








Modelarea piețelor financiare

Seminarul 12: Opțiuni și suprafața de volatilitate — aplicații



Daniel Traian PELE
Drd. Antoaneta Amza, antoaneta.amza@csie.ase.ro

Academia de Studii Economice din București
IDA Institute Digital Assets
Blockchain Research Center
AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance
Academia Română, Institutul de Prognoză Economică
MSCA Digital Finance

Întrebarea de azi și structura seminarului

- Întrebarea seminarului
  - **cît de mult ne putem baza pe cifrele obținute din prețurile opțiunilor: senzitivități, volatilitate implicită, un zîmbet estimat și prima de risc a variației?**
- Livrabile
  - răspunsurile la exercițiile A
  - două figuri (B1, B2) și cîte un tabel pentru fiecare exercițiu B
  - codul corectat din C1
  - o propoziție de interpretare pentru fiecare exercițiu
- Criterii de evaluare
  - reproductibilitate: notebook-ul rulează de la început la sfîrșit și reproduce fiecare cifră raportată
  - inferență corectă: erori standard robuste pe ferestre suprapuse, fiecare estimare cu incertitudinea ei
  - interpretare: o concluzie susținută de cifre, cu limita ei
- Notebook-ul de azi: deschideți notebook-ul seminarului în Colab
  - fiecare cerință indică secțiunea din notebook
- Seminar: prof. Daniel Traian Pele, danpele@ase.ro; drd. Antoaneta Amza, antoaneta.amza@csie.ase.ro

Harta exercițiilor

Exercițiul	Întrebarea	Tipul	Model
A1	de ce sînt gamma și vega proporționale pentru o scadență?	Rezolvat	–
A2	ce volatilitate reproduce un preț de piață de 4,50?	Rezolvat	–
B1	cît de repede scade eroarea de acoperire cu reechilibrarea?	Rezolvat	–
B2	este prima de risc a variantei S&P 500 semnificativă și stabilă?	Rezolvat	–
C1	ce este greșit într-un răspuns generat de inteligență artificială (AI)?	Propus	A1, A2
B3 (acasă)	este VIX (indicele de volatilitate Cboe) o prognoză eficientă a volatilității?	Propus	B2
B4 (după curs)	cît de precis descrie SVI zîmbetul Bitcoin?	Rezolvat	–
Pachete de extindere	A3–A8, B5–B8, C2, C3 (opționale, după seminar)	ambele	indicat la fiecare cerință

- **[Rezolvat]**: rezolvarea completă în slide-uri și în notebook, un model de urmat; **[Propus]**: îl rezolvați dumneavoastră, iar rezolvarea se discută la seminar
- Partea A: derivări pe hîrtie; Partea B: estimare și inferență pe date reale, fiecare încheiată cu o întrebare de interpretare; Partea C: întrebări deschise și critica unui răspuns AI (*Artificial Intelligence*, inteligență artificială)

Datele folosite

Seria	Simbol, cîmp	Perioada	Unități	Folosită în
S&P 500	`GSPC.INDX`, close	1990–2026	puncte de indice	B2, B3, B5, C2, C3
VIX, VIX3M	`VIX.INDX`, `VIX3M.INDX`, close	1990 / 2007–2026	% anualizat	B2, B3, B5, C2
Bitcoin	`BTC-USD.CC`, close	2021–2026	USD	B7, C2
Opțiuni Bitcoin	cotații Deribit: strike, tip, bid, ask, mark price (BTC), mark IV, forward, indice	22 sept. 2026, 07:51 UTC	BTC; % pentru volatilitate	A3, A4, B4, B6, B8
DVOL	indicele de volatilitate Deribit, zilnic	2021–2026	% anualizat	B7, C2
Simulate	traiectorii ale mișcării browniene geometrice, seed 42	–	–	B1

- UTC: timpul universal coordonat; USD: dolarul american; BTC: Bitcoin; VIX3M (*Cboe 3-Month Volatility Index*, indicele Cboe de volatilitate implicită pe 3 luni): analogul pe 3 luni al VIX (*CBOE Volatility IndeX*, indicele de volatilitate CBOE). Prețuri de închidere pînă la 18 septembrie 2026; cotațiile Deribit (bursă de opțiuni pe criptomonede) sînt observate la un singur moment; bid/ask: cele mai bune cotații de cumpărare/vînzare; mark: prețul de referință al bursei
- Două serii împreună: întîi aliniem prețurile pe zilele comune, apoi calculăm randamentele; C3 folosește în plus rata zilnică fără risc Kenneth French și pachetul de replicare al studiului de caz
- Graficele păstrează etichetele englezești și punctul zecimal: 10.45 în grafic corespunde lui 10,45 în text.

Pregătire: rulați și verificați

```
# notebook section "Data" defines
# load_close(name) and deribit_chain()
px = pd.concat([load_close('sp500'),
                load_close('vix')],
               axis=1, join='inner').dropna()
print(len(px), px.index[0], px.index[-1])
print(px.iloc[[0, -1]])
c = deribit_chain()
print(len(c), c['expiry'].nunique())
```

- Rezultatul așteptat: 9 245 de zile comune, 1990-01-02 – 2026-09-18

data	S&P 500	VIX
1990-01-02	359,69	17,24
2026-09-18	7 650,50	14,81

- Secțiunea transversală a opțiunilor: 986 de contracte (call și put), 11 scadențe
- Dacă numărul diferă, opriți-vă și verificați simbolurile, alinierea și data de sfîrșit

Notațiile folosite în toate exercițiile (1/2): prețuri, prețuri de exercitare și timp

- S: prețul de azi al activului suport; S_T: prețul lui la scadența T; K: prețul de exercitare
- $\tau = T - t$: timpul pînă la scadență, în ani (90 de zile calendaristice: $\tau = 90/365$; formulele Cboe și codul notează această durată cu T); r: rata fără risc cu capitalizare continuă
- σ: volatilitatea, abaterea standard anualizată a randamentelor logaritmice (zecimal în formule, în % cînd este cotată)
- Prețul forward și poziția logaritmică față de bani (*log-moneyness*) k

$$F = Se^{r\tau}, \qquad k = \ln(K/F)$$

  - $k < 0$: preț de exercitare sub forward (put-uri în afara banilor, OTM, *out of the money*); $k > 0$: deasupra lui (call-uri OTM)
- σ_{imp}: volatilitatea implicită; varianța implicită totală $w = \sigma_{imp}^2 \tau$
- Φ, φ: funcția de repartiție și densitatea distribuției Normale standard, $\varphi(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$
- „Puncte de volatilitate": puncte procentuale de volatilitate; vega pe punct de volatilitate = vega pe unitate de σ împărțită la 100

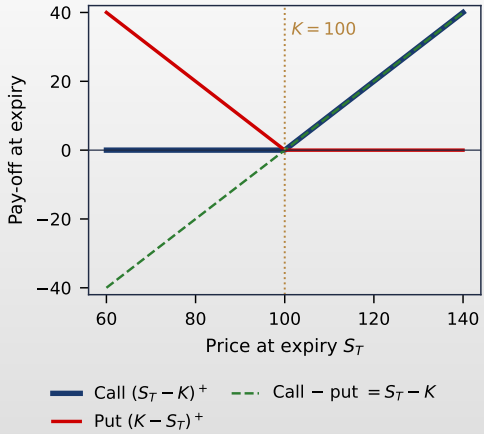
Notațiile folosite în toate exercițiile (2/2): Black–Scholes și un exemplu de calcul

- Un exemplu de calcul pentru prețul Black–Scholes C al unui call Black & Scholes (1973) (fără dividende): $S = 100$, $K = 95$, $\tau = 0{,}25$, $r = 2\%$, $\sigma = 20\%$
  - $\sigma\sqrt{\tau} = 0{,}1000$, $d_1 = 0{,}6129$, $d_2 = 0{,}5129$, $C = 7{,}21$
- Randamentul logaritmic zilnic în %: $r_t = 100 \ln(P_t / P_{t-1})$, cu P_t închiderea din ziua t; A: zile pe an (252 de zile de tranzacționare sau 365 calendaristice)
- Varianța realizată în următoarele h zile, anualizată, în $\%^2$

$$RV_{t,t+h} = \frac{A}{h} \sum_{i=1}^{h} r_{t+i}^2$$

  - $\sqrt{RV_{t,t+h}}$: volatilitatea realizată în % pe an, comparabilă cu VIX (volatilitatea implicită pe 30 de zile a S&P 500) Carr & Wu (2009)

Opțiunile și cîștigurile lor finale



- **Call european**: dreptul de a cumpăra la K la scadență; cîștigul final

$$(S_T - K)^+, \qquad x^+ = \max(x, 0)$$

- **Put european**: dreptul de a vinde la K; cîștigul final $(K - S_T)^+$
- Poziția față de bani
  - la bani (*at the money*, ATM): $K \approx S$
  - în afara banilor (OTM): un call cu $K > S$, un put cu $K < S$; cîștig nul dacă ar fi exercitate azi; aici reperul este prețul curent S, nu forward-ul F din notații
- Linia verde: un call cumpărat și un put vîndut plătesc $S_T - K$ în orice stare, ca un forward cumpărat la K

Paritatea put–call și limitele de absență a arbitrajului

- **Paritatea put–call** (fără dividende; C, P: prețurile de azi ale unui call și ale unui put cu aceleași K și τ)

$$C - P = S - Ke^{-r\tau}$$

  - $Ke^{-r\tau}$: valoarea de azi a sumei K plătite la scadență
  - un call plus numerarul $Ke^{-r\tau}$ și un put plus o acțiune plătesc amîndouă $\max(S_T, K)$, deci costă la fel; nu este nevoie de niciun model
  - cu $D = e^{-r\tau}$ și $F = Se^{r\tau}$: $C - P = DF - DK$, o dreaptă în K (A4)

- **Limitele de absență a arbitrajului**

$$(S - Ke^{-r\tau})^+ \le C \le S, \qquad (Ke^{-r\tau} - S)^+ \le P \le Ke^{-r\tau}$$

  - un preț în afara lor este o eroare în date sau un arbitraj: un portofoliu care nu costă nimic și nu pierde niciodată

- Exemplu: $S = K = 100$, $r = 4\%$, $\tau = 0{,}5$: $Ke^{-r\tau} = 98{,}02$
  - un call de 7,00 implică put-ul $7{,}00 - 100 + 98{,}02 = 5{,}02$

Mișcarea browniană geometrică și prețul Black–Scholes

- **Acțiunea ca mișcare browniană geometrică** (Geometric Brownian Motion, GBM; Capitolul 11)

$$dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t$$

  - μ: drift-ul (randamentul așteptat pe an); W_t: mișcarea browniană standard, $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$
  - randamentul logaritmic pe Δ ani are distribuția $N\big((\mu - \sigma^2/2)\Delta,\ \sigma^2\Delta\big)$, deci $S_t > 0$

- **Black–Scholes** Black & Scholes (1973): σ și r constante, tranzacționare continuă fără costuri

$$C = S\Phi(d_1) - Ke^{-r\tau}\Phi(d_2), \qquad P = Ke^{-r\tau}\Phi(-d_2) - S\Phi(-d_1)$$

  - $\Phi(d_2)$: probabilitatea neutră la risc ca un call să se încheie în bani; $\Phi(d_1)$: numărul de acțiuni din portofoliul de replicare
  - μ nu apare: Δ acțiuni și numerar, reechilibrate continuu, replică opțiunea oricare ar fi drift-ul
  - call european fără dividende, cu $r \geq 0$: prețul crește cu S, σ, τ și r și scade cu K
  - put european: prețul scade cu S și r și crește cu σ și K; adînc în bani, poate scădea cînd τ crește, dacă $r > 0$

Senzitivitățile (Greeks)

- **Senzitivitățile** (*Greeks*) prețului unui call, Black–Scholes fără dividende

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = \Phi(d_1), \qquad \Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\varphi(d_1)}{S\sigma\sqrt{\tau}}, \qquad \mathcal{V} = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = S\varphi(d_1)\sqrt{\tau}$$

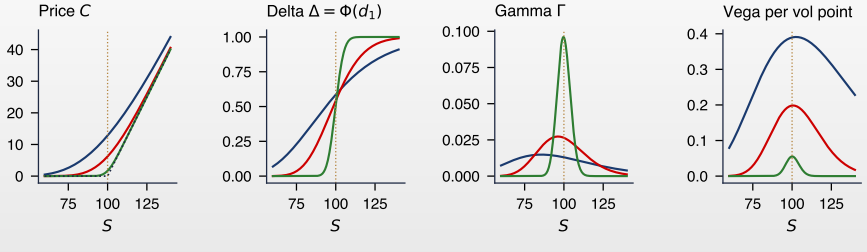
  - delta $\Delta \in (0,1)$: acțiunile deținute pentru un call; dacă S crește cu 1, call-ul cîștigă aproximativ Δ
  - gamma $\Gamma > 0$: cît de repede se schimbă delta; vega $\mathcal{V} > 0$: variația prețului la o unitate de σ (pe punct de volatilitate: /100)
  - theta $\Theta = \partial C/\partial t$, de regulă negativ: valoarea-timp scade pe măsură ce se apropie scadența

- **Dezvoltarea Taylor de ordinul doi** a variației prețului

$$\delta C \approx \Delta\,\delta S + \tfrac{1}{2}\Gamma\,(\delta S)^2 + \mathcal{V}\,\delta\sigma + \Theta\,\delta t$$

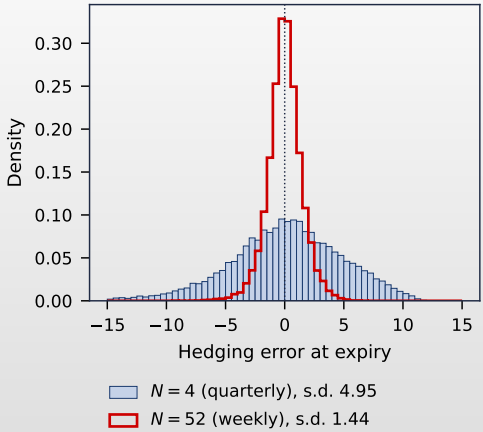
- **Senzitivitățile unui portofoliu se adună**: n_i unități din opțiunea i dau $\Delta_\Pi = \sum_i n_i\Delta_i$, $\Gamma_\Pi = \sum_i n_i\Gamma_i$
  - acoperirea delta–gamma: o a doua opțiune anulează Γ_Π, apoi acțiunile ($\Delta = 1$, $\Gamma = 0$) anulează Δ_Π (A7)

Prețul și senzitivitățile ca funcții de S



- Call cu $K = 100$, $r = 2\%$, $\sigma = 30\%$, pentru trei durate pînă la scadență τ
- Prețul: deasupra cîștigului final cu valoarea-timp, care dispare cînd $\tau \to 0$
- Delta: o curbă în formă de S, de la 0 la 1, mai abruptă aproape de scadență
- Gamma și vega: maxime în jurul lui K; gamma crește cînd se apropie scadența, vega scade

Acoperirea prin delta și eroarea de acoperire



- **Acoperirea prin delta** (*delta hedging*) pentru un call vîndut
  - încasăm C_0, cumpărăm Δ_0 acțiuni, păstrăm $B_0 = C_0 - \Delta_0 S_0$ în numerar la rata r
  - la fiecare dintre cele N momente refacem Δ, plătind din numerar: portofoliul se autofinanțează
- **Eroarea de acoperire** la scadență

$$e_T = \Delta_{N-1} S_T + B_T - (S_T - K)^+$$

  - B_T: numerarul la T, cu dobînda inclusă; $e_T = 0$ la reechilibrare continuă în modelul Black–Scholes
  - între reechilibrări, gamma face acoperirea imperfectă: abaterea standard a lui e_T este proporțională cu $1/\sqrt{N}$
- Graficul (simulat): call ATM pe un an, $\sigma = 30\%$; de 13 ori mai multe tranzacții reduc abaterea standard de la 4,95 la 1,44, aproape de factorul $\sqrt{13} = 3{,}6$

Lema lui Itô, ecuația Black–Scholes, rezultatul acoperirii

- **Lema lui Itô** (Capitolul 11) pentru valoarea unei opțiuni $V(S,t)$ cînd $dS = \mu S\,dt + \sigma S\,dW$

$$dV = \left(V_t + \mu S V_S + \tfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS}\right)dt + \sigma S V_S\,dW_t$$

  - V_t, V_S, V_{SS}: derivatele parțiale; termenul $\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS}$ provine din $(dS)^2 = \sigma^2 S^2 dt$

- **Ecuația Black–Scholes**: deținerea a $\Delta = V_S$ acțiuni elimină dW și μ; o poziție fără risc are randamentul r

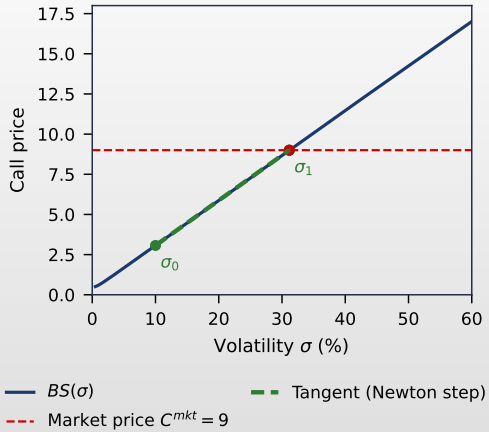
$$V_t + \tfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - rV = 0$$

- **Rezultatul acoperirii (P&L, *profit and loss*) cînd volatilitatea este greșită** (A5): vîndut la σ_{imp}, prețul se mișcă cu σ_{real}

$$d\,\mathrm{P\&L} = r\,\mathrm{P\&L}\,dt + \tfrac{1}{2}\Gamma S^2\left(\sigma_{imp}^2 - \sigma_{real}^2\right)dt$$

  - vînzătorul cîștigă cînd volatilitatea realizată este sub cea implicită; cîștigul se acumulează prin ΓS^2, deci depinde de traiectorie

Volatilitatea implicită și metoda Newton



- S, K, τ, r se observă; σ nu. **Volatilitatea implicită** σ_{imp} este soluția ecuației

$$BS(\sigma_{imp}) = C^{mkt}$$

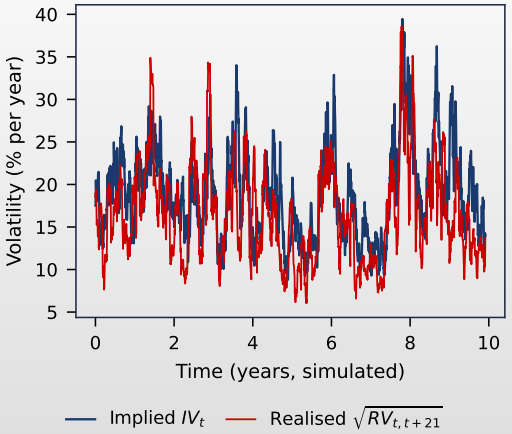
  - $BS(\sigma)$: prețul Black–Scholes; C^{mkt}: prețul de piață
  - unică, deoarece vega > 0; există dacă și numai dacă C^{mkt} este strict între limitele de absență a arbitrajului

- **Metoda Newton**: urmăm tangenta din iterația σ_k

$$\sigma_{k+\mathbf{1}} = \sigma_k - \frac{BS(\sigma_k) - C^{mkt}}{\mathcal{V}(\sigma_k)}$$

- Graficul: $S = K = 100$, $\tau = 0{,}5$, $r = 1\%$, $C^{mkt} = 9$: de la $\sigma_{\mathbf{0}} = 10\%$ la $\sigma_{\mathbf{1}} = 31{,}14\%$, apoi $31{,}15\%$
- Întrebare pentru sală: un preț de piață peste prețul modelului cere o volatilitate mai mare sau mai mică?
  - Răspuns: mai mare, deoarece vega > 0
- Participanții cotează opțiunile în σ_{imp}: comparabilă între prețuri de exercitare, scadențe și active

Prima de risc a variației

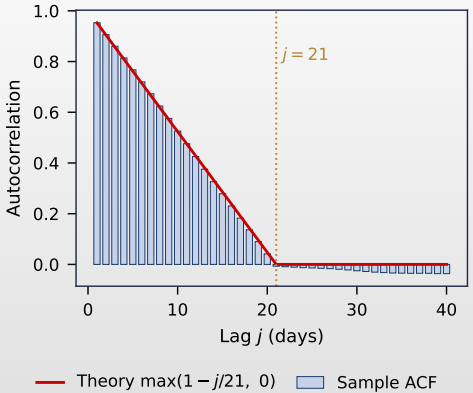


- **Prima de risc a variației** (VRP, *Variance Risk Premium*) Carr & Wu (2009): varianța implicită minus varianța realizată ulterior

$$VRP_t = IV_t^2 - RV_{t,t+h}$$

  - IV_t: volatilitatea implicită în % (VIX sau DVOL); în puncte de volatilitate $IV_t - \sqrt{RV_{t,t+h}}$
  - profitul celui care vinde asigurare contra variației; pozitivă în medie dacă investitorii plătesc ca să se asigure contra stărilor cu volatilitate mare
- Exemplu: $VIX = 20$, volatilitatea realizată 15%: $VRP = 400 - 225 = 175\,\%^2$, adică 5 puncte de volatilitate
- Graficul (simulat): varianța implicită cu 20% peste varianța instantanee curentă, folosită ca aproximare a variației așteptate pe 21 de zile; prima este pozitivă în 71% din zile, dar negativă în episoadele de volatilitate ridicată
- Swap de variață (plătește $RV - K_{var}$; secțiunea VIX) cu valoarea nominală vega 1: rezultat $\approx (IV^2 - RV)/(2\,IV)$ puncte de volatilitate (C2)

Ferestre suprapuse și erori Newey–West



- Valorile consecutive $RV_{t,t+\mathbf{21}}$ au 20 din 21 de zile în comun: chiar pentru randamente independente și identic distribuite (i.i.d.), funcția de autocorelație (ACF, Autocorrelation Function) la lag-ul j este $1 - j/21$ (graficul)
- Eroarea standard naivă $s/\sqrt{n}$ a mediei $\bar{x}$ este atunci prea mică; **Newey–West** Newey & West (1987) cu L lag-uri

$$\hat{\Omega} = \hat{\gamma}_{\mathbf{0}} + 2\sum_{j=\mathbf{1}}^{L}\Big(1 - \frac{j}{L+1}\Big)\hat{\gamma}_j, \qquad \mathrm{se}(\bar{x}) = \sqrt{\hat{\Omega}/n}$$

  - $\hat{\gamma}_j$: autocovarianța de selecție la lag-ul j; ponderile Bartlett garantează $\hat{\Omega} \geq 0$; alegem $L \geq h$
  - $t = \bar{x}/\mathrm{se}(\bar{x})$ are aproximativ distribuția $N(0,1)$: $|t| > 1{,}96$ respinge H_0: media $= 0$ la 5%
- Două perioade: regresia $x_t = c_{\mathbf{0}} + c_{\mathbf{1}} D_t + u_t$, cu $D_t = 1$ după ruptură; testul t HAC (Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent), robust la heteroscedasticitate și autocorelație, pentru $c_{\mathbf{1}} = 0$
- Alternativă: **bootstrap pe blocuri** Künsch (1989), care reeșantionează blocuri de zile consecutive

Este o prognoză nedeplasată? Mincer–Zarnowitz și Wald

- **Regresia Mincer–Zarnowitz** Mincer & Zarnowitz (1969) a valorii realizate pe prognoză

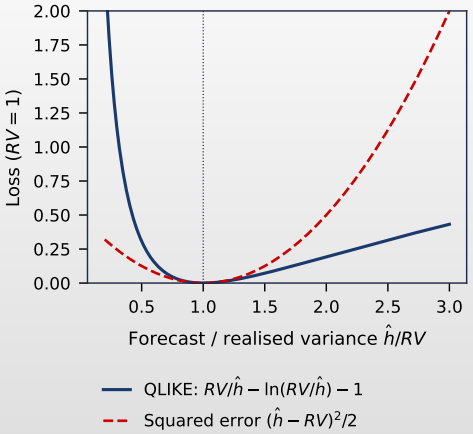
$$RV_{t,t+\mathbf{21}} = \alpha + \beta\, VIX_t^{\mathbf{2}} + \varepsilon_t$$

  - orizontul: VIX acoperă 30 de zile calendaristice, ținta 21 de zile de tranzacționare; ambele aproximează o lună, dar calendarele nu sînt identice
  - prognoză nedeplasată: $\alpha = 0$ și $\beta = 1$ simultan; eficientă: nicio altă variabilă cunoscută la t nu adaugă informație
- **Testul Wald** pentru q restricții liniare $H_{\mathbf{0}}$: $R\theta = c$

$$W = (R\hat{\theta} - c)^{\top} \left(R\hat{V}R^{\top}\right)^{-\mathbf{1}} (R\hat{\theta} - c) \sim \chi^{\mathbf{2}}_{q}$$

  - $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta})$; $\hat{V}$: covarianța HAC; aici $R = I_{\mathbf{2}}$, $c = (0, 1)$, $q = 2$; respingem la 5% dacă $W > 5{,}99$

Compararea prognozelor de varianță: HAR-RV, QLIKE, Diebold–Mariano



- **HAR-RV în logaritmi** (Heterogeneous AutoRegressive model of Realised Volatility) Corsi (2009)

$$\ln RV_{t,t+\mathbf{21}} = b_{\mathbf{0}} + \sum_{j \in \{\mathbf{1},\mathbf{5},\mathbf{22}\}} b_j \ln RV_t^{(j)} + u_t$$

  - $RV_t^{(j)}$: media ultimelor j randamente zilnice la pătrat, anualizată; prognoza în nivel $\exp(\widehat{\ln RV} + \hat{s}^{\mathbf{2}}/2)$, $\hat{s}^{\mathbf{2}}$: dispersia reziduurilor (corecție log-normală; alternativa: *smearing*, media lui $e^{\hat{u}}$ pe datele de estimare)

- **Pierderea QLIKE** (Quasi-LIKElihood) Patton (2011) a unei prognoze de varianță $\hat{h}$

$$L(RV, \hat{h}) = \frac{RV}{\hat{h}} - \ln \frac{RV}{\hat{h}} - 1 \geq 0$$

  - nulă doar pentru $\hat{h} = RV$; penalizează mai mult subestimarea (graficul); clasament robust la zgomot dacă RV este nedeplasat condițional

- **Diebold–Mariano** Diebold & Mariano (1995): $d_t = L_t^A - L_t^B$, $DM = \bar{d}/\mathrm{se}_{HAC}(\bar{d}) \approx N(0,1)$

A1 [Rezolvat]: O identitate pentru toate senzitivitățile — Cerința

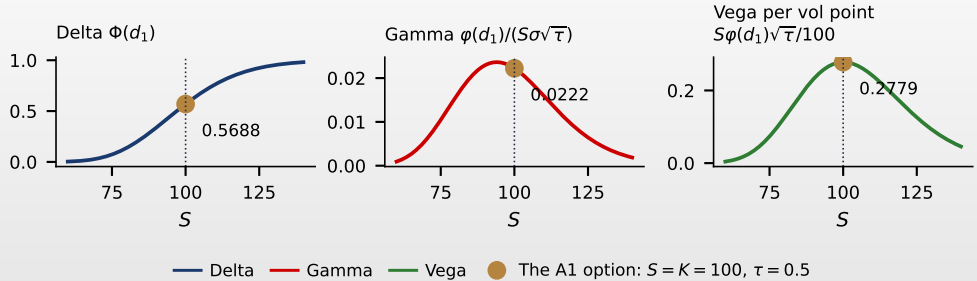
- **Întrebările**
  - de ce sînt proporționale gamma și vega ale opțiunilor cu aceeași scadență?
  - cît valorează ele pentru un call la bani?
- **Date**
  - Call-ul Black–Scholes din secțiunea „Mișcarea browniană geometrică și prețul Black–Scholes"; fără dividende
  - Cifre: $S = K = 100$, șase luni ($\tau = 0{,}5$), $r = 3\%$, $\sigma = 25\%$; fără fișier de date
- **Cerințe**
  1. Demonstrați identitatea $S\varphi(d_1) = Ke^{-r\tau}\varphi(d_2)$ calculînd $d_1^2 - d_2^2$.
  2. Folosiți identitatea pentru a arăta că $\Delta = \Phi(d_1)$ și vega $= S\varphi(d_1)\sqrt{\tau}$.
  3. Arătați că vega $= \Gamma S^2\sigma\tau$, cu Γ din secțiunea „Senzitivitățile (Greeks)".
  4. Calculați d_1, d_2, ambii membri ai identității, Δ, Γ, vega în două moduri, call-ul și put-ul din paritatea put–call.
- **Raportați**: cele trei demonstrații, un tabel cu cifrele și o propoziție despre ce implică vega $= \Gamma S^2\sigma\tau$ pentru acoperirea riscului gamma cu opțiuni de aceeași scadență
- Notebook: secțiunea A1

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

A1 [Rezolvat]: Rezolvare (1/2) — Demonstrații

- Pasul 1: $\varphi(d_2)/\varphi(d_1) = e^{(d_1^2 - d_2^2)/2}$ și $d_1^2 - d_2^2 = (d_1 - d_2)(d_1 + d_2) = \sigma\sqrt{\tau} \cdot \dfrac{2\ln(S/K) + 2r\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$
- Deci $\varphi(d_2)/\varphi(d_1) = Se^{r\tau}/K$, adică $S\varphi(d_1) = Ke^{-r\tau}\varphi(d_2)$
- Pasul 2: $\partial_S C = \Phi(d_1) + [S\varphi(d_1) - Ke^{-r\tau}\varphi(d_2)]\,\partial_S d_1 = \Phi(d_1)$, deoarece $\partial_S d_1 = \partial_S d_2$, iar paranteza este 0 conform Pasului 1
- Vega: $S\varphi(d_1)\partial_\sigma d_1 - Ke^{-r\tau}\varphi(d_2)\partial_\sigma d_2 = S\varphi(d_1)\,\partial_\sigma(d_1 - d_2) = S\varphi(d_1)\sqrt{\tau}$
- Pasul 3: $\Gamma S^2\sigma\tau = \dfrac{\varphi(d_1)}{S\sigma\sqrt{\tau}}\, S^2\sigma\tau = S\varphi(d_1)\sqrt{\tau} =$ vega

A1 [Rezolvat]: Rezolvare (2/2) — Cifre și grafic



- Pasul 4: $\sigma\sqrt{\tau} = 0{,}1768$, $d_1 = (0{,}03 + 0{,}03125) \cdot 0{,}5/0{,}1768 = 0{,}1732$, $d_2 = -0{,}0035$; identitatea: $100 \cdot 0{,}3930 = 39{,}30$ și $98{,}51 \cdot 0{,}3989 = 39{,}30$
- $\Delta = 0{,}5688$, $\Gamma = 0{,}0222$; vega $= 100 \cdot 0{,}3930\sqrt{0{,}5} = 27{,}79 = \Gamma S^2 \sigma\tau = 27{,}79$ pe unitate de σ (0,2779 pe punct de volatilitate); $C = 7{,}76$, $P = C - 100 + 98{,}51 = 6{,}27$
- **Interpretare**: pentru o scadență vega și gamma sînt proporționale, deci un portofoliu neutru la gamma din opțiuni cu aceeași scadență este și neutru la vega, dar doar cît timp zîmbetul este plat (aceeași σ_{imp} pentru orice K; extensia A7)

MFM_ch12_seminar

A2 [Rezolvat]: Volatilitatea implicită prin metoda Newton — Cerința

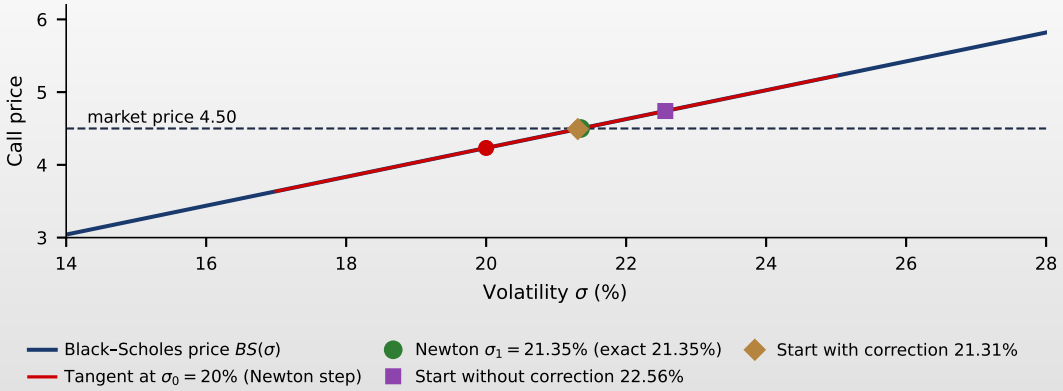
- **Întrebările**
  - ce volatilitate face ca prețul Black–Scholes să fie egal cu un preț de piață de 4,50?
  - Înainte de calcul, notați dacă un preț mai mare decît prețul modelului cere o volatilitate mai mare sau mai mică și justificați prin vega. Verificați apoi predicția cu Newton.
- **Date**: un call european cu $S = K = 100$, trei luni ($\tau = 0{,}25$), $r = 2\%$, preț de piață 4,50; vega $\mathcal{V}(\sigma) = S\varphi(d_1)\sqrt{\tau}$ din A1
- **Cerințe**
  1. Demonstrați că $\sigma \mapsto BS(\sigma)$ este continuă și strict crescătoare, cu limitele $(S - Ke^{-r\tau})^+$ cînd $\sigma \to 0$ și S cînd $\sigma \to \infty$, și precizați cînd există o volatilitate implicită.
  2. Deduceți aproximarea la bani față de forward $C \approx S\sigma\sqrt{\tau}/\sqrt{2\pi}$ Brenner & Subrahmanyam (1988).
  3. Inversați-o pentru a obține două valori de pornire: din prețul 4,50 și din 4,50 minus jumătate din valoarea intrinsecă forward actualizată $(S - Ke^{-r\tau})/2$.
  4. Faceți un pas Newton $\sigma_1 = \sigma_0 - (BS(\sigma_0) - 4{,}50)/\mathcal{V}(\sigma_0)$ de la $\sigma_0 = 20\%$ și comparați σ_1 cu volatilitatea implicită exactă.
- **Raportați**: cele două valori de pornire, σ_1 și volatilitatea implicită exactă; o propoziție care explică de ce Newton converge atît de repede aici și cînd ar eșua
- Notebook: secțiunea A2

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

A2 [Rezolvat]: Rezolvare (1/3) — Existență și aproximare

- Pasul 1: $\partial_\sigma BS = S\varphi(d_1)\sqrt{\tau} > 0$ (A1): strict crescătoare și continuă
- $\sigma \to 0$: $d_{1,2} \to \pm\infty$ după semnul lui $\ln(S/K) + r\tau$, deci $BS \to (S - Ke^{-r\tau})^+$; $\sigma \to \infty$: $d_1 \to \infty$, $d_2 \to -\infty$, deci $BS \to S$
- Conform teoremei valorilor intermediare, un σ_{imp} unic există dacă și numai dacă prețul se află strict între limitele de absență a arbitrajului $(S - Ke^{-r\tau})^+ < C < S$
- Pasul 2: dacă $S = Ke^{-r\tau}$, $d_{1,2} = \pm\sigma\sqrt{\tau}/2$ și $C = S[\Phi(\sigma\sqrt{\tau}/2) - \Phi(-\sigma\sqrt{\tau}/2)] \approx S\,\sigma\sqrt{\tau}\,\varphi(0) = S\sigma\sqrt{\tau}/\sqrt{2\pi}$

A2 [Rezolvat]: Rezolvare (2/3) — Pasul Newton și graficul



MFM_ch12_seminar

A2 [Rezolvat]: Rezolvare (3/3) — Valorile de pornire și rezultatul Newton

- Pasul 3: fără corecție $\sigma \approx 4{,}50\sqrt{2\pi}/(100 \cdot 0{,}5) = 22{,}56\%$
- Cu corecție: $Ke^{-r\tau} = 99{,}501$, jumătate din valoarea intrinsecă forward 0,249, $\sigma \approx (4{,}50 - 0{,}249)\sqrt{2\pi}/50 = 21{,}31\%$
- Pasul 4: $BS(20\%) = 4{,}2322$, $\mathcal{V} = 19{,}848$, deci $\sigma_{\mathbf{1}} = 0{,}20 - (4{,}2322 - 4{,}50)/19{,}848 = 21{,}3495\%$; exact 21,3495%
- Unități: $\mathcal{V} = 19{,}848$ pe unitate de σ, adică 0,198 pe punct de volatilitate; pasul $0{,}2678/19{,}848 = 0{,}0135$ este de 1,35 puncte de volatilitate
- **Interpretare**: aproape de bani prețul este aproape liniar în σ, deci un pas dă patru zecimale; adînc în afara banilor vega ≈ 0 și Newton poate sări prea departe: folosim o metodă cu interval (Brent)

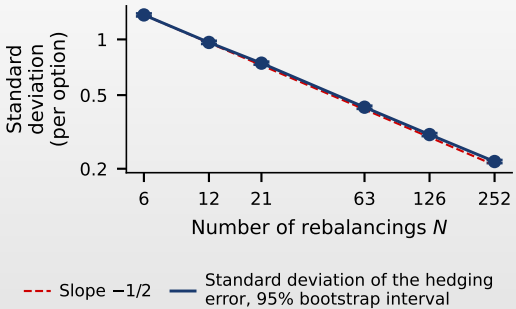
MFM_ch12_seminar

B1 [Rezolvat]: Eroarea de acoperire și frecvența de reechilibrare — Cerința

- **Întrebarea**: cît de repede scade eroarea de acoperire a unui call acoperit prin delta cînd dealerul reechilibrează mai des?
- **Date**
  - Date simulate: 10 000 de traiectorii ale mișcării browniene geometrice, $S_0 = 100$, $\mu = 8\%$, $\sigma = 20\%$, 252 de pași pe trei luni (inițializarea generatorului: 42)
  - Un call ATM pe trei luni ($K = 100$, $r = 4\%$) vîndut la prima Black–Scholes 4,49 și acoperit prin delta la $\sigma = 20\%$
- **Cerințe**
  1. Pentru fiecare $N \in \{6, 12, 21, 63, 126, 252\}$, reechilibrați acoperirea de N ori și calculați pe fiecare traiectorie eroarea de acoperire la scadență: acțiuni plus numerar minus plata.
  2. Calculați abaterea standard a erorii pentru fiecare N și un interval de încredere (CI, Confidence Interval) de 95% prin bootstrap cu metoda percentilelor, din 1 000 de reeșantionări ale traiectoriilor Efron (1979).
  3. Regresați $\ln$(abaterea standard) pe $\ln N$ și dați panta cu un interval bootstrap din aceleași reeșantionări.
  4. Găsiți cel mai mic N din listă pentru care abaterea standard este sub 10% din primă.
- **Raportați**: un tabel cu abaterile standard și intervalele, graficul log-log și panta; o propoziție despre compatibilitatea pantei cu $-1/2$ și despre ce ar schimba costurile de tranzacționare
- Notebook: secțiunea B1

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

B1 [Rezolvat]: Rezolvare (1/2) — Grafic și tabel



- Pasul 1: pe fiecare traiectorie vindem call-ul la 4,49, cumpărăm Δ_0 acțiuni, finanțăm cu numerar la r; la fiecare reechilibrare refacem Δ; la scadență, eroarea = acțiuni + numerar − plată
- Pasul 2: abaterea standard scade de la 1,356 ($N = 6$) la 0,219 ($N = 252$); intervalele sînt înguste pentru că 10 000 de traiectorii dau o abatere standard precisă

N	6	12	21	63	126	252
abatere std.	1,356	0,963	0,744	0,430	0,306	0,219
95% CI	[1,331; 1,381]	[0,945; 0,983]	[0,731; 0,758]	[0,422; 0,438]	[0,300; 0,312]	[0,215; 0,223]

B1 [Rezolvat]: Rezolvare (2/2) — Panta și interpretarea

- Pasul 3: panta $-0{,}489$, CI 95% $[-0{,}496; -0{,}482]$: aproape de $-1/2$ și ușor deasupra la aceste valori finite ale lui N; legea $1/\sqrt{N}$ din noțiunile introductive este asimptotică
- Pasul 4: cel mai mic N din listă cu abaterea standard sub 10% din primă este $N = 63$ (zilnic): $0{,}430/4{,}49 = 9{,}6\%$ din primă
  - Cursul raportează 9,5% cu 20 000 de traiectorii; aici sînt 10 000 de traiectorii, deci diferența este eroare Monte Carlo
  - De patru ori pe zi ($N = 252$) o înjumătățește din nou (raport 1,97)
- **Interpretare**: cu un comision fix pe tranzacție, costurile cresc ca N, iar eroarea scade ca $1/\sqrt{N}$; frecvența cea mai bună depinde de modelul costurilor și de compromisul ales între risc și cost

MFM_ch12_seminar

B2 [Rezolvat]: Prima de risc a variației pentru S&P 500 — Cerința

- **Întrebările**
  - este prima de risc a variației pentru S&P 500 semnificativ pozitivă?
  - a fost aceeași înainte și după 2008?
- **Date**
  - Închideri zilnice S&P 500 și VIX aliniate pe zilele comune, ianuarie 1990 – august 2026 (ultima fereastră de 21 de zile se termină în septembrie 2026)
  - $RV_{t,t+\mathbf{21}}$ (Notațiile (2/2), $A = 252$, $h = 21$) și VRP_t în $\%^2$ și în puncte de volatilitate, ca în „Prima de risc a variației"
- **Cerințe**
  1. Construiți $RV_{t,t+\mathbf{21}}$ din următoarele 21 de randamente logaritmice și VRP_t. Păstrați eșantionul comun cu ferestre complete de 21 de randamente viitoare și trecute, inclusiv $RV_{t-\mathbf{21},t}$ folosit la compararea prognozelor.
  2. Calculați media VRP_t și eroarea ei standard (SE, *standard error*) Newey–West, cu 21 de lag-uri Newey & West (1987), un interval de 95% și eroarea standard naivă $s/\sqrt{n}$.
  3. Repetați pasul 2 în puncte de volatilitate și calculați ponderea zilelor cu primă pozitivă.
  4. Repetați pentru 1990–2007 și 2008–2026, apoi testați egalitatea regresînd VRP_t pe o constantă și o variabilă indicator pentru 2008–2026, cu erori Newey–West (21 de lag-uri).
- **Raportați**: un tabel pe perioade și graficul; cîte o propoziție
  - de ce este greșită aici eroarea standard naivă?
  - cît de mare este eroarea?
  - este prima stabilă?
  - de ce este prima în variață mai puțin precisă decît cea în puncte de volatilitate?
- Notebook: secțiunea B2

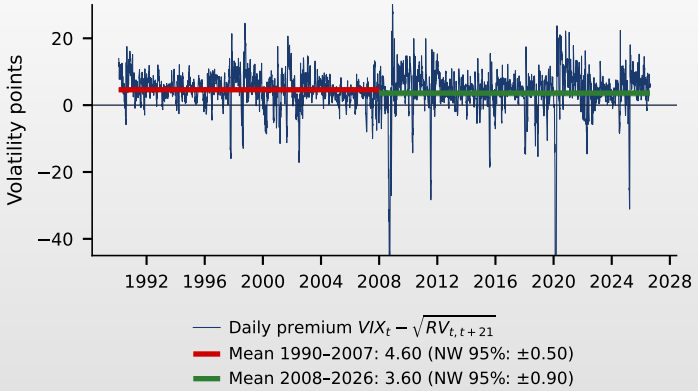
◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

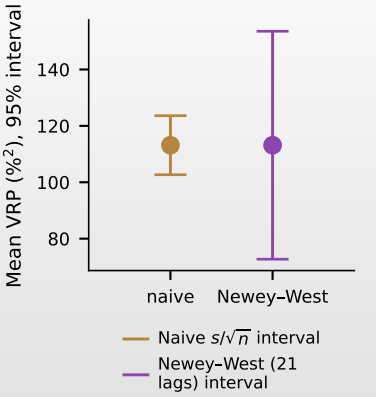
B2 [Rezolvat]: Rezolvare (1/2) — Tabel, pași și interpretare

	n	Media VRP (%²)	95% CI	Puncte de vol. (SE)	Pozitivă
1990–2026	9 203	113,1	[72,7; 153,6]	4,09 (0,27)	86%
1990–2007	4 516	149,3	[125,2; 173,5]	4,60 (0,25)	88%
2008–2026	4 687	78,3	[2,7; 153,9]	3,60 (0,46)	84%

- Pașii 1–2: regresăm VRP_t pe o constantă cu erori standard HAC (Bartlett, 21 de lag-uri: suprapunerea); intervalul = media $\pm 1{,}96$ SE; tot eșantionul $t = 113{,}1/20{,}6 = 5{,}49$: respingem H_0 la 5%
- Eroarea naivă 5,3 față de Newey–West 20,6: de 3,9 ori prea mică, pentru că ferestrele consecutive au 20 din 21 de zile în comun
- Pasul 3: în puncte de volatilitate 4,09 (SE 0,27), pozitivă în 86% din zile
- Pasul 4: 1990–2007 $t = 12{,}12$; 2008–2026 $t = 2{,}03$; diferența $-71{,}0$ %² ($p = 0{,}08$), în puncte de volatilitate $-1{,}01$ ($p = 0{,}06$)
- **Interpretare**: ridicarea la pătrat amplifică ferestrele de criză (2008, 2020), deci prima în variantă are cozi mai grele și un interval mai larg decît prima în puncte de volatilitate; prima este pozitivă în ambele subperioade, dar diferența de mărime nu este semnificativă la 5%: datele nu permit să se stabilească dacă prima s-a schimbat

B2 [Rezolvat]: Rezolvare (2/2) — Prima de varianță în timp





MFM_ch12_seminar

C1 [Propus]: Critica unui răspuns AI — Răspunsul

- Un student îi cere unui asistent AI: „Evaluează un call european cu scadența peste 90 de zile calendaristice, pe o acțiune fără dividende, cu $S = 100$, $K = 105$, volatilitate 20%, rată continuă $r = 4\%$; apoi dă put-ul din paritatea put–call”
- Asistentul răspunde cu acest cod:

```
import numpy as np
from scipy.stats import norm
S, K, r, sigma = 100.0, 105.0, 0.04, 20         # sigma = 20%
T = 90 / 252                                    # 90 days
d1 = (np.log(S / K) + (r + 0.5 * sigma**2) * T) / (sigma * np.sqrt(T))
d2 = d1 - sigma * np.sqrt(T)
call = S * norm.cdf(d1) - K * np.exp(-r * T) * norm.cdf(d2)
put = call + S - K * np.exp(-r * T)             # put-call parity
print(f"call = {call:.2f}, put = {put:.2f}")
```

- „Codul urmează exact Black–Scholes; put-ul rezultă din paritate, deci nu mai e nevoie de a doua formulă”

Înapoi Lista exercițiilor

C1 [Propus]: Critica unui răspuns AI — Cerința

Rezolvarea se discută la seminar

- **Întrebările**
  - ce trei erori conține răspunsul AI?
  - ce verificare o detectează pe fiecare?
- **Date**: codul de pe slide-ul anterior; totul este corect, cu excepția a trei linii
- **Cerințe**
  1. Înainte de a rula codul, estimați cît ar trebui să coste un call pe 90 de zile cu 5% în afara banilor: 0,2; 2 sau 20.
  2. Pentru fiecare eroare, precizați ce este greșit, de ce și cum ați detecta-o: o limită de absență a arbitrajului, o verificare a unităților, noțiunile introductive de azi sau o a doua metodă.
  3. Corectați cele trei linii, rulați codul, raportați C și P și verificați numeric paritatea put–call.
  4. Consemnați cele trei erori în `AI_ERRORS.md`, cu cîmpurile: ce s-a cerut, ce a răspuns AI-ul, ce era greșit, cum ați identificat eroarea, varianta corectă.
- **Raportați**: codul corectat și rezultatul; o propoziție despre eroarea care dă totuși un preț plauzibil și una care explică de ce „put-ul rezultă din paritate” nu este o verificare a call-ului
- **Model**: A1, A2 (Black–Scholes pas cu pas)

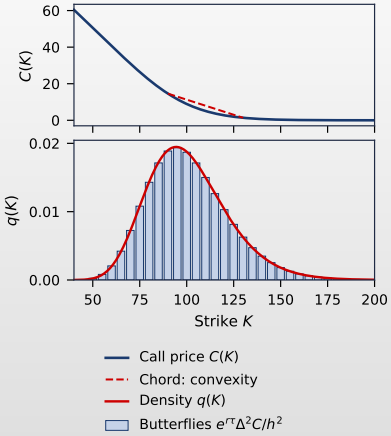
B3 [Propus]: Eficiența VIX ca prognoză — Cerința

Rezolvarea se discută la seminar

- **Întrebarea**: este $VIX_t^{\mathbf{2}}$ o prognoză nedeplasată și eficientă a variației realizate în următoarele 21 de zile de tranzacționare?
- **Date**
  - Seriile zilnice din B2: $RV_{t,t+\mathbf{21}}$ și $VIX_t^{\mathbf{2}}$, 1990–2026; varianța trecută $RV_{t-\mathbf{21},t}$
  - Pentru pasul 4: HAR-RV în logaritmi, prognoza lui în nivel și pierderea QLIKE din secțiunea „Compararea prognozelor de varianță: HAR-RV, QLIKE, Diebold–Mariano" (fiecare medie $RV_t^{(j)}$ cu pragul minim 0,01 %$^{\mathbf{2}}$)
- **Cerințe**
  1. Estimați $RV_{t,t+\mathbf{21}} = \alpha + \beta\, VIX_t^{\mathbf{2}} + \varepsilon_t$ Mincer & Zarnowitz (1969) cu erori Newey–West (21 de lag-uri); testați $\alpha = 0$ și $\beta = 1$ separat și împreună (Wald, 5%) și raportați $\mathrm{corr}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$.
  2. Adăugați $RV_{t-\mathbf{21},t}$ ca al doilea regresor; apoi reestimați în logaritmi, $\ln RV$ pe $\ln VIX^{\mathbf{2}}$, și testați $\beta = 1$.
  3. Instrumentați $\ln VIX_t^{\mathbf{2}}$ cu $\ln VIX_{t-\mathbf{21}}^{\mathbf{2}}$ Christensen & Prabhala (1998) (variabila instrumentală; GMM, metoda generalizată a momentelor, exact identificată; covarianță HAC); raportați t din prima etapă și testați $\beta = 1$.
  4. Din 2000, reestimați la fiecare 21 de zile pe o fereastră în expansiune de ținte deja observate; comparați VIX$^{\mathbf{2}}$ cu HAR-RV prin pierderea QLIKE și testul Diebold–Mariano cu HAC (21 de lag-uri) Diebold & Mariano (1995), Patton (2011).
- **Raportați**: toate estimările și testele, cu decizii la 5%; cîte o propoziție
  - de ce pot fi mici ambele statistici t, iar testul comun să respingă?
  - ce condiție trebuie să îndeplinească instrumentul?
  - se menține concluzia din eșantion (*in-sample*) și în afara lui (*out-of-sample*)?
- **Model**: B2 (inferența Newey–West)
- Notebook: secțiunea B3

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

Convexitatea în prețul de exercitare și densitatea neutră la risc



- **Densitatea neutră la risc** q a lui S_T: prețurile sînt medii actualizate calculate cu q

$$C(K) = e^{-r\tau} \int_K^\infty (x - K)\, q(x)\, dx$$

- Derivînd de două ori în raport cu K Breeden & Litzenberger (1978)

$$q(K) = e^{r\tau}\, \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}$$

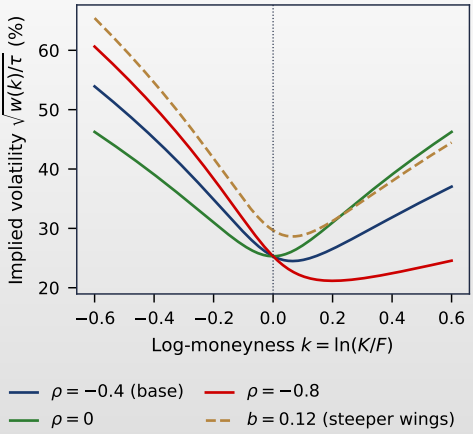
- **Butterfly** cu pasul h: cumpărăm call-urile $K - h$ și $K + h$, vindem două call-uri K

$$C(K - h) - 2C(K) + C(K + h) \geq 0$$

  - împărțit la h^2, aproximează $e^{-r\tau} q(K)$; barele din grafic înmulțesc și cu $e^{r\tau}$
  - un butterfly negativ înseamnă o densitate negativă: un arbitraj sau o eroare de cotare (A3, B8)

- Graficul: call-uri Black–Scholes, $S = 100$, $\tau = 0{,}5$, $\sigma = 30\%$, $r = 2\%$, $h = 5$

Zîmbetul și curba SVI



- Dacă Black–Scholes ar fi exact, σ_{imp} nu ar depinde de K; în date depinde: **zîmbetul volatilității** (*smile*; înclinat: *skew*)
- **SVI** (*Stochastic Volatility Inspired*, parametrizarea inspirată de volatilitatea stocastică) Gatheral & Jacquier (2014): varianța implicită totală $w = \sigma_{imp}^2 \tau$ ca funcție de $k = \ln(K/F)$

$$w(k) = a + b\Big(\rho(k-m) + \sqrt{(k-m)^2 + s^2}\Big)$$

  - a: nivelul; $b \geq 0$: panta aripilor
  - $\rho \in (-1, 1)$: înclinarea; $\rho < 0$ face aripa put-urilor mai scumpă (skew)
  - m: deplasarea orizontală; $s > 0$: curbura în minim
  - în aripi w este liniară în k, cu pantele $b(1 \pm \rho)$
- Graficul: $a = 0{,}004$, $b = 0{,}08$, $m = 0$, $s = 0{,}15$, $\tau = 0{,}25$; se modifică un singur parametru o dată

Estimarea unui zîmbet și densitatea care rezultă

- **Metoda celor mai mici pătrate** pe n cotații (k_i, w_i), $\theta = (a, b, \rho, m, s)$

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta} \sum_{i=1}^{n} \left(w(k_i;\theta) - w_i\right)^2$$

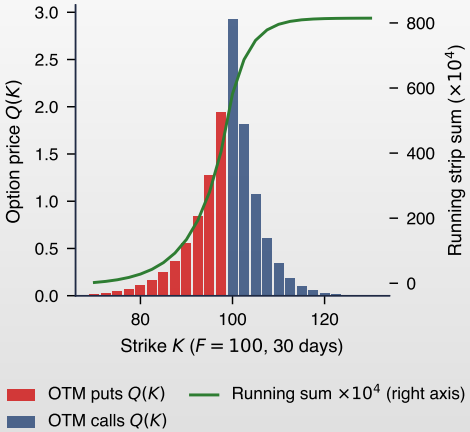
  - calitatea ajustării: rădăcina erorii pătratice medii a lui $\sqrt{w/\tau}$, în puncte de volatilitate
  - **bootstrap pe perechi**: reeșantionăm cotațiile cu întoarcere, reestimăm, citim percentilele 2,5% și 97,5% Efron (1979)
- **Condiția butterfly** Gatheral & Jacquier (2014): densitatea este nenegativă dacă și numai dacă $g(k) \geq 0$ pentru orice k

$$g(k) = \left(1 - \frac{k\,w'}{2w}\right)^2 - \frac{w'^2}{4}\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{4}\right) + \frac{w''}{2}$$

  - w', w'': derivatele de ordinul întîi și doi ale lui $w(k)$
- Prețurile **Black-76** din w estimat (forward F, actualizare $e^{-r\tau}$), apoi $q(K) = e^{r\tau}\partial^2 C/\partial K^2$ (B8)

$$C = e^{-r\tau}\left[F\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)\right], \qquad d_{1,2} = \frac{-k \pm w/2}{\sqrt{w}}$$

Evaluarea variației cu opțiuni: VIX



- **Swap-ul de varianță**: plătește $RV - K_{var}$ la T; prețul lui corect este o bandă de opțiuni OTM Bakshi, Kapadia & Madan (2003)

$$K_{var} = \frac{2e^{rT}}{T}\left[\int_0^F \frac{P(K)}{K^2}dK + \int_F^\infty \frac{C(K)}{K^2}dK\right]$$

- **Formula Cboe** Cboe (2025) pentru o bandă finită

$$\sigma^2 = \frac{2}{T}\sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{rT} Q(K_i) - \frac{1}{T}\left(\frac{F}{K_0} - 1\right)^2$$

  - $Q(K_i)$: prețul mediu OTM (put-uri sub K_0, call-uri deasupra); K_0: primul preț de exercitare cel mult egal cu F; ΔK_i: jumătate din distanța dintre vecini în interior, distanța întreagă pînă la vecin la capete; la K_0 folosiți media prețurilor mid put/call
  - VIX $= 100\sqrt{\sigma^2}$, interpolat la 30 de zile; VIX^2: varianța așteptată neutră la risc, în $\%^2$ pe an

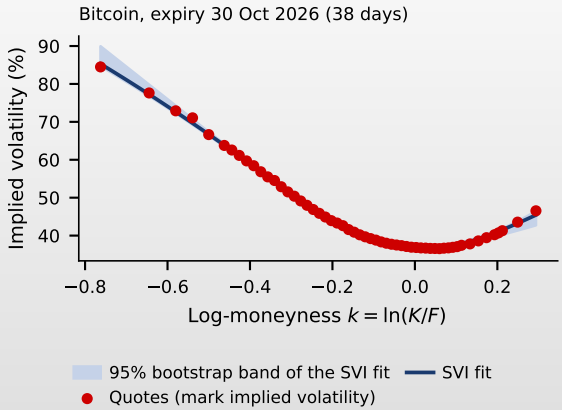
- VIX $= 20$: aproximativ 20% pe an, $20/\sqrt{12} \approx 5{,}8\%$ pe lună

B4 [Rezolvat]: Un zîmbet SVI pentru Bitcoin — Cerința

- **Întrebările**
  - descrie o curbă SVI cu cinci parametri zîmbetul Bitcoin?
  - cît de precis sînt estimate nivelul la bani și asimetria?
- **Date**
  - Secțiunea transversală a opțiunilor din curs; scadența cea mai apropiată de 30 de zile: 2026-10-30, 38 zile, 56 de opțiuni OTM cotate (put-uri sub forward, call-uri peste); pentru fiecare cotație $k = \ln(K/F)$ și $w = \sigma_{ref}^2 \tau$, cu σ_{ref} volatilitatea implicită de referință
  - Păstrați cotațiile cu bid și volatilitate de referință (mark IV) pozitive, cel puțin două zile pînă la scadență și $|k| < 1{,}2$; o scadență estimată are cel puțin șapte cotații. Convertiți mark IV din procente în zecimale înainte de calculul lui w.
  - curba SVI $w(k)$ din secțiunea „Zîmbetul și curba SVI" Gatheral & Jacquier (2014); funcția butterfly $g(k)$ din secțiunea „Estimarea unui zîmbet și densitatea care rezultă": $g \geq 0$ pentru orice k înseamnă o densitate nenegativă
- **Cerințe**
  1. Estimați cei cinci parametri SVI prin cele mai mici pătrate pe w, cu $b \geq 0$, $|\rho| < 1$, $s > 0$, și raportați rădăcina erorii medii pătratice în puncte de volatilitate.
  2. Reeșantionați cotațiile cu întoarcere de 300 de ori, reestimați SVI de fiecare dată și raportați intervale de 95% pentru volatilitatea ATM și asimetria $IV(0{,}15) - IV(-0{,}15)$.
  3. Evaluați $g(k)$ pe $k \in [-1{,}5; 1{,}5]$ și raportați minimul.
- **Raportați**: parametrii, intervalele, $\min g$ și graficul cu cotații, estimare și bandă; cîte o propoziție: ce parametru controlează asimetria și ce semn are; este asimetria semnificativ diferită de 0; de ce estimăm w și nu prețurile
- Notebook: secțiunea B4

înapoi Lista exercițiilor

B4 [Rezolvat]: Rezolvare (1/2) — Estimare și grafic



- Pasul 1: $\hat{a} = -0{,}0204$, $\hat{b} = 0{,}1016$, $\hat{\rho} = -0{,}2615$, $\hat{m} = -0{,}0787$, $\hat{s} = 0{,}3482$; rădăcina erorii medii pătratice 0,42 puncte de volatilitate
- Pasul 2: volatilitatea ATM 36,37%, CI 95% $[36{,}10; 36{,}87]$; asimetria $-2{,}11$, CI 95% $[-2{,}73; -1{,}52]$
- Pasul 3: $\min_k g(k) = 0{,}1359 > 0$ pe $k \in [-1{,}5; 1{,}5]$: niciun arbitraj de tip butterfly pe această grilă

B4 [Rezolvat]: Rezolvare (2/2) — Interpretare

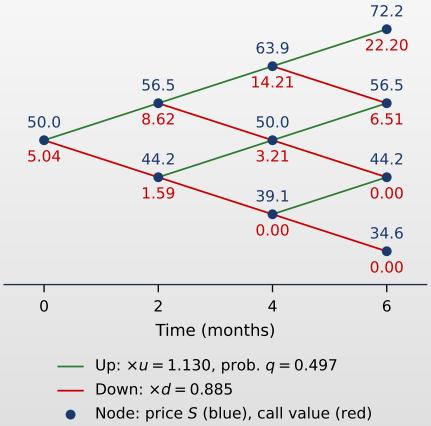
- ρ controlează înclinarea: $\hat{\rho} < 0$ face aripa put-urilor mai scumpă; în schema bootstrap pe perechi, intervalul asimetriei nu conține 0
- De ce w: este comparabil între prețurile de exercitare și aproape liniar în aripi, în timp ce prețurile acoperă patru ordine de mărime și ar da o ponderе mai mare opțiunilor celor mai scumpe
- O densitate pozitivă peste tot necesită și $g \geq 0$ în afara grilei și condițiile pentru aripi din Gatheral & Jacquier (2014)
- **Interpretare**: bootstrap-ul reeșantionează volatilități de referință netezite și dependente între prețurile de exercitare: intervalele măsoară sensibilitatea ajustării la selecția punctelor, nu incertitudinea pieței
- Pentru incertitudinea economică: sensibilitatea la bid–ask, la estimator și la aripile extrapolate

MFM_ch12_seminar

Verificări și punct de plecare pentru proiect

- Verificați rezultatele
  - Dividendele și rata dobînzii sînt incluse în paritate; vega și theta au unitățile precizate (pe punct de volatilitate, pe zi)
  - Nicio eroare standard naivă pe ferestre suprapuse; nicio probabilitate neutră la risc interpretată ca prognoză
  - Un raport Sharpe al unei strategii de vînzare a volatilității este raportat cu asimetria și cea mai rea lună
- Punct de plecare pentru proiectul de echipă: repetați B4, B6 și B8 pe cotațiile Deribit ale opțiunilor Ether de la o dată nouă și comparați cu Bitcoin Alexander & Imeraj (2020), Pele et al. (2023); acoperiți prin delta opțiuni Bitcoin pe o săptămînă, pe traiectorii istorice Matic, Packham & Härdle (2023)

Arborele binomial



- **Cox–Ross–Rubinstein** Cox, Ross & Rubinstein (1979): la fiecare pas de lungime $\Delta t = T/N$, prețul trece în Su sau Sd

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = \frac{1}{u}, \quad q = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

  - q: probabilitatea neutră la risc a unei creșteri; prețul așteptat crește cu rata r

- **Inducția înapoi**: pornim de la cîștigurile finale la T, apoi în fiecare nod

$$V = e^{-r\Delta t}\left[qV_u + (1-q)V_d\right]$$

  - V_u, V_d: valorile opțiunii în cele două noduri următoare

- Graficul: $S = K = 50$, șase luni, $r = 4\%$, $\sigma = 30\%$, $N = 3$: $C_0 = 5{,}04$
- Cînd $N \to \infty$, C_N tinde la prețul Black–Scholes (A6)

Instrumente pentru pachetele de extindere

- **Metoda delta** (A4): eroarea standard a unei funcții netede $g(\hat{\theta})$ de estimatori cu covarianța $\hat{V}$

$$\operatorname{se}(g(\hat{\theta})) \approx \sqrt{\nabla g(\hat{\theta})^\top \, \hat{V} \, \nabla g(\hat{\theta})}$$

- **Variabila instrumentală** z_t (IV: instrumental variables, nu volatilitate implicită) (B3) Christensen & Prabhala (1998): corelat cu regresorul, necorelat cu eroarea; $\hat{\beta}_{IV} = \widehat{\operatorname{cov}}(z, y)/\widehat{\operatorname{cov}}(z, x)$
- **Cîștigul opțiunii acoperite prin delta** Bakshi & Kapadia (2003) (B5): variația valorii opțiunii minus cîștigurile acoperirii pe $[t, t+\tau]$

$$\Pi_{t,t+\tau} = C_{t+\tau} - C_t - \sum_{n=\mathbf{0}}^{N-\mathbf{1}} \Delta_{t_n} \left(S_{t_{n+\mathbf{1}}} - S_{t_n}\right)$$

  - cu dobîndă și dividende nule (altfel se adaugă finanțarea); media zero cere acoperire continuă, modelul corect și $\sigma_{real} = \sigma_{imp}$ pe traiectorie (expunere ponderată cu gamma)
  - negativ pentru cumpărător dacă există o primă de varianță
- **Limita Martin** Martin (2017) (C3): o limită inferioară pentru randamentul în exces așteptat al pieței

$$E_t\left[R_{t,T}\right] - R_{f,t} \geq \frac{1}{R_{f,t}} \operatorname{var}_t^*\left(R_{t,T}\right) = \frac{2}{S_t^2} \int_{\mathbf{0}}^{\infty} \operatorname{OTM}_t(K)\, dK$$

  - $R_{t,T}$: randamentul brut al pieței; $R_{f,t}$: randamentul brut fără risc; var^*: varianța neutră la risc; $\operatorname{OTM}_t(K)$: prețul opțiunii OTM cu prețul de exercitare K
  - doar dacă $\operatorname{cov}_t(M_{t,T} R_{t,T}, R_{t,T}) \leq 0$ ($M_{t,T}$: factorul stocastic de actualizare)

Pachetele de extindere: exercițiile

Exercițiul	Întrebarea	Tipul	Model	Date
A3	sînt prețurile call Bitcoin convexe în prețul de exercitare?	Rezolvat	–	opțiuni BTC
A4	ce forward și ce rată implică paritatea?	Propus	A3	opțiuni BTC
A5	cît cîștigă un dealer cînd $\sigma_{real} \neq \sigma_{imp}$?	Rezolvat	–	–
A6	cît de repede converge arborele binomial?	Propus	A5	–
A7	o singură opțiune anulează gamma și vega?	Propus	A1	–
A8	cît de mari sînt erorile unei benzi de variață?	Propus	A3	–
B5	au cîștigat o primă vînzătorii care se acoperă prin delta?	Propus	B1, B2	S&P 500, VIX
B6	ce valoare are un VIX pentru Bitcoin?	Propus	A8, B4	opțiuni BTC
B7	există o primă de risc a variației pentru Bitcoin?	Propus	B2	DVOL, Bitcoin
B8	cît de groase sînt cozile evaluate de piață?	Propus	B4	opțiuni BTC
C2	este prima de variață un semnal tranzacționabil?	Propus	B2, B7	S&P 500, VIX, DVOL
C3	este limita Martin validă și strînsă?	Propus	B2	studiul de caz

A3 [Rezolvat]: Limite și convexitate în prețul de exercitare — Cerința

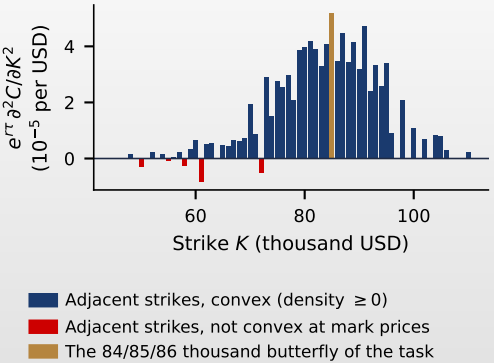
- **Întrebările**
  - ce restricții fără model trebuie să respecte prețurile call între prețurile de exercitare?
  - le respectă cotațiile Bitcoin?
- **Date**
  - Call-uri europene pe un activ fără dividende, prețul $C(K)$, scadența τ, rata r; fără arbitraj, fără fricțiuni
  - Call-uri Bitcoin cu scadența 30 octombrie 2026 din secțiunea transversală a opțiunilor; prețul în USD = prima în BTC × indicele $S = 85\,265$; forward-ul $F = 85\,742$, deci $e^{r\tau} = F/S$; **mark** = prețul de referință al bursei, **bid/ask** = cele mai bune cotații de cumpărare și de vînzare
- **Cerințe**
  1. Demonstrați $\max(S - Ke^{-r\tau}, 0) \le C \le S$ comparînd plățile a două portofolii în orice stare la T.
  2. Pentru $K_1 < K_2 < K_3$ cu $K_2 = \lambda K_1 + (1-\lambda)K_3$, demonstrați $\lambda C(K_1) + (1-\lambda)C(K_3) \ge C(K_2)$.
  3. Arătați că raportul butterfly $[C(K-h) - 2C(K) + C(K+h)]/h^2$ tinde la $e^{-r\tau}q(K)$, cu q densitatea neutră la risc Breeden & Litzenberger (1978).
  4. Calculați butterfly-ul 84/85/86 de mii din prețurile de referință, $q(85\,000)$ și $P^Q(84\,000 < S_T < 86\,000)$; apoi numărați butterfly-urile negative din toate cele 732 de triplete echidistante, la prețurile de referință și la prețurile executabile (aripile la ask, corpul la bid).
- **Raportați**: demonstrațiile, butterfly-ul, $q(85\,000)$ și numărul de încălcări; este vreo încălcare un arbitraj tranzacționabil?
- Notebook: secțiunea A3

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

A3 [Rezolvat]: Rezolvare (1/2) — Demonstrații

- Pasul 1: un call plus $Ke^{-r\tau}$ în numerar valorează $\max(S_T, K) \geq S_T$ la T, deci $C + Ke^{-r\tau} \geq S$; call-ul plătește $(S_T - K)^+ \geq 0$, deci $C \geq 0$
  - Limita superioară: acțiunea plătește $S_T \geq (S_T - K)^+$ în orice stare, deci $C \leq S$
- Pasul 2: pentru S_T fixat, funcția $K \mapsto (S_T - K)^+$ este convexă, deci $\lambda(S_T - K_1)^+ + (1-\lambda)(S_T - K_3)^+ \geq (S_T - K_2)^+$ în orice stare
  - Un portofoliu care plătește cel puțin la fel în orice stare costă cel puțin la fel azi
- Pasul 3: $C(K) = e^{-r\tau} \int_K^\infty (x - K) q(x)\, dx$, deci $\partial_K C = -e^{-r\tau} \int_K^\infty q(x)\, dx$ și $\partial_K^2 C = e^{-r\tau} q(K)$
  - Raportul butterfly este diferența centrală de ordinul doi, deci converge la $e^{-r\tau} q(K)$: convexitatea înseamnă exact $q \geq 0$

A3 [Rezolvat]: Rezolvare (2/2) — Cifrele Bitcoin și graficul



- Pasul 4: $C(84\,000) = 4\,957{,}26$, $C(85\,000) = 4\,414{,}38$, $C(86\,000) = 3\,922{,}98$ USD; butterfly-ul $= 51{,}47$ USD > 0
- $q(85\,000) \approx 1{,}0056 \cdot 51{,}47/1\,000^{\mathbf{2}} = 5{,}18 \cdot 10^{-\mathbf{5}}$ pe USD; $P^Q(84\,000 < S_T < 86\,000) \approx 2h\,q(K) = 10{,}4\%$
- 7 din 732 butterfly-uri la prețurile de referință sînt negative (minimul $-11{,}80$ USD, adînc în bani, spread-ul bid–ask median 255,80 USD); la prețuri executabile: 0
- **Interpretare**: niciun arbitraj tranzacționabil, dar o densitate obținută direct din prețurile de referință este negativă pe alocuri (barele roșii, 5 din 54 de triplete vecine): netezim zîmbetul înainte de derivare

MFM_ch12_seminar

A4 [Propus]: Paritatea ca regresie: forward-ul implicit — Cerința

Rezolvarea se discută la seminar

- **Întrebarea**: ce preț forward și ce rată a dobînzii în USD implică prețurile opțiunilor Bitcoin prin paritatea put–call?
- **Date**: scadența din A3; prețuri medii în USD $(bid + ask)/2 \times S$; doar prețurile de exercitare la care atît call-ul, cît și put-ul au bid și ask; $D = e^{-r\tau}$ și F necunoscuți
- **Cerințe**
  1. Arătați din paritatea put–call că $C(K) - P(K) = DF - DK$ pentru orice preț de exercitare.
  2. Scrieți regresia prin metoda celor mai mici pătrate (OLS, *Ordinary Least Squares*) $C_i - P_i = a + bK_i + e_i$ și deduceți $\hat{D}$ și $\hat{F}$ din $(\hat{a}, \hat{b})$.
  3. Deduceți eroarea standard a lui $\hat{F}$ prin metoda delta, cu o covariață robustă la heteroscedasticitate.
  4. Estimați pe date și comparați $\hat{F}$ cu forward-ul bursei, în erori standard.
- **Raportați**: $\hat{D}$, $\hat{F}$ cu erori standard și numărul de prețuri de exercitare
  - ce rată în USD implică $\hat{D}$?
  - de ce ar putea $\hat{F}$ să difere de forward-ul bursei?
- **Model**: A3 (portofolii cu plăți identice)
- Notebook: secțiunea A4

înapoi Lista exercițiilor

A5 [Rezolvat]: Ecuația Black–Scholes și rezultatul acoperirii — Cerința

- **Întrebarea**: cît cîștigă un dealer care vinde o opțiune la σ_{imp} și se acoperă prin delta cînd prețul se mișcă cu σ_{real}?
- **Date**
  - $dS_t = \mu S_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t$, r constant, tranzacționare continuă fără costuri; valoarea opțiunii $V(S,t)$ de două ori derivabilă Black & Scholes (1973)
  - Cifre: call-ul din A1, vîndut la $\sigma_{imp} = 25\%$, gamma $\Gamma = 0{,}0222$ (din A1); 252 de zile de tranzacționare pe an
- **Cerințe**
  1. Replicați V cu un portofoliu autofinanțat din Δ acțiuni și numerarul B la r; aplicați lema lui Itô, alegeți Δ astfel încît să dispară termenul în dW_t și deduceți ecuația Black–Scholes din absența arbitrajului.
  2. Pentru un dealer care vinde la σ_{imp} și deține $\Delta = \partial_S V^{imp}$, în timp ce S se mișcă cu σ_{real}, deduceți rezultatul instantaneu.
  3. Calculați rata de azi a rezultatului pe zi de tranzacționare dacă $\sigma_{real} = 30\%$, apoi anualizați-o cu S și Γ fixate.
- **Raportați**: ecuația, formula rezultatului și cele două cifre
  - cine cîștigă?
  - de ce depinde rezultatul de traiectoria lui S?
- Notebook: secțiunea A5

Înapoi Lista exercițiilor

A5 [Rezolvat]: Rezolvare (1/2) — Ecuația

- Pasul 1: Itô: $dV = \left(V_t + \mu S V_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS}\right) dt + \sigma S V_S \, dW_t$; portofoliul autofinanțat $\Pi = \Delta S + B$, pornit cu $\Pi = V$, are $d\Pi = \Delta \, dS + rB \, dt$
- $d(V - \Pi) = \left(V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} - rB\right) dt + (V_S - \Delta)(\mu S \, dt + \sigma S \, dW_t)$; cu $\Delta = V_S$ dispar și riscul, și μ
- O poziție fără risc care costă 0 cîștigă 0: $V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - rV = 0$
- Pasul 2: portofoliul $-V + \Delta S + (V - \Delta S)$ în numerar variază cu $-dV + \Delta \, dS + r(V - \Delta S) \, dt$ plus dobînda la rezultat; Itô cu σ_{real} și ecuația la σ_{imp} dau
- $d\,\text{P\&L} = r\,\text{P\&L}\, dt + \frac{1}{2}\Gamma S^2 \left(\sigma_{imp}^2 - \sigma_{real}^2\right) dt$

A5 [Rezolvat]: Rezolvare (2/2) — Cifre

- Pasul 3: $\frac{1}{2} \cdot 0{,}02223 \cdot 100^2 \cdot (0{,}25^2 - 0{,}30^2)/252 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}02223 \cdot 10^4 \cdot (-0{,}0275)/252 = -0{,}0121$ pe opțiune și zi de tranzacționare
- Anualizat cu S și Γ fixate: $-3{,}06$, aproximativ 39% din prețul call-ului, 7,76: o rată, nu rezultatul realizat al acestei opțiuni pe șase luni, deoarece ΓS^2 se schimbă pe traiectorie
- **Interpretare**: vînzătorul pierde cînd volatilitatea realizată depășește volatilitatea implicită; pierderea se acumulează prin Γ, cel mai mare aproape de prețul de exercitare și de scadență, deci două traiectorii cu aceeași varianță realizată dau rezultate diferite

A6 [Propus]: Arborele binomial converge la Black–Scholes — Cerința

Rezolvarea se discută la seminar

- **Întrebările**
  - cît de repede se apropie prețul Cox–Ross–Rubinstein de prețul Black–Scholes?
  - de ce oscilează eroarea?
- **Date**: arborele Cox–Ross–Rubinstein (CRR) cu N pași de lungime $\Delta t = T/N$ Cox, Ross & Rubinstein (1979); call-ul european din curs: $S = K = 100$, $T = 1$, $r = 5\%$, $\sigma = 20\%$
- **Cerințe**
  1. Arătați că $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$, $d = 1/u$, $q = (e^{r\Delta t} - d)/(u - d)$ reproduc exact media neutră la risc și dispersia pasului logaritmic pînă la $O(\Delta t^2)$.
  2. Evaluați call-ul cu $N = 50, 51, 100, 101, 200, 201$ și calculați $N(C_N - C_{BS})$ pentru fiecare.
  3. Faceți media prețurilor pentru $N = 200$ și $N = 201$ și comparați eroarea cu cea pentru $N = 200$.
- **Raportați**: un tabel cu C_N și $N(C_N - C_{BS})$; ordinul erorii, motivul oscilației par/impar și de ce ajută media
- **Model**: A5 (de la arbore la ecuația în timp continuu)
- Notebook: secțiunea A6

Înapoi Lista exercițiilor

A7 [Propus]: O acoperire delta–gamma — Cerința

Rezolvarea se discută la seminar

- **Întrebările**
  - cîte opțiuni și acțiuni fac un portofoliu de opțiuni vîndute neutru la delta și gamma?
  - este atunci și neutru la vega?
- **Date**
  - Un dealer a **vîndut** 1 000 de call-uri din A1 ($S = K = 100$, șase luni, $r = 3\%$, $\sigma = 25\%$)
  - Instrumente de acoperire: un call cu $K = 110$, aceeași scadență și volatilitate constantă $\sigma = 25\%$, preț Black–Scholes 3,90, și acțiunea; senzitivitățile din formulele Black–Scholes, gamma pe unitate de S
- **Cerințe**
  1. Calculați delta și gamma poziției dealerului.
  2. Găsiți numărul n_2 de call-uri cu $K = 110$ care anulează gamma, apoi numărul de acțiuni care anulează delta.
  3. Calculați vega portofoliului acoperit și explicați rezultatul; păstrați cantitățile fracționare pînă la tabelul final.
- **Raportați**: un tabel al pozițiilor (instrument, cantitate, delta, gamma, vega); este portofoliul protejat față de o schimbare a volatilității?
- **Model**: A1
- Notebook: secțiunea A7

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

A8 [Propus]: Prețul swap-ului de variață și eroarea lui de estimare — Cerința

Rezolvarea se discută la seminar

- **Întrebarea**: cît de mari sînt erorile unei benzi finite de opțiuni folosite pentru evaluarea variației, într-un caz cu răspuns cunoscut?
- **Date**
  - Formula de replicare din curs: $f(S_T) = f(F) + f'(F)(S_T - F) + \int_0^F f''(K)(K - S_T)^+ dK + \int_F^\infty f''(K)(S_T - K)^+ dK$ Bakshi, Kapadia & Madan (2003)
  - Reper log-normal: $F = 100$, $r = 0$, 90 de zile ($T = 90/365$), volatilitate constantă 20%, deci varianța exactă este 0,04; prețuri OTM din Black–Scholes; eroarea de **discretizare** = suma Cboe minus integrala densă pe $[80, 120]$; eroarea de **trunchiere** = integrala densă pe $[80, 120]$ minus 0,04
- **Cerințe**
  1. Aplicați formula cu $f(S) = -2\ln(S/F)$ și arătați că $K_{var} = \frac{2e^{rT}}{T}\left[\int_0^F \frac{P(K)}{K^2} dK + \int_F^\infty \frac{C(K)}{K^2} dK\right]$ pentru traiectorii continue.
  2. Calculați suma Cboe cu $\Delta K = 5$ pe $[80, 120]$ Cboe (2025), integrala densă pe $[80, 120]$ și integrala densă pe $(0, \infty)$.
  3. Descompuneți eroarea totală în discretizare și trunchiere.
- **Raportați**: cele trei variațe și volatilități și cele două erori
  - care eroare domină aici?
  - ce se schimbă pentru o scadență mai lungă?
- **Model**: A3 (portofolii de opțiuni ca prețuri ale formelor de plată)
- Notebook: secțiunea A8

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

B5: Fluxurile call-ului lunar acoperit

- Calendarul tranzacțiilor
  - prima tranzacție: prima dată comună S&P 500/VIX
  - apoi vindeți un call la fiecare 21 de zile de tranzacționare observate
  - prețul de exercitare: indicele din ziua vînzării; scadența: 21/252 ani
- Evaluare și acoperire
  - volatilitatea fixă pentru evaluare și pentru acoperirea zilnică prin delta: VIX de la deschiderea tranzacției
  - dobînda și dividendele sînt zero în acest experiment simplificat
  - reechilibrați după fiecare preț zilnic observat, pînă în ziua dinaintea scadenței
- La scadență
  - lichidați acțiunile de acoperire și plătiți cîștigul final al call-ului
  - o opțiune expirată nu se mai reechilibrează
- ATM
  - în acest exercițiu: prețul de exercitare egal cu prețul curent (spot)
  - în exercițiile pe benzi de opțiuni: prețul de exercitare apropiat de forward; reperul și convenția de actualizare se precizează împreună

B5 [Propus]: Opțiuni S&P 500 acoperite prin delta, 1990–2026 — Cerința

Rezolvarea se discută la seminar

- **Întrebările**
  - au cîștigat o primă semnificativă vînzătorii de call-uri S&P 500 pe o lună, acoperite prin delta?
  - cu ce risc de coadă (*tail risk*)?
- **Date**
  - Închideri zilnice S&P 500 și VIX, ianuarie 1990 – septembrie 2026; dobînda și dividendele ignorate
  - Convenția fluxurilor: fluxurile B5. Strategia din curs: la fiecare 21 de zile de tranzacționare vindem un call ATM sintetic pe o lună, evaluat la VIX, și îl acoperim zilnic la aceeași volatilitate; rezultatul în % din indice Bakshi & Kapadia (2003)
- **Cerințe**
  1. Calculați rezultatul lunar mediu și eroarea lui standard Newey–West cu 3 lag-uri și testați H_0: media $= 0$ la 5%.
  2. Construiți un interval bootstrap de 95% pe blocuri suprapuse pentru medie (blocuri de 6 luni, 2 000 de reeșantionări) Künsch (1989).
  3. Calculați ponderea lunilor pozitive, coeficientul de asimetrie (*skewness*) și ponderea din cîștigul total pierdută în cele mai rele cinci luni.
- **Raportați**: media cu ambele intervale și statisticile de coadă; de ce poate fi periculoasă o strategie cu o statistică t mare?
- **Model**: B1 (bootstrap), B2 (Newey–West)
- Notebook: secțiunea B5

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

B6 [Propus]: Un VIX pentru Bitcoin — Cerința

Rezolvarea se discută la seminar

- **Întrebările**
  - ce valoare produce formula Cboe VIX pentru Bitcoin?
  - de ce diferă de volatilitățile la bani și de DVOL?
- **Date**: secțiunea transversală a opțiunilor; cele două scadențe din jurul a 30 de zile (2026-10-09, 2026-10-30); prețul mediu în USD Q = prețul mediu în BTC $\times$ indicele S; F și $e^{RT} = F/S$ din forward-ul Deribit
- **Cerințe**
  1. Selectați banda fiecărei scadențe cu regulile Cboe Cboe (2025): K_0 primul preț de exercitare egal cu F sau imediat sub F; put-uri sub K_0, call-uri peste, media celor două la K_0; eliminați cotațiile bid zero și opriți fiecare aripă după două cotații bid zero consecutive.
  2. Calculați fiecare variantă implicită σ^2 cu formula Cboe din secțiunea „Evaluarea variației cu opțiuni: VIX" (R, rata implicită din $e^{RT} = F/S$, în locul lui r).
  3. Interpolați liniar în timp variațele totale la 30 de zile și raportați $100\sigma_{30}$.
  4. Comparați cu volatilitățile ATM ale celor două scadențe și cu DVOL în același moment Alexander & Imeraj (2020).
- **Raportați**: cele două variațe, ponderea scadenței apropiate și indicele
  - de ce este indicele peste ambele volatilități ATM?
  - ce decizii de calcul ar putea explica diferența față de DVOL?
- **Model**: A8 (formula benzii și erorile ei), B4 (aceleași cotații)
- Notebook: secțiunea B6

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

B7: Alinierea datelor Bitcoin

- Prețurile Bitcoin
  - prețul zilnic de închidere (close) și datele din fișierul furnizat BTC-USD.CC.csv
  - nu îl înlocuiți cu o cotație din timpul zilei
- DVOL
  - cîmpul close al lumînării zilnice Deribit (rezoluție 1D)
  - convertiți marca temporală (*timestamp*) în milisecunde la data calendaristică UTC
  - uniți seriile după acea dată, fără decalaje
- Varianța realizată la data t folosește următoarele 30 de randamente logaritmice zilnice, excluzînd randamentul care se încheie în t
- Limita alinierii
  - fișierul BTC păstrează doar datele calendaristice, nu momentul din zi
  - comparația este aliniată după dată, fără a pretinde sincronizarea perfectă a prețurilor

B7 [Propus]: Prima de risc a variației pentru Bitcoin — Cerința

Rezolvarea se discută la seminar

- **Întrebările**
  - este prima de risc a variației pentru Bitcoin semnificativ pozitivă?
  - este ea mai mare decît prima acțiunilor?
- **Date**: DVOL (Deribit), martie 2021 – august 2026, și închideri zilnice Bitcoin (`BTC-USD.CC`); volatilitatea realizată în următoarele 30 de zile calendaristice, $A = 365$
- **Cerințe**
  1. Calculați prima medie $\mathrm{DVOL}_t - \sqrt{RV_{t,t+\mathbf{30}}}$ în puncte de volatilitate și eroarea ei standard Newey–West cu 30 de lag-uri și testați-o la 5%.
  2. Calculați ponderea zilelor pozitive și raportul dintre volatilitatea implicită medie și cea realizată medie și comparați-le cu S&P 500 din B2.
  3. Numărați perioadele de 30 de zile fără suprapunere din eșantion.
- **Raportați**: prima, testul, rapoartele și mărimea efectivă a eșantionului
  - în ce unitate este prima Bitcoin mai mare?
  - cîtă informație conțin cinci ani de date?
- **Model**: B2
- Notebook: secțiunea B7

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

B8 [Propus]: O densitate neutră la risc cu benzi de încredere — Cerința

Rezolvarea se discută la seminar

- **Întrebările**
  - ce probabilitate suplimentară, față de densitatea log-normală, atribuie piața Bitcoin mișcărilor mari?
  - cît de precisă este estimarea?
- **Date**: secțiunea transversală a opțiunilor; scadența cea mai apropiată de 90 de zile: 2026-12-25, 94 zile, 58 de cotații OTM; SVI estimat ca în B4; prețuri forward (neactualizate)
- **Cerințe**
  1. Calculați densitatea $q(K) = \partial^2 C/\partial K^2$ din prețurile call SVI (Black-76 cu F) pe o grilă fină de prețuri de exercitare Breeden & Litzenberger (1978).
  2. Calculați $P^Q(S_T < 0{,}8F)$ și $P^Q(S_T > 1{,}2F)$ din funcția de repartiție $F_Q(K) = 1 + \partial C/\partial K$, fără trunchiere și renormalizare. Dați intervale bootstrap pe perechi de 95% (300 de reestimări; respingeți reestimările cu $g(k) < 0$) și valorile log-normale la volatilitatea ATM (media F, varianța logaritmului $\sigma_{ATM}^2 \tau$).
  3. În fiecare reestimare, recalculați valoarea log-normală la volatilitatea ATM a acelei reestimări și dați un interval de 95% pentru diferența SVI minus log-normal.
  4. Raportați unde se termină cotațiile în K/F și ce parte din fiecare probabilitate se bazează pe aripi extrapolate.
- **Raportați**: cele două probabilități cu intervale față de log-normal
  - este diferența semnificativă?
  - ce nu măsoară banda bootstrap?
- **Model**: B4 (estimarea SVI și bootstrap-ul pe perechi)
- Notebook: secțiunea B8

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

C2: O strategie lunară de varianță cu calendar fix

- Grila lunară
  - aliniați IV și randamentele logaritmice zilnice pe datele comune observate; grila începe la primul randament aliniat
  - S&P 500: din 21 în 21 de zile de tranzacționare; următoarele $H = 21$ randamente dau varianța realizată
  - Bitcoin: din 30 în 30 de zile calendaristice; următoarele $H = 30$ randamente dau varianța realizată
- Unități
  - anualizați media randamentelor logaritmice zilnice la pătrat cu 252 (S&P 500), respectiv 365 (Bitcoin), apoi înmulțiți cu 10^4 pentru procente la pătrat
  - IV este volatilitatea anualizată în procente, deci rezultatul formulei este în puncte de volatilitate
- Intervalul Sharpe
  - 2 000 de reeșantionări pe blocuri suprapuse de trei observații lunare, inițializarea generatorului 42, anualizare cu $\sqrt{12}$
  - raportați capetele eșantionului și numărul perioadelor complete
- Regula VIX/VIX3M
  - doar pentru S&P 500, după începutul VIX3M, în 2007
  - perioadele omise rămîn în același calendar, cu rezultat zero
  - comparați cu strategia nefiltrată pe exact aceleași date

C2 [Propus]: Este prima de risc a variației un semnal tranzacționabil? — Cerința

Rezolvarea se discută la seminar

- **Întrebările**
  - ați vinde variață pe S&P 500 sau pe Bitcoin în fiecare lună (Carr & Wu (2009), Bollerslev, Tauchen & Zhou (2009))?
  - cînd v-ați opri?
- **Date**
  - Un swap de variață sintetic cu valoarea noțională vega 1: rezultatul lunar $= (IV^2 - RV)/(2\,IV)$ puncte de volatilitate
  - S&P 500 cu VIX (1990–2026, VIX3M din 2007); Bitcoin cu DVOL (2021–2026); calendarul C2
- **Cerințe**
  1. Calculați seria lunară a rezultatelor și raportul Sharpe cu interval bootstrap pe blocuri, coeficientul de asimetrie, cea mai rea lună și scăderea maximă de la vîrf (*maximum drawdown*).
  2. Testați o regulă de alegere a momentului: omiteți lunile care încep în backwardation (VIX peste VIX3M); este mai bună?
  3. Verificați cît de fragil este rezultatul la ziua în care începe grila lunară.
  4. Comparați cu opțiunea acoperită prin delta din B5 și propuneți o mărime a poziției.
- **Raportați**: un tabel și un grafic al rezultatului cumulat; un verdict cu limitările lui
- **Model**: B2, B7; regresiile predictive din anexa cursului

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

C3: Cele nouă variabile de condiționare

- Sursa: cîmpurile lunare Welch–Goyal și transformările din scriptul de construire a datelor
- Trei variabile transformate: $5 + \ln(D12/Index)$, $5 + \ln(E12/Index)$, b/m
- Celelalte șase: tbl, $1 + lty - tbl$, $BAA - AAA$, $svar$, $1 + ntis$, $1 + infl$; păstrați unitățile cîmpurilor furnizate
- Definiții
  - $D12$, $E12$: dividendele și profiturile pe ultimele 12 luni
  - tbl: rata bonurilor de trezorerie americane (*Treasury bills*); lty: randamentul pe termen lung; BAA, AAA: randamentele obligațiunilor corporative
  - $svar$: varianța bursieră; $ntis$: emisiunile nete de acțiuni; $infl$: inflația
  - b/m: capitalul contabil raportat la valoarea de piață; $Index$: nivelul indicelui bursier
- Constantele adăugate păstrează variabilele pozitive, fără să schimbe calendarul lunar

C3: Statisticile pentru validitate și limită strînsă

- Σ estimează covarianța vectorului de *medii* $\bar{\lambda}$
  - nu covarianța de lungă durată nescalată
  - nu mai înmulțiți statisticile cu numărul de observații
- Proiecția pe momente negative: $\hat{\lambda} = \arg\min_{\lambda \geq 0} (\bar{\lambda} - \lambda)^\top \Sigma^{-1} (\bar{\lambda} - \lambda)$
- Statisticile
  - $D_1 = (\bar{\lambda} - \hat{\lambda})^\top \Sigma^{-1} (\bar{\lambda} - \hat{\lambda})$: încălcarea inegalităților
  - $D_2 = \hat{\lambda}^\top \Sigma^{-1} \hat{\lambda}$: distanța față de zero în regiunea permisă
- Valorile p: `KPClass.py`, `p_values`, pentru amestecul chi-pătrat
  - ponderile se simulează cu 100 000 de extrageri; notați valoarea de inițializare a generatorului
  - valorile p returnate sînt în procente
- Exemplu cu două momente: $\Sigma = I_2$ și $\bar{\lambda} = (-1, 2)$
  - proiecția este $(0, 2)$, deci $D_1 = 1$ și $D_2 = 4$
  - primul moment încalcă limita, iar al doilea are marjă pozitivă

C3 [Propus]: Testarea limitei Martin — Cerința

Rezolvarea se discută la seminar

- **Întrebarea**: este limita inferioară a primei de risc a acțiunilor din Martin (2017) validă și strînsă pe datele cursului, ca în studiul de caz Back, Crotty & Kazempour (2022)?
- **Date**
  - Limita zilnică Martin publicată de autori, în % anualizat, $h = 1, 3, 6, 12$ luni, 1990–2020 (coloanele `lb_m_h` din `market_bounds.csv`, pachetul de replicare)
  - S&P 500 (`GSPC.INDX`); rata zilnică fără risc (Kenneth French Data Library); predictorii lunari Welch–Goyal Welch & Goyal (2008) (pagina de date a lui Amit Goyal)
- **Cerințe**
  1. Calculați randamentul zilnic în exces (randamentul prețului minus rata fără risc), compuneți-l pe 21, 63, 126 și 252 de zile de tranzacționare și anualizați cu $12/h$, pentru datele de formare 31 ianuarie 1990 – decembrie 2020 ($N = 7\,789$ la 1 lună, $7\,598$ la 12 luni).
  2. Construiți cele nouă variabile de condiționare pozitive din Tabelul 3 al studiului de caz (valorile de la sfîrșitul fiecărei luni, păstrate pe parcursul lunii următoare) și formați cele 10 momente $s_{t,T}(1, z_t)$ cu $s_{t,T} = R^e_{t,T} - b_{t,T}$ și media lor $\bar{\lambda}$.
  3. Estimați Σ prin Hansen–Hodrick Hansen & Hodrick (1980) cu $21h$ lag-uri (Newey–West cu $1{,}5 \times 21h$ lag-uri dacă nu este pozitiv semidefinită) și calculați D_1, D_2 și valorile lor p Kodde & Palm (1986).
  4. Regresați $R^e_{t,T}$ pe o constantă și $b_{t,T}$ (erori Hansen–Hodrick) și testați împreună $\alpha = 0$, $\beta = 1$; repetați pasul 3 cu limita înlocuită de media ei în timp (Secțiunea 4.3 a studiului).
- **Raportați**: un tabel cu mediile, D_1, D_2 și valorile p alături de Tabelele 1 și 3 ale studiului și o propoziție care explică de ce testul din regresie și testul limitei strînse pot da concluzii diferite
- **Model**: B2 (ferestre suprapuse și erori HAC)

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

Acronime folosite în acest material (1/2)

- **ACF**: AutoCorrelation Function — *funcția de autocorelație*
- **AI**: Artificial Intelligence — *inteligență artificială*
- **ATM**: At-The-Money — *at-the-money: strike apropiat de reperul precizat (spot sau forward)*
- **CI**: Confidence Interval — *interval de încredere*
- **CRR**: Cox–Ross–Rubinstein (binomial tree) — *arborele binomial Cox–Ross–Rubinstein*
- **DM**: Diebold–Mariano (test) — *testul Diebold–Mariano de comparare a prognozelor*
- **DVOL**: Deribit Volatility Index — *indicele de volatilitate Deribit (opțiuni Bitcoin, 30 de zile)*
- **GBM**: Geometric Brownian Motion — *mișcare browniană geometrică*
- **GMM**: Generalized Method of Moments — *metoda generalizată a momentelor*
- **HAC**: Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent (standard errors) — *erori standard robuste la heteroscedasticitate și autocorelație*
- **HAR-RV**: Heterogeneous AutoRegressive model of Realised Volatility — *model autoregresiv heterogen al volatilității realizate*
- **IV**: Implied Volatility — *volatilitatea implicită*

Acronime folosite în acest material (2/2)

- **MSE**: Mean Squared Error — *eroarea pătratică medie*
- **MZ**: Mincer–Zarnowitz (regression) — *regresia Mincer–Zarnowitz*
- **OLS**: Ordinary Least Squares — *metoda celor mai mici pătrate*
- **OTM**: Out-of-The-Money — *out-of-the-money: call cu strike peste reper, put cu strike sub reper (spot sau forward, conform exercițiului)*
- **QLIKE**: Quasi-LIKElihood (loss function) — *funcția de pierdere de tip cvasi-verosimilitate*
- **RV**: Realised Variance — *varianța realizată*
- **SE**: Standard Error — *eroarea standard*
- **SUA**: Statele Unite ale Americii
- **SVI**: Stochastic Volatility Inspired (parameterisation) — *parametrizarea inspirată de volatilitatea stocastică*
- **UTC**: Coordinated Universal Time (Temps Universel Coordonné) — *timpul universal coordonat*
- **VIX**: Cboe Volatility Index — *indicele de volatilitate Cboe*
- **VIX3M**: Cboe 3-Month Volatility Index — *indicele Cboe de volatilitate implicită pe 3 luni*
- **VRP**: Variance Risk Premium — *prima de risc a variației*

Bibliografie (1/3)

- Alexander, C., Imeraj, A. (2020). The Bitcoin VIX and its variance risk premium. *Journal of Alternative Investments*, 23(4), 84–109.
- Back, K., Crotty, K., Kazempour, S.M. (2022). Validity, tightness, and forecasting power of risk premium bounds. *Journal of Financial Economics*, 144(3), 732–760.
- Bakshi, G., Kapadia, N. (2003). Delta-hedged gains and the negative market volatility risk premium. *Review of Financial Studies*, 16(2), 527–566.
- Bakshi, G., Kapadia, N., Madan, D. (2003). Stock return characteristics, skew laws, and the differential pricing of individual equity options. *Review of Financial Studies*, 16(1), 101–143.
- Black, F., Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637–654.
- Bollerslev, T., Tauchen, G., Zhou, H. (2009). Expected stock returns and variance risk premia. *Review of Financial Studies*, 22(11), 4463–4492.
- Breeden, D.T., Litzenberger, R.H. (1978). Prices of state-contingent claims implicit in option prices. *Journal of Business*, 51(4), 621–651.
- Brenner, M., Subrahmanyam, M.G. (1988). A simple formula to compute the implied standard deviation. *Financial Analysts Journal*, 44(5), 80–83.
- Carr, P., Wu, L. (2009). Variance risk premiums. *Review of Financial Studies*, 22(3), 1311–1341.
- Cboe Global Indices (2025). Cboe Volatility Index: Methodology. Cboe Global Markets.
- Christensen, B.J., Prabhala, N.R. (1998). The relation between implied and realized volatility. *Journal of Financial Economics*, 50(2), 125–150.

Bibliografie (2/3)

- Corsi, F. (2009). A simple approximate long-memory model of realized volatility. *Journal of Financial Econometrics*, 7(2), 174–196.
- Cox, J.C., Ross, S.A., Rubinstein, M. (1979). Option pricing: a simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7(3), 229–263.
- Diebold, F.X., Mariano, R.S. (1995). Comparing predictive accuracy. *Journal of Business & Economic Statistics*, 13(3), 253–263.
- Efron, B. (1979). Bootstrap methods: another look at the jackknife. *Annals of Statistics*, 7(1), 1–26.
- Gatheral, J., Jacquier, A. (2014). Arbitrage-free SVI volatility surfaces. *Quantitative Finance*, 14(1), 59–71.
- Hansen, L.P., Hodrick, R.J. (1980). Forward exchange rates as optimal predictors of future spot rates: an econometric analysis. *Journal of Political Economy*, 88(5), 829–853.
- Kodde, D.A., Palm, F.C. (1986). Wald criteria for jointly testing equality and inequality restrictions. *Econometrica*, 54(5), 1243–1248.
- Künsch, H.R. (1989). The jackknife and the bootstrap for general stationary observations. *Annals of Statistics*, 17(3), 1217–1241.

Bibliografie (3/3)

- Martin, I. (2017). What is the expected return on the market?. *Quarterly Journal of Economics*, 132(1), 367–433.
- Matic, J.L., Packham, N., Härdle, W.K. (2023). Hedging cryptocurrency options. *Review of Derivatives Research*, 26(1), 91–133.
- Mincer, J., Zarnowitz, V. (1969). The evaluation of economic forecasts. In *Economic Forecasts and Expectations*, NBER, 3–46.
- Newey, W.K., West, K.D. (1987). A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix. *Econometrica*, 55(3), 703–708.
- Patton, A.J. (2011). Volatility forecast comparison using imperfect volatility proxies. *Journal of Econometrics*, 160(1), 246–256.
- Pele, D.T., Wesselhöfft, N., Härdle, W.K., Kolossiatis, M., Yatracos, Y.G. (2023). Are cryptos becoming alternative assets?. *European Journal of Finance*, 29(10), 1064–1105.
- Welch, I., Goyal, A. (2008). A comprehensive look at the empirical performance of equity premium prediction. *Review of Financial Studies*, 21(4), 1455–1508.