,}14\%$, în loc de 2,83%
  - Cu $\hat{\theta} = 0{,}19$ (pragul GPD): 5,09%
  - Corecția modifică rezultatul mai mult decît eroarea pe care o corectează: trecerea de la maximele pe blocuri la VaR zilnic este fragilă

înapoi

# Estimările GPD pentru cinci serii

| | $u$ (%) | $N_u$ | $\hat{\xi}$ | SE($\hat{\xi}$) | $\hat{\beta}$ | $1/\hat{\xi}$ | $\mathrm{VaR}_{1\%}$ | $\mathrm{ES}_{1\%}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| S&P 500 | 1,85 | 336 | 0,19 | 0,065 | 0,898 | 5,3 | 3,54 | 5,04 |
| BET | 1,93 | 334 | 0,21 | 0,066 | 1,196 | 4,8 | 4,22 | 6,34 |
| Bitcoin | 5,33 | 220 | 0,16 | 0,078 | 2,651 | 6,1 | 10,23 | 14,36 |
| EUR/RON | 0,38 | 268 | 0,18 | 0,072 | 0,217 | 5,5 | 0,78 | 1,14 |
| Aur | 1,68 | 348 | 0,15 | 0,062 | 0,759 | 6,5 | 3,07 | 4,22 |

- $\hat{\xi}$ între 0,15 și 0,21 pentru toate cele cinci serii: cozi grele peste tot
  - fiecare la peste două erori standard i.i.d. deasupra lui 0
- Gruparea depășirilor face ca aceste SE să fie subestimate
- Indicele cozii $1/\hat{\xi}$ între 4,8 și 6,5
  - cozile drepte estimate ale pierderilor au momente de ordinul patru finite
- Dar fiecare interval de 95% pentru $\xi$ trece de 0,25
  - deci existența momentelor de ordinul patru nu este confirmată statistic (comparați cu Capitolul 1)

Înapoi

# Indicele extremal: estimatorul și separarea grupurilor

- **Estimatorul pe intervale** Ferro & Segers (2003) din cele $N$ momente de depășire a lui $u$ și intervalele $T_i$ dintre ele
  - $\hat{\theta} = \min\left\{1, \dfrac{2\left(\sum_i (T_i - 1)\right)^2}{(N-1)\sum_i (T_i - 1)(T_i - 2)}\right\}$ dacă $\max T_i > 2$ (altfel cu $T_i,\ T_i^2$)
  - Estimatorul compară pătratul intervalului mediu cu media pătratelor intervalelor: intervalele scurte din interiorul grupurilor împing $\hat{\theta}$ sub 1
- **Separarea grupurilor (declustering)** Ferro & Segers (2003): $C = \lfloor \hat{\theta} N \rfloor + 1$ grupuri
  - separate de cele mai mari $C - 1$ intervale
  - Egalități: dacă al $(C-1)$-lea și al $C$-lea cel mai mare interval sînt egale, $C$ se reduce pînă cînd diferă, deci numărul realizat de grupuri poate fi sub țintă
- Estimăm GPD pe maximele grupurilor
- S&P 500: $\hat{\theta} N = 0{,}18738 \times 336 = 62{,}96$, deci ținta este $C = \lfloor 62{,}96 \rfloor + 1 = 63$
- După regula egalităților rămîn 62 de grupuri
- Cu pragul la VaR 1% istoric ($u = 3{,}45\%$, $N = 68$): $\hat{\theta} = 0{,}35$

Înapoi

# Portofoliul: volatilități, corelații și contribuții

| | Pondere | $\sigma_i$ (%) | corel. SPY | corel. TLT | corel. GLD |
|---|---|---|---|---|---|
| SPY | 40% | 1,10 | 1,00 | | |
| TLT | 30% | 0,93 | −0,17 | 1,00 | |
| GLD | 20% | 1,03 | 0,07 | 0,25 | 1,00 |
| Bitcoin | 10% | 4,14 | 0,23 | −0,02 | 0,09 |

| | $\sigma_i$ (%) | VaR marginal | $C_i$ | cotă | $C_i^{ES}$ | cotă |
|---|---|---|---|---|---|---|
| SPY | 1,10 | 1,68 | 0,67 | 38,1% | 0,98 | 45,4% |
| TLT | 0,93 | 0,70 | 0,21 | 11,8% | 0,14 | 6,6% |
| GLD | 1,03 | 1,08 | 0,22 | 12,3% | 0,25 | 11,5% |
| Bitcoin | 4,14 | 6,68 | 0,67 | 37,8% | 0,79 | 36,6% |
| Total | $\sigma_p = 0{,}76$ | | 1,77 | 100% | 2,16 | 100% |

- SPY are o cotă mai mare din ES 2,5% istoric decît din VaR 1% Normal
  - 45,4% față de 38,1%
  - pierderile lui se concentrează în zilele cele mai rele ale portofoliului mai mult decît indică covariațele
- Interpretarea drept dependență în coadă cere o analiză separată
  - Capitolul 6

Înapoi

# Comitetul de la Basel și calendarul UE



Turnul Băncii Reglementelor Internaționale (BIS) din Basel, sediul Comitetului de la Basel pentru Supraveghere Bancară

Foto: Michal Pleskowicz (2018); CC BY-SA 4.0; Wikimedia Commons

- Comitetul de la Basel pentru Supraveghere Bancară stabilește standardele globale de capital
- Autoritățile naționale (în UE, prin Regulamentul privind cerințele de capital) le transformă în lege
- **1996**: riscul de piață intră în regulile de capital Basel Committee (1996)
  - băncile pot folosi modele VaR interne
- **2019**: FRTB înlocuiește VaR cu ES în abordarea bazată pe modele interne Basel Committee (2019)
  - FRTB: standardul revizuirii fundamentale a portofoliului de tranzacționare (Fundamental Review of the Trading Book)
- Fiecare jurisdicție își stabilește data de aplicare
- UE: Regulamentul delegat (UE) 2025/1496 a amînat cerințele de fonduri proprii FRTB la 1 ianuarie 2027
- Pînă atunci băncile aplică cadrul anterior, bazat pe VaR

Înapoi

# Studiu de caz: predictori, eșantion și calibrare

- **Date** (Chronopoulos, Raftapostolos & Kapetanios (2024), Secțiunea 3.1): randamentele log zilnice ale S&P 500, $r_t = \ln(P_t/P_{t-1})$
  - septembrie 1985 – august 2020, $T = 9\,053$
- Niveluri: $\alpha = 1\%$, 5% și 10%
  - Patru seturi de predictori $x_t$ (Ec. 14–17, după Giacomini & Komunjer (2005)):
    - $\sigma_t$ din GARCH(1,1)
    - $\sigma_t$ RiskMetrics cu factorul de atenuare $\lambda = 0{,}94$
    - CAViaR SAV $(\mathrm{VaR}_{t-1}, |r_{t-1}|)$
    - CAViaR cu pantă asimetrică $(\mathrm{VaR}_{t-1}, r^+_{t-1}, r^-_{t-1})$, $r^+ = \max(r, 0)$, $r^- = \max(-r, 0)$
  - În articol, $\tau$ corespunde nivelului $\alpha$ din curs
  - $\mathrm{VaR}_{\alpha,t} = -Q_{r_t}(\alpha \mid x_t)$, ca în secțiunea „VaR și Expected Shortfall"

Înapoi

# Studiu de caz: schema de evaluare, modele concurente și teste

- **Schema de evaluare** (Secțiunea 3.2 a articolului)
  - ultimele 2 000 de zile formează eșantionul de evaluare
- Primele 7 053 sînt folosite pentru calibrarea unică a modelului (fereastră fixă)
  - CV (validare încrucișată) pentru serii de timp (Ec. 12): se exclud $\delta = 5$ zile de fiecare parte a observației evaluate
  - Se aleg aleatoriu $\kappa = 20$ de observații pentru testare
  - Grile: adîncimea și lățimea din $\{1, 5, 10\}$, cîte cinci valori pentru rata de învățare și ponderea penalizării $\lambda$ (alta decît $\lambda$ RiskMetrics) în $[0{,}001; 0{,}01]$, dimensiunea lotului din $\{10, 20\}$
  - Antrenare: dropout de cel mult 20%, Adam (algoritm de optimizare stocastică cu pas adaptiv), oprire timpurie (Secțiunea 1.4 a articolului)
- **Modele comparate**: regresia cuantilă liniară (modelul de referință)
  - regresiile cuantile polinomială și cu funcții B-spline, modelul MIDAS liniar (Ec. 18)
  - o rețea MIDAS adîncă
  - **Evaluare** (Secțiunea 3.3 a articolului): RMSFE relativ la reperul liniar
  - Testul DM Diebold & Mariano (1995) aplicat pierderilor pinball, cu corecția Harvey, Leybourne & Newbold (1997)
  - Testul CQFE (conditional quantile forecast encompassing) Giacomini & Komunjer (2005): verifică dacă o prognoză conține deja informația celeilalte, cu parametrul de netezire $\eta = 0{,}005$
  - Motivația: Patton, Ziegel & Chen (2019) au extins CAViaR la (VaR, ES) cu dinamică parametrică
  - Acest articol păstrează doar VaR, dar renunță la liniaritate

Înapoi

# Studiu de caz: rezultatele complete (Tabelele 6 și 7) (1/2)

| $\alpha = 1\%$ | Polin. | Spline | MIDAS | Adînc | LASSO | Ridge | Elnet | MIDAS adînc |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| GARCH | 0,909 | 0,791 | 1,083 | 0,346 | 0,236 | 0,177 | 0,146 | 0,346 |
| RiskMetrics | 0,780 | 0,570 | 1,066 | 0,289 | 0,141 | 0,207 | 0,239 | 0,246 |
| SAV | 1,000 | 1,511 | 0,838 | 0,198 | 0,024 | 0,225 | 0,498 | 0,850 |
| Pantă asim. | 1,000 | 1,040 | 4,918 | 0,235 | 0,096 | 0,014 | 0,037 | 0,601 |

- RMSFE relativ la regresia cuantilă liniară, $\alpha = 1\%$ (Tabelul 6)
  - LASSO, Ridge și Elnet sînt rețele adînci penalizate
  - toate cele 16 valori ale rețelelor adînci sînt sub 1 și semnificative la 1% în testul DM
  - Pe toate nivelurile, rețelele adînci reduc eroarea cu 50%–98%, MIDAS adînc cu 11%–84%
  - Penalizarea cea mai bună se schimbă cu setul de predictori (elastic net pentru GARCH, LASSO pentru RiskMetrics și SAV, ridge pentru panta asimetrică)
- La $\alpha = 1\%$, regresiile polinomială și cu spline nu bat sistematic reperul liniar
  - 4 rapoarte sub 1, 2 egale cu 1 și 2 peste 1
  - cel mai mare: 1,511; pînă la 1,716 la alte niveluri $\alpha$ din Tabelul 6
- MIDAS liniar ajunge la 4,918
- Rezultatele nu separă contribuțiile arhitecturii, penalizării și CV

Înapoi

# Studiu de caz: rezultatele complete (Tabelele 6 și 7) (2/2)

- CQFE la $\alpha = 1\%$ (Tabelul 7)
  - prognozele blocului neliniar înglobează informația din prognozele concurente în 757 de comparații
  - 42 de rezultate nefavorabile și 751 neconcludente
- Pentru blocul liniar: 173 de comparații favorabile, 15 nefavorabile și 170 neconcludente
- Numeroasele perechi neconcludente arată că o combinație de prognoze ar putea aduce încă informație

# Studiu de caz: replicare și limite

- **Replicare** pe datele zilnice de piață ale cursului
  - seria S&P 500 începe în ianuarie 1990, deci lipsește perioada 1985–1989 (o limită a datelor)
  - Păstrăm fereastra de evaluare din articol (ultimele 2 000 de randamente pînă la 31 august 2020, de la 19 septembrie 2012): 5 726 de zile de calibrare în loc de 7 053
  - Construim predictorii GARCH și SAV, estimăm regresia cuantilă liniară și regresia cuantilă cu o rețea neuronală adîncă la $\alpha = 1\%$ și recalculăm rîndul GARCH din Tabelul 6 (Seminarul 7, C3: versiunea minimă; rîndurile complete în extinderea de replicare)
- **Limite menționate de autori**
  - O singură fereastră de estimare: recalibrarea recursivă sau pe fereastră mobilă, repetată pentru 2 000 de zile, necesită un volum mare de calcul (Secțiunea 3.2 a articolului)
  - Rețelele sînt predispuse la supraajustare (*overfitting*), de aici penalizările, dropout, CV și oprirea timpurie (Secțiunea 1.4 a articolului)
  - Rezultatul se interpretează doar prin valori SHAP (Shapley additive explanations, explicații aditive Shapley) și derivate parțiale (Secțiunea 4 a articolului)
- **Extinderi deschise** (Seminarul 7, C3)
  - Se păstrează cîștigul la reestimarea pe fereastră mobilă în 2020–2026 și pe BET?
  - Poate o rețea antrenată pe pierderea FZ0 a lui Patton, Ziegel & Chen (2019) să prognozeze împreună (VaR, ES), cum cere FRTB?

Înapoi

# Bucla descoperirii, prompturi reutilizabile (1/2)

- Instrumentele sînt interschimbabile
  - un asistent AI: Claude, ChatGPT, Gemini, GitHub Copilot
  - instrumente de căutare în literatura științifică: Semantic Scholar, Elicit, Google Scholar
- **Literatura**
  - *„Listează articolele publicate după 2015 despre backtesting-ul comparativ al perechii (VaR, ES) cu funcții de scor strict consistente: DOI, funcția de scor, testul, mărimea eșantionului și rezultatele privind puterea."*
  - Verificăm fiecare DOI în Crossref
  - Verificăm în articol convenția de semn a scorului
- **Ipoteze**
  - *„Pentru FHS, EVT condiționată și GARCH cu șocuri Normale, spune ce trăsături ale cozii surprinde fiecare și ce implică fiecare pentru diferențele FZ0 în anii calmi și în cei agitați."*
- **Date și cod**
  - *„Scrie cod Python care calculează pierderea FZ0 pentru prognozele zilnice VaR 1% și ES 1% pe S&P 500 din datele zilnice de piață ale cursului, cu convenția de semn VaR $= -q_\alpha$, și un test Diebold–Mariano cu erori HAC."*
  - Replicăm întîi: rata de depășire FHS de 1,54% pe 5 210 zile (secțiunea „VaR și ES condiționate")

Înapoi

# Bucla descoperirii, prompturi reutilizabile (2/2)

- **Robustețe**
  - *„Scrie un plan pre-înregistrat: subperioadele 2006–2015 și 2016–2026, nivelurile 1% și 2,5%, FZ0 și un al doilea scor consistent, laguri HAC 5 și 20, un al doilea indice."*
  - Verificarea mărimii testului: simulăm dintr-un GARCH-t estimat și evaluăm două prognoze cu aceeași medie a scorului FZ0
  - Testul trebuie să respingă în circa 5% din simulări
- **Critica**
  - *„Joacă rolul unui referent: este ordonarea mea determinată de 2008 și 2020, de convenția de semn a scorului sau de ferestrele de estimare suprapuse? Indică un test care ar identifica fiecare dintre aceste probleme."*
- **Raportul**: fiecare pereche de modele, nivel și perioadă
- Numărul de zile din coadă pe care se bazează fiecare comparație
- **Testare multiplă**: modele × niveluri × perioade × active
  - fixăm familia dinainte și ajustăm valorile p
- Un DOI care nu duce la nicio lucrare sau un scor atribuit greșit
  - renunțăm la afirmație și o notăm în `AI_ERRORS.md`
- Fixăm planul înainte de prima rulare
  - orice specificație aleasă după ce am văzut rezultatele este exploratorie și se raportează ca atare

Înapoi

# Cursuri Quantinar și codul capitolului

## Cursuri avansate pe quantinar.com

- Measuring Statistical Risk
- XFG Advanced Methods in Quantitative Finance (XFG: prefixul Quantlet-urilor din *Applied Quantitative Finance*, Härdle, Chen & Overbeck)

## Cod și date

- Quantlets: github.com/danpele/MFM/tree/main/Quantlets/Ch_07

Înapoi

# Acronime folosite în acest material (1/4)

- **AI**: Artificial Intelligence — *inteligență artificială*
- **AIC**: Akaike Information Criterion — *criteriul informațional Akaike*
- **AR**: AutoRegressive (model) — *model autoregresiv*
- **ARMA**: AutoRegressive Moving Average (model) — *model autoregresiv cu medie mobilă*
- **BET**: Bucharest Exchange Trading (index) — *indicele de referință al Bursei de Valori București*
- **BIS**: Bank for International Settlements — *Banca Reglementelor Internaționale*
- **BNR**: Banca Națională a României
- **BVB**: Bursa de Valori București
- **cEVT**: conditional Extreme Value Theory (GARCH filter, EVT tail) — *EVT condiționată (filtru GARCH, coadă EVT)*
- **CF**: Cornish–Fisher (expansion) — *dezvoltarea Cornish–Fisher*
- **COVID-19**: COronaVIrus Disease 2019 — *boala provocată de coronavirus, 2019*
- **CQFE**: Conditional Quantile Forecast Encompassing (test) — *testul de includere a prognozelor cuantilelor condiționate*
- **CRSP**: Center for Research in Security Prices — *Centrul de cercetare a prețurilor titlurilor (Universitatea din Chicago)*
- **CV**: Cross-Validation — *validare încrucișată*
- **DM**: Diebold–Mariano (test) — *testul Diebold–Mariano de comparare a prognozelor*

# Acronime folosite în acest material (2/4)

- **ES**: Expected Shortfall — *pierderea așteptată în coadă*
- **ETF**: Exchange-Traded Fund — *fond tranzacționat la bursă*
- **EU**: European Union — *Uniunea Europeană*
- **EVT**: Extreme Value Theory — *teoria valorilor extreme*
- **FHS**: Filtered Historical Simulation — *simulare istorică filtrată*
- **FRTB**: Fundamental Review of the Trading Book — *revizuirea fundamentală a portofoliului de tranzacționare*
- **FZ0**: Fissler–Ziegel loss, zero-homogeneous version — *funcția de pierdere Fissler–Ziegel, varianta omogenă de grad zero*
- **GARCH**: Generalised AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity — *heteroscedasticitate condiționată autoregresivă generalizată*
- **GARCH-N**: GARCH with Normal innovations — *GARCH cu inovații Normale*
- **GAS**: Generalised Autoregressive Score (model) — *model cu scor autoregresiv generalizat*
- **GEV**: Generalised Extreme Value (distribution) — *distribuția generalizată a valorilor extreme*
- **GPD**: Generalised Pareto Distribution — *distribuția Pareto generalizată*
- **HAC**: Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent (standard errors) — *erori standard robuste la heteroscedasticitate și autocorelație*
- **HS**: Historical Simulation — *simulare istorică*
- **IF**: Influence Function — *funcția de influență*

# Acronime folosite în acest material (3/4)

- **LASSO**: Least Absolute Shrinkage and Selection Operator — *regresie penalizată L1 cu selecția variabilelor*
- **MAR**: Market Risk (chapter of the consolidated Basel Framework) — *capitolul despre riscul de piață din cadrul Basel consolidat*
- **MAR12**: Basel Framework, chapter MAR12 (definition of trading desks) — *cadrul Basel, capitolul MAR12 (definirea birourilor de tranzacționare)*
- **MAR33**: Basel Framework, chapter MAR33 (internal models approach: capital requirements calculation) — *cadrul Basel, capitolul MAR33 (abordarea pe modele interne: calculul cerințelor de capital)*
- **MC**: Monte Carlo (simulation) — *simulare Monte Carlo*
- **MIDAS**: MIxed DAta Sampling (regression) — *regresie cu date de frecvențe mixte*
- **MSE**: Mean Squared Error — *eroarea pătratică medie*
- **QML**: Quasi-Maximum Likelihood — *cvasi-verosimilitate maximă*
- **RMSFE**: Root Mean Squared Forecast Error — *rădăcina erorii pătratice medii de prognoză*
- **SAV**: Symmetric Absolute Value (CAViaR specification) — *specificația CAViaR cu valoare absolută simetrică*
- **SE**: Standard Error — *eroare standard*
- **SHAP**: SHapley Additive exPlanations — *explicații aditive Shapley*

# Acronime folosite în acest material (4/4)

- **SUA**: Statele Unite ale Americii
- **UE**: Uniunea Europeană
- **XAU**: gold, ISO 4217 code (one troy ounce) — *aur, codul ISO 4217 (o uncie troy)*
- **XFG**: Quantlet prefix of Applied Quantitative Finance (Härdle, Chen & Overbeck) — *prefixul Quantlet-urilor din Applied Quantitative Finance (Härdle, Chen & Overbeck)*
- **CAViaR**: Conditional Autoregressive Value at Risk — *valoarea la risc condițională autoregresivă*
- **CVaR**: Conditional Value at Risk — *valoarea la risc condiționată, sinonim pentru ES*
- **DOI**: Digital Object Identifier — *identificatorul digital al unui articol*
- **i.i.d.**: independent and identically distributed — *independente și identic distribuite*
- **LH**: Liquidity Horizon — *orizontul de lichiditate*
- **LVaR**: Liquidity-adjusted VaR — *VaR ajustat la lichiditate*
- **POT**: Peaks Over Threshold — *depășiri de prag*
- **pp**: puncte procentuale
- **ReLU**: Rectified Linear Unit — *funcția de activare* $\max(x, 0)$
- **RORAC**: Return On Risk-Adjusted Capital — *randamentul pe capitalul ajustat la risc*
- **USD**: United States Dollar — *dolarul american*
- **VaR**: Value at Risk — *valoarea la risc*

# Bibliografie (1/4)


- Acerbi, C., Tasche, D. (2002). On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking & Finance*, 26(7), 1487–1503.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9(3), 203–228.
- Balkema, A.A., de Haan, L. (1974). Residual life time at great age. *Annals of Probability*, 2(5), 792–804.
- Bangia, A., Diebold, F.X., Schuermann, T., Stroughair, J.D. (2001). Modeling liquidity risk, with implications for traditional market risk measurement and management. In *Risk Management: The State of the Art*, Springer, 3–13.
- Barone-Adesi, G., Giannopoulos, K., Vosper, L. (1999). VaR without correlations for portfolios of derivative securities. *Journal of Futures Markets*, 19(5), 583–602.
- Basel Committee on Banking Supervision (1996). Amendment to the capital accord to incorporate market risks. Bank for International Settlements.
- Basel Committee on Banking Supervision (2019). Minimum capital requirements for market risk. Bank for International Settlements.
- Bayer, S., Dimitriadis, T. (2022). Regression-based expected shortfall backtesting. *Journal of Financial Econometrics*, 20(3), 437–471.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3), 307–327.
- Chen, S.X. (2008). Nonparametric estimation of expected shortfall. *Journal of Financial Econometrics*, 6(1), 87–107.
- Christoffersen, P., Gonçalves, S. (2005). Estimation risk in financial risk management. *Journal of Risk*, 7(3), 1–28.
- Chronopoulos, I., Raftapostolos, A., Kapetanios, G. (2024). Forecasting Value-at-Risk using deep neural network quantile regression. *Journal of Financial Econometrics*, 22(3), 636–669.
- Čížek, P., Härdle, W.K., Weron, R. (Eds.) (2011). Statistical Tools for Finance and Insurance, 2nd ed. Springer.
- Comisia Europeană (2025). Regulamentul delegat (UE) 2025/1496. *Jurnalul Oficial al Uniunii Europene*.
- Cont, R., Deguest, R., Scandolo, G. (2010). Robustness and sensitivity analysis of risk measurement procedures. *Quantitative Finance*, 10(6), 593–606.
- Cornish, E.A., Fisher, R.A. (1938). Moments and cumulants in the specification of distributions. *Revue de l'Institut International de Statistique*, 5(4), 307–320.

# Bibliografie (2/4)


- Daníelsson, J. (2011). Financial Risk Forecasting. Wiley.
- Daníelsson, J., Jorgensen, B.N., Samorodnitsky, G., Sarma, M., de Vries, C.G. (2013). Fat tails, VaR and subadditivity. *Journal of Econometrics*, 172(2), 283–291.
- Daníelsson, J., Zigrand, J.-P. (2006). On time-scaling of risk and the square-root-of-time rule. *Journal of Banking & Finance*, 30(10), 2701–2713.
- Diebold, F.X., Mariano, R.S. (1995). Comparing predictive accuracy. *Journal of Business & Economic Statistics*, 13(3), 253–263.
- Dimitriadis, T., Bayer, S. (2019). A joint quantile and expected shortfall regression framework. *Electronic Journal of Statistics*, 13(1), 1823–1871.
- D'Innocenzo, E., Lucas, A., Schwaab, B., Zhang, X. (2024). Modeling extreme events: time-varying extreme tail shape. *Journal of Business & Economic Statistics*, 42(3), 903–917.
- Embrechts, P., Klüppelberg, C., Mikosch, T. (1997). Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Springer.
- Embrechts, P., Puccetti, G., Rüschendorf, L. (2013). Model uncertainty and VaR aggregation. *Journal of Banking & Finance*, 37(8), 2750–2764.
- Engle, R.F., Manganelli, S. (2004). CAViaR: conditional autoregressive value at risk by regression quantiles. *Journal of Business & Economic Statistics*, 22(4), 367–381.
- Ferro, C.A.T., Segers, J. (2003). Inference for clusters of extreme values. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, 65(2), 545–556.
- Fisher, R.A., Tippett, L.H.C. (1928). Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 24(2), 180–190.
- Fissler, T., Ziegel, J.F. (2016). Higher order elicitability and Osband's principle. *Annals of Statistics*, 44(4), 1680–1707.
- Francq, C., Zakoïan, J.-M. (2015). Risk-parameter estimation in volatility models. *Journal of Econometrics*, 184(1), 158–173.
- Franke, J., Härdle, W.K., Hafner, C.M. (2019). Statistics of Financial Markets: An Introduction, 5th ed. Springer.
- Giacomini, R., Komunjer, I. (2005). Evaluation and combination of conditional quantile forecasts. *Journal of Business & Economic Statistics*, 23(4), 416–431.
- Gnedenko, B. (1943). Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. *Annals of Mathematics*, 44(3), 423–453.

# Bibliografie (3/4)


- Gneiting, T. (2011). Making and evaluating point forecasts. *Journal of the American Statistical Association*, 106(494), 746–762.
- Gumbel, E.J. (1958). Statistics of Extremes. Columbia University Press.
- Härdle, W.K., Chen, C.Y.-H., Overbeck, L. (Eds.) (2017). Applied Quantitative Finance, 3rd ed. Springer.
- Harvey, D., Leybourne, S., Newbold, P. (1997). Testing the equality of prediction mean squared errors. *International Journal of Forecasting*, 13(2), 281–291.
- Hill, B.M. (1975). A simple general approach to inference about the tail of a distribution. *Annals of Statistics*, 3(5), 1163–1174.
- Hull, J., White, A. (1998). Incorporating volatility updating into the historical simulation method for value-at-risk. *Journal of Risk*, 1(1), 5–19.
- J.P. Morgan/Reuters (1996). RiskMetrics – Technical Document, 4th ed. New York.
- Koenker, R., Bassett, G. (1978). Regression quantiles. *Econometrica*, 46(1), 33–50.
- Longin, F.M. (2000). From value at risk to stress testing: the extreme value approach. *Journal of Banking & Finance*, 24(7), 1097–1130.
- McNeil, A.J., Frey, R. (2000). Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach. *Journal of Empirical Finance*, 7(3–4), 271–300.
- McNeil, A.J., Frey, R., Embrechts, P. (2015). Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools, revised ed. Princeton University Press.
- Newey, W.K., West, K.D. (1987). A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix. *Econometrica*, 55(3), 703–708.
- Newey, W.K., West, K.D. (1994). Automatic lag selection in covariance matrix estimation. *Review of Economic Studies*, 61(4), 631–653.
- Nolde, N., Ziegel, J.F. (2017). Elicitability and backtesting: perspectives for banking regulation. *Annals of Applied Statistics*, 11(4), 1833–1874.
- Patton, A.J., Ziegel, J.F., Chen, R. (2019). Dynamic semiparametric models for expected shortfall (and Value-at-Risk). *Journal of Econometrics*, 211(2), 388–413.

# Bibliografie (4/4)


- Pele, D.T., Lazar, E., Dufour, A. (2017). Information entropy and measures of market risk. *Entropy*, 19(5), 226.
- Pele, D.T., Lazar, E., Mazurencu-Marinescu-Pele, M. (2019). Modeling expected shortfall using tail entropy. *Entropy*, 21(12), 1204.
- Pele, D.T., Mazurencu-Marinescu-Pele, M. (2019). Using high-frequency entropy to forecast Bitcoin's daily value at risk. *Entropy*, 21(2), 102.
- Pele, D.T., Mazurencu-Marinescu-Pele, M. (2026). Finite-sample precision limits for expected shortfall forecast comparisons. *Mathematics*, 14(13), 2316.
- Pele, D.T., Wesselhöfft, N., Härdle, W.K., Kolossiatis, M., Yatracos, Y.G. (2023). Are cryptos becoming alternative assets?. *European Journal of Finance*, 29(10), 1064–1105.
- Pickands, J. (1975). Statistical inference using extreme order statistics. *Annals of Statistics*, 3(1), 119–131.
- Rockafellar, R.T., Uryasev, S. (2000). Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of Risk*, 2(3), 21–41.
- Rockafellar, R.T., Uryasev, S. (2002). Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking & Finance*, 26(7), 1443–1471.
- Spierdijk, L. (2016). Confidence intervals for ARMA–GARCH value-at-risk: the case of heavy tails and skewness. *Computational Statistics & Data Analysis*, 100, 545–559.
- Tasche, D. (2008). Capital allocation to business units and sub-portfolios: the Euler principle. arXiv:0708.2542.
- Taylor, J.W. (2019). Forecasting value at risk and expected shortfall using a semiparametric approach based on the asymmetric Laplace distribution. *Journal of Business & Economic Statistics*, 37(1), 121–133.
- Yamai, Y., Yoshiba, T. (2005). Value-at-risk versus expected shortfall: a practical perspective. *Journal of Banking & Finance*, 29(4), 997–1015.