

Modelarea piețelor financiare

Seminarul 11: Modele în timp continuu — aplicații



Daniel Traian PELE
Drd. Antoaneta Amza, antoaneta.amza@csie.ase.ro

Academia de Studii Economice din București
IDA Institute Digital Assets
Blockchain Research Center
AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance
Academia Română, Institutul de Prognoză Economică
MSCA Digital Finance

Întrebările de azi și structura seminarului

- Întrebările seminarului
  - **ce ne pot spune datele zilnice despre un model în timp continuu?**
  - **ce nu ne pot spune?**
- Livrabile
  - răspunsurile la exercițiile A
  - un tabel și o figură pentru fiecare exercițiu B
  - codul corectat din C1
  - o propoziție de interpretare pentru fiecare exercițiu
- Modele și date
  - modele: mișcarea browniană geometrică (*Geometric Brownian Motion*, GBM), procesul Ornstein–Uhlenbeck (OU) și modelul autoregresiv de ordinul 1, AR(1)
  - piețe: S&P 500 (indicele acțiunilor americane al *Standard & Poor's*), BET (indicele Bursei de Valori București, *Bucharest Exchange Trading*) și Bitcoin
  - în C1: un răspuns generat de inteligență artificială (*Artificial Intelligence*, AI)
- Notebook-ul de azi: `capitol11_notebook_seminar.ipynb` (Colab)
  - fiecare cerință indică secțiunea din notebook

Harta exercițiilor

Exercițiul	Întrebarea	Tip	Model
A1	cît de precis este κ dintr-un AR(1)?	Rezolvat	–
A2	ce măsoară termenul suplimentar din $\int W \, \mathrm{d}W$?	Rezolvat	–
A3	cît de mult îndepărtează cinci salturi pe an randamentele zilnice de distribuția Normală?	Rezolvat	–
B1	este S&P 500 un GBM? cît de bine cunoaștem σ și m?	Rezolvat	–
B2	revin cu adevărat dobînzile la medie?	Rezolvat	–
C1	ce este greșit într-un răspuns AI despre GBM?	Propus	A2, B1
B3	BET și Bitcoin: aceleași teste ca în B1 (acasă)	Propus	B1
După curs	B4: cît de repede converg Euler și Milstein? B5: resping datele GBM în favoarea salturilor?	Rezolvat	–
Extinderi	A4–A9; B2 și B5 extins, B6, B7, B8, B8 extins, B9; C2, C3 (opționale, după seminar)	ambele	pe fiecare cerință

- **[Rezolvat]**: rezolvarea completă în slide-uri și în notebook, un model de urmat; **[Propus]**: aplicați sau extindeți metoda; rezolvarea se discută la seminar
- Partea A: derivări pe hîrtie; Partea B: estimare și inferență pe date, fiecare cu o interpretare la final; Partea C: întrebări deschise și critica unui răspuns AI

Ce măsoară fiecare serie de date?

- FRED (*Federal Reserve Economic Data*) este baza de date economice a Rezervei Federale din St. Louis. DTB3 (*3-Month Treasury Bill: secondary market rate*) este codul FRED al ratei titlurilor de stat americane pe trei luni pe piața secundară, cotată anual pe bază de discount. Este o rată a dobînzii, nu randamentul unui preț.
- VIX (Cboe Volatility Index) măsoară volatilitatea implicită pe 30 de zile pentru S&P 500, cotată procentual anualizat. În model este o aproximare observabilă (*proxy*), nu varianța instantanee neobservată.
- SPY (*SPDR S&P 500 ETF Trust*, fondul tranzacționat la bursă pe indicele S&P 500) este simbolul unui fond care urmărește S&P 500. Barele lui de 5 minute servesc aplicației de volatilitate intrazilnică; sînt alte observații decît prețurile zilnice ale indicelui din exercițiile de bază.
- Zilele de tranzacționare și zilele calendaristice dau pași de timp diferiți. Fiecare estimare trebuie însoțită de calendarul și unitățile folosite.

Datele folosite

Seria	Simbol, cîmp	Calendar, curățare	Eșantion	Randamente
S&P 500	`GSPC.INDX`, close	zile lucrătoare; preț neactualizat (*stale*) = închidere neschimbată și maxim = minim	1990 – 2026	$n = 9\,245$
BET	`BET`, close	zile lucrătoare; seria BET nu are maxim/minim zilnic, deci orice închidere neschimbată este un preț neactualizat (nu apare niciunul)	2000 – 2026	$n = 6\,670$
Bitcoin	`BTC-USD.CC`, close	7 zile din 7, $\Delta t = 1/365$	2014 – 2026	$n = 4\,384$
VIX	`VIX.INDX`, close	zile lucrătoare	1990 – 2026	$n = 9\,283$ (9 284 de niveluri)
DTB3	FRED, procente /100	fără filtru	1954 – 2026	$n = 18\,170$ niveluri

- Prețurile zilnice din datele cursului, cîte o serie pe activ (cîmpul folosit: close); data de final 18 septembrie 2026
- Randamente logaritmice $r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1}$ pe calendarul fiecărei serii; randamentele zero reale (închidere neschimbată într-o zi cu tranzacții) se păstrează; extinderile folosesc și barele SPY la 5 minute și varianța realizată din Capitolul 9

Pregătire: rulați și verificați

```
# notebook section "Data" defines
# log_returns(key), load_vix(), read_fred(id)
rets = {k: log_returns(k)
        for k in ['sp500', 'bet', 'btc']}
for k, r in rets.items():
    print(k, len(r), r.index[0].date(),
          r.index[-1].date())
tb = read_fred('DTB3') / 100
print('DTB3', len(tb), tb.index[0].date())
print('VIX', len(load_vix()))
```

- Rezultatul așteptat

	n	prima dată
sp500	9 245	1990-01-03
bet	6 670	2000-01-06
btc	4 384	2014-09-18
DTB3 (niveluri)	18 170	1954-01-04
VIX (niveluri)	9 284	1990-01-02

- Toate seriile se termină la 2026-09-18; randamentele încep la o zi după primul preț
- Dacă un număr diferă, opriți-vă și verificați simbolul, cîmpul și data de început

Ce randament și ce pas de timp folosim?

- Simbolurile P_t și S_t desemnează ambele prețul unui activ. Litera aleasă pentru preț nu schimbă definiția randamentului.
- Un preț care crește de la 100 la 110 are un randament simplu de 10 procente. Randamentul logaritmic este aproximativ 0,0953, adică 9,53 procente după înmulțirea cu 100. Cele două sînt apropiate doar pentru variații mici.
- Aici randamentele logaritmice zilnice sînt zecimale. Volatilitatea și driftul sînt anualizate; înmulțirea estimării afișate cu 100 o exprimă procentual, fără să schimbe calculul.
- Δ și Δt desemnează ambele pasul de observare, în ani. Datele zilnice folosesc calendarul pieței respective; observații mai dese nu înseamnă mai mulți ani calendaristici.

Notația folosită în toate exercițiile

- W_t: mișcarea browniană standard (Mișcarea browniană); P: măsura reală, Q: măsura neutră la risc (Pachetele de extindere: schimbarea de măsură și Heston); Φ: funcția de repartiție a distribuției Normale standard
- Unități: timpul în ani; drifturi și volatilități pe an; SE (eroarea standard, *standard error*) ale procentelor în puncte procentuale; orice estimare se raportează cu SE sau cu intervalul de încredere (*confidence interval*, CI)

Mișcarea browniană

- Detalii: Capitolul 11
  - demonstrațiile și detaliile, la curs
- **Mersul aleator** (*random walk*): cîte un pas de mărime $\pm\sqrt{\Delta}$ la fiecare Δ ani

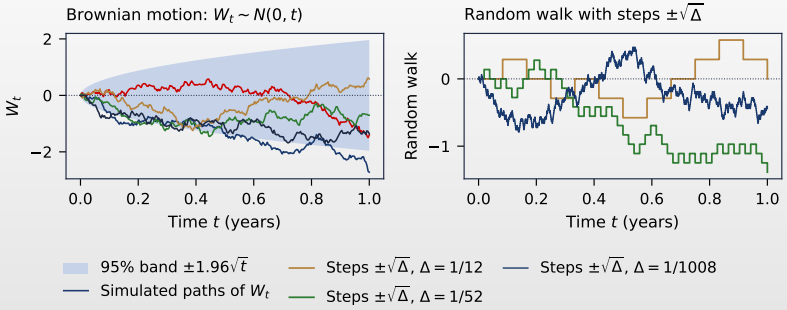
$$X_{t+\Delta} = X_t + \sqrt{\Delta}\,\epsilon_{t+\Delta}, \qquad \epsilon = \pm 1 \text{ cu probabilitatea } 1/2$$

  - după t/Δ pași: $\mathrm{Var}(X_t) = (t/\Delta)\cdot\Delta = t$, oricare ar fi lungimea pasului Δ
- **Mișcarea browniană standard** W_t, $t \geq 0$: limita mersului aleator cînd $\Delta \to 0$

$$W_0 = 0, \qquad W_{t+\Delta} - W_t \sim N(0,\ \Delta) \text{ independentă de trecut}, \qquad W_t \sim N(0,\ t)$$

  - traiectorii continue; abaterea standard a lui W_t crește ca $\sqrt{t}$
  - abaterea standard a unei creșteri este $\sqrt{\Delta}$, nu Δ: o zi de tranzacționare, $\Delta = 1/252$, are abaterea standard $\sqrt{1/252} = 0{,}063$
  - un pas simulat al lui σW este $\sigma\sqrt{\Delta}\,Z$, cu $Z \sim N(0,1)$

Traiectorii browniene simulate



- Stînga: cinci traiectorii simulate ale lui W_t pe un an (pași zilnici) și banda de 95% $\pm 1{,}96\sqrt{t}$
  - banda se lărgește ca $\sqrt{t}$: incertitudinea crește cu orizontul, dar mai lent decît orizontul
- Dreapta: mersuri aleatoare cu pași $\pm\sqrt{\Delta}$ pentru $\Delta = 1/12$, $1/52$ și $1/1\,008$
  - cînd Δ scade, treptele devin o traiectorie browniană: continuă, dar fără nicio porțiune netedă

Variația pătratică

- **Variația pătratică**: limita sumei pătratelor creșterilor pe o grilă $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ cu pasul $\Delta = T/n$

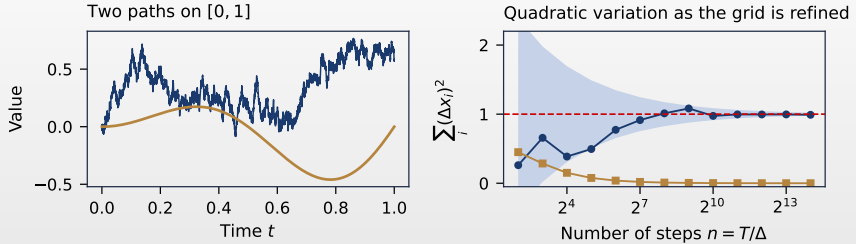
$$[W]_T = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right)^2 = T$$

  - fiecare pătrat are media Δ și dispersia $2\Delta^2$; cele n pătrate sînt independente
  - deci suma are media $n\Delta = T$ și dispersia $n \cdot 2\Delta^2 = 2T\Delta \to 0$: converge la constanta T
- O traiectorie netedă g (cu derivata g') are variația pătratică 0

$$\sum_i (\Delta g_i)^2 \approx \sum_i g'(t_i)^2 \, \Delta^2 \le \max_t g'(t)^2 \cdot T\Delta \to 0$$

- Regulile de calcul cu $\mathrm{d}W$: $(\mathrm{d}W)^2 = \mathrm{d}t$, $\mathrm{d}t\,\mathrm{d}W = 0$, $(\mathrm{d}t)^2 = 0$
  - pentru un preț cu $\mathrm{d}\ln S = m\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W$: $[\ln S]_T = \sigma^2 T$; varianța realizată (Capitolul 9) o estimează

Variația pătratică pe o traiectorie simulată



- Stînga: o traiectorie browniană pe $[0, 1]$ și o traiectorie netedă $g(t) = 0{,}6\, t \sin(2\pi t)$
- Dreapta: sumele pătratelor creșterilor pe grile cu $n = 4, 8, \ldots, 2^{\mathbf{14}}$ pași
  - traiectoria browniană: suma se stabilizează la $T = 1$ (0,99 cu $2^{\mathbf{14}}$ pași), în interiorul benzii $T \pm 1{,}96\sqrt{2T\Delta}$
  - traiectoria netedă: suma scade la 0, proporțional cu Δ

Integrala Itô

- **Integrala Itô** Itô (1944): limita sumelor în care integrandul este luat în punctul din **stînga** al fiecărui pas

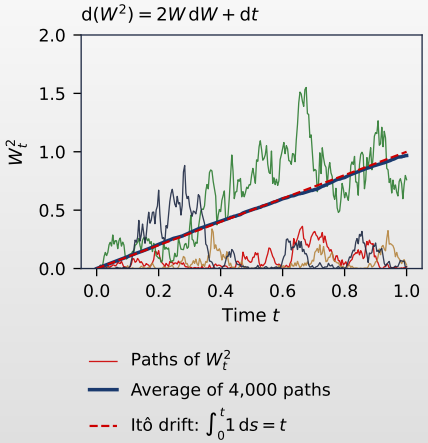
$$\int_0^T f_t \, \mathrm{d}W_t = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f_{t_i} \left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \right)$$

  - f_t: integrandul, cunoscut la momentul t (de exemplu o poziție aleasă înainte ca prețul să se miște); t_i: punctele grilei
  - citire: cîștigul unei strategii care deține f_{t_i} unități pe intervalul $[t_i, t_{i+1}]$
- Două proprietăți: media zero și izometria Itô

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T f_t \, \mathrm{d}W_t \right] = 0, \qquad \mathrm{Var}\left(\int_0^T f_t \, \mathrm{d}W_t \right) = \int_0^T \mathbb{E}\left[f_t^2 \right] \mathrm{d}t$$

  - media zero: f_{t_i} este fixat înaintea creșterii, care are media 0 și este independentă de el
- **Integrala Stratonovich**: media integrandului la **cele două capete**, $\frac{1}{2}(f_{t_i} + f_{t_{i+1}})$
  - folosește mișcarea următoare, deci în general media ei nu este zero (A2)

Lema lui Itô



- **Lema lui Itô**: regula de derivare pentru un proces $\mathrm{d}X = a\,\mathrm{d}t + b\,\mathrm{d}W$

$$\mathrm{d}f(X) = \left(af' + \tfrac{1}{2}b^2 f''\right)\mathrm{d}t + bf'\,\mathrm{d}W$$

  - a: driftul, b: coeficientul de difuzie al lui X; f', f'': derivatele de ordinul întîi și doi ale lui $f(x)$
  - o dezvoltare Taylor de ordinul doi în care $(\mathrm{d}X)^2 = b^2\,\mathrm{d}t$ nu dispare
  - regula obișnuită omite termenul $\frac{1}{2}b^2 f''\,\mathrm{d}t$
- Exemplu: $f(x) = x^2$, $X = W$ ($a = 0$, $b = 1$)

$$\mathrm{d}(W^2) = 2W\,\mathrm{d}W + \mathrm{d}t$$

  - graficul: media lui W_t^2 crește ca t (0,97 la $t = 1$), deși $\mathrm{d}W$ are media 0
- Momente: $\mathbb{E}[W_t^2] = t$, $\mathbb{E}[W_t^4] = 3t^2$, $\mathbb{E}[e^{aW_t}] = e^{a^2 t/2}$

Mișcarea browniană geometrică

- **GBM** Samuelson (1965): randamentul simplu $\mathrm{d}S/S$ pe $\mathrm{d}t$ are media $\mu\,\mathrm{d}t$ și dispersia $\sigma^2\,\mathrm{d}t$

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t\,\mathrm{d}t + \sigma S_t\,\mathrm{d}W_t$$

  - μ: randamentul așteptat pe an (driftul prețului); σ: volatilitatea pe an
- Itô cu $f = \ln S$ ($f' = 1/S$, $f'' = -1/S^2$) dă log-prețul și distribuția lui

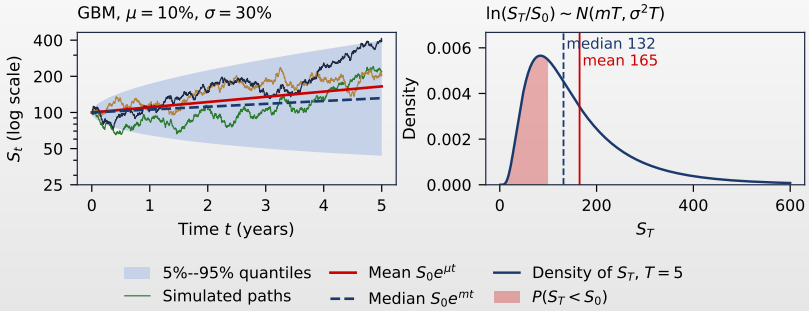
$$\mathrm{d}\ln S_t = m\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W_t, \qquad m = \mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2, \qquad \ln\frac{S_T}{S_0} \sim N\left(mT,\ \sigma^2 T\right)$$

  - m: driftul logaritmic, rata de creștere a medianei; simularea exactă: $\ln S_{t+\Delta} = \ln S_t + m\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}\,Z$
- Media, mediana și probabilitatea unei pierderi după T ani

$$\mathbb{E}[S_T] = S_0 e^{\mu T}, \qquad \mathrm{Med}(S_T) = S_0 e^{mT}, \qquad P(S_T < S_0) = \Phi\left(-\frac{m\sqrt{T}}{\sigma}\right)$$

  - Φ: funcția de repartiție a distribuției Normale standard; mediana este sub medie: cîteva valori foarte mari cresc media
  - exemplu: $\mu = 10\%$, $\sigma = 30\%$: $m = 0{,}10 - 0{,}045 = 5{,}5\%$; $P(S_1 < S_0) = \Phi(-0{,}18) = 0{,}43$

Traiectorii GBM simulate și distribuția lognormală



- Stînga: GBM cu $\mu = 10\%$, $\sigma = 30\%$, $S_0 = 100$, pe 5 ani, scală logaritmică
  - media $100e^{\mu t}$ (roșu) crește mai repede decît mediana $100e^{mt}$ (linia întreruptă): după 5 ani, 165 față de 132
- Dreapta: densitatea lognormală a lui S_5; aria hașurată este $P(S_5 < S_0) = \Phi(-m\sqrt{5}/\sigma) = 0{,}34$

Estimarea GBM din randamente zilnice

- Datele: n randamente logaritmice $r_t = \ln(S_t/S_{t-1})$ cu pasul Δ (în ani), pe $T = n\Delta$ ani

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n\Delta}\sum_{t=1}^{n}(r_t - \bar{r})^2, \qquad \hat{m} = \frac{\bar{r}}{\Delta}, \qquad \hat{\mu} = \hat{m} + \tfrac{1}{2}\hat{\sigma}^2$$

  - $\bar{r}$: media de selecție a randamentelor r_t; sub GBM fiecare $r_t \sim N(m\Delta, \sigma^2\Delta)$

- Erorile standard sub GBM, cu randamente Normale independente și identic distribuite (i.i.d.)

$$\mathrm{SE}(\hat{\sigma}) \approx \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{2n}}, \qquad \mathrm{SE}(\hat{m}) = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{T}}, \qquad \mathrm{CI}_{95\%}(m) = \hat{m} \pm 1{,}96\,\mathrm{SE}(\hat{m})$$

  - $\hat{\sigma}$ se îmbunătățește cu numărul de observații n; $\hat{m}$ doar cu lungimea calendaristică T
  - anii necesari pentru $\pm h$ în jurul lui m la 95%: $T = (1{,}96\,\hat{\sigma}/h)^2$

- Fără normalitate (randamente independente cu excesul de kurtosis k, definit pe slide-ul următor)

$$\mathrm{SE}(\hat{\sigma}) \approx \hat{\sigma}\sqrt{\frac{k+2}{4n}}$$

  - $k = 0$ redă $\hat{\sigma}/\sqrt{2n}$; cozile groase ($k > 0$) fac $\hat{\sigma}$ mai puțin precis

Testarea normalității: Jarque–Bera

- Asimetria și kurtosisul de selecție ale randamentelor standardizate $z_t = (r_t - \bar{r})/s$, s: abaterea standard de selecție

$$\hat{S} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} z_t^3, \qquad \hat{K} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} z_t^4, \qquad k = \hat{K} - 3 \text{ (excesul de kurtosis)}$$

- **Jarque–Bera** Jarque & Bera (1980): H_0: randamente cu distribuția Normală ($S = 0$, $K = 3$)

$$JB = \frac{n}{6}\left(\hat{S}^2 + \frac{(\hat{K} - 3)^2}{4}\right) \sim \chi^2_2 \text{ sub } H_0$$

  - respingem la 5% dacă $JB > 5{,}99$; valori mari: asimetrie sau cozi groase

Testarea independenței: ACF și Ljung–Box

- Funcția de autocorelație (*Autocorrelation Function*, ACF) de selecție la lagul k a unei serii x_t (aici $x_t = |r_t|$; k: lagul, nu excesul de kurtosis)

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{n}(x_t - \bar{x})(x_{t-k} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^{n}(x_t - \bar{x})^2}$$

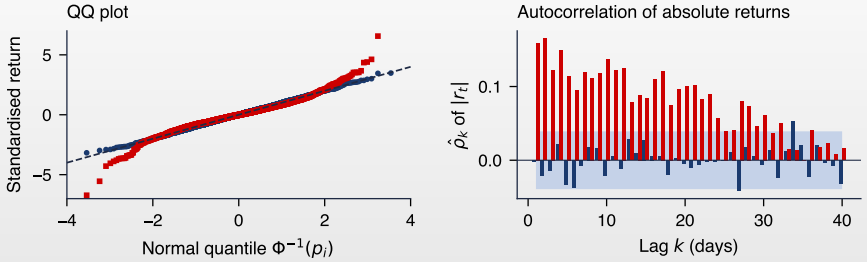
  - pentru date independente $\hat{\rho}_k \approx N(0, 1/n)$: banda $\pm 1{,}96/\sqrt{n}$

- **Ljung–Box** Ljung & Box (1978): H_0: $\rho_1 = \cdots = \rho_h = 0$

$$Q(h) = n(n+2)\sum_{k=1}^{h}\frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k} \;\sim\; \chi^2_h \text{ sub } H_0$$

  - $h = 20$: respingem la 5% dacă $Q > \chi^2_{20;\,0{,}95} = 31{,}4$; pe $|r_t|$ testează gruparea volatilității (*volatility clustering*)

Graficul QQ și ACF: GBM față de randamente realiste



- **Graficul cuantilă–cuantilă** (*quantile–quantile*, QQ): valorile z_t sortate față de cuantilele Normale $\Phi^{-1}(p_i)$, $p_i = (i - 0{,}5)/n$; datele Normale stau pe dreapta de 45 de grade
- Două eșantioane simulate de $n = 2\,500$ de zile: Normal i.i.d. (GBM) și un model de heteroscedasticitate condiționată GARCH (*Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity*) cu șocuri Student-t
  - GBM: $JB = 0{,}2$, $Q(20) = 17{,}5$ pe $|r_t|$: niciun test nu respinge
  - GARCH: $JB = 2\,566$ ($\hat{K} = 8{,}0$), $Q(20) = 688$: ambele resping; cozile se îndepărtează de dreaptă, iar $\hat{\rho}_k$ al lui $|r_t|$ rămîne pozitiv

Raportul variațelor și bootstrap-ul pe blocuri suprapuse

- **Raportul variațelor** (*variance ratio*) pe q perioade: dispersia sumelor pe q perioade fără suprapunere, împărțită la q ori dispersia pe o perioadă

$$VR(q) = \frac{\widehat{\mathrm{Var}}\left(r_t + r_{t+1} + \cdots + r_{t+q-1}\right)}{q\,\widehat{\mathrm{Var}}(r_t)}$$

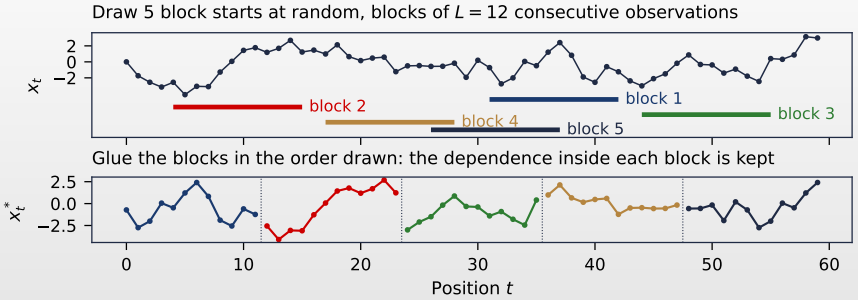
  - randamente necorelate: $VR = 1$; $VR < 1$: autocorelație negativă (inversări); $VR > 1$: autocorelație pozitivă

- **Bootstrap-ul pe blocuri suprapuse** Künsch (1989): incertitudinea unei statistici $\hat{\theta}$ fără un model
  1. extrageți aleator $\lceil n/L \rceil$ puncte de început; luați blocurile $(r_s, \ldots, r_{s+L-1})$ de L randamente consecutive
  2. lipiți-le într-o serie de lungime n și recalculați statistica: $\hat{\theta}_b^*$
  3. repetați pentru $b = 1, \ldots, B$

$$\mathrm{SE}^*(\hat{\theta}) = \sqrt{\frac{1}{B-1}\sum_{b=1}^{B}\left(\hat{\theta}_b^* - \bar{\theta}^*\right)^2}, \qquad \mathrm{CI}_{95\%} = \left[q^*_{2,5\%},\ q^*_{97,5\%}\right]$$

  - $\bar{\theta}^*$: media valorilor $\hat{\theta}_b^*$; q_p^*: cuantila lor p; blocurile păstrează dependența (gruparea volatilității) mai scurtă decît L

Bootstrap-ul pe blocuri suprapuse, o reeșantionare



- Sus: o serie persistentă de $n = 60$ de observații și cinci blocuri de $L = 12$ observații consecutive, extrase aleator (se pot suprapune)
- Jos: seria reeșantionată x^*; în fiecare bloc se păstrează ordinea inițială, dependența se pierde doar la îmbinări

Revenirea la medie: procesul OU

- **Procesul Ornstein–Uhlenbeck (OU)** Uhlenbeck & Ornstein (1930): atras spre nivelul θ cu viteza $\kappa > 0$

$$\mathrm{d}x_t = \kappa(\theta - x_t)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W_t$$

  - peste θ driftul este negativ, sub θ pozitiv; σ: volatilitatea șocurilor; Vasicek Vasicek (1977): OU pentru dobînda pe termen scurt
- Eșantionat la fiecare Δ ani, OU este **exact** un AR(1)

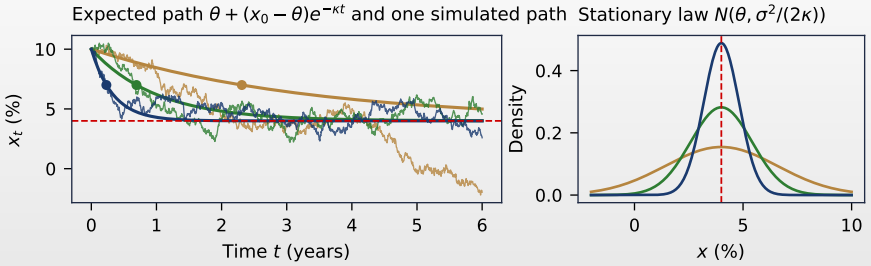
$$x_{t+\Delta} = a + b\,x_t + \varepsilon_{t+\Delta}, \qquad b = e^{-\kappa\Delta}, \qquad a = \theta(1-b), \qquad \mathrm{Var}(\varepsilon) = s^2 = \frac{\sigma^2(1-b^2)}{2\kappa}$$

  - ε: erori Normale i.i.d.; traiectoria așteptată: $\mathbb{E}[x_t \mid x_0] = \theta + (x_0 - \theta)e^{-\kappa t}$
- **Timpul de înjumătățire** și distribuția staționară

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\kappa}, \qquad x_\infty \sim N\left(\theta,\ \frac{\sigma^2}{2\kappa}\right)$$

  - $t_{1/2}$: timpul în care o abatere așteptată de la θ se reduce la jumătate; un κ mai mare: revenire mai rapidă, distribuție mai îngustă
  - exemplu: date lunare ($\Delta = 1/12$), $b = 0{,}95$: $\kappa = -12\ln 0{,}95 = 0{,}62$ pe an, $t_{1/2} = 1{,}1$ ani

Traiectorii OU simulate



- Stînga: pornire $x_0 = 10\%$, nivel $\theta = 4\%$, $\sigma = 0{,}02$, trei viteze κ: traiectoriile așteptate (groase) și cîte o traiectorie simulată
  - punctele marchează timpii de înjumătățire $\ln 2/\kappa$: jumătate din distanța pînă la θ a dispărut
  - OU poate deveni negativ (traiectoria lentă): dobînda Vasicek nu este mărginită inferior
- Dreapta: distribuțiile staționare $N(\theta, \sigma^2/(2\kappa))$: cu cît revenirea este mai rapidă, cu atît sînt mai înguste

Estimarea OU: OLS și metoda delta

- Regresia prin metoda celor mai mici pătrate (*Ordinary Least Squares*, OLS) a lui $x_{t+\Delta}$ pe x_t (n tranziții), apoi inversarea celor trei relații

$$\hat{b} = \frac{\sum_t (x_t - \bar{x}_0)(x_{t+\Delta} - \bar{x}_1)}{\sum_t (x_t - \bar{x}_0)^2}, \qquad \hat{\kappa} = -\frac{\ln \hat{b}}{\Delta}, \qquad \hat{\theta} = \frac{\hat{a}}{1 - \hat{b}}$$

  - $\bar{x}_0$, $\bar{x}_1$: mediile regresorului și ale variabilei dependente; pentru un AR(1) staționar, $\mathrm{Var}(\hat{b}) \approx (1 - b^2)/n$
- **Metoda delta**: SE a unei funcții netede g de o estimare (dezvoltare Taylor de ordinul întîi)

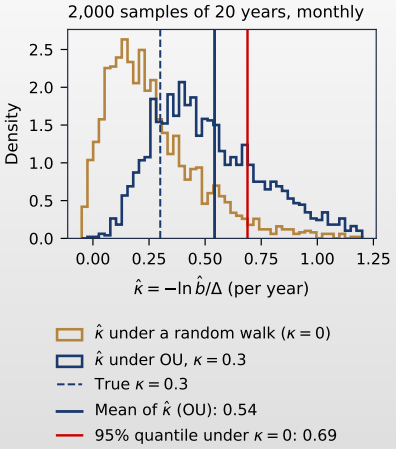
$$g(\hat{\beta}) \approx g(\beta) + g'(\beta)(\hat{\beta} - \beta) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{SE}\left(g(\hat{\beta})\right) \approx \left|g'(\hat{\beta})\right| \mathrm{SE}(\hat{\beta})$$

  - intervalul Wald: $\hat{\kappa} \pm 1{,}96\,\mathrm{SE}(\hat{\kappa})$; o funcție monotonă transformă capetele unui interval: $t_{1/2} \in [\ln 2/\kappa_{\max},\ \ln 2/\kappa_{\min}]$ dacă $\kappa_{\min} > 0$
- În eșantioane mici $\hat{b}$ este deplasat **în jos**, deci $\hat{\kappa}$ este deplasat **în sus**

$$\text{deplasarea}(\hat{\kappa}) = \mathbb{E}[\hat{\kappa}] - \kappa \approx \frac{4}{T}$$

  - $T = n\Delta$: lungimea în ani; aproximarea din Tang & Chen (2009)
  - un mers aleator ($\kappa = 0$) poate părea că revine la medie

Deplasarea lui $\hat{\kappa}$ și un test Monte Carlo



- 2 000 de eșantioane OU simulate de 20 de ani, lunare, cu $\kappa = 0{,}3$ (albastru)
  - media lui $\hat{\kappa}$: 0,54, o deplasare de 0,24, apropiată de $4/T = 0{,}20$
- Același calcul sub un mers aleator, $\kappa = 0$ (auriu): $\hat{\kappa}$ este pozitiv, media 0,27
- **Testul Monte Carlo** pentru H_0: $\kappa = 0$
  - simulați R eșantioane sub H_0, estimați $\hat{\kappa}_1^*, \ldots, \hat{\kappa}_R^*$

$$p = \frac{1 + \#\{j : \hat{\kappa}_j^* \geq \hat{\kappa}\}}{R + 1}$$

  - $\#$: numărul valorilor simulate cel puțin egale cu $\hat{\kappa}$ observat; $+1$ numără și eșantionul observat
  - respingem la 5% dacă $\hat{\kappa}$ depășește cuantila de 95% sub H_0 (aici 0,69), nu dacă depășește 0

Salturi: modelul Merton

- **Procesul Poisson** N_t: numără salturile care sosesc cu rata λ pe an; pe Δ ani

$$P(N_\Delta = k) = e^{-\lambda\Delta}\,\frac{(\lambda\Delta)^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad \mathbb{E}[N_\Delta] = \mathrm{Var}(N_\Delta) = \lambda\Delta$$

  - $\lambda = 5$: un salt în circa $5/252 = 2\%$ din zile; niciun salt într-un an cu probabilitatea e^{-5}
- **Difuzia cu salturi Merton** Merton (1976): randamentul logaritmic GBM plus suma salturilor din ziua respectivă

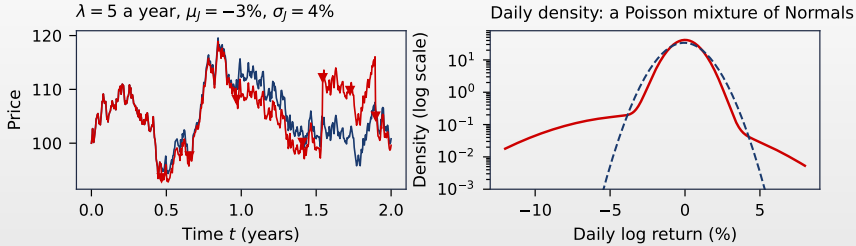
$$r_\Delta = m\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}\,Z + \sum_{j=1}^{N_\Delta} Y_j, \qquad Z \sim N(0,1), \qquad Y_j \sim N(\mu_J, \sigma_J^2)$$

  - μ_J: mărimea medie a saltului (negativă: prăbușiri); σ_J: dispersia mărimilor; Z, N, Y_j independente
- Condiționat de k salturi, randamentul este Normal, deci densitatea este un amestec Poisson de densități Normale

$$f(r) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N_\Delta = k)\;\varphi\left(r;\; m\Delta + k\mu_J,\; \sigma^2\Delta + k\sigma_J^2\right)$$

  - $\varphi(\cdot;\ \text{medie}, \text{dispersie})$: densitatea Normală; în practică suma se oprește la $k = 12$

O traiectorie Merton simulată și densitatea zilnică



- Stînga: doi ani cu $\sigma = 15\%$, $\lambda = 5$, $\mu_J = -3\%$, $\sigma_J = 4\%$; aceleași șocuri de difuzie fără salturi (albastru) și cu salturi (roșu)
- Dreapta, scală logaritmică: amestecul are un vîrf mai înalt și cozi mult mai groase decît distribuția Normală cu aceeași medie și dispersie
- **Ce credeți**: pe panoul din stînga, puteți recunoaște cele 7 zile cu salt din 504 după mărimea randamentului?
- **Răspuns**: doar unele; majoritatea salturilor seamănă cu mișcări mari obișnuite ale difuziei

Cumulanți, informația Fisher, eroarea Monte Carlo

- **Funcția generatoare a cumulanților** și cumulanții c_k ai unui randament r

$$K(u) = \ln \mathbb{E}\left[e^{ur}\right], \qquad c_k = K^{(k)}(0), \qquad \text{asimetria} = \frac{c_3}{c_2^{3/2}}, \qquad \text{excesul de kurtosis} = \frac{c_4}{c_2^2}$$

  - $K^{(k)}(0)$: derivata de ordinul k în 0; c_1: media, c_2: dispersia; pentru componente independente cumulanții se adună
  - distribuția Normală are $c_k = 0$ pentru $k \geq 3$: ce produce asimetria în Merton? (A3)

- **Informația Fisher** despre un parametru β dintr-o log-verosimilitate $\ell(\beta)$ și SE a estimatorului de verosimilitate maximă (*maximum likelihood estimator*, MLE) $\hat{\beta}$

$$I(\beta) = -\mathbb{E}\left[\ell''(\beta)\right], \qquad \mathrm{SE}(\hat{\beta}) \approx \frac{1}{\sqrt{I(\hat{\beta})}}$$

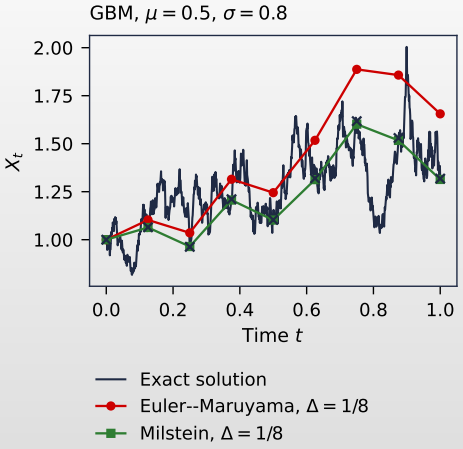
  - o log-verosimilitate puternic curbată: multă informație, SE mică; cu mai mulți parametri I este o matrice (minus hessiana așteptată)

- **Eroarea Monte Carlo** a unei probabilități simulate $\hat{p}$ din N traiectorii independente

$$\mathrm{SE}(\hat{p}) = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{N}}, \qquad \mathrm{SE}(\bar{X}) = \frac{s_X}{\sqrt{N}}$$

  - s_X: abaterea standard între traiectorii; eroarea scade doar ca $1/\sqrt{N}$: de 100 de ori mai multe traiectorii pentru o cifră în plus

Discretizarea: Euler–Maruyama și Milstein



- O ecuație diferențială stocastică (*stochastic differential equation*, SDE) $\mathrm{d}X = a(X)\,\mathrm{d}t + b(X)\,\mathrm{d}W$ pe o grilă cu pasul Δ, $\Delta W \sim N(0, \Delta)$; Euler–Maruyama (EM) și Milstein Higham (2001)

$$\text{EM}: \; X_{t+\Delta} = X_t + a\Delta + b\,\Delta W$$

$$\text{Milstein}: \; \text{EM} + \tfrac{1}{2} b\, b' \left[(\Delta W)^2 - \Delta\right]$$

  - a, b, b' evaluate în X_t; Milstein adaugă termenul Itô din $(\Delta W)^2 \approx \Delta$

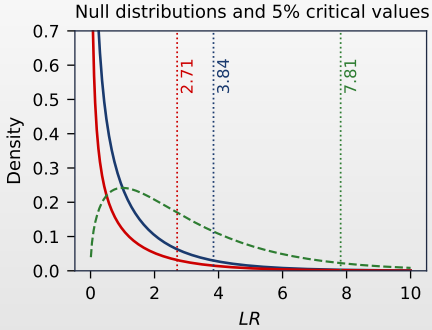
- Erorile la T și ordinele lor

$$e_{\mathrm{s}}(\Delta) = \mathbb{E}\left|X_T - X_T^{\Delta}\right| \le C\Delta^{\gamma}$$

$$e_{\mathrm{w}}(\Delta) = \left|\mathbb{E}X_T - \mathbb{E}X_T^{\Delta}\right| \le C\Delta^{\beta}$$

  - X_T^{Δ}: schema la T; tare: traiectorie cu traiectorie, slabă: medii; EM: $\gamma = 1/2$, $\beta = 1$; Milstein: $\gamma = 1$
  - ordinul γ este panta lui $\ln e$ în raport cu $\ln \Delta$
  - graficul: o traiectorie GBM, 8 pași: EM se termină la 0,34 de valoarea exactă, Milstein la 0,004

Testul raportului de verosimilitate și frontiera



- χ^2_1: interior parameter (Wilks)
- $\frac{1}{2}\chi^2_0 + \frac{1}{2}\chi^2_1$ (mass $\frac{1}{2}$ at 0): parameter on the boundary
- χ^2_3

- **Raportul de verosimilitate** (*likelihood ratio*, LR): compară log-verosimilitățile maximizate ale unui model și ale versiunii lui restrînse

$$LR = 2\left(\ell_{\mathbf{1}} - \ell_{\mathbf{0}}\right) \geq 0$$

  - $\ell_{\mathbf{1}}$: modelul nerestrîns (Merton), $\ell_{\mathbf{0}}$: cel restrîns (GBM); un LR mare: restricția se potrivește mult mai prost

- **Wilks** Wilks (1938): sub $H_{\mathbf{0}}$, $LR \sim \chi^{\mathbf{2}}_d$, d = numărul restricțiilor
  - cere ca valoarea adevărată să fie în interiorul spațiului parametrilor și toți parametrii să fie identificați sub $H_{\mathbf{0}}$
  - cu $\lambda = 0$ pe frontieră distribuția sub $H_{\mathbf{0}}$ se schimbă (graficul: roșu față de albastru)

- **Bootstrap-ul parametric**: simulați B eșantioane din modelul estimat sub $H_{\mathbf{0}}$, reestimați ambele modele, obțineți $LR^*_{\mathbf{1}}, \ldots, LR^*_B$

$$p = \frac{1 + \#\{b : LR^*_b \geq LR\}}{B + 1}$$

Pachetele de extindere: schimbarea de măsură și Heston

- Pachetele de extindere (după curs) folosesc încă trei modele; formulele sînt mai jos
- **Girsanov** Girsanov (1960): GBM sub măsura neutră la risc Q, cu rata fără risc r

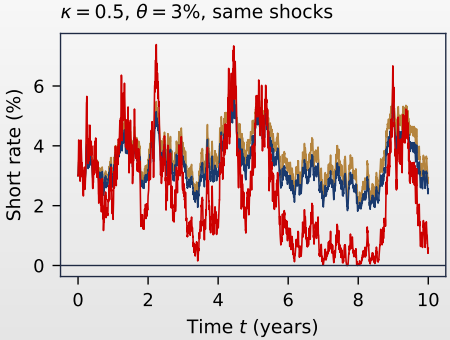
$$\mathrm{d}\tilde{W}_t = \mathrm{d}W_t + \frac{\mu - r}{\sigma}\,\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{d}S_t = rS_t\,\mathrm{d}t + \sigma S_t\,\mathrm{d}\tilde{W}_t$$

  - $\tilde{W}$ este o mișcare browniană sub Q; $(\mu - r)/\sigma$: prețul riscului de piață
  - driftul se schimbă din μ în r, volatilitatea σ nu: P servește la prognoză, Q la evaluare
- **Heston** Heston (1993): volatilitate stocastică, varianța v_t revine la medie

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t\,\mathrm{d}t + \sqrt{v_t}\,S_t\,\mathrm{d}W_t^{(1)}, \qquad \mathrm{d}v_t = \kappa(\theta - v_t)\,\mathrm{d}t + \xi\sqrt{v_t}\,\mathrm{d}W_t^{(2)}$$

  - θ: varianța pe termen lung, κ: viteza ei de revenire, ξ: volatilitatea varianței
  - $\rho = \mathrm{Corr}(\mathrm{d}W^{(1)}, \mathrm{d}W^{(2)}) < 0$: prețurile scad cînd varianța crește (efectul de levier)

Pachetele de extindere: procesul CIR și condiția Feller



- **Cox–Ingersoll–Ross (CIR)** Cox, Ingersoll & Ross (1985): ca OU, dar volatilitatea crește cu $\sqrt{r}$

$$\mathrm{d}r_t = \kappa(\theta - r_t)\,\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{r_t}\,\mathrm{d}W_t$$

  - lîngă 0 șocurile dispar, iar driftul $\kappa\theta > 0$ împinge rata în sus
  - aceeași medie condiționată $\mathbb{E}[r_t \mid r_0]$ ca OU (Revenirea la medie: procesul OU)
- **Condiția Feller**: r_t nu atinge niciodată 0 dacă

$$2\kappa\theta \geq \sigma^2$$

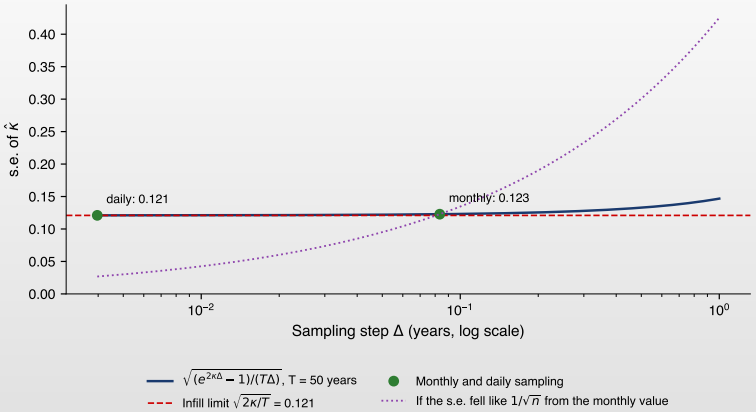
  - graficul: aceleași șocuri; albastrul o îndeplinește ($2\kappa\theta/\sigma^2 = 3$), roșul nu (0,48) și atinge 0; Vasicek (auriu) devine negativ
- **Chan–Karolyi–Longstaff–Sanders (CKLS)** Chan, Karolyi, Longstaff & Sanders (1992): volatilitatea σr^γ
  - $\gamma = 0$: Vasicek; $\gamma = 1/2$: CIR; γ se estimează din date

A1 [Rezolvat]: De la un AR(1) la un proces OU — Cerință

- **Întrebarea**: cît de precis determină un eșantion lunar de 50 de ani viteza de revenire la medie?
- **Date de intrare**: un AR(1) estimat pe $n = 600$ de tranziții lunare ($T = n\Delta = 50$ de ani, $\Delta = 1/12$) ale unei rate în formă zecimală: $x_{t+1} = 0{,}0012 + 0{,}97\, x_t + \varepsilon_t$, abaterea standard a reziduurilor $\hat{s}_\varepsilon = 0{,}0025$; rata este un proces OU eșantionat exact, cu b, a, s^2 ca în Revenirea la medie: procesul OU
- **Sarcini**
  1. Inversați cele trei relații pentru a obține κ, θ, σ și timpul de înjumătățire $\ln 2/\kappa$.
  2. Folosiți $\mathrm{Var}(\hat{b})$ pentru eșantioane mari și metoda delta din Estimarea OU: OLS și metoda delta pentru a calcula SE a lui $\hat{\kappa}$.
  3. Construiți un interval de 95% pentru timpul de înjumătățire transformînd intervalul pentru κ (valid doar dacă ambele capete sînt pozitive).
  4. Păstrați $T = 50$ de ani, dar eșantionați zilnic ($\Delta = 1/252$): calculați b, SE a lui $\hat{\kappa}$ și limita ei $\sqrt{2\kappa/T}$.
- **Raportați**: un tabel cu parametrul, formula și valoarea; SE doar pentru $\hat{\kappa}$; intervalul pentru timpul de înjumătățire; SE zilnică
- **Interpretare**: face eșantionarea zilnică estimarea lui κ mai precisă?
- Notebook: secțiunea A1

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

A1 [Rezolvat]: Relații, metoda delta și frecvența de eșantionare (1/2)



MFM_ch11_seminar

A1 [Rezolvat]: Relații, metoda delta și frecvența de eșantionare (2/2)

1. $\kappa = -\ln b/\Delta = -12\ln 0{,}97 = 0{,}366$; $\theta = a/(1-b) = 0{,}0012/0{,}03 = 4{,}0\%$; $\sigma = s\sqrt{2\kappa/(1-b^2)} = 0{,}88\%$; timpul de înjumătățire $\ln 2/\kappa = 1{,}90$ ani
2. $\mathrm{SE}(\hat{b}) = \sqrt{(1-0{,}97^2)/600} = 0{,}0099$; $\partial\kappa/\partial b = -1/(b\Delta)$, deci $\mathrm{SE}(\hat{\kappa}) = 0{,}0099/(0{,}97/12) = 0{,}123$
3. $\kappa \in [0{,}125; 0{,}606]$, ambele capete pozitive, deci timpul de înjumătățire este în $[\ln 2/0{,}606, \ln 2/0{,}125] = [1{,}14; 5{,}55]$ ani: asimetric în jurul lui 1,90
4. Zilnic: $b = e^{-\kappa/252} = 0{,}99855$, $n = 12\,600$, SE 0,121; în general $\mathrm{Var}(\hat{\kappa}) \approx (e^{2\kappa\Delta} - 1)/(T\Delta) \to 2\kappa/T$, limita 0,121 (graficul)

⊡ **Interpretare**: de 21 de ori mai multe observații dau aceeași precizie: κ este identificat de timpul calendaristic, nu de numărul de puncte; dacă intervalul pentru κ ar atinge zero, timpul de înjumătățire ar fi nemărginit

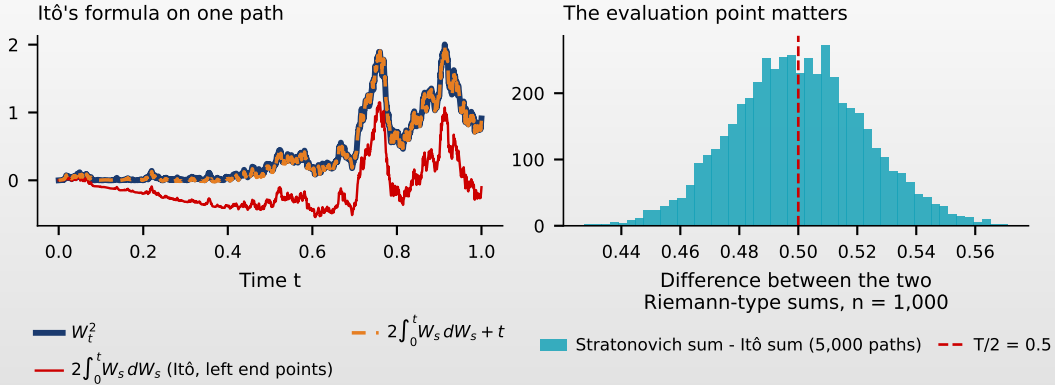
MFM_ch11_seminar

A2 [Rezolvat]: Integrale Itô — Cerință

- **Întrebările**
  - ce măsoară termenul suplimentar din $\int_0^T W \, \mathrm{d}W$?
  - de ce media lui este zero?
- **Date de intrare**: o mișcare browniană standard W pe $[0, T]$, $T = 1$ pentru cifre; momentele ei: Lema lui Itô; fără date
- **Sarcini**
  1. Aplicați lema lui Itô pentru $f(x) = x^2$ și arătați că $\int_0^T W \, \mathrm{d}W = \frac{1}{2}(W_T^2 - T)$.
  2. Calculați media și dispersia acestei integrale și verificați dispersia cu izometria Itô.
  3. Integrala Stratonovich (media capetelor) este $\frac{1}{2} W_T^2$: calculați-i media.
  4. Aplicați lema lui Itô pentru W_t^3 și deduceți media și dispersia lui $\int_0^1 W^2 \, \mathrm{d}W$.
- **Raportați**: un tabel cu integrala, media și dispersia pentru $\int W \, \mathrm{d}W$, integrala Stratonovich și $\int W^2 \, \mathrm{d}W$
- **Interpretare**: de ce o integrală Itô trebuie să aibă media zero, iar integrala Stratonovich nu?
- Notebook: secțiunea A2

Înapoi Lista exercițiilor

A2 [Rezolvat]: Identitate, momente și o verificare prin simulare (1/2)



MFM_ch11_ito

A2 [Rezolvat]: Identitate, momente și o verificare prin simulare (2/2)

1. $\mathrm{d}(W^2) = 2W\,\mathrm{d}W + \mathrm{d}t$; integrînd de la 0 la T: $W_T^2 = 2\int_0^T W\,\mathrm{d}W + T$, deci $\int_0^T W\,\mathrm{d}W = \frac{1}{2}(W_T^2 - T)$
2. Media $\frac{1}{2}(\mathbb{E}[W_1^2] - 1) = 0$; dispersia $\frac{1}{4}\mathrm{Var}(W_1^2) = \frac{1}{4}(3-1) = 0{,}5$; izometria: $\int_0^1 \mathbb{E}[W_t^2]\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = 0{,}5$
3. Stratonovich: media $\frac{1}{2}\mathbb{E}[W_1^2] = 0{,}5 \neq 0$
4. $\mathrm{d}(W^3) = 3W^2\,\mathrm{d}W + 3W\,\mathrm{d}t$; $\mathbb{E}\int_0^1 W^2\,\mathrm{d}W = 0$ și $\mathrm{Var} = \int_0^1 \mathbb{E}[W_t^4]\,\mathrm{d}t = \int_0^1 3t^2\,\mathrm{d}t = 1$
5. Graficul (simularea din notebook): stînga, $2\int_0^t W\,\mathrm{d}W + t$ se suprapune aproximativ peste W_t^2 (2 000 de pași; identitatea exactă pe grilă are $\sum_i (\Delta W_i)^2$ în locul lui t); dreapta, Stratonovich minus Itô pe 5 000 de traiectorii are media 0,500; sumele Itô au dispersia 0,520

⊡ **Interpretare**: integrandul Itô este fixat înaintea incrementului, deci o strategie nu poate anticipa mișcarea; media capetelor folosește mișcarea următoare și cîștigă în medie $T/2$: jumătate din variația pătratică $[W]_T = T$

MFM_ch11_ito

A3 [Rezolvat]: Merton: cumulanți și informația despre λ — Cerință

- **Întrebările**
  - cît de mult îndepărtează cinci salturi modeste pe an randamentele zilnice de distribuția Normală?
  - cît de precis poate fi estimat λ?
- **Date de intrare**: randamentul zilnic Merton r_Δ din Salturi: modelul Merton; $\sigma = 15\%$, $\lambda = 5$ pe an, $\mu_J = -3\%$, $\sigma_J = 4\%$, $\Delta = 1/252$; pentru pasul 4, $T = 36{,}7$ ani
- **Sarcini**
  1. Scrieți funcția generatoare a cumulanților $K(u) = \ln \mathbb{E}[e^{ur_\Delta}]$ și arătați că cumulanții (Cumulanți, informația Fisher, eroarea Monte Carlo) sînt $c_k = \lambda \Delta \, \mathbb{E}[Y^k]$ pentru $k \geq 3$.
  2. Calculați c_2, separat pe difuzie și salturi, apoi c_3 și c_4.
  3. Calculați asimetria $c_3/c_2^{3/2}$ și excesul de kurtosis c_4/c_2^2.
  4. Presupuneți că fiecare salt este observat: deduceți informația Fisher a numărului Poisson N_T și SE a lui $\hat{\lambda} = N_T/T$ la $\lambda = 5$; repetați la MLE din B5 $\hat{\lambda} = 101{,}9$ și comparați cu SE MLE 10,5.
- **Raportați**: un tabel cu componentele de difuzie și de salt ale lui c_2, c_3, c_4, asimetria, excesul de kurtosis; cele două erori standard
- **Interpretare**: de ce SE a MLE este mult mai mare decît SE cu salturi observate?
- Notebook: secțiunea A3

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

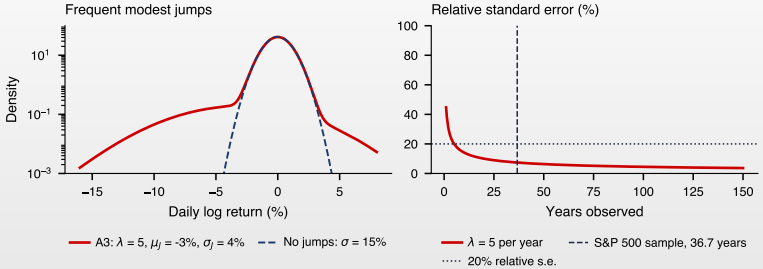
A3 [Rezolvat]: Cumulanții

1. $K(u) = u\,m\Delta + \frac{1}{2}u^2\sigma^2\Delta + \lambda\Delta\left(\mathbb{E}[e^{uY}] - 1\right)$; derivata de ordinul k în 0 dă $c_k = \lambda\Delta\,\mathbb{E}[Y^k]$ pentru $k \geq 3$
2. $\mathbb{E}[Y^2] = \mu_J^2 + \sigma_J^2$, $\mathbb{E}[Y^3] = \mu_J^3 + 3\mu_J\sigma_J^2$, $\mathbb{E}[Y^4] = \mu_J^4 + 6\mu_J^2\sigma_J^2 + 3\sigma_J^4$ (momentele unei variabile Normale)
3. Înlocuim în tabelul de mai jos; asimetria $c_3/c_2^{3/2} = -2{,}07$, excesul de kurtosis $c_4/c_2^2 = 17{,}6$

	Difuzie	Salturi	Total
c_2 $(\times 10^{-4})$	$\sigma^2\Delta = 0{,}893$	$\lambda\Delta\mathbb{E}[Y^2] = 0{,}496$	1,389 (35,7% salturi)
c_3 $(\times 10^{-6})$	0	$-3{,}393$	$-3{,}393$
c_4 $(\times 10^{-7})$	0	3,399	3,399

- **Interpretare**: cinci salturi modeste pe an, o zi din 50, îndepărtează puternic randamentele zilnice de distribuția Normală; difuzia adaugă dispersie, dar nu și cumulanți de ordin superior

A3 [Rezolvat]: Informația despre λ



4. Log-verosimilitatea numărului Poisson $\ell(\lambda) = N_T \ln \lambda - \lambda T + \text{const}$, $\ell'' = -N_T/\lambda^2$; informația Fisher $I(\lambda) = -\mathbb{E}[\ell'']$, deci $I(\lambda) = \mathbb{E}[N_T]/\lambda^2 = T/\lambda$ și $\text{SE}(\hat{\lambda}) = \sqrt{\lambda/T}$
   - Scenariul 1, $\lambda = 5$: SE $\sqrt{5/36{,}7} = 0{,}37$, o SE relativă de 7,4% (curba roșie)
   - Scenariul 2, estimarea din B5 $\hat{\lambda} = 101{,}9$: salturile observate ar da SE 1,67, dar SE MLE este 10,5, de 6,3 ori mai mare

⊡ **Interpretare**: salturile sînt latente: mixtura Poisson trebuie să le separe de mișcările difuzive, ceea ce distruge cea mai mare parte a informației despre λ; panoul din stînga arată cît de mică este partea din densitate care revine salturilor

MFM_ch11_seminar

B1 [Rezolvat]: GBM pe S&P 500 — Cerință

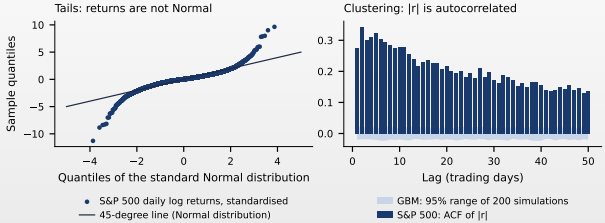
- **Întrebările**
  - ce parametru GBM poate fi determinat precis din 36 de ani de date zilnice?
  - ce ipoteză GBM nu este îndeplinită?
- **Date**: Închideri S&P 500, `GSPC.INDX` (cîmpul `close`), 2 ianuarie 1990 – 18 septembrie 2026, zile lucrătoare, fără prețuri neactualizate; $n = 9\,245$ randamente logaritmice zilnice, $T = 36{,}7$ ani, $\Delta t = 1/252$
- **Sarcini**
  1. Calculați $\hat{\sigma}$, $\hat{m}$, $\hat{\mu}$, erorile lor standard sub GBM și un CI de 95% pentru m cu formulele din Estimarea GBM din randamente zilnice.
  2. Testați normalitatea cu Jarque–Bera și independența cu Ljung–Box pe $|r_t|$ (20 de laguri), ambele la 5%, și reprezentați graficul QQ și ACF a lui $|r_t|$.
  3. Calculați raportul dintre dispersia sumelor pe 20 de zile fără suprapunere (blocuri de la primul randament; ultimul bloc incomplet eliminat) și de 20 de ori dispersia zilnică.
  4. Recalculați SE fără GBM: formula cu excesul de kurtosis din Estimarea GBM din randamente zilnice și un bootstrap pe blocuri suprapuse (Raportul variațelor și bootstrap-ul pe blocuri suprapuse; blocuri de 63 de zile, 999 de eșantioane).
- **Raportați**: estimările cu SE GBM și bootstrap (puncte procentuale), statisticile de test cu valorile critice și deciziile, două grafice
- **Interpretare**
  - ce parametru este estimat precis?
  - care este estimat imprecis?
  - mai poate fi folosit $\hat{\sigma}$ pentru evaluarea opțiunilor?
- Notebook: secțiunea B1

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

B1 [Rezolvat]: Estimările pas cu pas

1. $n = 9\,245$, $T = 36{,}7$: $\hat{\sigma} = 18{,}0\%$, $\mathrm{SE} = \hat{\sigma}/\sqrt{2n} = 0{,}13$ puncte procentuale (p.p.); $\hat{m} = 8{,}3\%$, $\mathrm{SE} = \hat{\sigma}/\sqrt{T} = 3{,}0$ p.p.
   - $\hat{\mu} = \hat{m} + \hat{\sigma}^2/2 = 10{,}0\%$; CI GBM de 95% pentru m: $[2{,}5\%; 14{,}2\%]$; ± 1 punct ar necesita $(1{,}96\,\hat{\sigma}/0{,}01)^2 = 1\,243$ de ani
4. Fără GBM, SE a lui $\hat{\sigma}$: 0,34 p.p. cu excesul de kurtosis $k = 10{,}9$; 1,15 p.p. prin bootstrap pe blocuri, de 8,7 ori valoarea GBM; m: SE pe blocuri 2,5 p.p., CI $[3{,}5\%; 13{,}3\%]$ (graficul GBM versus bootstrap pe blocuri)

B1 [Rezolvat]: Diagnostic

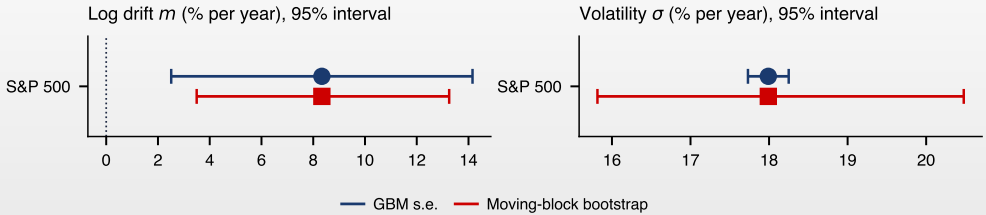


2. Graficul QQ: cozile sînt mult dincolo de dreapta de 45 de grade; Jarque–Bera 45 805 față de valoarea critică de 5% 5,99: normalitatea este respinsă
   - ACF a lui $|r_t|$: 0,27 la lagul 1, mult în afara intervalului GBM; Ljung–Box 13 381 față de $\chi^2_{20;0,95} = 31{,}4$: independența este respinsă
3. Raportul variațelor 0,75, sub 1: un semn descriptiv de ușoară revenire la medie a sumelor pe 20 de zile; fără incertitudine atașată, deci nu este un test

⊡ **Interpretare**: ambele fapte stilizate din Capitolul 1 resping GBM; $\hat{\sigma}$ este o medie a unei volatilități variabile, un reper pentru evaluare, nu o calibrare

MFM_ch11_gbm_vs_data

B1 [Rezolvat]: Incertitudinea GBM față de bootstrapul pe blocuri



- Albastru: intervalele GBM; roșu: bootstrap pe blocuri suprapuse; S&P 500 (B1), pe eșantionul folosit mai sus
- Volatilitatea: intervalul bootstrap este de cîteva ori mai larg decît cel GBM, dar rămîne îngust față de $\hat{\sigma}$; driftul: ambele intervale sînt largi
- **Interpretare**: σ este estimat precis chiar și fără ipoteza GBM, driftul imprecis sub orice metodă: o problemă de orizont lung

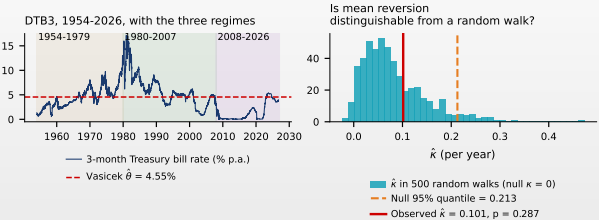
MFM_ch11_seminar

B2 [Rezolvat]: Vasicek și deplasarea lui $\hat{\kappa}$ — Cerință

- **Întrebarea**: revine cu adevărat randamentul titlurilor de stat pe 3 luni la o medie, după corectarea deplasării lui $\hat{\kappa}$?
- **Date**: Seria FRED DTB3 (randamentul titlurilor de stat SUA pe 3 luni), zilnic, 4 ianuarie 1954 – 18 septembrie 2026, împărțită la 100 (formă zecimală); $n = 18\,170$ observații, $T = 72{,}1$ ani, $\Delta t = 1/252$
- **Sarcini**
  1. Regresați x_{t+1} pe x_t prin OLS (AR(1) exact din A1), recuperați κ, θ, σ cu SE prin metoda delta, un CI de 95% pentru κ și timpul de înjumătățire Vasicek (1977).
  2. Experimentul de deplasare: simulați 500 de traiectorii OU exacte de aceeași lungime, pornite din legea staționară, cu estimările drept valori adevărate, și reestimați κ pe fiecare.
  3. Calculați deplasarea (media estimărilor minus valoarea adevărată), comparați-o cu $4/T$ Tang & Chen (2009) și dați κ corectat, cu un interval aproximativ.
  4. Experimentul nul: simulați 500 de mersuri aleatoare ($\kappa = 0$, fără drift) de aceeași lungime, din x_0, cu abaterea standard estimată a reziduurilor; p: valoarea p Monte Carlo (*p-value*) din Deplasarea lui $\hat{\kappa}$ și un test Monte Carlo, cu $R = 500$.
- **Raportați**: estimările cu SE, cele două distribuții simulate și valorile corectate
- **Interpretare**
  - este revenirea la medie semnificativă înainte și după corecție?
  - ce efect are deplasarea asupra riscului de dobîndă pe scadențe lungi?
- Notebook: secțiunea B2

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

B2 [Rezolvat]: Estimări și ipoteza nulă a mersului aleator



1. $\hat{b} = 0{,}99960$, deci $\hat{\kappa} = -\ln \hat{b}/\Delta t = 0{,}101$ (SE 0,051), CI Wald de 95% $[0{,}001; 0{,}202]$; $\hat{\theta} = 4{,}55\%$ (SE 1,55), $\hat{\sigma} = 1{,}33\%$ (SE 0,007), timp de înjumătățire 6,8 ani
4. Ipoteza nulă (panoul din dreapta): sub un mers aleator, $\hat{\kappa}$ are media 0,082, nu 0, iar cuantila de 95% este 0,213; valoarea observată 0,101 are $p = 0{,}287$: mersul aleator nu este respins

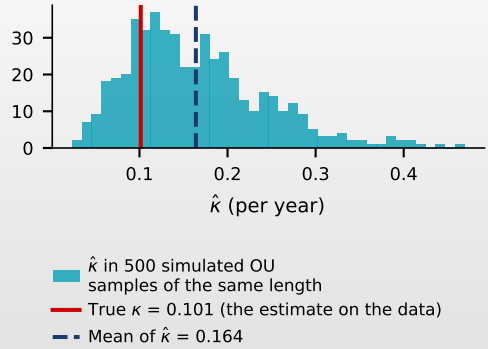
⊡ **Interpretare**: CI Wald abia exclude zero, deoarece ignoră legea asimetrică a lui $\hat{\kappa}$ în eșantioane mici; cele trei regimuri (stînga) dau și ele estimări locale foarte diferite

MFM_ch11_seminar

B2 [Rezolvat]: Deplasarea lui $\hat{\kappa}$ și corecția

2. 500 de eșantioane OU exacte de 72,1 ani cu $\kappa = 0{,}101$: media $\hat{\kappa} = 0{,}164$ (abaterea standard 0,078), deplasarea 0,063, apropiată de $4/T = 0{,}055$; 78% dintre estimări depășesc valoarea adevărată
3. κ corectat $= 0{,}101 - 0{,}063 = 0{,}039$, interval aproximativ $0{,}039 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}078 = [-0{,}114; 0{,}192]$: conține zero, deci nu se poate raporta cu încredere un timp de înjumătățire finit

⊡ **Interpretare**: datele sînt compatibile cu o revenire lentă, dar nu pot exclude un mers aleator; cu $\kappa^Q = \kappa$, deplasarea în sus face ca Vasicek să subestimeze riscul de dobîndă pe scadențe lungi



MFM_ch11_seminar

C1 [Propus]: Critica unui răspuns AI — Cerință

- **Întrebarea**: un student a întrebat un asistent: „S&P 500 ca GBM cu $\mu = 8\%$, $\sigma = 20\%$: cît este $P(S_1 < S_0)$? Verifică prin simulare."
- **Răspunsul (linii numerotate)**

T1. $\mathrm{d}S = \mu S\,\mathrm{d}t + \sigma S\,\mathrm{d}W$
T2. Regula de derivare: $\mathrm{d}\ln S = \mathrm{d}S/S = \mu\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W$, deci $\ln(S_T/S_0) \sim N(\mu T, \sigma^2 T)$
T3. $P(S_T < S_0) = \Phi(-\mu\sqrt{T}/\sigma) = \Phi(-0{,}40) = 0{,}345$
T4. $\mathbb{E}[S_T] = S_0 e^{\mu T}$: în medie cu 8,3% mai sus
T5. „Simularea dă 0,345 și confirmă formula"

```
C1  import numpy as np
C2  mu, sigma, T, n, N = 0.08, 0.20, 1.0, 252, 20_000
C3  dt = T / n
C4  rng = np.random.default_rng(1)
C5  Z = rng.standard_normal((N, n))
C6  lnS = np.cumsum((mu - 0.5*sigma**2)*dt
C7                  + sigma*dt*Z, axis=1)
C8  print((lnS[:, -1] < 0).mean())
```

- **Sarcini**
  1. Găsiți trei erori independente. Numărați o eroare propagată o singură dată. Folosiți T1-T5 pentru text și C1-C8 pentru liniile de cod (nu exercițiul C1); identificați și liniile corecte.
  2. Pentru fiecare, dați o verificare care o detectează: o formulă, un test sau o rulare a codului.
  3. Rulați codul inițial și cel corectat cu seed 1 și calculați SE Monte Carlo.
- **Raportați**: un tabel: eroarea, linia, verificarea, corecția; consemnați-l în `AI_ERRORS.md`. Model: A2, B1

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

Calendarul și tranzacționarea rară

- Observațiile BET urmează zilele de tranzacționare; cele Bitcoin urmează zilele calendaristice. Același număr de randamente poate acoperi durate diferite.
- Tranzacționarea rară (*thin trading*) înseamnă tranzacții puțin frecvente: unele componente ale indicelui păstrează prețuri vechi, în timp ce altele se actualizează. Astfel poate apărea corelație serială în randamentele indicelui, dar corelația singură nu identifică această cauză.
- În B3 aplicați metoda din B1 pe BET și Bitcoin și comparați blocuri de aceeași durată calendaristică.

B3 [Propus]: GBM pe BET și Bitcoin — Cerință

- **Întrebările**
  - care piață se abate mai mult de la GBM?
  - este driftul Bitcoin semnificativ pozitiv?
- **Date**: BET (`BET`, close, 2000–2026, zile lucrătoare, $\Delta t = 1/252$, $n = 6\,670$); Bitcoin (`BTC-USD.CC`, close, 18 septembrie 2014 – 18 septembrie 2026, 7 zile din 7, $\Delta t = 1/365$, $n = 4\,384$); perioade diferite
- **Sarcini**
  1. Pentru fiecare piață, calculați $\hat{\sigma}$ și $\hat{m}$ cu CI de 95% GBM și bootstrap pe blocuri (blocuri de 63 de observații) și anii necesari pentru ± 1 punct pentru m.
  2. Calculați Jarque–Bera, Ljung–Box pe $|r_t|$ (20 de laguri, 5%) și raportul variațelor pe 20 de observații și desenați graficele QQ și ACF.
  3. Exprimați 20 și 63 de observații în timp calendaristic pentru fiecare piață. Comparați blocuri cu același număr de observații sau cu aceeași durată?
- **Raportați**: un tabel (rînduri: $\hat{\sigma}$, $\hat{m}$ cu ambele CI, anii, excesul de kurtosis, statistica Jarque–Bera, Ljung–Box, ACF la lagul 1, raportul variațelor; coloane: BET, Bitcoin) și graficele
- **Interpretare**
  - ce poate sugera un raport al variațelor diferit de 1 pentru BET?
  - ce v-ar mai trebui pentru a-l atribui tranzacționării rare?
- Model: B1; Notebook: secțiunea B3

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

Verificări și meniul de proiecte

- Înainte de a trage o concluzie, verificați
  - termenul $-\sigma^2/2$ (driftul prețului față de driftul logaritmului)
  - unitățile: parametri anuali cu Δt corect (Bitcoin: 1/365)
  - fără valori critice χ^2 pentru un parametru pe frontieră
  - $\hat{\kappa}$ dintr-un orizont scurt este deplasat în sus
- Meniul de proiecte: C2 (ce model descrie cel mai bine BET și Bitcoin) sau C3 (volatilitatea aspră a SPY), în pachetele de extindere

B4 [Rezolvat]: Ordine de convergență — Cerință

- **Întrebările**
  - cît de repede converg schemele Euler–Maruyama și Milstein?
  - ce limitează o verificare Monte Carlo?
- **Date**: $\mathrm{d}X = 2X\,\mathrm{d}t + X\,\mathrm{d}W$, $X_0 = 1$, $T = 1$, soluția exactă $X_T = \exp(1{,}5 + W_T)$ Higham (2001); 20 000 de traiectorii pe o grilă fină de 2^{11} pași; un increment grosier este suma a $2^{11}\Delta t$ incremente fine, deci fiecare schemă și valoarea exactă folosesc aceeași traiectorie
- **Sarcini**
  1. Pentru $\Delta t = 2^{-11}, \ldots, 2^{-5}$, salvați matricea traiectorie $\times$ pas a erorilor absolute $|X_T - X_T^{\Delta t}|$ pentru ambele scheme și calculați media pe traiectorii.
  2. Regresați $\ln(\text{eroare})$ pe $\ln \Delta t$ (panta globală); obțineți SE și CI de 95% prin reeșantionarea traiectoriilor întregi, toți pașii împreună (1 000 de eșantioane).
  3. Calculați eroarea slabă Euler–Maruyama exact, din $\mathbb{E}[X_T^{\Delta t}] = (1 + 2\Delta t)^{1/\Delta t}$, și prin media Monte Carlo; estimați ambele pante.
- **Raportați**: un tabel cu cele patru pante, cu SE și CI bootstrap, și graficul log-log
- **Interpretare**
  - corespund pantele ordinelor 1/2 și 1?
  - de ce eroarea slabă Monte Carlo dă o pantă greșită?
- Notebook: secțiunea B4

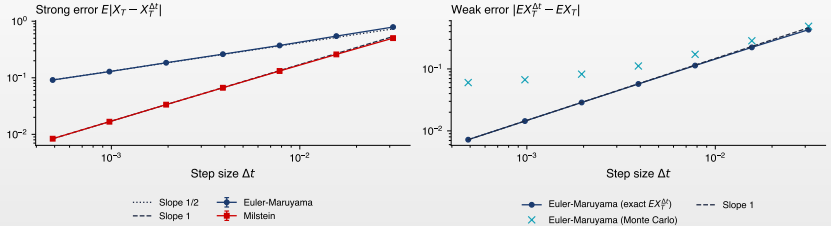
înapoi Lista exercițiilor

B4 [Rezolvat]: Pantele pas cu pas

	Panta globală	SE	95% CI
Tare, Euler–Maruyama	0,518	0,003	[0,512; 0,525]
Tare, Milstein	0,986	0,001	[0,984; 0,987]
Slabă, media exactă	0,985	–	deterministă
Slabă, Monte Carlo	0,511	0,269	[0,247; 1,289]

1. Pantele tari globale sînt apropiate de 1/2 și 1; CI măsoară doar zgomotul Monte Carlo și pot exclude 1/2 și 1, deoarece pașii mari sînt pre-asimptotici
2. Pantele locale între cei mai fini doi pași, 0,492 (Euler) și 0,998 (Milstein), sînt cele care se apropie de ordinele limită
3. Slabă, media exactă: o pantă deterministă apropiată de 1 (locală 0,998), fără interval de eșantionare

B4 [Rezolvat]: Graficul și pragul Monte Carlo



1. Stînga: erorile tari, cu pantele de referință 1/2 și 1; înjumătățirea lui Δt înjumătățește eroarea Milstein, dar reduce eroarea Euler doar cu $1 - 2^{-1/2} = 29\%$
2. Dreapta: SE Monte Carlo a mediei, $e^2\sqrt{e-1}/\sqrt{20\,000} = 0{,}068$, depășește eroarea slabă exactă 0,0072 la 2^{-11}, deci crucile se aplatizează
3. Pentru acest estimator direct al mediei, distingerea erorii la 95% necesită $(1{,}96 \cdot 9{,}69/0{,}0072)^2 \approx 6\,937\,381$ de traiectorii ($9{,}69 = e^2\sqrt{e-1}$, abaterea standard a lui X_T)

⊡ **Interpretare**: pentru valori așteptate, mărimea eșantionului Monte Carlo, nu pasul de timp, este constrîngerea decisivă

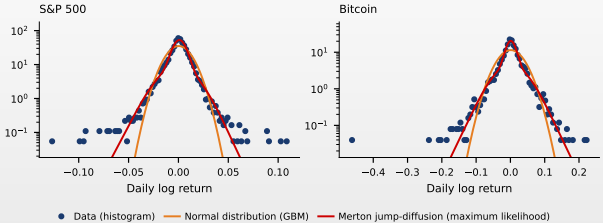
MFM_ch11_convergence

B5 [Rezolvat]: Merton și un test bootstrap al raportului de verosimilitate — Cerință

- **Întrebarea**: resping randamentele zilnice S&P 500 modelul GBM în favoarea difuziei cu salturi Merton?
- **Date**: eșantionul S&P 500 din B1 ($n = 9\,245$ randamente logaritmice zilnice, $\Delta t = 1/252$)
- **Sarcini**
  1. Estimați $(m, \sigma, \lambda, \mu_J, \sigma_J)$ maximizînd $\sum_t \ln f(r_t)$, cu densitatea f a mixturii Poisson din Salturi: modelul Merton (log-sum-exp), pe $\sigma \geq 5\%$, din șase puncte de start, cu SE din hessiană Merton (1976)
  2. Calculați statistica raportului de verosimilitate $LR = 2(\ell_{\text{Merton}} - \ell_{\text{GBM}})$ pe acest spațiu restrîns (ℓ: log-verosimilitatea maximizată; un LR mare favorizează Merton).
  3. Simulați 200 de eșantioane GBM de aceeași lungime din GBM estimat, reestimați ambele modele cu aceeași restricție și aceleași puncte de start și calculați valoarea critică de 95% și valoarea p bootstrap din Testul raportului de verosimilitate și frontiera ($B = 200$).
- **Raportați**: toți cei cinci parametri cu SE, statistica LR, valorile critice bootstrap și χ^2_3, p
- **Interpretare**
  - de ce χ^2_3 nu este validă aici?
  - demonstrează respingerea GBM că prețurile au salturi?
- Notebook: secțiunea B5

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

B5 [Rezolvat]: Parametrii și densitatea estimate



1. $\hat{m} = 24{,}8\%$ (2,6), $\hat{\sigma} = 9{,}44\%$ (0,32), $\hat{\lambda} = 101{,}9$ (10,5) pe an, $\hat{\mu}_J = -0{,}162\%$ (0,034), $\hat{\sigma}_J = 1{,}44\%$ (0,06); SE în paranteze
   - Driftul logaritmic total este $m + \lambda\mu_J = 24{,}8\% - 16{,}5\% = 8{,}3\%$ pe an, în acord cu estimarea GBM. Aici m descrie doar componenta de difuzie.
   - Asimetria implicată $-0{,}31$ (date $-0{,}36$), excesul de kurtosis 3,71 (date 10,9): densitatea estimată (graficul, stînga) urmează centrul, dar două treimi din excesul de kurtosis nu sînt reproduse

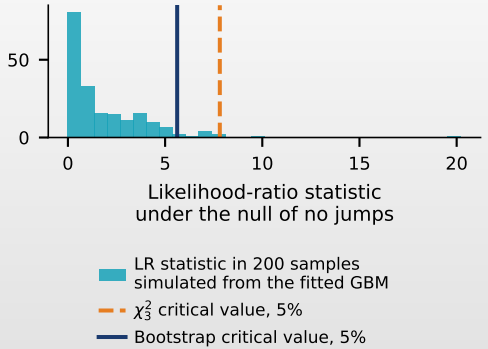
⊡ **Interpretare**: circa 100 de „salturi" mici pe an țin locul volatilității variabile, nu al crahurilor rare

MFM_ch11_merton_density

B5 [Rezolvat]: Distribuția bootstrap sub ipoteza nulă și decizia

2. LR $= 2\,401$ (restricția $\sigma \geq 5\%$ nu este activă); valoarea critică bootstrap de 95% 5,62 față de $\chi^2_{3;0,95} = 7{,}81$
3. 0 din cele 200 de valori bootstrap depășesc LR, deci $\hat{p} = (1+0)/201 = 0{,}0050$, cea mai mică valoare posibilă în acest design (limita superioară Monte Carlo de 95%: 0,015): GBM este respins la 5%

- Sub H_0, $\lambda = 0$ este pe frontieră, iar μ_J, σ_J nu sînt identificați: teorema lui Wilks nu se aplică, de aici bootstrapul
- **Interpretare**: testul respinge randamentele Normale i.i.d.; nu identifică traiectorii discontinue, deoarece și volatilitatea stocastică ar respinge GBM (Capitolul 11, mini studiul de caz despre salturi)



MFM_ch11_seminar

Pachetele de extindere: exercițiile

Exercițiul	Întrebarea	Tip	Model
A4	GBM sub P și Q: ce probabilitate prognozează? care evaluează?	Rezolvat	–
A5	paradoxul lui Siegel: pot ambele părți să aștepte un cîștig?	Propus	A4
A6	obligațiunea Vasicek și curba randamentelor prin Feynman–Kac	Rezolvat	–
A7	CIR: momente, legea de tranziție, condiția Feller	Rezolvat	–
A8	ce identifică VIX în modelul Heston?	Propus	A7
A9	salturi rare și mari: se poate estima riscul de crah?	Propus	A3
B2 extins	CIR exact, Euler și CKLS pe DTB3	Rezolvat	–
B5 extins	este verosimilitatea Merton mărginită?	Rezolvat	–
B6, B7	OU pentru VIX; salturi în Bitcoin	Propus	B2; B5
B8, B8 extins	Heston din VIX; relația afină și varianța realizată	Propus	B2, B5; A8
B9	difuzia neparametrică a randamentului titlurilor de stat	Propus	B2 extins
C2, C3	puncte de plecare pentru proiect: modele pentru BET și Bitcoin; volatilitatea aspră și persistența volatilității SPY	Propus	B1, B5, B8; B2, B4

A4 [Rezolvat]: GBM sub P și Q (Girsanov) — Cerință

- **Întrebările**
  - care probabilitate a unei pierderi pe zece ani este o prognoză?
  - care este o pondere de evaluare?
- **Date de intrare**: sub măsura reală P, $\mathrm{d}S = \mu S\,\mathrm{d}t + \sigma S\,\mathrm{d}W$ cu $\mu = 8\%$, $\sigma = 20\%$; rata fără risc $r = 3\%$; $T = 10$ ani; Q este măsura sub care $e^{-rt}S_t$ este un martingal; Φ: funcția de repartiție a distribuției Normale standard; fără date
- **Sarcini**
  1. Găsiți prețul de piață al riscului θ care anulează driftul lui $e^{-rt}S_t$ și scrieți densitatea $Z_T = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}P$ Girsanov (1960).
  2. Folosind momentul $\mathbb{E}[e^{aW_T}]$ din Lema lui Itô, arătați că $\mathbb{E}^P[Z_T S_T] = S_0 e^{rT}$; precizați dacă σ se schimbă sub Q.
  3. Calculați separat $P(S_{10} < S_0)$ și $Q(S_{10} < S_0)$, din legea lognormală sub fiecare măsură.
- **Raportați**: θ, Z_T, $\mathbb{E}^Q[S_{10}]/S_0$ și cele două probabilități
- Notebook: secțiunea A4

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

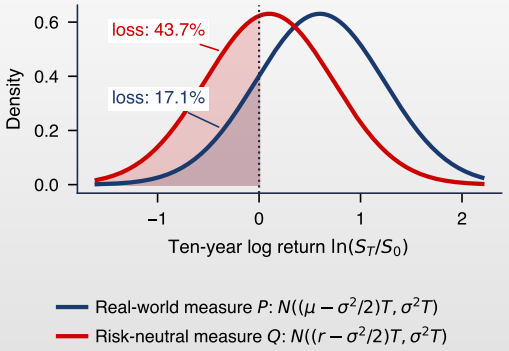
A4 [Rezolvat]: Girsanov pas cu pas

1. Regula produsului: $\mathrm{d}(e^{-rt}S_t) = e^{-rt}S_t\left[(\mu - r)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W_t\right]$; cu $\mathrm{d}W = \mathrm{d}\tilde{W} - \theta\,\mathrm{d}t$, driftul este $\mu - r - \sigma\theta = 0$ pentru $\theta = (0{,}08 - 0{,}03)/0{,}20 = 0{,}25$
   - Girsanov cu θ constant (Novikov este îndeplinită): $Z_T = \exp(-\theta W_T - \frac{1}{2}\theta^2 T)$
2. $\mathbb{E}^P[Z_T S_T] = S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2 - \theta^2/2)T}\,\mathbb{E}[e^{(\sigma-\theta)W_T}] = S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2 - \theta^2/2 + (\sigma-\theta)^2/2)T} = S_0 e^{(\mu-\sigma\theta)T} = S_0 e^{rT}$, deci $\mathbb{E}^Q[S_{10}]/S_0 = e^{0{,}3} = 1{,}350$
   - Sub Q, $\mathrm{d}S = rS\,\mathrm{d}t + \sigma S\,\mathrm{d}\tilde{W}$: σ nu se schimbă, deoarece $[\ln S]_T = \sigma^2 T$ este o proprietate a traiectoriei

A4 [Rezolvat]: Două probabilități de pierdere

3. Drifturile logaritmice $m_P = \mu - \sigma^2/2 = 6\%$ și $m_Q = r - \sigma^2/2 = 1\%$; $\ln(S_{10}/S_0) \sim N(10m; 0{,}4)$ sub fiecare măsură
   - $P(S_{10} < S_0) = \Phi(-0{,}06\sqrt{10}/0{,}20) = \Phi(-0{,}949) = 17{,}1\%$; $Q(S_{10} < S_0) = \Phi(-0{,}01\sqrt{10}/0{,}20) = \Phi(-0{,}158) = 43{,}7\%$ (ariile haşurate)

- **Interpretare**: probabilitatea P prognozează o pierdere; probabilitatea Q este o pondere de evaluare care include prima de risc și deci supraponderează rezultatele rele; cele două densități diferă doar prin drift



MFM_ch11_seminar

Numeraire și active în valută

- Un numeraire (activ de referință) $N_t > 0$ este un activ tranzacționat folosit ca unitate de cont. Sub măsura sa de evaluare Q^N, prețurile împărțite la N_t sînt martingale, în condițiile uzuale de integrabilitate.
- La rata constantă r, contul monetar este $B_t = e^{rt}$. Dacă X_t este cursul în lei pentru un euro, un depozit în euro valorează $X_t B_t^{EUR}$ lei: este un activ tranzacționat exprimat în lei.
- Paradoxul lui Siegel: media unui curs inversat nu este inversul mediei. Dacă $X_0 = 1$ și $X = 0{,}5$ sau 2 cu probabilități egale, $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[1/X] = 1{,}25$, dar $1/\mathbb{E}[X] = 0{,}8$. Media pozitivă a ambelor variații procentuale nu produce arbitraj.

A5 [Propus]: Paradoxul lui Siegel și numeraire — Cerință

- **Întrebarea**: dacă cursul EUR/RON (lei pentru un euro; EUR: euro, RON: leul românesc) urmează GBM, este driftul cursului invers RON/EUR (euro pentru un leu) pur și simplu opusul?
- **Date de intrare**: X_t = lei pentru un euro, GBM cu $\mu = 2\%$, $\sigma = 4{,}4\%$ sub P; $Y_t = 1/X_t$; pentru pașii 3–4: rate constante r_{RON}, r_{EUR} (simbolice), conturile monetare $B_t^{RON} = e^{r_{RON}\, t}$ în lei și $B_t^{EUR} = e^{r_{EUR}\, t}$ în euro, care valorează $X_t B_t^{EUR}$ lei; cifre date, fără date de piață
- **Sarcini**
  1. Aplicați lema lui Itô pentru $f(x) = 1/x$ și scrieți $\mathrm{d}Y_t$.
  2. Calculați driftul procentual al lui Y cu patru zecimale și comparați-l cu $-\mu$; apoi comparați drifturile logaritmice ale lui X și Y.
  3. Arătați că $F = X_0 e^{(r_{RON} - r_{EUR})T} = \mathbb{E}^{Q^{RON}}[X_T]$, folosind faptul că $X_t B_t^{EUR} / B_t^{RON}$ este un Q^{RON}-martingal.
  4. Opțional: cu densitatea de schimbare a activului de referință $\mathrm{d}Q^{EUR}/\mathrm{d}Q^{RON} = X_T B_T^{EUR} / (X_0 B_T^{RON})$, arătați că $\mathbb{E}^{Q^{EUR}}[1/X_T] = 1/F$.
- **Raportați**: drifturile și cele două valori așteptate
- **Interpretare**: de ce nu există arbitraj cînd atît un investitor în lei, cît și unul în euro par să aștepte un cîștig?
- Model: A4; Notebook: secțiunea A5

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

A6 [Rezolvat]: Obligațiunea Vasicek prin Feynman–Kac — Cerință

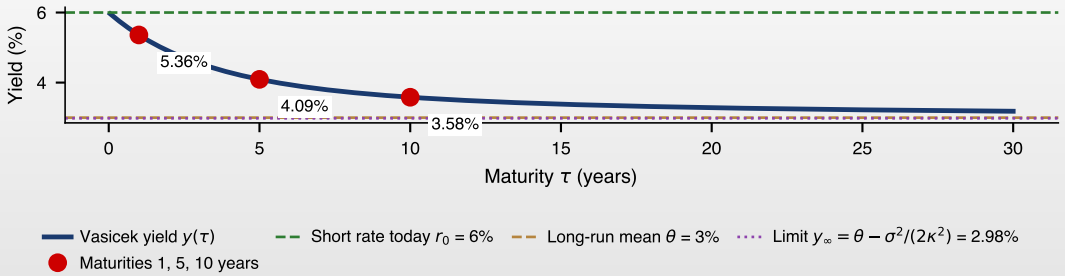
- **Întrebarea**: ce curbă a randamentelor implică azi o rată pe termen scurt Vasicek?
- **Date de intrare**: sub Q, $\mathrm{d}r = \kappa(\theta - r)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}\tilde{W}$, $\kappa = 0{,}5$, $\theta = 3\%$, $\sigma = 1\%$ (prima de risc este deja în θ), $r_0 = 6\%$ Vasicek (1977); o obligațiune zero-cupon plătește 1 la T; $p(t, r; T)$ este prețul ei, $\tau = T - t$, iar apostroful ($'$) notează derivata $\mathrm{d}/\mathrm{d}\tau$
- **Sarcini**
  1. Scrieți ecuația cu derivate parțiale (*partial differential equation*, PDE) Feynman–Kac și condiția finală pentru $p(t, r; T) = \mathbb{E}^Q[e^{-\int_t^T r_s \mathrm{d}s} \mid r_t = r]$ Kac (1949).
  2. Introduceți $p = \exp(A(\tau) - B(\tau)\, r)$, grupați termenii în r și rezolvați pentru B și $A = \int_0^\tau [-\kappa\theta B(s) + \sigma^2 B(s)^2/2]\,\mathrm{d}s$.
  3. Calculați $y(\tau) = (Br_0 - A)/\tau$ pentru $\tau = 1, 5, 10$, limita y_∞ și reprezentați curba.
- **Raportați**: $B(5)$, $A(5)$, trei randamente, y_∞ și graficul
- **Interpretare**
  - de ce curba este descendentă?
  - de ce y_∞ este sub θ?
- Notebook: secțiunea A6

Înapoi Lista exercițiilor

A6 [Rezolvat]: De la PDE la două ecuații diferențiale ordinare

1. Feynman–Kac: $p_t + \kappa(\theta - r)p_r + \frac{1}{2}\sigma^2 p_{rr} - rp = 0$, $p(T, r; T) = 1$
2. Cu $p = e^{A - Br}$ și $\partial_t = -\mathrm{d}/\mathrm{d}\tau$: $p_t = (-A' + B'r)p$, $p_r = -Bp$, $p_{rr} = B^2 p$; împărțind la p: $-A' + B'r - \kappa(\theta - r)B + \frac{1}{2}\sigma^2 B^2 - r = 0$ pentru orice r
   - Termenii în r: $B' = 1 - \kappa B$, $B(0) = 0$, deci $B(\tau) = (1 - e^{-\kappa\tau})/\kappa$
   - Constantele: $A' = -\kappa\theta B + \frac{1}{2}\sigma^2 B^2$; integrînd cu $\int_0^\tau B = (\tau - B)/\kappa$ și $\int_0^\tau B^2 = (\tau - B)/\kappa^2 - B^2/(2\kappa)$: $A(\tau) = \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}\right)(B - \tau) - \frac{\sigma^2 B^2}{4\kappa}$

A6 [Rezolvat]: Cifre și curba randamentelor



3. $B(5) = (1 - e^{-\mathbf{2,5}})/0{,}5 = 1{,}836$; $A(5) = (0{,}03 - 0{,}0002)(1{,}836 - 5) - 0{,}0001 \cdot 1{,}836^{\mathbf{2}}/2 = -0{,}0945$
   - $y(1) = 5{,}36\%$, $y(5) = 4{,}09\%$, $y(10) = 3{,}58\%$; $y_\infty = \theta - \sigma^{\mathbf{2}}/(2\kappa^{\mathbf{2}}) = 2{,}98\%$

⊡ **Interpretare**: $r_{\mathbf{0}} = 6\%$ este peste θ, deci ratele așteptate scad, iar curba este descendentă; $y_\infty < \theta$ din cauza convexității (Jensen): incertitudinea ratelor crește prețurile obligațiunilor și scade randamentele pe termen lung

MFM_ch11_seminar

A7 [Rezolvat]: CIR: momente, legea de tranziție și condiția Feller — Cerință

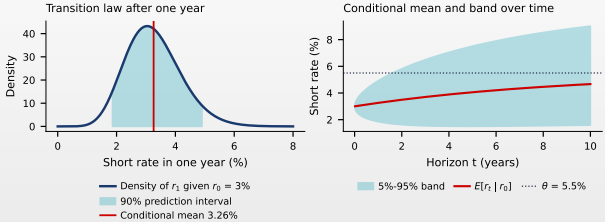
- **Întrebările**
  - ce valori poate lua peste un an o rată pe termen scurt CIR?
  - poate ea atinge zero?
- **Date de intrare**: procesul CIR din Pachetele de extindere: procesul CIR și condiția Feller, cu $\kappa = 0{,}11$, $\theta = 5{,}5\%$, $\sigma = 0{,}056$ (apropiate de estimarea CIR exactă din B2 extins) Cox, Ingersoll & Ross (1985); $r_0 = 3\%$, $t = 1$; tranziția $2c\, r_t \mid r_0 \sim \chi^2_\nu(\delta)$ cu $c = 2\kappa/(\sigma^2(1 - e^{-\kappa t}))$, $\nu = 4\kappa\theta/\sigma^2$, parametrul de necentralitate $\delta = 2c\, r_0 e^{-\kappa t}$
- **Sarcini**
  1. Aplicați lema lui Itô pentru $e^{\kappa t} r_t$ și deduceți $\mathbb{E}[r_t \mid r_0]$.
  2. Aplicați lema lui Itô pentru r_t^2, rezolvați ecuația pentru $m_2(t) = \mathbb{E}[r_t^2]$ cu un factor integrant și deduceți $\mathrm{Var}(r_t \mid r_0)$.
  3. Calculați c, ν, δ și cuantilele de 5% și 95% ale lui r_1 (`scipy.stats.ncx2.ppf`, apoi împărțiți la $2c$).
  4. Arătați că $2\kappa\theta \geq \sigma^2 \Leftrightarrow \nu \geq 2$ și calculați raportul Feller.
- **Raportați**: media, abaterea standard, c, ν, δ, intervalul de predicție condiționat de 90% (nu un CI pentru parametri), raportul Feller
- **Interpretare**: de ce intervalul este asimetric în jurul mediei?
- Notebook: secțiunea A7

Înapoi Lista exercițiilor

A7 [Rezolvat]: Momente condiționate

1. $\mathrm{d}(e^{\kappa t} r) = \kappa\theta e^{\kappa t}\,\mathrm{d}t + \sigma e^{\kappa t}\sqrt{r}\,\mathrm{d}W$; integrala stocastică are media zero ($\mathbb{E}[r_s] < \infty$), deci $\mathbb{E}[r_t] = \theta + (r_0 - \theta)e^{-\kappa t}$
2. $\mathrm{d}(r^2) = 2r\,\mathrm{d}r + \sigma^2 r\,\mathrm{d}t$, deci $m_2' = (2\kappa\theta + \sigma^2)\mathbb{E}[r_t] - 2\kappa m_2$; înmulțim cu $e^{2\kappa t}$ și integrăm: $m_2(t) = r_0^2 e^{-2\kappa t} + (2\kappa\theta + \sigma^2)\int_0^t e^{-2\kappa(t-s)}\mathbb{E}[r_s]\,\mathrm{d}s$
   - Scăzînd $\mathbb{E}[r_t]^2$: $\mathrm{Var} = r_0 \frac{\sigma^2}{\kappa}(e^{-\kappa t} - e^{-2\kappa t}) + \frac{\theta\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-\kappa t})^2$
   - $\mathbb{E}[r_1] = 0{,}055 + (0{,}03 - 0{,}055)e^{-0{,}11} = 3{,}26\%$; abaterea standard 0,94%

A7 [Rezolvat]: Legea de tranziție și Feller



3. $c = 673$, $\nu = 7{,}72$, $\delta = 36{,}2$ (nu intensitatea salturilor); intervalul de predicție de 90% [1,85%; 4,92%]
4. $\nu = 2 \cdot (2\kappa\theta/\sigma^{\mathbf{2}})$, deci $\nu \geq 2 \Leftrightarrow 2\kappa\theta \geq \sigma^{\mathbf{2}}$; raportul Feller 3,86: zero nu este atins niciodată

⊡ **Interpretare**: volatilitatea $\sigma\sqrt{r}$ crește cu nivelul, deci legea este asimetrică la dreapta, iar banda se lărgește în sus (panoul din dreapta); ratele negative sînt imposibile, spre deosebire de Vasicek

MFM_ch11_seminar

A8 [Propus]: VIX sub Heston — Cerință

- **Întrebările**
  - ce parametri Heston recuperează o regresie pe pătratul VIX?
  - sub ce măsură?
- **Date de intrare**: varianța instantanee v_t cu $\mathrm{d}v = \kappa^Q(\theta^Q - v)\,\mathrm{d}t + \xi_v\sqrt{v}\,\mathrm{d}\tilde{W}^{(2)}$ sub Q și κ^P, θ^P sub P (același ξ_v); $y_t = (\mathrm{VIX}_t/100)^2 = \frac{1}{\tau}\mathbb{E}^Q[\int_t^{t+\tau} v_s\,\mathrm{d}s \mid \mathcal{F}_t]$, $\tau = 30/365$; $\kappa^Q = 5$, $\theta^Q = 0{,}044$; o estimare CIR pe y dă $\hat{\xi}_y = 0{,}56$
- **Sarcini**
  1. Folosind A7 sub Q, integrați $\mathbb{E}^Q[v_s \mid v_t]$ pe $[t, t+\tau]$ și arătați că $y_t = a + b\,v_t$; calculați b și a.
  2. Din $\mathrm{d}y = b\,\mathrm{d}v$, scrieți difuzia lui y și raportul ξ_y/ξ_v ca funcție de v; calculați corecția locală $\hat{\xi}_y/b$ la $v = \theta^Q$.
  3. Deduceți dinamica lui y sub P și precizați pe care dintre κ^P, θ^P, ρ îi recuperează o regresie istorică pe y și de ce mai are nevoie ρ.
  4. Calculați b la orizontul de 60 de zile și comparați-l cu valoarea la 30 de zile.
- **Raportați**: a, b, corecția locală, b la 60 de zile, graficul lui ξ_y/ξ_v
- **Interpretare**
  - este 0,56 prea mare sau prea mic pentru ξ_v?
  - ce este necesar pentru a estima κ^Q?
- Model: A7; Notebook: secțiunea A8

Înapoi Lista exercițiilor

A9 [Propus]: Salturi rare și mari — Cerință

- **Întrebarea**: se poate estima intensitatea crahurilor rare din istoria unui singur indice?
- **Date de intrare**: modelul din A3 cu $\sigma = 15\%$, dar $\lambda = 0{,}5$ pe an, $\mu_J = -10\%$, $\sigma_J = 5\%$ (A3: $\lambda = 5$, $\mu_J = -3\%$, $\sigma_J = 4\%$); $\Delta = 1/252$; $T = 36{,}7$ ani; MLE din B5 pentru S&P 500: $\hat{\lambda} = 101{,}9$
- **Sarcini**
  1. Completați tabelul din A3 (componentele de difuzie și de salt ale lui c_2, c_3, c_4) pentru noii parametri și calculați asimetria și excesul de kurtosis.
  2. Calculați probabilitatea de a nu avea niciun salt în 1 an și în 10 ani.
  3. Cu toate crahurile observate, calculați SE a lui $\hat{\lambda}$ pe 36,7 ani și anii necesari pentru o SE relativă de 20%.
- **Raportați**: tabelul momentelor, cele două probabilități, SE și anii
- **Interpretare**
  - ce surprinde în schimb MLE din B5?
  - este problema doar de precizie sau și de incertitudine a modelului?
- Model: A3; Notebook: secțiunea A9

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

De ce diferă erorile standard?

- Estimarea și incertitudinea ei răspund la întrebări diferite. Un coeficient aparent precis poate proveni dintr-o formulă a erorii standard ale cărei ipoteze nu sînt respectate de date.
- Hessiana folosește curbura funcției optimizate. Covariança sandwich folosește și variabilitatea scorurilor, contribuțiile observațiilor la derivata acelei funcții.
- HAC (*Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent*) desemnează erorile standard robuste la heteroscedasticitate și autocorelație. Ele permit variânțe diferite și dependență temporală a scorurilor; alegerea lagurilor stabilește ce autocovariânțe intră în calcul.
- În exercițiul următor comparăm erorile standard înainte de a interpreta testele Wald. Schimbarea deciziei poate veni din estimarea incertitudinii, chiar dacă valoarea coeficientului rămîne aceeași.

B2 extins [Rezolvat]: CIR exact, Euler și CKLS — Cerință

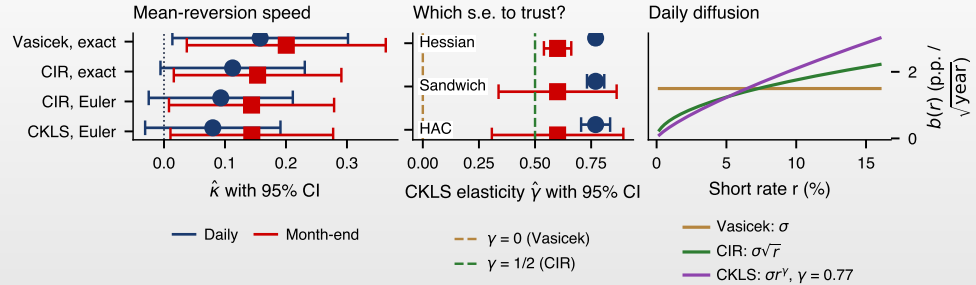
- **Întrebările**
  - ce specificare a volatilității preferă datele despre rata pe termen scurt?
  - în ce test putem avea încredere?
- **Date de intrare**: DTB3, 4 ianuarie 1954 – 31 decembrie 2007 (după 2008: 13 cotații exact zero, 8 negative, în afara domeniilor CIR și CKLS), zilnic ($n = 13\,487$, $\Delta = 1/252$) și la sfîrșit de lună ($n = 647$, $\Delta = 1/12$); $\kappa, \theta, \sigma > 0$
- **Sarcini**
  1. Maximizați log-verosimilitatea CIR exactă $\sum_t [\ln(2c) + \ln f_{\chi^2_\nu(\delta_t)}(2c\, r_{t+\Delta})]$ (factorul $2c$ este jacobianul, A7) și pseudo-verosimilitatea gaussiană Euler; comparați $\hat\kappa$, $\hat\theta$, cu SE din hessiană.
  2. Estimați CKLS (volatilitatea σr^γ, Pachetele de extindere: procesul CIR și condiția Feller) prin cvasi-verosimilitatea Euler; SE a lui $\hat\gamma$ din H^{-1}, sandwich $H^{-1}\Omega H^{-1}$ cu Ω produsul exterior al scorurilor și Ω HAC (Bartlett, $\lfloor 4(n/100)^{2/9} \rfloor$ laguri) Chan, Karolyi, Longstaff & Sanders (1992); Newey & West (1987).
  3. Testați $\gamma = 0$ și $\gamma = 1/2$ prin LR între obiectivele Euler restricționat și nerestricționat și prin teste Wald HAC, la 5% (3,84), la ambele frecvențe.
- **Raportați**: un tabel cu $\hat\kappa$ (SE), $\hat\theta$; $\hat\gamma$ cu trei SE; statisticile de test; graficul
- **Interpretare**: de ce LR și SE din hessiană resping prea des?
- Notebook: secțiunea B2 Extended

B2 extins [Rezolvat]: Estimări

	Zilnic		Sfîrșit de lună	
Modelul	$\hat{\kappa}$ (SE)	$\hat{\theta}$ (%)	$\hat{\kappa}$ (SE)	$\hat{\theta}$ (%)
Vasicek, exact	0,158 (0,073)	5,39	0,201 (0,083)	5,36
CIR, exact	0,113 (0,060)	5,48	0,153 (0,070)	5,43
CIR, Euler	0,093 (0,060)	5,55	0,144 (0,069)	5,45
CKLS, Euler	0,080 (0,057)	5,84	0,144 (0,068)	5,46

1. CIR exact și Euler diferă cu mai puțin de o SE a lui $\hat{\kappa}$ la ambele frecvențe: eroarea de discretizare este mică față de incertitudinea de orizont lung
2. Toate valorile $\hat{\kappa}$ sînt între 0,08 și 0,20, cu SE 0,06–0,08: nicio verosimilitate nu determină precis viteza (panoul din stînga al graficului, slide-ul următor)

B2 extins [Rezolvat]: Teste pentru γ



1. $\hat{\gamma} = 0{,}77$ zilnic (SE: hessiană 0,008, sandwich 0,020, HAC 0,033; 11 laguri); 0,60 lunar (0,031; 0,134; 0,149; 6 laguri)
2. $\gamma = 0$: LR 7 926,6 și 285,6, Wald HAC 545,1 și 16,1: Vasicek respins la ambele frecvențe
3. $\gamma = 1/2$: zilnic LR 1 139,34 și Wald HAC 67,01 resping (22,13 cu 55 laguri); lunar LR 10,07 respinge, Wald HAC 0,45 nu

⊡ **Interpretare**: volatilitatea crește cu nivelul; gruparea volatilității omisă face scorurile heteroscedastice și autocorelate, deci testul Wald HAC este cel credibil; Chan, Karolyi, Longstaff & Sanders (1992) au găsit $\hat{\gamma} \approx 1{,}5$ pe 1964–1989

MFM_ch11_seminar

B6 [Propus]: Revenirea la medie a VIX — Cerință

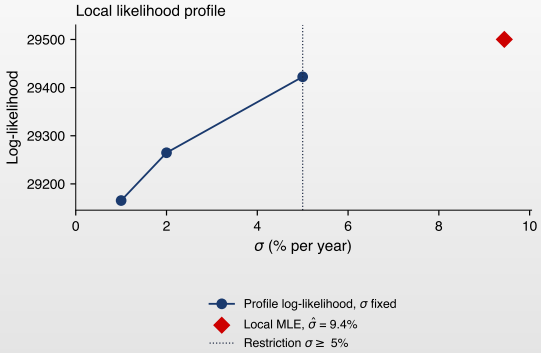
- **Întrebările**
  - cît de repede se estompează vîrfurile de volatilitate?
  - este suficient un singur factor OU?
- **Date**: `VIX.INDX`, close, 1990–2026, zile lucrătoare; $x_t = \ln \mathrm{VIX}_t$, $\Delta t = 1/252$, $n = 9\,283$ tranziții
- **Sarcini**
  1. Estimați procesul OU prin AR(1) exact (B2, pasul 1) și dați $\hat{\kappa}$, SE și nivelul median staționar $e^{\hat{\theta}}$.
  2. Transformați $\hat{\kappa}$ în timp de înjumătățire în zile de tranzacționare, $252 \ln 2/\hat{\kappa}$, cu intervalul $[252 \ln 2/\kappa_{\mathrm{sup}}, 252 \ln 2/\kappa_{\mathrm{inf}}]$ (ambele capete pozitive).
  3. Estimați deplasarea cu 300 de traiectorii OU simulate și comparați ACF empirică cu $\hat{b}^k$ pînă la lagul 120, pe un grafic.
- **Raportați**: $\hat{\kappa}$, $e^{\hat{\theta}}$, timpul de înjumătățire cu interval, deplasarea, graficul ACF
- **Interpretare**
  - la ce orizonturi nu mai este adecvat un singur factor OU?
  - ce extindere ați încerca?
- Model: B2; Notebook: secțiunea B6

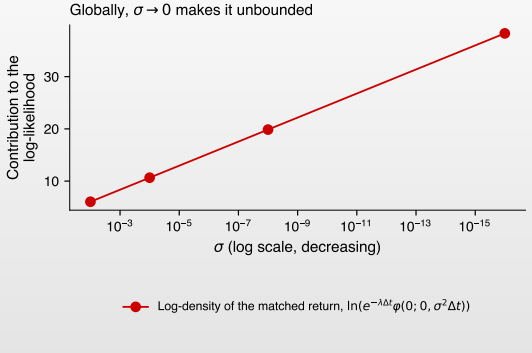
înapoi Lista exercițiilor

B5 extins [Rezolvat]: Este verosimilitatea Merton mărginită? — Cerință

- **Întrebarea**: ce înseamnă MLE Merton raportat dacă verosimilitatea nu are un maxim?
- **Date de intrare**: randamentele S&P 500 și estimarea din B5 ($\hat{\sigma} = 9{,}4\%$); funcția de estimare din B5, cu σ fixat Honoré (1998)
- **Sarcini**
  1. Calculați log-verosimilitatea profil cu σ fixat la 5%, 2% și 1%, reestimînd ceilalți patru parametri.
  2. Fixați $m\Delta t$ egal cu un randament observat și lăsați $\sigma \to 0$: calculați termenul acelui randament $\ln(e^{-\lambda\Delta t}\varphi(0; 0, \sigma^2\Delta t))$ la $\sigma = 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-8}, 10^{-16}$.
- **Raportați**: tabelul profilului și șirul singular, cu graficul
- **Interpretare**
  - este verosimilitatea mărginită?
  - de ce profilurile numerice singure nu pot lămuri întrebarea?
- Notebook: secțiunea B5 Extended

B5 extins [Rezolvat]: Profilul local și singularitatea globală (1/2)





MFM_ch11_seminar

B5 extins [Rezolvat]: Profilul local și singularitatea globală (2/2)

σ (fixat)	log-verosimilitatea	$\hat{\lambda}$ pe an	$\hat{\sigma}_J$ (%)
9,4% (MLE)	29 500	101,9	1,44
5%	29 422	302	0,93
2%	29 265	555	0,70
1%	29 165	710	0,62

1. Local, profilul scade cînd σ scade, iar $\hat{\lambda}$ crește (panoul din stînga); MLE satisface $\sigma \geq 5\%$
2. Global, termenul randamentului ales este 6,0; 10,7; 19,9; 38,3 la $\sigma = 10^{-\mathbf{2}}, 10^{-\mathbf{4}}, 10^{-\mathbf{8}}, 10^{-\mathbf{16}}$, iar celelalte randamente păstrează densități finite din componentele cu salturi: $\sup = +\infty$ (panoul din dreapta)

□ **Interpretare**: argumentul, nu cifrele, demonstrează nemărginirea; MLE este un maxim local interior, deci testul LR din B5 este definit pe $\sigma \geq 5\%$, la fel pentru date și bootstrap

MFM_ch11_seminar

B7 [Propus]: Salturi în Bitcoin — Cerință

- **Întrebarea**: cît de frecvente sînt salturile Bitcoin, după o mixtură estimată și după un test de detectare?
- **Date**: `BTC-USD.CC`, close, 18 septembrie 2014 – 18 septembrie 2026, 7 zile din 7, $\Delta t = 1/365$; Lee–Mykland: $L_t = r_t/\hat{\sigma}_t$, $\hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{K-2}\sum_{j=t-K+2}^{t-1} |r_j|\,|r_{j-1}|$, $K = 16$; statistica $(|L_t| - C_n)/S_n$ față de $-\ln(-\ln(0{,}99))$ (formulele pentru C_n, S_n: Capitolul 11, Aprofundări) Lee & Mykland (2008)
- **Sarcini**
  1. Estimați Merton ca în B5 și raportați toți cei cinci parametri cu SE, excesul de kurtosis implicat și ponderea salturilor în dispersie.
  2. Aplicați testul: primele $K - 1$ zile nu au scală locală și nu sînt testate, n = numărul zilelor testate; numărați zilele marcate pe an și mărimea lor absolută medie și reprezentați randamentele și statistica.
  3. Calibrați pragul prin simulare: cuantila de 99% a maximului statisticii în 2 000 de eșantioane i.i.d. cu distribuția Normală, de lungime n, același K; numărați zilele peste el.
- **Raportați**: tabelul Merton și numărul de salturi Lee–Mykland, alăturat, cu graficul
- **Interpretare**
  - Comparați $\hat{\lambda}$ cu numărul de salturi detectate. Măsoară același lucru?
  - La trecerea la Q se pot schimba și intensitatea salturilor, și distribuția mărimii lor. De ce niciuna dintre estimări nu este direct intensitatea folosită la evaluarea opțiunii?
- Model: B5; Notebook: secțiunea B7

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

B8 [Propus]: Parametrii Heston din VIX — Cerință

- **Întrebările**
  - ce spun datele S&P 500 și VIX despre κ, θ, ξ și ρ?
  - sînt acești parametri stabili?
- **Date**: S&P 500 (ca în B1) și `VIX.INDX` aliniate pe zilele comune, 1990–2026, apoi randamentele; $y_t = (\mathrm{VIX}_t/100)^2$ în locul lui v_t, $\Delta t = 1/252$ Heston (1993)
- **Sarcini**
  1. Regresați $(y_{t+\Delta} - y_t)/\sqrt{y_t}$ pe $\Delta t/\sqrt{y_t}$ și $-\Delta t\sqrt{y_t}$ fără termen liber: $\kappa = \beta_2$, $\theta = \beta_1/\beta_2$, $\xi = s_e/\sqrt{\Delta t}$; dați SE OLS și HAC și un CI de 95% pentru κ.
  2. Estimați ρ drept corelația dintre $r_{t+1}/\sqrt{y_t}$ și reziduul regresiei pe același interval, cu CI Fisher-z (presupune șocuri i.i.d. cu distribuție Normală bivariată) și un CI bootstrap pe blocuri suprapuse (blocuri de 63 de zile din perechile preț–VIX, toți parametrii reestimați), și raportul Feller $2\kappa\theta/\xi^2$.
  3. Repetați pe 1990–2007 și 2008–2026.
- **Raportați**: un tabel cu întregul eșantion și cele două jumătăți
- **Interpretare**: Comparați $\sqrt{\theta}$ din VIX cu volatilitatea realizată. Ce ar putea explica diferența?
- Model: B2, B5; Notebook: secțiunea B8

Înapoi Lista exercițiilor

B8 extins [Propus]: Relația afină și varianța realizată — Cerință

- **Întrebarea**: depinde ρ de proxy-ul varianței pe care îl folosim?
- **Date de intrare**: ca în B8, plus varianța realizată (*realised variance*, RV) SPY la 5 minute din Capitolul 9 (`ch9_rv_spy.csv`) (totală, inclusiv randamentul de peste noapte, în $\%^2$): anualizați prin $\mathrm{RV} \times 10^{-4}/\Delta t$; aliniați întîi S&P 500, VIX și RV pe zilele comune (octombrie 2020 – septembrie 2026), apoi randamentele
- **Sarcini**
  1. Pe zilele comune, estimați ρ de două ori (VIX și RV în locul lui v_t), cu aceeași aliniere în timp a randamentelor și CI Fisher-z de 95%; desenați ambele grafice de dispersie.
- **Raportați**: cele două corelații cu CI, graficul
- **Interpretare**
  - Comparați ρ din RV și VIX. Ce ar putea explica diferența?
  - ce ρ ați folosi într-un model Heston?
- Model: A8, B8; Notebook: secțiunea B8 Extended

Estimările locale și lățimea de bandă

- Regula Silverman folosește s_r, abaterea standard a nivelurilor ratei, în $h = 1{,}06 s_r n^{-1/5}$. Lățimea de bandă controlează cîte niveluri apropiate contribuie apreciabil.
- Pentru drift, $y_t = \Delta r_t / \Delta$ și $\hat{m} = \hat{a}(x)$. Pentru varianță, $y_t = (\Delta r_t)^2 / \Delta$ și $\hat{m} = \hat{b}^2(x)$. Ambele sînt medii locale ponderate la nivelul x.
- În B9 comparați estimările pentru lățimile de bandă cerute. Deosebiți schimbările curbei estimate de schimbările incertitudinii sale.

B9 [Propus]: Difuzia neparametrică a randamentului titlurilor de stat — Cerință

- **Întrebarea**: ce difuzie parametrică, dacă există, este compatibilă cu datele la fiecare nivel al ratei?
- **Date**: DTB3 zilnic, 1954–2007, $\Delta = 1/252$; estimările din B2 extins Bandi & Phillips (2003); grilă de 60 de niveluri între cuantilele de 2% și 98%; nucleu gaussian, $h = 1{,}06\, s_r n^{-\mathbf{1/5}}$; ponderi $w_t(x) = K((r_t - x)/h) / \sum_s K((r_s - x)/h)$
- **Sarcini**
  1. Calculați $\hat{a}(x) = \sum_t w_t \, \Delta r_t / \Delta$ și $\hat{b}^{\mathbf{2}}(x) = \sum_t w_t \, (\Delta r_t)^{\mathbf{2}} / \Delta$ cu SE $\sqrt{\sum_t w_t^{\mathbf{2}} (y_t - \hat{m})^{\mathbf{2}}}$; benzile pentru b sînt rădăcinile benzilor pentru $b^{\mathbf{2}}$, trunchiate la zero.
  2. Suprapuneți difuziile Vasicek, CIR și CKLS și calculați ponderea nivelurilor aflate în banda punctuală.
  3. Repetați cu $h/2$ și $2h$; raportați panta în logaritmi a lui $\hat{b}(r)$ și ponderea nivelurilor la care banda driftului conține zero.
- **Raportați**: graficul și un tabel pe lățimi de bandă
- **Interpretare**
  - se poate distinge driftul de zero?
  - ce ignoră benzile?
- Model: B2 extins; Notebook: secțiunea B9

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

C2 [Propus]: Modelul în timp continuu cel mai adecvat pentru BET și Bitcoin — Cerință

- **Întrebarea**: ce fapte stilizate reproduce fiecare model estimat pe piețe fără un indice de volatilitate implicită?
- **Date**: randamentele logaritmice zilnice BET și Bitcoin (Datele folosite); proxy-ul variației $RV_t = \frac{1}{21\Delta t}\sum_{j=0}^{20} r_{t-j}^2$, o fereastră suprapusă: pentru randamente i.i.d., autocorelația la lagul k este $(21-k)/21$, deci o parte din persistență este indusă de construcție (control: ACF simulată 0,952 la lagul 1)
- **Sarcini**
  1. Începeți cu o singură piață: estimați GBM (B1), Merton (B5) și Heston prin regresia din B8, cu RV_t în locul lui v_t.
  2. Simulați 100 de eșantioane de lungimea datelor pentru fiecare model (Heston: Euler cu trunchiere completă, pas zilnic, θ egal cu varianța realizată, $v_0 = \theta$, 500 de pași de încălzire, seed fix) și calculați excesul de kurtosis, statistica Hill $\left[\frac{1}{k}\sum_{i\le k}\ln(L_{(i)}/L_{(k+1)})\right]^{-1}$ a pierderilor $L = -r$ ($k = 5\%$ din randamente), asimetria și $\sum_{k=1}^{20}$ ACF a lui $|r_t|$.
  3. Raportați q = ponderea statisticilor simulate cel mult egale cu valoarea din date (de exemplu, $q = 0{,}97$: datele sînt peste 97 din 100 de eșantioane), o verificare descriptivă, deoarece parametrii nu sînt reestimați.
- **Livrabile**: medianele cu intervale de 90%, tabelul q, graficele; opțional: Bates (Heston plus salturi) ca proiect avansat separat
- **Criterii de evaluare**: estimări și simulări reproductibile (seed fix); comparația corectă a datelor cu distribuțiile simulate; limitele fiecărei concluzii
- **Interpretare**
  - Ce caracteristici nu reproduce nicio simulare?
  - Este asimetria aproape nulă din Heston o proprietate a modelului sau a discretizării?
  - Este Bitcoin o clasă distinctă de active Pele et al. (2023)?
- Model: B1, B5, B8; Notebook: secțiunea C2

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

Cum evaluăm modelele de volatilitate aspră?

- Metoda celor mai mici pătrate neliniare (*Nonlinear Least Squares*, NLLS) ajustează o curbă neliniară minimizînd suma pătratelor reziduurilor. În exercițiul cu variograma estimează direct parametrul de asperitate (*roughness*), în locul aproximării log-liniare.
- RFSV (*Rough Fractional Stochastic Volatility*) este un model de volatilitate stocastică fracționară aspră, cu traiectorii ale log-volatilității local mai neregulate decît mișcarea browniană. Este un concurent pentru prognoză, nu o concluzie dintr-o singură pantă estimată.
- Eroarea pătratică medie (*Mean Squared Error*, MSE) este media erorilor de prognoză la pătrat. QLIKE (*quasi-likelihood*, cvasi-verosimilitate) este o pierdere pentru prognozele de variață, care tratează diferit subestimarea și supraestimarea. Comparăm modelele pe aceleași observații și orizonturi.
- Mulțimea de încredere a modelelor (*Model Confidence Set*, MCS) păstrează modelele ale căror performanțe de prognoză nu pot fi deosebite statistic prin procedura folosită. Obținem o mulțime, nu un clasament și nici dovada că toate modelele păstrate sînt corecte.

C3 [Propus]: Este volatilitatea SPY aspră și persistentă? Etapa 1 — Cerință

- **Întrebarea**: este logaritmul volatilității zilnice SPY aspru ($\alpha < 0$) și în acord cu memoria lungă ($\beta < 1$)?
- **Date**: barele SPY de 5 minute, sesiunile complete 09:30–16:00 ora New York (78 de bare); primul randament al sesiunii log(close/open) al primei bare, apoi de la o închidere la alta, fără randamentul de peste noapte; factorul $M/(M-1)$ din BV_t deplasează log-volatilitatea cu o constantă, care se anulează în ACF și în variogramă; studiul de caz din curs Bennedsen, Lunde & Pakkanen (2022)
- **Sarcini**
  1. Calculați variația bipower zilnică $\mathrm{BV}_t = \frac{\pi}{\mathbf{2}} \frac{M}{M-\mathbf{1}} \sum_{j=\mathbf{2}}^{M} |r_j|\,|r_{j-\mathbf{1}}|$, $M = 78$ Barndorff-Nielsen & Shephard (2004), și logaritmul volatilității zilnice $x_t = \log \hat{\sigma}_t = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \log \mathrm{BV}_t$, cu $\hat{\sigma}_t = \sqrt{\mathrm{BV}_t}$ în ziua t; reprezentați seria.
  2. Calculați variograma $\hat{\gamma}_{\mathbf{2}}(k) = \frac{\mathbf{1}}{n-k} \sum_t (x_{t+k} - x_t)^{\mathbf{2}}$, care se comportă ca $c\,k^{\mathbf{2}\alpha+\mathbf{1}}$ pentru k mic; estimați α prin regresia OLS a lui $\log \hat{\gamma}_{\mathbf{2}}(k)$ pe $\log k$, $k = 1, \ldots, 6$, $\hat{\alpha} = (\text{panta} - 1)/2$, și prin NLLS $\hat{\gamma}_{\mathbf{2}}(k) = b_{\mathbf{0}} + b_{\mathbf{1}} k^{\mathbf{2}\alpha+\mathbf{1}}$, mediat pe $m = 10, \ldots, 20$ laguri.
  3. Ajustați ACF Cauchy $\rho(h) = (1 + h^{\mathbf{2}\alpha+\mathbf{1}})^{-\beta/(\mathbf{2}\alpha+\mathbf{1})}$ și o ACF exponențială (OU) pe primele $\lceil n^{\mathbf{1}/\mathbf{3}} \rceil$ laguri; reprezentați-le față de ACF empirică pînă la lagul 100.
- **Livrabile**: $\hat{\alpha}_{\mathrm{OLS}}$, $\hat{\alpha}^{*}_{\mathrm{NLLS}}$, $\hat{\beta}$, timpul de înjumătățire OU, trei grafice
- **Criterii de evaluare**: seria BV_t și variograma reproductibile; robustețea la laguri; limitele interpretării lui $\hat{\alpha}$ și $\hat{\beta}$
- **Interpretare**
  - este „în acord cu memoria lungă" același lucru cu „are memorie lungă"?
  - Cît de robuste sînt estimările la lagurile folosite?
- Model: B2, B4; Notebook: secțiunea C3

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

C3 [Propus]: Etapele 2 și 3 (avansate, opționale)

- **Etapa 2, intrazilnic**: $\Delta = 30$ și 65 de minute ($M = 6$ și 13 randamente pe interval), $\hat{\sigma}_t^2 = \mathrm{BV}_t/\Delta$ împărțită la un factor sezonier
  - Factorul sezonier: forma Fourier flexibilă pentru volatilitatea fiecărui interval Andersen & Bollerslev (1997), scalată astfel încît pătratul ei să aibă media 1 pe sesiune, estimată doar din date trecute; reprezentați profilul intrazilnic înainte și după
  - Lagurile h și λ sînt în pași de Δ: comparați cu Tabelul 3, Panoul A din lucrare doar în aceeași unitate; barele în locul fiecărei tranzacții înseamnă fără pre-mediere (*pre-averaging*) și mai mult zgomot
- **Etapa 3, prognoză**: la $\Delta = 65$ de minute, prognozați varianța însumată pe $h = 1, 5, 20$ pași cu log-HAR (model autoregresiv heterogen pentru logaritmul volatilității) Corsi (2009), RFSV Gatheral, Jaisson & Rosenbaum (2018) și modelul Cauchy, fereastră mobilă de 200 de observații, doar cu datele pînă la fiecare origine
  - Pierderi MSE și QLIKE, MCS de 90% Hansen, Lunde & Nason (2011); reprezentați varianța realizată față de cea prognozată și diferențele cumulate QLIKE; MCS nu ordonează modelele pe care le conține
- Evaluați robustețea și reproductibilitatea, nu dacă se ating intervalele din lucrare

Acronime folosite în acest material (1/2)

- **ACF**: AutoCorrelation Function — *funcția de autocorelație*
- **AI**: Artificial Intelligence — *inteligență artificială*
- **AR**: AutoRegressive (model) — *model autoregresiv*
- **BET**: Bucharest Exchange Trading (index) — *indicele de referință al Bursei de Valori București*
- **CI**: Confidence Interval — *interval de încredere*
- **CIR**: Cox–Ingersoll–Ross (model) — *modelul Cox–Ingersoll–Ross al ratei dobînzii*
- **CKLS**: Chan–Karolyi–Longstaff–Sanders (model) — *modelul Chan–Karolyi–Longstaff–Sanders al ratei dobînzii*
- **DTB3**: 3-Month Treasury Bill: secondary market rate (FRED series code) — *randamentul titlurilor de stat americane pe 3 luni pe piața secundară (codul seriei FRED)*
- **EM**: Euler–Maruyama (discretisation scheme) — *schema de discretizare Euler–Maruyama*
- **FRED**: Federal Reserve Economic Data — *baza de date economice a Rezervei Federale (St. Louis)*
- **GARCH**: Generalised AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity — *heteroscedasticitate condiționată autoregresivă generalizată*
- **GBM**: Geometric Brownian Motion — *mișcarea browniană geometrică*
- **HAC**: Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent (standard errors) — *erori standard robuste la heteroscedasticitate și autocorelație*
- **JB**: Jarque–Bera (test) — *testul de normalitate Jarque–Bera*

Acronime folosite în acest material (2/2)

- **LR**: Likelihood Ratio (test) — *testul raportului de verosimilitate*
- **MCS**: Model Confidence Set — *mulțimea de încredere a modelelor*
- **MLE**: Maximum Likelihood Estimation — *estimarea prin metoda verosimilității maxime*
- **MSE**: Mean Squared Error — *eroarea pătratică medie*
- **NLLS**: Non-Linear Least Squares — *metoda celor mai mici pătrate neliniare*
- **OLS**: Ordinary Least Squares — *metoda celor mai mici pătrate*
- **OU**: Ornstein–Uhlenbeck (process) — *procesul Ornstein–Uhlenbeck*
- **PDE**: Partial Differential Equation — *ecuație cu derivate parțiale*
- **QLIKE**: Quasi-LIKElihood (loss function) — *funcția de pierdere de tip cvasi-verosimilitate*
- **QQ**: Quantile–Quantile (plot) — *graficul cuantilă–cuantilă*
- **RFSV**: Rough Fractional Stochastic Volatility (model) — *modelul de volatilitate stocastică fracționară rough*
- **RV**: Realised Variance — *varianța realizată*
- **SDE**: Stochastic Differential Equation — *ecuație diferențială stocastică*
- **SE**: Standard Error — *eroare standard*
- **SUA**: Statele Unite ale Americii
- **VIX**: Cboe Volatility Index — *indicele de volatilitate CBOE*

Bibliografie (1/4)

- Andersen, T.G., Bollerslev, T. (1997). Intraday periodicity and volatility persistence in financial markets. *Journal of Empirical Finance*, 4(2–3), 115–158.
- Bandi, F.M., Phillips, P.C.B. (2003). Fully nonparametric estimation of scalar diffusion models. *Econometrica*, 71(1), 241–283.
- Barndorff-Nielsen, O.E., Shephard, N. (2004). Power and bipower variation with stochastic volatility and jumps. *Journal of Financial Econometrics*, 2(1), 1–37.
- Bennedsen, M., Lunde, A., Pakkanen, M.S. (2022). Decoupling the short- and long-term behavior of stochastic volatility. *Journal of Financial Econometrics*, 20(5), 961–1006.
- Bollerslev, T., Zhou, H. (2002). Estimating stochastic volatility diffusion using conditional moments of integrated volatility. *Journal of Econometrics*, 109(1), 33–65.
- Borak, S., Härdle, W.K., López-Cabrera, B. (2013). Statistics of Financial Markets: Exercises and Solutions, 2nd ed. Springer.
- Chan, K.C., Karolyi, G.A., Longstaff, F.A., Sanders, A.B. (1992). An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate. *Journal of Finance*, 47(3), 1209–1227.
- Cont, R. (2001). Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*, 1(2), 223–236.
- Corsi, F. (2009). A simple approximate long-memory model of realized volatility. *Journal of Financial Econometrics*, 7(2), 174–196.

Bibliografie (2/4)

- Cox, J.C., Ingersoll, J.E., Ross, S.A. (1985). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53(2), 385–407.
- Franke, J., Härdle, W.K., Hafner, C.M. (2019). Statistics of Financial Markets: An Introduction, 5th ed. Springer.
- Gatheral, J., Jaisson, T., Rosenbaum, M. (2018). Volatility is rough. *Quantitative Finance*, 18(6), 933–949.
- Girsanov, I.V. (1960). On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution of measures. *Theory of Probability and Its Applications*, 5(3), 285–301.
- Hansen, P.R., Lunde, A., Nason, J.M. (2011). The model confidence set. *Econometrica*, 79(2), 453–497.
- Heston, S.L. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies*, 6(2), 327–343.
- Higham, D.J. (2001). An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations. *SIAM Review*, 43(3), 525–546.
- Honoré, P. (1998). Pitfalls in estimating jump-diffusion models. Working paper, SSRN.
- Itô, K. (1944). Stochastic integral. *Proceedings of the Imperial Academy*, 20(8), 519–524.

Bibliografie (3/4)

- Jarque, C.M., Bera, A.K. (1980). Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals. *Economics Letters*, 6(3), 255–259.
- Kac, M. (1949). On distributions of certain Wiener functionals. *Transactions of the American Mathematical Society*, 65(1), 1–13.
- Künsch, H.R. (1989). The jackknife and the bootstrap for general stationary observations. *Annals of Statistics*, 17(3), 1217–1241.
- Lee, S.S., Mykland, P.A. (2008). Jumps in financial markets: a new nonparametric test and jump dynamics. *Review of Financial Studies*, 21(6), 2535–2563.
- Ljung, G.M., Box, G.E.P. (1978). On a measure of lack of fit in time series models. *Biometrika*, 65(2), 297–303.
- Merton, R.C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3(1–2), 125–144.
- Newey, W.K., West, K.D. (1987). A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix. *Econometrica*, 55(3), 703–708.
- Pele, D.T., Wesselhöfft, N., Härdle, W.K., Kolossiatis, M., Yatracos, Y.G. (2023). Are cryptos becoming alternative assets?. *European Journal of Finance*, 29(10), 1064–1105.
- Samuelson, P.A. (1965). Rational theory of warrant pricing. *Industrial Management Review*, 6(2), 13–39; reprinted in *Henry P. McKean Jr. Selecta* (2015), Birkhäuser.
- Tang, C.Y., Chen, S.X. (2009). Parameter estimation and bias correction for diffusion processes. *Journal of Econometrics*, 149(1), 65–81.

Bibliografie (4/4)

- Uhlenbeck, G.E., Ornstein, L.S. (1930). On the theory of the Brownian motion. *Physical Review*, 36(5), 823–841.
- Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5(2), 177–188.
- Wilks, S.S. (1938). The large-sample distribution of the likelihood ratio for testing composite hypotheses. *Annals of Mathematical Statistics*, 9(1), 60–62.