

Modelarea piețelor financiare

Seminarul 4: Optimizarea portofoliului — Aplicații



Daniel Traian PELE
Antoaneta Amza

Academia de Studii Economice din București
IDA Institute Digital Assets
Blockchain Research Center
AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance
Academia Română, Institutul de Prognoză Economică
MSCA Digital Finance

Cum alegem ponderile și cum comparăm portofoliile?

- Întrebarea seminarului
  - **poate un portofoliu optimizat să depășească ponderile egale (1/N) în afara eșantionului și cum se poate verifica statistic acest rezultat?**
- Livrabile
  - răspunsurile la exercițiile A
  - un tabel și o figură pentru fiecare exercițiu B
  - codul corectat din C1
  - o frază de interpretare pentru fiecare exercițiu
- Notebook-ul de azi: capitol4_notebook_seminar.ipynb (Colab); prețuri: data/market
- Seminar: prof. Daniel Traian Pele, danpele@ase.ro; drd. Antoaneta Amza, antoaneta.amza@csie.ase.ro

Ce expuneri cumpărăm prin fonduri?

ETF (exchange-traded fund): fond tranzacționat la bursă.

SPY	S&P 500 (Standard & Poor's 500)
EFA	piețe dezvoltate, fără SUA/Canada
EEM	piețe emergente
TLT / IEF	titluri de stat SUA: lung / 7–10 ani
LQD / HYG	obligațiuni corporative: cu rating investițional / cu randament ridicat
GLD	aur

XLB	materiale
XLE	energie
XLF	financiar
XLI	industrie
XLK	tehnologie
XLP	consum de bază
XLU	utilități
XLV	sănătate
XLY	consum discreționar

USD: dolarul american; RON: leul românesc; BTC: Bitcoin. OOS (*out-of-sample*): în afara eșantionului de estimare.

Cum citim simbolurile de la Bursa de Valori București?

BVB: Bursa de Valori București; BET (*Bucharest Exchange Trading*): indicele principal al pieței; BET-TR (*total return*): varianta cu dividende reinvestite.

TLV	Banca Transilvania	SNP	OMV Petrom
BRD	BRD Groupe Société Générale	TGN	Transgaz
SNG	Romgaz	SNN	Nuclearelectrica
EL	Electrica	TEL	Transelectrica

Datele folosite

Univers	Active (preț folosit)	Monedă	Randamente lunare	Luni
Sectoare	XLB, XLE, XLF, XLI, XLK, XLP, XLU, XLV, XLY (închidere ajustată)	USD	ian. 1999 – iul. 2026	331
Multi-active	SPY, EFA, EEM, TLT, IEF, LQD, HYG, GLD (închidere ajustată)	USD	mai 2007 – iul. 2026	231
Combinat	9 sectoare + cele 7 ETF-uri multi-active, fără SPY	USD	mai 2007 – iul. 2026	231
Bitcoin	Bitcoin (BTC/USD, închidere)	USD	aug. 2010 – iul. 2026	doar B8
BVB	TLV, SNP, BRD, TGN, SNG, SNN, EL, TEL; indicele BET-TR (închidere)	RON	oct. 2014 – aug. 2026	doar C2

- Prețurile zilnice din datele cursului, cîte o serie pe activ (prețul de închidere ajustat sau prețul de închidere, ca în tabel)
- Aliniați *prețurile* unui univers pe zilele comune de tranzacționare, păstrați ultimul preț din fiecare lună, apoi calculați randamentele simple în zecimale (0,01 = 1%)
- Rata fără risc: titlul de stat la o lună, Kenneth French Data Library, zecimale lunare aliniate pe data de sfîrșit de lună; randament în exces $r_t^e = r_t - r_{f,t}$; USD/RON: cursul de referință al Băncii Naționale a României (BNR) (C2)

Pregătire: rulați și verificați

```
# notebook section "Setup" defines the helpers
r, rex, rf = us_monthly(SECTORS)
# r: monthly simple returns (T x 9)
# rex = r - rf: excess returns; rf: T-bill
print(r.shape, r.index[0], r.index[-1])
print(r.iloc[0][['XLB', 'XLK', 'XLU']], rf.iloc
    [0])
ret, to, W = backtest(r, rex)
# ret: OOS excess returns of each rule
# to: monthly turnover; W: weights per rule
```

- Rezultat așteptat: 331 de luni, primul randament 1999-01-31, ultimul 2026-07-31
- Primul rînd (ianuarie 1999): XLB (materiale) −3,70%, XLK (tehnologie) 15,90%, XLU (utilități) −2,48%; titlul de stat 0,35% pe lună
- `backtest` folosește lunile $t-60,\ldots,t-1$ pentru ponderile lunii t: 271 de luni în afara eșantionului, 2004-01 – 2026-07
- Alte funcții: `sr_diff_hac(r1, r2)` întoarce diferența anualizată, eroarea ei standard robustă la heteroscedasticitate și autocorelație (HAC, *heteroskedasticity and autocorrelation consistent*) și valoarea p; `sr_diff_boot(r1, r2, block)` testul bootstrap studentizat; `lw_cc(X)` covariança cu contracție (*shrinkage*) și δ
- Dacă un număr de observații sau o primă valoare diferă, opriți-vă și verificați simbolurile, tipul de preț (ajustat sau de închidere) și alinierea datelor

Randamentul și varianța portofoliului

- Detalii: Capitolul 4
- **Randamentul portofoliului**: suma ponderată a randamentelor activelor Markowitz (1952)

$$r_p = \mathrm{w}^\top \mathrm{r} = \sum_{i=\mathbf{1}}^{N} w_i r_i, \qquad \mathrm{w}^\top 1 = 1$$

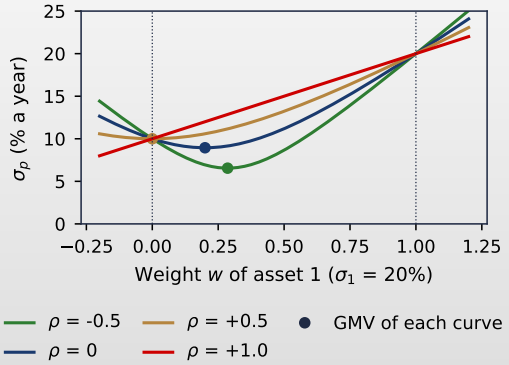
  - N: numărul de active; w_i: fracțiunea din avere investită în activul i ($w_i < 0$: vînzare în lipsă, poziție *short*)
  - 1: vectorul cu toate elementele 1, deci $\mathrm{w}^\top 1 = 1$ înseamnă investiție completă

- **Media și varianța** portofoliului

$$\mu_p = \mathrm{w}^\top \boldsymbol{\mu}, \qquad \sigma_p^2 = \mathrm{w}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathrm{w} = \sum_i \sum_j w_i w_j \sigma_{ij}$$

  - $\boldsymbol{\mu}$: vectorul randamentelor așteptate în exces; $\boldsymbol{\Sigma}$: matricea de covarianță, $\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$

GMV (*global minimum variance*): portofoliul de varianță minimă globală.



Diversificarea cu două active

- Cu două active și $w = w_1$, $1 - w = w_2$, varianța are trei termeni

$$\sigma_p^2 = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\rho\sigma_1\sigma_2$$

  - doar al treilea termen depinde de corelația ρ
  - Ponderi long-only și $\rho = 1$: $\sigma_p = w\sigma_1 + (1-w)\sigma_2$, o dreaptă, fără diversificare
  - Ponderi long-only și $\rho < 1$: σ_p se află sub această dreaptă; cu cît ρ este mai mic, cu atît curba coboară mai mult
- Graficul de pe slide-ul anterior: $\sigma_1 = 20\%$, $\sigma_2 = 10\%$, patru corelații
  - $\rho = 0$: minimul este la $w = 0{,}2$, $\sigma_p = 8{,}94\%$, sub ambele volatilități
  - $\rho = -0{,}5$: minimul scade la 6,55%, la $w = 0{,}29$
  - $\rho = +0{,}5 = \sigma_2/\sigma_1$: minimul este activul mai puțin volatil singur ($w = 0$)
- Exemplu numeric: $\rho = 0$, w = (0,5; 0,5): $\sigma_p^2 = 0{,}25(0{,}04) + 0{,}25(0{,}01) = 0{,}0125$, $\sigma_p = 11{,}2\%$
- **Ce credeți**: cu $\sigma_1 = 20\%$, $\sigma_2 = 10\%$ și $\rho = 0{,}8$, ce pondere are activul 1 în portofoliul de varianță minimă fără restricții?
  - **Răspuns**: $w = (\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)/(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2) = -0{,}006/0{,}018 = -1/3$, o poziție short, pentru că $\rho > \sigma_2/\sigma_1$

Portofoliul de variață minimă globală

- **GMV**: ponderile complet investite cu cea mai mică variață

$$\min_{w} \; w^\top \Sigma w \quad \text{cu restricția} \quad w^\top 1 = 1$$

- Soluția (derivată în A1 cu un multiplicator Lagrange)

$$w_{GMV} = \frac{\Sigma^{-1}1}{1^\top \Sigma^{-1}1}, \qquad \sigma^2_{GMV} = \frac{1}{1^\top \Sigma^{-1}1}$$

  - Σ^{-1}: inversa matricei de covariață; numitorul rescalează ponderile astfel încît să însumeze 1
  - nu are nevoie de randamentele așteptate: se estimează doar Σ

- Exemplu: aceleași volatilități, $\sigma_1 = 20\%$ și $\sigma_2 = 10\%$, cu corelația $\rho = -0{,}5$, deci $\sigma_{12} = -0{,}01$
  - $\Sigma^{-1}1 = (66{,}7;\ 166{,}7)$, suma 233,3
  - $w_{GMV} = (0{,}29;\ 0{,}71)$; $\sigma_{GMV} = 1/\sqrt{233{,}3} = 6{,}55\%$

Raportul Sharpe, portofoliul tangent și 1/N

- **Raportul Sharpe**: randamentul mediu în exces pe unitatea de volatilitate

$$SR_p = \frac{\mu_p}{\sigma_p} = \frac{\mathrm{w}^\top \boldsymbol{\mu}}{\sqrt{\mathrm{w}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathrm{w}}}$$

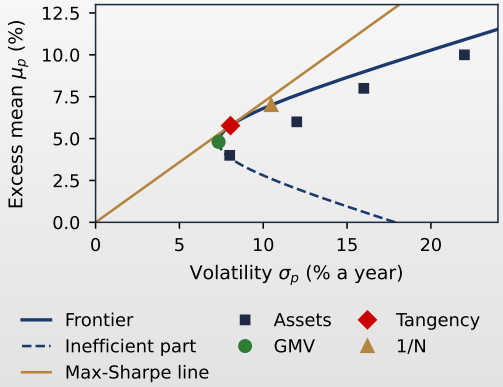
- **MV** (*mean–variance*, medie–varianță; portofoliul tangent): ponderile cu cel mai mare SR_p, dacă numitorul de mai jos este pozitiv (Capitolul 3)

$$\mathrm{w}_{\mathbf{MV}} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}$$

  - **MV-LO**: același maxim, cu $0 \leq w_i \leq 1$ (long-only), rezolvat numeric

- **1/N**: $w_i = 1/N$, nimic estimat DeMiguel, Garlappi & Uppal (2009)

- Graficul: patru active simulate; dreapta din origine prin punctul tangent are panta $SR = 0{,}72$; rapoartele Sharpe: GMV 0,65, 1/N 0,67

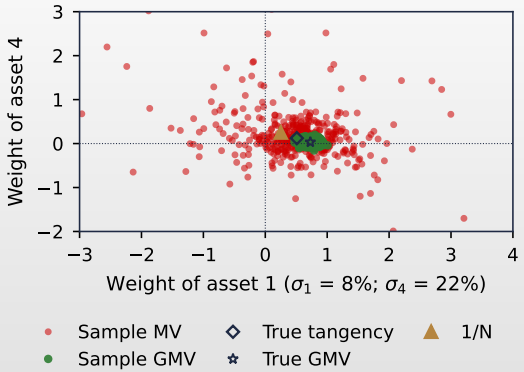


Eroarea de estimare a ponderilor

- În practică, $\boldsymbol{\mu}$ și $\boldsymbol{\Sigma}$ se înlocuiesc cu estimații de selecție din T luni

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{T}\sum_{t=\mathbf{1}}^{T} \mathrm{r}_t, \qquad \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{T-1}\sum_{t=\mathbf{1}}^{T} (\mathrm{r}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathrm{r}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}})^{\top}$$

- Graficul: 500 de eșantioane de $T = 60$ de luni din aceleași patru active
  - ponderile MV de selecție sînt foarte dispersate: abaterea intercuartilică 0,66 pentru activul 1; 38% din eșantioane au un $|w_i| > 1$
  - ponderile GMV de selecție rămîn aproape de valorile adevărate (abaterea intercuartilică doar 0,12): formula nu conține $\hat{\boldsymbol{\mu}}$
- De ce 1/N este greu de depășit
  - $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ are erori mari, iar $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-\mathbf{1}}$ le amplifică, producînd ponderi extreme



Contribuțiile la risc

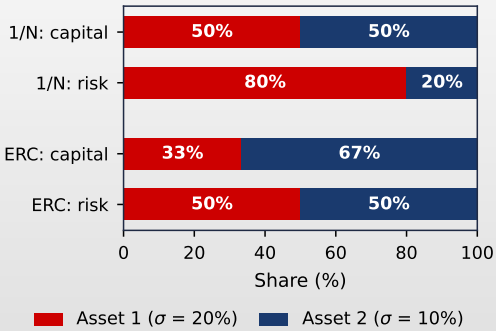
- **Descompunerea Euler**: volatilitatea portofoliului este suma contribuțiilor activelor

$$\sigma_p = \sum_i RC_i, \qquad RC_i = w_i \frac{\partial \sigma_p}{\partial w_i} = \frac{w_i (\Sigma \mathrm{w})_i}{\sigma_p}$$

  - $(\Sigma \mathrm{w})_i = \sum_j \sigma_{ij} w_j$: covariația activului i cu portofoliul
  - RC_i: contribuția activului i la volatilitate; cota de risc RC_i/σ_p, cotele însumează 100%

- Exemplu: $\sigma_1 = 20\%$, $\sigma_2 = 10\%$, $\rho = 0$, $\mathrm{w} = (0{,}5;\ 0{,}5)$
  - $\Sigma \mathrm{w} = (0{,}020;\ 0{,}005)$, $\sigma_p^2 = 0{,}0125$
  - cotele $0{,}5 \times 0{,}020/0{,}0125 = 80\%$ și 20%: jumătate din capital, patru cincimi din risc

ERC (*equal risk contribution*): contribuții egale la risc.



Contribuții egale la risc

- **ERC** (contribuții egale la risc, *risk parity*) Maillard, Roncalli & Teïletche (2010): ponderi cu contribuții egale

$$RC_1 = RC_2 = \cdots = RC_N = \sigma_p / N$$

  - folosește doar $\boldsymbol{\Sigma}$; în general se rezolvă numeric (funcția `w_erc`)
  - cu două active necorelate: $w_i \propto 1/\sigma_i$
- Exemplu ($\sigma_1 = 20\%$, $\sigma_2 = 10\%$, $\rho = 0$)
  - $w \propto (1/0{,}2;\ 1/0{,}1) = (5;\ 10)$, deci w $= (1/3;\ 2/3)$
  - cotele de risc 50% și 50%; $\sigma_p = 9{,}43\%$ (barele de jos din graficul anterior)
- Ponderile în capital și cotele de risc sînt mărimi diferite
  - un portofoliu echilibrat în capital poate fi concentrat în risc (A3)
  - ERC se situează între 1/N (capital egal) și GMV (risc minim)

Backtest-ul pe ferestre mobile

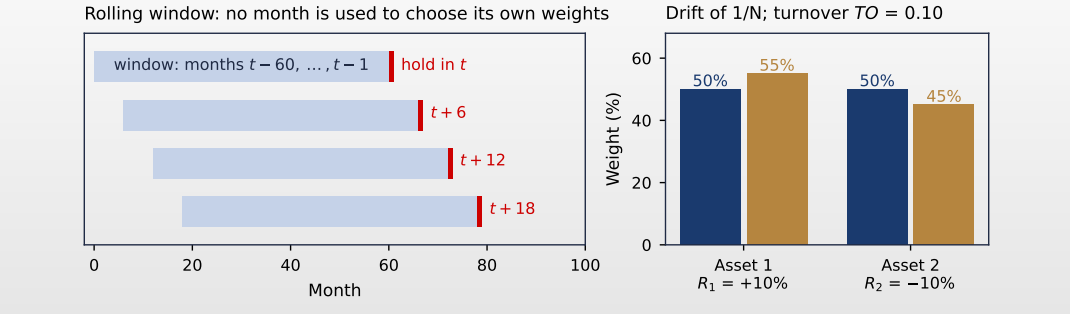
- Backtest **în afara eșantionului** (OOS): în fiecare lună, ponderile se aleg doar cu date trecute, apoi se înregistrează randamentul următor
  - fereastra mobilă (*rolling*): ponderile deținute în luna t folosesc doar lunile $t-60,\ldots,t-1$
  - orice estimare care folosește luna t produce **deplasarea de anticipare** (*look-ahead bias*): folosește informație încă indisponibilă
- **Drift-ul**: în timpul lunii ponderile se modifică odată cu randamentele

$$w_i^+ = \frac{w_i(1+R_i)}{\sum_j w_j(1+R_j)}$$

  - R_i: randamentul simplu al activului i în luna respectivă; w_i^+: ponderea lui la sfîrșitul lunii
- **Turnover-ul**: fracțiunea din avere tranzacționată pentru revenirea la noile ponderi-țintă $w_{i,\text{nou}}$

$$TO = \sum_i |w_{i,\text{nou}} - w_i^+|$$

Ferestre, drift și turnover într-un grafic



- Stînga: fiecare fereastră de 60 de luni se încheie cu o lună înaintea lunii în care este folosită
- Dreapta: 1/N cu randamente $+10\%$ și -10% ajunge prin drift la $\mathrm{w}^+ = (0{,}55;\ 0{,}45)$
  - revenirea la 1/N: $TO = |0{,}5 - 0{,}55| + |0{,}5 - 0{,}45| = 0{,}10$, o zecime din avere tranzacționată

Măsuri de performanță

- Din randamentele lunare în exces $r_1^e, \ldots, r_T^e$ ale unei strategii (media de selecție $\bar{r}^e$, abaterea standard s)

$$\hat{\mu}_{\text{an}} = 12\,\bar{r}^e, \qquad \hat{\sigma}_{\text{an}} = \sqrt{12}\,s, \qquad \widehat{SR}_{\text{an}} = \sqrt{12}\,\frac{\bar{r}^e}{s}$$

  - $\sqrt{12}$ pentru date lunare ($\sqrt{252}$ este pentru date zilnice): media crește cu 12, volatilitatea cu $\sqrt{12}$
- **Drawdown-ul maxim**: cea mai mare scădere a averii W_t față de un vîrf anterior

$$MDD = \min_t \left(\frac{W_t}{\max_{s \le t} W_s} - 1 \right), \qquad W_t = \prod_{s \le t} (1 + r_s)$$

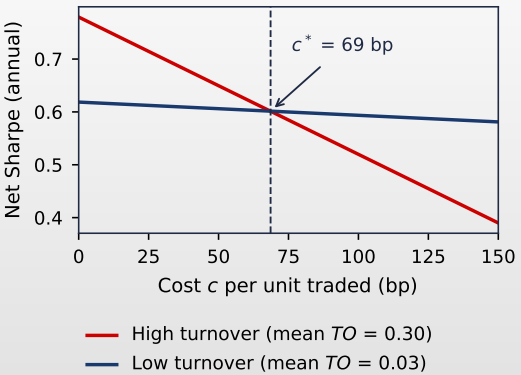
- **Expunerea brută** $\sum_i |w_i|$: este 1 pentru ponderi long-only și mai mare cu poziții short

Costurile de tranzacționare și costul-prag

- **Randamentul net**: randamentul brut minus costul tranzacțiilor

$$r_t^{\text{net}} = r_t - c\, TO_t$$

  - c: costul pe unitatea tranzacționată; 1 punct de bază (bp) $= 10^{-4}$, deci 20 bp înseamnă $c = 0{,}002$
  - $TO = 0{,}10$ la 20 bp costă $0{,}002 \times 0{,}10 = 2$ bp din avere
- **Costul-prag** c^*: costul la care cele două rapoarte Sharpe nete devin egale
- Graficul: două strategii simulate, Sharpe brut 0,78 și 0,62
  - cea cu un turnover de 10 ori mai mare își pierde avantajul la $c^* = 69$ bp

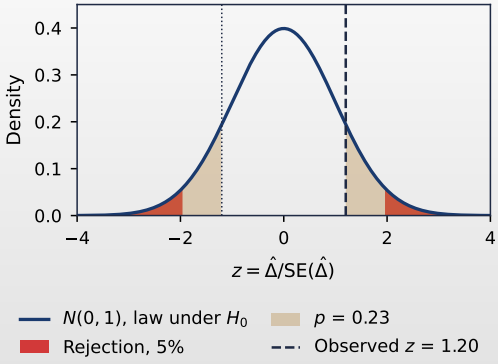


Testul z bilateral

- $\hat{\Delta} = \widehat{SR}_1 - \widehat{SR}_2$: diferența a două rapoarte Sharpe pe aceleași luni
- H_0: $SR_1 = SR_2$; statistica și valoarea p

$$z = \frac{\hat{\Delta}}{\mathrm{SE}(\hat{\Delta})}, \qquad p = 2\,[1 - \Phi(|z|)]$$

  - $\mathrm{SE}(\hat{\Delta})$: eroarea standard a lui $\hat{\Delta}$ (slide-urile următoare)
  - Φ: funcția de repartiție a $N(0,1)$, distribuția lui z sub H_0 în eșantioane mari
- Decizia la pragul $\alpha = 5\%$: respingem H_0 dacă $|z| > 1{,}96$, echivalent dacă $p < 0{,}05$
- Graficul: $z = 1{,}20$ dă $p = 0{,}23$, H_0 nu se respinge
  - nerespingerea nu dovedește că rapoartele Sharpe sînt egale



Metoda delta

- **Metoda delta**: eroarea standard a unei funcții netede de estimații, printr-o aproximare liniară

$$\sqrt{T}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \to N(0, \boldsymbol{\Psi}) \;\Rightarrow\; \sqrt{T}\big(f(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - f(\boldsymbol{\theta})\big) \to N(0,\; \nabla f^\top \boldsymbol{\Psi} \nabla f)$$

  - $\boldsymbol{\theta}$: mediile și variațele celor două strategii; $\hat{\boldsymbol{\theta}}$: estimațiile lor de selecție
  - $\boldsymbol{\Psi}$: matricea de covarianță a lui $\sqrt{T}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})$; T: numărul de luni
  - $f(\boldsymbol{\theta}) = \mu_1/\sigma_1 - \mu_2/\sigma_2$, diferența rapoartelor Sharpe; ∇f: gradientul ei (vectorul derivatelor parțiale)
- Rezultatul: $\mathrm{SE}(\hat{\Delta}) = \sqrt{\nabla f^\top \hat{\boldsymbol{\Psi}} \nabla f / T}$, cu ∇f evaluat în $\hat{\boldsymbol{\theta}}$
- Estimațiile $\widehat{SR}_1$, $\widehat{SR}_2$ sînt corelate: testul folosește perechea, nu două erori standard separate

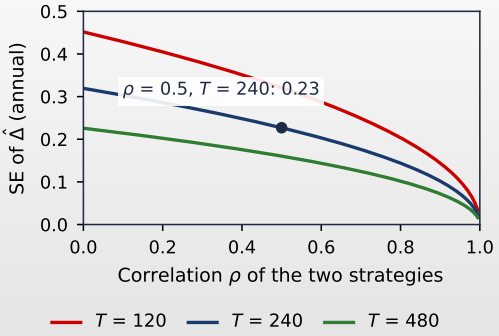
Varianța unei diferențe de Sharpe

- Randamente i.i.d. (independente și identic distribuite) cu distribuția Normală Jobson & Korkie (1981), forma corectată în Ledoit & Wolf (2008)

$$T \operatorname{Var}(\hat{\Delta}) \to 2 - 2\rho + \tfrac{1}{2}\left(SR_1^2 + SR_2^2 - 2SR_1 SR_2 \rho^2\right)$$

  - ρ: corelația randamentelor celor două strategii
  - SR_1, SR_2: rapoartele Sharpe lunare
  - un ρ mare face diferența precisă

- Exemplu: $SR_1 = SR_2 = 0{,}2$ pe lună, $\rho = 0{,}5$, $T = 240$
  - paranteza 1,03; eroarea standard (SE, *standard error*) $\sqrt{1{,}03/240} = 0{,}066$ pe lună, 0,23 pe an
  - o diferență estimată trebuie să depășească circa $1{,}96 \times 0{,}227 \approx 0{,}45$ pe an pentru semnificație bilaterală la 5%
  - pentru o putere de 80%, diferența adevărată necesară este circa $(1{,}96 + 0{,}84) \times 0{,}227 \approx 0{,}64$ pe an



Ce momente intră în gradientul raportului Sharpe?

- Testul HAC (slide-ul următor) descrie fiecare strategie prin media μ_i și momentul de ordinul doi necentrat $\gamma_i = \mathbb{E}[r_i^2] = \sigma_i^2 + \mu_i^2$, nu prin variață.
- Scriem un raport Sharpe ca $g(\mu, \gamma) = \mu / \sqrt{\gamma - \mu^2}$. Regula de derivare a funcției compuse dă

$$g_\mu = \gamma/(\gamma - \mu^2)^{3/2}, \qquad g_\gamma = -\mu/[2(\gamma - \mu^2)^{3/2}]$$

- Pentru diferență, ordonăm derivatele ca $(\mu_1, \mu_2, \gamma_1, \gamma_2)$ și inversăm semnele pentru strategia 2.
- Exemplu: $\mu = 0{,}01$, $\gamma = 0{,}0005$, deci $\sigma = 0{,}02$ și $SR = 0{,}5$. Derivatele sînt 62,5 și -625, iar cu varianța ținută fixă derivata după μ ar fi $1/\sigma = 50$.
- Gradientul și covarianța trebuie să folosească aceeași parametrizare; amestecarea lor schimbă eroarea standard.

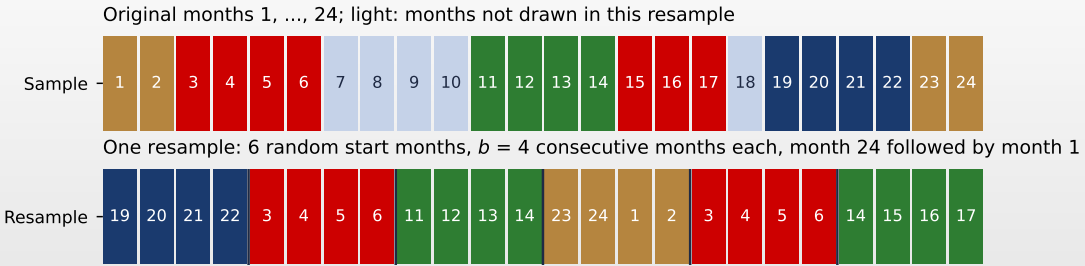
Testul HAC

- Randamentele lunare au cozi groase și gruparea volatilității (*volatility clustering*): formula i.i.d. poate subestima sau supraestima incertitudinea
  - GMV − 1/N pe sectoare: SE i.i.d. 0,167, SE HAC 0,159 pe an
- Condiții: moment de ordin patru finit; staționaritate și dependență slabă, astfel încît (r_t, r_t^2) să satisfacă teorema limită centrală
- **Testul HAC** Ledoit & Wolf (2008): metoda delta, cu $\boldsymbol{\Psi}$ estimată printr-o covariantă HAC (consistentă la heteroscedasticitate și autocorelație) a lui $\mathrm{y}_t = (r_{1t} - \hat{\mu}_1,\ r_{2t} - \hat{\mu}_2,\ r_{1t}^2 - \hat{\gamma}_1,\ r_{2t}^2 - \hat{\gamma}_2)^\top$

$$\hat{\boldsymbol{\Psi}} = \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_0 + \sum_{j=1}^{L} \left(1 - \frac{j}{L+1}\right)(\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_j + \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_j^\top), \qquad \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_j = \frac{1}{T} \sum_{t=j+1}^{T} \mathrm{y}_t \mathrm{y}_{t-j}^\top$$

  - $\hat{\gamma}_i$: media lui r_{it}^2; $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_j$: matricea de autocovariantă la lagul j
  - ponderile Bartlett $1 - j/(L+1)$ scad liniar; $L = \lfloor 4(T/100)^{2/9} \rfloor$ laguri, 4 pentru $T = 271$
- Apoi $z = \hat{\Delta}/\mathrm{SE}$ și $p = 2[1 - \Phi(|z|)]$, ca în Testul z bilateral; funcția `sr_diff_hac`

Bootstrap-ul circular pe blocuri



- Un eșantion bootstrap de T luni se construiește din blocuri de b luni consecutive, cu începuturi aleatoare Künsch (1989)
  - blocurile păstrează dependența dintre lunile vecine; „circular": după luna T urmează luna 1
  - unele luni apar de două ori, altele deloc; **perechea** (r_{1t}, r_{2t}) se extrage mereu împreună

Testul bootstrap studentizat

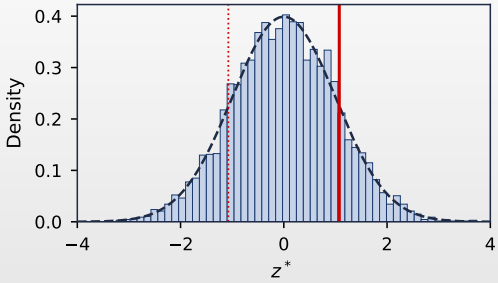
- Pe fiecare dintre cele M eșantioane bootstrap se calculează $\hat{\Delta}_m^*$, eroarea ei standard HAC SE_m^* și statistica studentizată Ledoit & Wolf (2008)

$$z_m^* = \frac{\hat{\Delta}_m^* - \hat{\Delta}}{\mathrm{SE}_m^*}$$

  - centrată în $\hat{\Delta}$, deci z_m^* imită distribuția lui z sub H_0
- Valoarea p: proporția valorilor $|z_m^*|$ cel puțin egale cu $|z|$ observat

$$p = \frac{1 + \#\{m : |z_m^*| \geq |z|\}}{M + 1}$$

- Intervalul de 95%: $\hat{\Delta} \pm q^* \, \mathrm{SE}$, q^*: percentila 95 a valorilor $|z_m^*|$
- Graficul: pereche simulată, bloc 1, $M = 4\,999$: $z = 1{,}07$, p bootstrap $= 0{,}28$; funcția `sr_diff_boot`
- Poate îmbunătăți aproximarea în eșantion finit; nu repară lipsa momentului de ordin patru (la fel pentru raportul de variațe din B3)

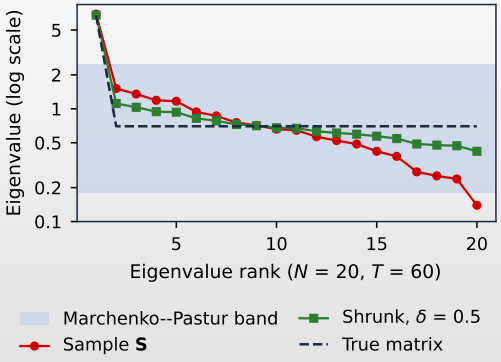


Contracția covarianței (B3, după curs)

- **Ledoit–Wolf** Ledoit & Wolf (2004): contracția (*shrinkage*) matricei de selecție spre o țintă structurată, printr-o medie ponderată a celor două

$$\hat{\Sigma}_{\mathrm{LW}} = \delta \mathrm{F} + (1-\delta)\mathrm{S}, \qquad f_{ij} = \bar{r}\sqrt{s_{ii}s_{jj}},\ f_{ii} = s_{ii}$$

  - S: covarianța de selecție, cu elementele s_{ij}; $\bar{r}$: media celor $N(N-1)$ corelații de selecție
  - $\delta \in [0,1]$: ponderea estimată a țintei, mare când S este zgomotoasă în raport cu $\|\mathrm{S}-\mathrm{F}\|$
- **Numărul de condiționare** $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ (cea mai mare valoare proprie împărțită la cea mai mică): o valoare mare înseamnă un S^{-1} instabil
- Graficul, $N = 20$, $T = 60$: matricea de selecție dispersează valorile proprii (49,6, față de 9,6 adevărat); $\delta = 0{,}5$ dă 16,1



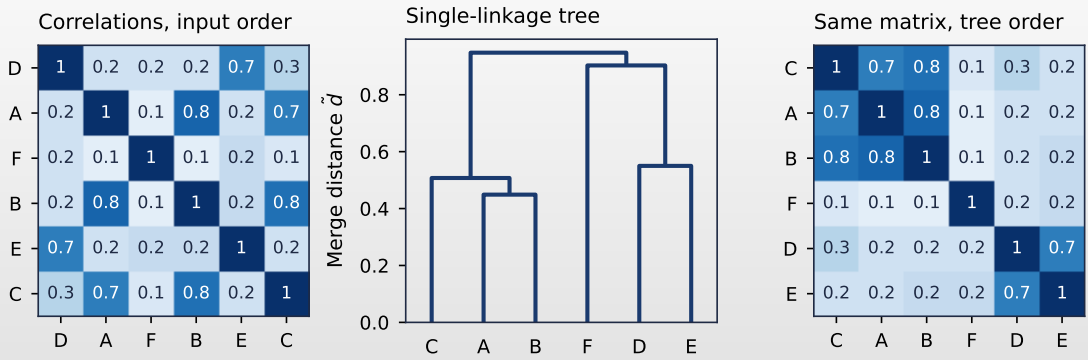
Hierarchical risk parity (B4, după curs)

- **HRP** (*Hierarchical Risk Parity*, paritatea ierarhică a riscului) López de Prado (2016): alocare de-a lungul unui arbore de active similare, fără inversarea lui $\boldsymbol{\Sigma}$
- Pasul 1, distanțe: $d_{ij} = \sqrt{(1-\rho_{ij})/2} \in [0,1]$, apoi $\tilde{d}_{ij} = \sqrt{\sum_k (d_{ki} - d_{kj})^2}$ între coloanele lui D $= (d_{ij})$
- Pasul 2, arborele: legătura simplă (*single linkage*) unește cele mai apropiate două grupuri (*clustere*); distanța dintre grupuri este cel mai mic $\tilde{d}$ dintre membrii lor
- Pasul 3, ordinea: activele se listează în ordinea frunzelor arborelui (activele similare alăturate)
- Pasul 4, bisecția recursivă: lista ordonată se împarte în două jumătăți C_1, C_2

$$V_k = \mathbf{v}_k^\top \boldsymbol{\Sigma}_k \mathbf{v}_k, \quad v_{k,i} \propto 1/\sigma_i^2, \qquad \alpha = 1 - \frac{V_1}{V_1 + V_2}$$

  - $\mathbf{v}_k$: ponderile invers proporționale cu varianța în jumătatea k; V_k: varianța acelei jumătăți; α pentru C_1, $1-\alpha$ pentru C_2
  - se repetă în fiecare jumătate pînă rămîn active individuale

Arborele într-un grafic



- Șase active simulate: două grupuri de active înrudite (A, B, C și D, E) și un activ slab corelat cu celelalte (F)
- Arborele unește întîi A–B ($\tilde{d} = 0{,}45$); în ordinea arborelui, matricea arată cele două blocuri pe diagonală

Notația folosită în toate exercițiile

- N active, T luni; w: ponderi, $\mathrm{w}^\top 1 = 1$; $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\Sigma}$: vectorul mediilor și matricea de covarianță a randamentelor lunare în exces
- $R_{i,t}$: randamentul simplu al activului i în luna t; $r_t^e = r_t - r_{f,t}$: randamentul în exces (Datele folosite)
- În acest seminar, r și R notează același randament simplu; r^e și R^e sînt variantele în exces. Litera mică nu indică un log-randament aici.
- Regulile și slide-urile în care sînt definite
  - 1/N: $w_i = 1/N$; GMV: Portofoliul de variață minimă globală; MV (tangent) și MV-LO (doar poziții long): Raportul Sharpe, portofoliul tangent și 1/N
  - ERC: Contribuții egale la risc (contribuțiile la risc RC_i: Contribuțiile la risc); HRP: Hierarchical risk parity
- Performanță și tranzacționare
  - raportul Sharpe SR: Raportul Sharpe, portofoliul tangent și 1/N, anualizat în Măsuri de performanță; diferența $\hat{\Delta} = \widehat{SR}_1 - \widehat{SR}_2$: Testul z bilateral
  - ponderile după drift $w_{i,t}^+$ și turnover-ul TO: Backtest-ul pe ferestre mobile; randamentul net, costul c și punctele de bază (bp): Costurile de tranzacționare și costul-prag

Harta exercițiilor

Exercițiu	Întrebare	Tip	Model
A1	unde este combinația de variantă minimă dintre SPY și TLT?	Rezolvat	–
A2, A3	cine poartă riscul: ERC față de 60/40	Rezolvat, Propus	A3: A2
B1	depășesc regulile Markowitz ponderile 1/N pe sectoare?	Rezolvat	–
A4, A5	este semnificativă o diferență de Sharpe?	Rezolvat, Propus	A5: A4
B2	la ce cost dispare avantajul MV-LO?	Propus	B1
C1	ce este greșit într-un backtest scris de AI (artificial intelligence, inteligență artificială)?	Propus	B1, A4
După curs	B3 [Rezolvat], B4 [Rezolvat]: contracția covarianței, ERC și HRP	Rezolvat: reproduceți	B1
C2	un portofoliu BVB în lei (proiect pentru acasă)	Propus	B1, B4, A4
Pachete de extindere	A3 extins, A6, A7, A8, A9, B3 extins, B5–B9, C3 (opționale)	Rezolvat sau Propus	indicat la fiecare cerință

- **[Rezolvat]**: model cu soluție; **[Propus]**: rezolvare individuală, discutată la seminar
- Partea A: derivări pe hîrtie; Partea B: backtest-uri și inferență pe date reale; Partea C: întrebări deschise și critica unui răspuns AI (*Artificial Intelligence*, inteligență artificială).

A1 [Rezolvat]: portofoliul GMV — cerința

- **Întrebare**: ce combinație de SPY (ETF pe indicele S&P 500) și TLT (ETF pe obligațiuni de stat americane cu scadențe de peste 20 de ani) are varianța minimă și ce randament aduce?
- **Ipoteze**: N active riscante, $\mathbf{\Sigma}$ cunoscută și pozitiv definită, vînzări în lipsă permise, $\mathrm{w}^\top 1 = 1$
- **Date de intrare** (randamente totale lunare august 2002 – iulie 2026, $T = 288$, anualizate; numerele de mai jos sînt suficiente)

	medie	volatilitate	varianță
SPY	11,73%	14,72%	0,02166
TLT	4,32%	13,49%	0,01820
corelația $\rho = -0{,}100$, covarianța $\sigma_{12} = -0{,}00199$			

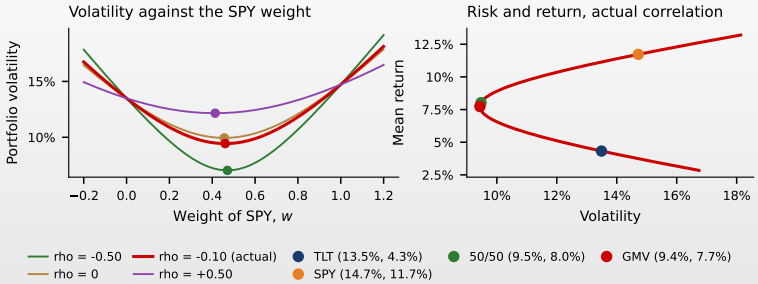
1. Scrieți lagrangianul problemei $\min_{\mathrm{w}} \mathrm{w}^\top \mathbf{\Sigma} \mathrm{w}$ cu $\mathrm{w}^\top 1 = 1$ și deduceți $\mathrm{w}_{\mathrm{GMV}} = \mathbf{\Sigma}^{-1} 1 / A$, $A = 1^\top \mathbf{\Sigma}^{-1} 1$.
2. Arătați că varianța minimă este $1/A$.
3. Inversați matricea 2×2 și obțineți $w^* = (\sigma_2^2 - \sigma_{12})/(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12})$.
4. Calculați A, w^*, σ_{GMV} și media combinației; **raportați** cele patru numere și o propoziție despre motivul pentru care σ_{GMV} este sub ambele volatilități.

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

A1 [Rezolvat]: derivarea

- Pasul 1: $\mathcal{L} = \mathrm{w}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathrm{w} - \lambda(\mathrm{w}^\top 1 - 1)$; condiția de ordinul întîi $2\boldsymbol{\Sigma}\mathrm{w} - \lambda 1 = 0$, deci $\mathrm{w} = \frac{\lambda}{2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}1$
- Impunînd $1^\top \mathrm{w} = 1$: $\frac{\lambda}{2}A = 1$, de unde $\mathrm{w}_{\mathrm{GMV}} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}1/A$; funcția obiectiv este strict convexă, deci minimul este unic
- Pasul 2: $\sigma^2_{\mathrm{GMV}} = 1^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}1/A^2 = A/A^2 = 1/A$
- Pasul 3: $\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{\Sigma}} \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_1^2 \end{pmatrix}$, deci $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}1 = \frac{1}{\det \boldsymbol{\Sigma}}(\sigma_2^2 - \sigma_{12},\ \sigma_1^2 - \sigma_{12})^\top$
- Împărțind primul element la suma celor două: $w^* = (\sigma_2^2 - \sigma_{12})/(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12})$; $\det \boldsymbol{\Sigma}$ se simplifică

A1 [Rezolvat]: numerele și minimul



- Pasul 4, numerele:
  - $\det \mathbf{\Sigma} = 0{,}02166 \times 0{,}01820 - 0{,}00199^{\mathbf{2}} = 0{,}000390$; $\mathbf{\Sigma^{-1}}1 = (0{,}02019;\ 0{,}02366)/0{,}000390 = (51{,}7;\ 60{,}6)$
  - $A = 112{,}4$; $w^* = 51{,}7/112{,}4 = 0{,}461$ în SPY, $0{,}539$ în TLT; $\sigma_{\mathbf{GMV}} = 1/\sqrt{A} = 9{,}43\%$; media $0{,}461 \times 11{,}73\% + 0{,}539 \times 4{,}32\% = 7{,}73\%$
- Interpretare: cu $\rho < 0$ cele două riscuri se compensează parțial; combinația este cu 36% mai puțin volatilă decît SPY și păstrează două treimi din media lui; la $\rho = +0{,}5$ minimul este 12,2%

MFM_ch4_seminar

A2 [Rezolvat]: ERC cu două active — cerința

- **Întrebare**: ce combinație SPY–IEF dă celor două active aceeași contribuție la risc?
- **Date de intrare**: SPY și IEF (obligațiuni de stat SUA cu scadențe de 7–10 ani), lunar august 2002 – iulie 2026, anualizat

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0{,}02166 & -0{,}00098 \\ -0{,}00098 & 0{,}00441 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = 14{,}72\%,\ \sigma_2 = 6{,}64\%,\ \rho = -0{,}101$$

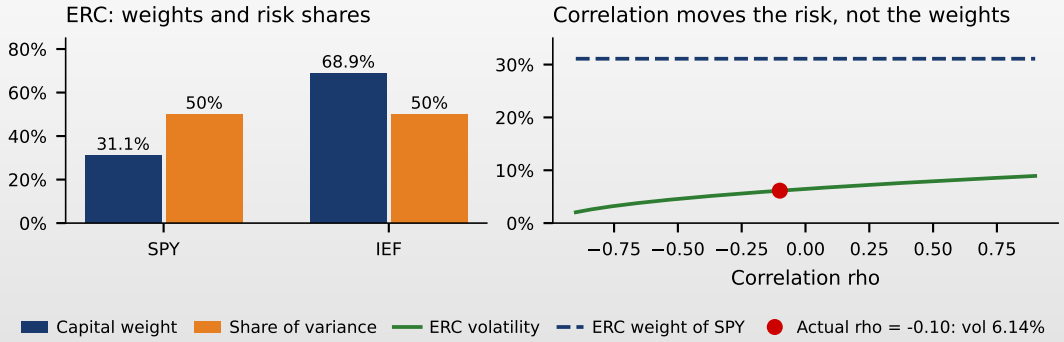
- Trei mărimi diferite: $RC_i\sigma_p = w_i(\boldsymbol{\Sigma}\mathrm{w})_i$ (contribuția la variață), RC_i (la volatilitate), RC_i/σ_p (cota, în %)
- **Cerințe**
  1. Scrieți explicit $RC_1\sigma_p$ și $RC_2\sigma_p$ pentru două active, cu ponderi pozitive $w_1 + w_2 = 1$.
  2. Demonstrați că $RC_1 = RC_2$ dacă și numai dacă $w_1\sigma_1 = w_2\sigma_2$, pentru orice $\rho \in (-1, 1)$.
  3. Calculați ponderea ERC a SPY, apoi σ_{ERC}, apoi cele două cote de risc.
- **Raportați**: demonstrația, w_1, σ_{ERC} și cele două cote

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

A2 [Rezolvat]: demonstrația și numerele

- (1) $RC_1\sigma_p = w_1^2\sigma_1^2 + w_1w_2\sigma_{12}$, $RC_2\sigma_p = w_2^2\sigma_2^2 + w_1w_2\sigma_{12}$
- (2) Termenii încrucișați, colorați, sînt identici și se reduc:
  $RC_1 = RC_2 \iff w_1^2\sigma_1^2 = w_2^2\sigma_2^2 \iff w_1\sigma_1 = w_2\sigma_2$; ρ dispare din ponderi, nu și din σ_p
- (3) $w_1 = \sigma_1^{-1}/(\sigma_1^{-1} + \sigma_2^{-1}) = 6{,}79/(6{,}79 + 15{,}06) = 0{,}311$;
  $\sigma_p^2 = 0{,}311^2(0{,}02166) + 0{,}689^2(0{,}00441) + 2(0{,}311)(0{,}689)(-0{,}00098) = 0{,}00377$, $\sigma_{\text{ERC}} = 6{,}14\%$;
  cotele 50% și 50%
- Interpretare: contribuțiile egale la risc cer o pondere de peste două ori mai mare în ETF-ul de obligațiuni, a cărui volatilitate este de peste două ori mai mică

A2 [Rezolvat]: ponderi, cote de risc și corelație



- Stînga: ponderile de capital față de cotele din varianță; dreapta: ponderea ERC a SPY este aceeași pentru orice ρ, dar volatilitatea ERC depinde de ρ (6,14% la ρ observat)

MFM_ch4_seminar

A3 [Propus]: repartizarea riscului în portofoliul 60/40 — cerința

- **Model**: A2 [Rezolvat]
- **Întrebare**: un portofoliu 60/40, considerat echilibrat, deține 40% în obligațiuni; ce parte din riscul lui provine din obligațiuni?
- **Date de intrare**: Σ din A2; $w = (0{,}6;\ 0{,}4)$ în SPY și IEF
- **Cerințe**
  1. Calculați Σw rînd cu rînd: $(\Sigma w)_1 = 0{,}6\sigma_1^2 + 0{,}4\sigma_{12}$ și $(\Sigma w)_2 = 0{,}6\sigma_{12} + 0{,}4\sigma_2^2$.
  2. Calculați $\sigma_p^2 = w^\top(\Sigma w)$, σ_p și cotele $w_i(\Sigma w)_i/\sigma_p^2$.
  3. Comparați σ_p cu volatilitatea ERC din A2 și reprezentați alăturat cotele de capital și de risc ale celor două portofolii.
- **Raportați**: $(\Sigma w)_1$, $(\Sigma w)_2$, σ_p, cele două cote de risc și graficul comparativ cu ERC
- **Interpretare**: este 60/40 un portofoliu echilibrat din punctul de vedere al riscului?

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

B1 [Rezolvat]: 1/N față de Markowitz pe sectoare — cerința

- **Întrebare**: depășesc regulile Markowitz estimate ponderile 1/N în afara eșantionului, pe nouă ETF-uri sectoriale?
- **Date**: panelul de sectoare din pregătire; randamente lunare în exces ianuarie 1999 – iulie 2026
- **Cerințe**
  1. În fiecare lună t estimați 1/N, MV (tangent), MV-LO și GMV doar pe lunile $t-60,\dots,t-1$; dețineți-le în luna t: ianuarie 2004 – iulie 2026 ($T=271$).
  2. Aplicați regula de lichidare din Capitolul 4: o regulă a cărei avere ajunge la zero (pierdere lunară de cel puțin 100%) este lichidată și nu intră în clasament sau în teste.
  3. Calculați pas cu pas prima lună: fereastra, ponderile, randamentul din ianuarie 2004, ponderile după drift și turnover-ul din februarie 2004.
  4. Calculați media, volatilitatea, raportul Sharpe (anualizate), turnover-ul mediu și drawdown-ul maxim ale fiecărei reguli nelichidate.
  5. Testați H_0: $SR_{\text{regulă}} = SR_{\mathbf{1}/N}$ cu `sr_diff_hac` (Ledoit & Wolf (2008), Secțiunea 3.1; nucleu Bartlett, 4 laguri) și `sr_diff_boot` (bootstrap circular pe blocuri, studentizat, 4 999 de extrageri; lungimile de bloc calibrate (se dau): MV-LO 1, GMV 1), $\alpha = 5\%$.
- **Raportați**: tabelul de mai jos și un grafic al averii

	Sharpe	Volatilitate	Turnover	Drawdown maxim	$\hat{\Delta}$	p HAC / p bootstrap
1/N, MV-LO, GMV	...	...	...	...	...	...
MV	luna lichidării sau, dacă supraviețuiește, toate statisticile					

- **Interpretare**: MV-LO depășește 1/N cu cîteva sutimi: este aceasta o dovadă de superioritate reală?

înapoi Lista exercițiilor

B1 [Rezolvat]: prima lună în afara eșantionului



- Fereastra 1999-01 – 2003-12 (60 de luni) dă ponderile deținute în 2004-01; MV-LO deține XLB 81,8%, XLE (energie) 14,3%, XLF (financiar) 3,9%, restul 0; MV are expunerea brută 8,3
- Randamente în exces în ianuarie 2004: 1/N $\sum_i w_i r_i^e = 1{,}11\%$, MV-LO $-3{,}24\%$, GMV 1,36%, MV 1,12% (titlul de stat 0,07%)
- Drift-ul: XLB a avut $-4{,}4\%$, XLK 4,3%; la sfîrșitul lui ianuarie ponderile 1/N de 11,11% devin 10,50% (XLB) și 11,45% (XLK)
- Turnover-ul din februarie 2004, $\sum_i |w_{i,\mathbf{feb}} - w^+_{i,\mathbf{ian}}|$: 1/N 0,0191, MV-LO 0,748 (ponderi reestimate)

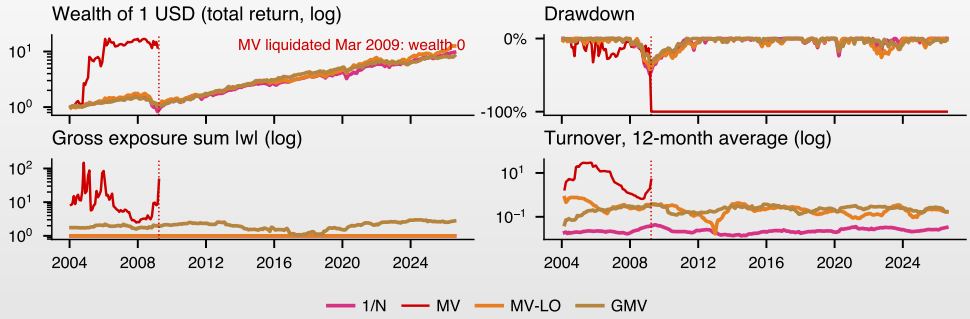
MFM_ch4_seminar

B1 [Rezolvat]: rezultate și teste

	1/N	MV-LO	GMV
Sharpe	0,66	0,72	0,71
Volatilitate	14,3%	14,7%	11,9%
Turnover	0,02	0,23	0,23
Drawdown maxim	−49%	−42%	−33%
$\hat{\Delta}$ față de 1/N	–	+0,06	+0,05
p HAC	–	0,60	0,75
p bootstrap	–	0,63	0,76

- MV este lichidată în martie 2009 (regula din Capitolul 4): nu intră în clasament și nu se testează
  - randamentul total modelat al lunii: −167,6%, o pierdere teoretică a pozițiilor cu levier; prin convenție averea rămîne zero, iar drawdown-ul este −100%
  - expunerea brută: 46,2 în martie 2009; mediana pe cele 63 de luni pînă la lichidare, 8,1
  - turnover-ul mediu pînă la lichidare: 9,8 din avere pe lună, în backtest-ul brut, fără costuri
- MV-LO și GMV se situează la cel mult 0,06 de 1/N; nicio valoare p nu este sub 0,05

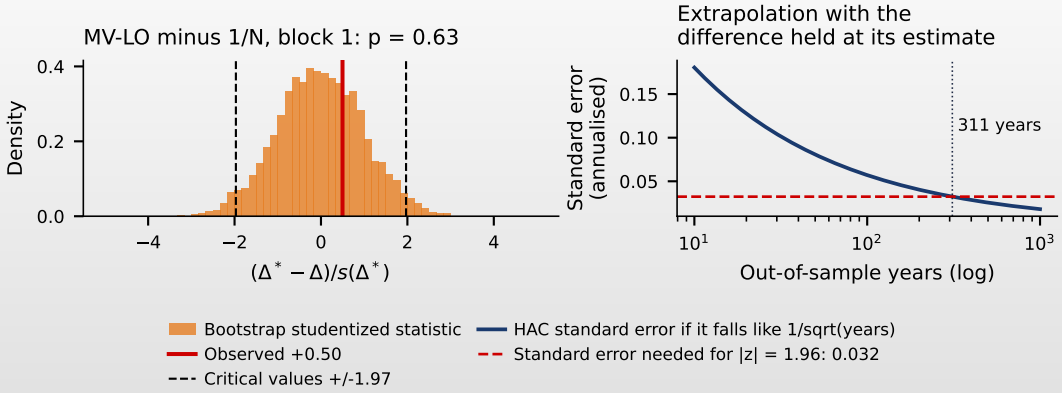
B1 [Rezolvat]: avere, drawdown, expunere și turnover



- Sus: averea unui dolar în randamente totale și drawdown-ul ei; jos: expunerea brută $\sum_i |w_i|$ și turnover-ul, ambele pe scară logaritmică; MV-LO și 1/N au prin construcție expunerea brută 1
- MV: averea rămîne zero după martie 2009 (drawdown -100%); expunerea și turnover-ul sînt afișate doar pînă la lichidare

MFM_ch4_seminar

B1 [Rezolvat]: distribuția bootstrap și extrapolarea



MFM_ch4_seminar

B1 [Rezolvat]: decizie și interpretare

- MV-LO: $\hat{\Delta} = 0{,}063$, eroare standard HAC 0,120, p HAC $= 0{,}60$; bootstrap studentizat (bloc 1) $p = 0{,}63$, intervalul de 95% $[-0{,}19; 0{,}31]$ conține zero: nu respingem
- Bootstrap-ul folosește eroarea standard cu nucleul pătratic-spectral (QS, *quadratic spectral*) și prealbire (*prewhitening*): $0{,}063/0{,}127 \approx 0{,}50$. Testul HAC Bartlett folosește 0,120, deci $z \approx 0{,}53$.
- Extrapolare (dreapta): dacă diferența adevărată ar fi egală cu estimația și eroarea standard ar scădea ca $1/\sqrt{\text{ani}}$, $|z| = 1{,}96$ ar cere 311 de ani de date; un calcul condiționat de semnificație, nu un calcul de putere
- Interpretare: intervalul este compatibil atît cu pierderi, cît și cu cîștiguri de pînă la 0,31; nerespingerea nu dovedește egalitatea

MFM_ch4_seminar

A4 [Rezolvat]: varianța unei diferențe de Sharpe — cerința

- **Întrebare**: este diferența GMV–1/N din B1 mai mare decît zgomotul de eșantionare, în ipotezele cele mai simple?
- **Date de intrare**: randamentele lunare **în exces** ale GMV și 1/N din B1, $T = 271$; Sharpe lunar $SR_{\text{GMV}} = 0{,}2051$, $SR_{1/N} = 0{,}1908$, corelația $\rho = 0{,}694$
- **Ipotează**: randamente i.i.d. din distribuția Normală bivariată; Φ este funcția de repartiție a distribuției Normale standard
- **Cerințe**
  1. Scrieți matricea de covarianță asimptotică 4×4 a lui $\sqrt{T}(\hat{\mu}_1 - \mu_1, \hat{\mu}_2 - \mu_2, \hat{\sigma}_1^2 - \sigma_1^2, \hat{\sigma}_2^2 - \sigma_2^2)$.
  2. Scrieți gradientul lui $f = \mu_1/\sigma_1 - \mu_2/\sigma_2$ și aplicați metoda delta pentru a obține formula din Varianța unei diferențe de Sharpe.
  3. Testați H_0: $SR_{\text{GMV}} = SR_{1/N}$ cu un test z bilateral la 5%; comparați cu valoarea p HAC 0,75 din B1.
- **Raportați**: matricea, formula, z, p și decizia

Înapoi Lista exercițiilor

A4 [Rezolvat]: metoda delta

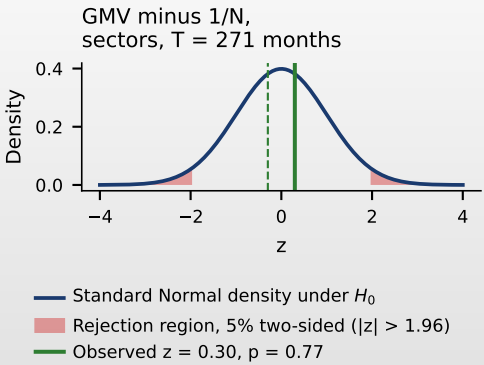
- (1) Sub distribuția Normală, mediile și variațele de eșantion sînt asimptotic independente, $\sigma_{12} = \rho\sigma_1\sigma_2$:

$$\mathbf{\Psi} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sigma_1^4 & 2\sigma_{12}^2 \\ 0 & 0 & 2\sigma_{12}^2 & 2\sigma_2^4 \end{pmatrix}, \qquad \nabla f = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1 \\ -1/\sigma_2 \\ -SR_1/(2\sigma_1^2) \\ +SR_2/(2\sigma_2^2) \end{pmatrix}$$

- (2) $\nabla f^\top \mathbf{\Psi} \nabla f$ se descompune în două blocuri
  - Mediile: $\sigma_1^2/\sigma_1^2 + \sigma_2^2/\sigma_2^2 - 2\sigma_{12}/(\sigma_1\sigma_2) = 2 - 2\rho$
  - Variațele: $\frac{SR_1^2}{4\sigma_1^4} 2\sigma_1^4 + \frac{SR_2^2}{4\sigma_2^4} 2\sigma_2^4 - 2\frac{SR_1 SR_2}{4\sigma_1^2\sigma_2^2} 2\sigma_{12}^2 = \frac{1}{2}(SR_1^2 + SR_2^2 - 2SR_1 SR_2\rho^2)$
- Suma blocurilor dă formula (Jobson & Korkie (1981); forma corectată în Ledoit & Wolf (2008))

A4 [Rezolvat]: testul

- (3) Paranteza: $2 - 2(0{,}694) + 0{,}5(0{,}2051^2 + 0{,}1908^2 - 2 \times 0{,}2051 \times 0{,}1908 \times 0{,}694^2)$
  $= 0{,}612 + 0{,}5(0{,}0421 + 0{,}0364 - 0{,}0377) = 0{,}6324$
- Eroarea standard $\sqrt{0{,}6324/271} = 0{,}0483$;
  $z = (0{,}2051 - 0{,}1908)/0{,}0483 = 0{,}30$;
  $p = 2[1 - \Phi(0{,}30)] = 0{,}77$
- Decizie: nu respingem H_0 la 5%; testul HAC confirmă ($p = 0{,}75$)
- Interpretare: diferența anualizată, 0,71 față de 0,66, se încadrează larg în zgomotul de eșantionare; 22 de ani de date nu permit ordonarea GMV și 1/N



MFM_ch4_seminar

A5 [Propus]: ERC față de 1/N — cerința

- **Model**: A4 [Rezolvat]
- **Întrebare**: avantajul ERC față de 1/N este mai mic decît al GMV; poate o diferență mai mică să fie mai aproape de semnificație?
- **Date de intrare**: backtest-ul B1 cu ERC adăugat, $T = 271$; Sharpe lunar $SR_{\text{ERC}} = 0{,}2018$, $SR_{1/N} = 0{,}1908$, corelația 0,9927; păstrați patru zecimale pînă la final (paranteza este mică atunci cînd ρ este aproape de 1)
- Reper: formula pentru $T\,\mathrm{Var}(\hat{\Delta})$ din Varianța unei diferențe de Sharpe
- **Cerințe**
  1. Calculați paranteza, eroarea standard, z și valoarea p bilaterală; decideți la 5%.
  2. Arătați că paranteza tinde la $\frac{1}{2}(SR_1 - SR_2)^2$ cînd $\rho \to 1$.
  3. Completați un tabel comparativ (diferență, ρ, eroare standard, z) pentru A4 și A5 și reprezentați ambele intervale de 95%.
- **Raportați**: paranteza, eroarea standard, z, valoarea p și decizia la 5%; tabelul comparativ și graficul intervalelor
- **Interpretare**
  - de ce este aici o diferență mai mică mai aproape de semnificație?
  - ce se întîmplă dacă cele două serii de randamente sînt identice?

‹ Înapoi › Lista exercițiilor

B2 [Propus]: costul-prag — cerința

- **Model**: B1 [Rezolvat]
- **Întrebare**: MV-LO depășește 1/N înainte de costuri pe 16 ETF-uri; la ce cost de tranzacționare dispare avantajul?
- **Date**: universul combinat (16 ETF-uri), în afara eșantionului mai 2012 – iulie 2026 ($T = 171$); strategia 1 = MV-LO, strategia 2 = 1/N; turnover ca în B1
- Randamentul net $r_t - c\,TO_t$, costul c pe unitate tranzacționată: Costurile de tranzacționare și costul-prag
- **Cerințe**
  1. Calculați rapoartele Sharpe brute, valoarea p HAC a diferenței lor și turnover-urile medii.
  2. Pe o grilă de 0–200 bp (pas 0,1 bp) recalculați media **și** abaterea standard a ambelor serii nete și găsiți costul c^* la care rapoartele Sharpe nete se intersectează; reprezentați ambele curbe.
  3. Deduceți aproximarea cu volatilitate fixă $c^* \approx \Delta SR / [12(TO_1/\sigma_1 - TO_2/\sigma_2)]$ (σ anual) și comparați-o cu valoarea de pe grilă.
- **Raportați**: cele două rapoarte Sharpe brute, valoarea p HAC, turnover-urile medii, c^* de pe grilă și din aproximare, graficul
- **Interpretare**: la costurile unui investitor individual pe BVB sau pe ETF-uri americane, este justificată implementarea MV-LO?

Înapoi Lista exercițiilor

C1 [Propus]: critica unui răspuns de inteligență artificială (AI) — cerința

- **Model**: B1 și A4 [Rezolvat]. **Cererea**: „`prices` conține prețurile zilnice ajustate ale celor nouă ETF-uri sectoriale din B1 (decembrie 1998 – iulie 2026). Scrie cod Python pentru un backtest GMV în afara eșantionului, cu reechilibrare lunară, și dă-mi raportul Sharpe anualizat.”

```
import numpy as np
r = prices.resample('ME').last().pct_change().dropna()  # monthly simple returns
S = r.cov().values                                      # covariance matrix
w = np.linalg.solve(S, np.ones(len(S)))                 # Sigma^{-1} 1
w = w / w.sum()                                         # GMV weights, sum to one
port = r.dot(w)                                         # portfolio return
sr = port.mean() / port.std() * np.sqrt(252)
print(f"Annualised Sharpe ratio: {sr:.2f}")
```

- **Cerințe** (`rf`: rata lunară a titlului de stat din pregătire, în zecimale, aliniată pe datele de sfîrșit de lună)
  1. Găsiți cele trei erori intenționate; numiți linia, explicați de ce este greșită și cum ați detecta-o (o verificare a datelor, un număr din B1 sau A4, o definiție). Alte observații argumentate sînt binevenite.
  2. Folosiți schema B1: estimare pe o fereastră mobilă de 60 de luni, ponderi alese înaintea lunii, reechilibrare lunară cu drift. Scrieți codul corectat și raportați Sharpe; verificați decalajul datelor, valorile lipsă, suma ponderilor și anualizarea.
  3. Notați fiecare eroare în formatul `AI_ERRORS.md`: cererea, răspunsul, eroarea, cum a fost găsită, corecția.
- **Interpretare**
  - cît de mult se abate valoarea raportată de AI de la una care poate fi susținută?
  - care eroare contează cel mai mult?

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

B3 [Rezolvat]: contracția covarianței și riscul GMV — cerința

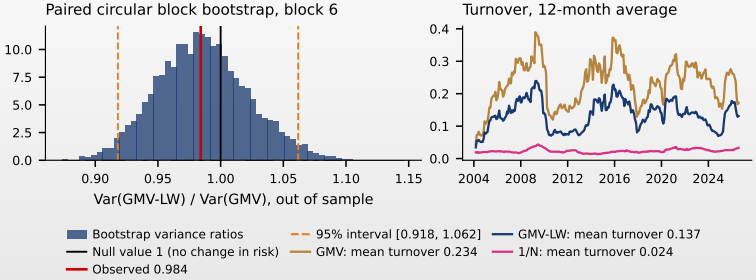
- **Întrebare**: reduce estimatorul Ledoit–Wolf riscul GMV în afara eșantionului, pe sectoare?
- **Date**: backtest-ul B1; GMV cu covariança de eșantion față de GMV-LW (GMV calculat cu covariança Ledoit–Wolf), cu ținta de corelație constantă din Ledoit & Wolf (2004) (funcția `lw_cc(X)`: intrare o fereastră 60×9 de randamente în exces, ieșire $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\text{LW}}$ și δ); S, F, $\bar{r}$, δ și numărul de condiționare ca în Contracția covarianței (B3, după curs)
- **Cerințe**
  1. Pe ultima fereastră urmăriți lanțul: S $\to$ ținta F $\to \delta \to \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\text{LW}} \to$ ponderile GMV; raportați $\bar{r}$, δ, ambele numere de condiționare și expunerile brute.
  2. Calculați volatilitățile în afara eșantionului ale GMV, GMV-LW și 1/N.
  3. Calculați Var(GMV-LW)/ Var(GMV) cu un interval percentil de 95% dintr-un bootstrap circular pe blocuri (Künsch (1989); blocuri de 6 luni, 5 000 de extrageri); ambele serii folosesc **aceleași** luni reeșantionate.
  4. Comparați turnover-ul lunar mediu al celor două reguli.
- **Interpretare**
  - de ce este cîștigul mic cu 9 active și 60 de luni?
  - cînd ar fi mai mare?

Înapoi Lista exercițiilor

B3 [Rezolvat]: de la S la ponderi

- Ultima fereastră 2021-08 – 2026-07, $T = 60$, $N = 9$
- Pasul 1: corelația medie de eșantion $\bar{r} = 0{,}511$; de exemplu corelația XLK–XLU, 0,31, este înlocuită cu $\bar{r}$ în F, variațele se păstrează
- Pasul 2: $\delta = 0{,}24$: $\hat{\mathbf{\Sigma}}_{\text{LW}}$ este 24% țintă, 76% eșantion
- Pasul 3: numărul de condiționare 51,6 $\rightarrow$ 32,5: cele mai mici valori proprii cresc
- Pasul 4: ponderile GMV; expunerea brută $\sum_i |w_i|$ 2,64 (eșantion) $\rightarrow$ 1,91 (contracție); XLP (consum de bază) 66,8% $\rightarrow$ 57,8%, XLK 10,1% $\rightarrow$ 6,4%
- O reeșantionare pereche: extrageți aleator 46 de luni de început, luați cîte 6 luni consecutive (circular), trunchiați la $T = 271$ și calculați varianța ambelor strategii pe aceleași luni

B3 [Rezolvat]: risc și turnover



- Volatilitate: GMV 11,90%, GMV-LW 11,80%, 1/N 14,28%: ambele reguli GMV reduc riscul cu circa o șesime
- Raportul variațelor 0,984, intervalul [0,918; 1,062] conține 1: nicio reducere semnificativă; turnover 0,234 $\to$ 0,137 (-41%): aici beneficiul constă în stabilitatea ponderilor, nu în reducerea riscului
- Interpretare: cu $N/T = 0{,}15$ matricea de eșantion este deja acceptabilă; cîștigul crește cu N/T și cînd ținta este apropiată de matricea adevărată

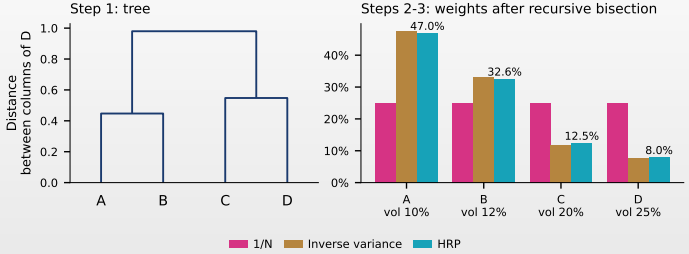
MFM_ch4_seminar

B4 [Rezolvat]: ERC și HRP pe sectoare — cerința

- **Întrebări**
  - cum alocă cele două reguli bazate pe risc?
  - depășesc ele 1/N?
- **Partea 1, calculul ponderilor**: întîi exemplul cu patru active, apoi ultima fereastră august 2021 – iulie 2026, cu covarianța de eșantion
  1. Aplicați HRP pas cu pas pe exemplul cu patru active de pe slide-ul următor: distanțe, arbore, ordine, bisecție.
  2. Calculați cele nouă ponderi ERC (`w_erc(S)`, problema convexă din Maillard, Roncalli & Teïletche (2010)) și ponderile HRP (`w_hrp(S)`, cei patru pași din Hierarchical risk parity (B4, după curs)).
  3. Calculați cotele de risc pentru 1/N, ERC și HRP.
- **Partea 2, backtest** (ianuarie 2004 – iulie 2026, fereastră mobilă de 60 de luni, ca în B1)
  4. Testați rapoartele Sharpe ale ERC și HRP față de 1/N cu testul HAC la 5%; raportați turnover-ul și corelația cu 1/N.
- **Interpretare**: ERC și 1/N au corelația 0,993: este ERC o altă strategie sau doar o mică abatere de la 1/N?

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

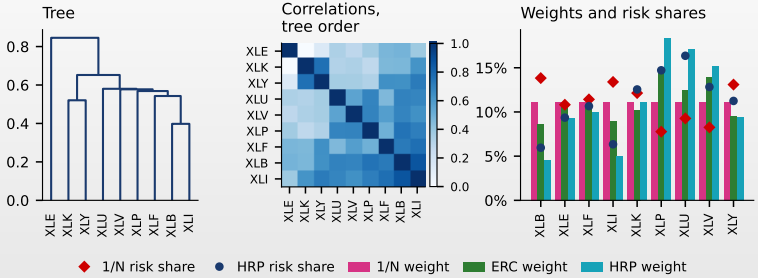
B4 [Rezolvat]: HRP pe patru active



- Volatilități 10%, 12%, 20%, 25%; corelații A–B 0,8, C–D 0,7, toate perechile încrucișate 0,2
- Pasul 1: $d_{AB} = \sqrt{(1-0{,}8)/2} = 0{,}316$, $d_{CD} = 0{,}387$, perechile încrucișate 0,632; distanțele dintre coloanele lui D: $\tilde{d}_{AB} = 0{,}447$, $\tilde{d}_{CD} = 0{,}548$; legătura simplă unește A–B, apoi C–D, apoi cele două grupuri
- Pasul 2: ordinea A, B, C, D; împărțim în $\{A, B\}$ și $\{C, D\}$
- Pasul 3: ponderi invers proporționale cu varianța în fiecare jumătate, (0,59; 0,41) și (0,61; 0,39); variațele grupurilor $V_1 = 0{,}01055$, $V_2 = 0{,}04105$; $\alpha = 1 - V_1/(V_1 + V_2) = 0{,}796$ pentru $\{A, B\}$
- Apoi fiecare pereche se împarte din nou după inversul variației: A 47,0%, B 32,6%, C 12,5%, D 8,0%

MFM_ch4_seminar

B4 [Rezolvat]: nouă sectoare, ultima fereastră



- Ordinea din arbore: XLE, XLK, XLY (consum discreționar), XLU, XLV (sănătate), XLP, XLF, XLB, XLI (industrie)
- ERC: XLP 14,8%, XLV 13,9% ... XLB 8,6%; HRP: XLP 18,4%, XLU 17,1% ... XLB 4,5%
- Cotele de risc în 1/N: de la 7,8% (XLP) la 13,8% (XLB)

MFM_ch4_seminar

B4 [Rezolvat]: backtest

- În afara eșantionului ianuarie 2004 – iulie 2026, fereastră mobilă de 60 de luni, testul HAC față de 1/N
- Backtest: Sharpe ERC 0,70 față de 0,66, $p = 0{,}09$; HRP 0,70, $p = 0{,}32$; turnover 1/N 0,024, ERC 0,028, HRP 0,082; corelația cu 1/N: ERC 0,993, HRP 0,979
- Interpretare: ERC este o abatere mică și puțin costisitoare spre sectoarele cu volatilitate redusă; HRP este o abatere mai mare, cu un turnover de trei ori mai mare; niciuna nu respinge H_0

C2 [Propus]: un portofoliu BVB în lei — proiectul pentru acasă

- **Model**: B1, B4 și A4 [Rezolvat]
- **Întrebare**: aduce diversificarea dincolo de BVB un cîștig unui investitor român?
- **Date și monedă**: cele opt acțiuni BVB, TLV (Banca Transilvania), SNP (OMV Petrom), BRD (BRD–Groupe Société Générale), TGN (Transgaz), SNG (Romgaz), SNN (Nuclearelectrica), EL (Electrica), TEL (Transelectrica), și indicele BET-TR (octombrie 2014 – august 2026); SPY, EFA (piețe dezvoltate fără SUA și Canada), IEF, GLD (aur) convertite în lei în zilele comune, $P_{\mathbf{RON}} = P_{\mathbf{USD}} \times$ USD/RON (BNR); de exemplu 2017-10-02: SPY 219,84 USD $\times$ 3,9086 = 859,27 lei
- **Cazul de bază**: randamente lunare în lei, fereastră de 36 de luni, primul portofoliu în octombrie 2017, $R_f = 0$
- **Cerințe**
  1. Realizați backtesting-ul pentru 1/N, GMV-LW, ERC și HRP pe cele opt acțiuni, apoi pe acțiuni plus cele patru ETF-uri străine.
  2. Comparați fiecare portofoliu cu BET-TR (niciodată cu BET): raport Sharpe, volatilitate, drawdown maxim; reprezentați averea și drawdown-ul.
  3. Testați fiecare regulă globală (acțiuni plus ETF-uri) față de BET-TR și față de varianta ei doar cu BVB (HAC), cu ajustare Holm (Valori proprii de zgomot și teste multiple) pe această familie de opt teste.
  4. Sensibilitate: o rată în lei de 5% pe an, 0,05/12 pe lună, scăzută din toate randamentele.
- **Livrabile**: un folder Quantlet în propriul repository, un tabel cu cele opt teste (p brut și Holm), un slide cu concluzia și principala ei limită (riscul valutar, costuri, impozite)
- **Criterii de evaluare**: backtest fără deplasare de anticipare; testele HAC și ajustarea Holm; interpretarea limitelor (risc valutar, costuri, impozite); codul reproductibil

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

Pachete de extindere: conținut și cerințe preliminare

Pachet	Exerciții	Cunoștințe necesare
1. Teoria paritățiirisculuiii	A3 extins	A2, A3
2. Black–Litterman	A6 [Rezolvat], A7, B5	cursul, Black–Litterman
3. Deplasare și inferență prin regresie	A8, A9, B6	A1, A4, B1
4. Estimarea covarianței	B3 extins [Rezolvat], B7	B3
5. Dincolo de sectoare	B8, B9	B1, B4
6. Proiecte de cercetare	C3 (C2 este tema de bază)	B1, A4, studiul de caz din curs

- Fiecare pachet are secțiunea lui în notebook; rezolvați exercițiile unui pachet în ordine
- Studiu suplimentar: Hierarchical Clustering, Minimum Spanning Tree

Black–Litterman: opinii și incertitudine

- **Black–Litterman** Black & Litterman (1992): combină o distribuție a priori a randamentelor așteptate cu opiniile investitorului
- Distribuția a priori prin optimizare inversă: mediile pentru care portofoliul de reper (*benchmark*) w_b este optim

$$\boldsymbol{\pi} = \delta_{\mathrm{RA}} \boldsymbol{\Sigma} \mathrm{w}_b, \qquad \boldsymbol{\mu} \sim N(\boldsymbol{\pi},\ \tau\boldsymbol{\Sigma})$$

  - δ_{RA}: aversiunea la risc; τ: un scalar mic, incertitudinea distribuției a priori în raport cu $\boldsymbol{\Sigma}$
- Opiniile: K relații liniare despre $\boldsymbol{\mu}$, fiecare cu incertitudinea ei

$$\mathrm{q} = \mathrm{P}\boldsymbol{\mu} + \mathrm{e}, \qquad \mathrm{e} \sim N(0, \boldsymbol{\Omega})$$

  - P: matrice $K \times N$ (un rînd $(0, \dots, +1, \dots, -1, \dots)$ este o opinie despre un spread); $\boldsymbol{\Omega}$: covarianța erorilor opiniilor
- Un activ și o opinie: media a posteriori este media ponderată cu precizia

$$\mu_{\mathrm{BL}} = \frac{\pi/(\tau\sigma^2) + q/\omega}{1/(\tau\sigma^2) + 1/\omega}, \qquad \text{precizia} = 1/\text{varianța}$$

  - $\tau\sigma^2$: varianța distribuției a priori; ω: varianța opiniei; sursa mai precisă primește ponderea mai mare

Valori proprii de zgomot și teste multiple

- **Banda Marchenko–Pastur** Laloux et al. (1999): reper asimptotic de zgomot pentru valorile proprii ale matricei de corelație a N serii independente, cu cîte T observații:

$$\left[(1-\sqrt{c})^2,\ (1+\sqrt{c})^2\right], \qquad c = N/T$$

  - abaterile de la bandă pot indica structură; selecțiile finite și dependența le influențează și ele, deci nu este o clasificare exactă

- **Ajustarea Holm** pentru m teste (B8, C2): se ordonează valorile p $p_{(1)} \le \cdots \le p_{(m)}$

$$\tilde{p}_{(k)} = \max_{j \le k} \ \min\left\{1,\ (m-j+1)\, p_{(j)}\right\}$$

  - se resping ipotezele cu $\tilde{p}_{(k)} < \alpha$; probabilitatea oricărei respingeri false din familie rămîne sub α

- Testele exacte F și Wald HAC pentru restricțiile liniare $\mathrm{Rb} = 0$: formulele sînt pe slide-ul B6

A3 extins [Propus]: Euler și unicitatea ERC — cerința

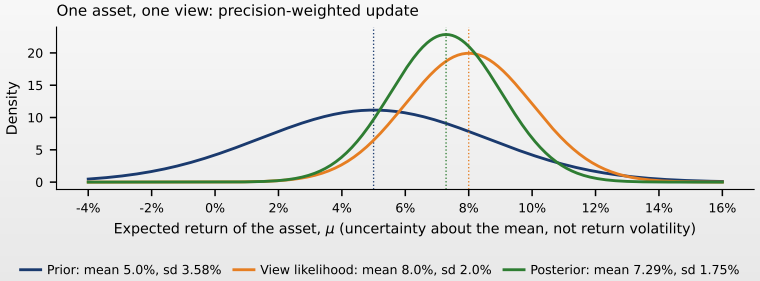
- **Model**: A2 și A3
- **Cerințe**
  1. Arătați că $\sigma_p(c\mathrm{w}) = c\,\sigma_p(\mathrm{w})$ pentru $c > 0$ și deduceți $\sum_i RC_i = \sigma_p$ din teorema lui Euler pentru funcții omogene de gradul întîi.
  2. Pentru $\boldsymbol{\Sigma}$ pozitiv definită, fie $f(\mathrm{y}) = \frac{1}{2}\mathrm{y}^\top \boldsymbol{\Sigma}\mathrm{y} - \frac{1}{N}\sum_i \ln y_i$ pe $\mathrm{y} > 0$. Calculați hessiana și arătați că f este strict convexă.
  3. Arătați că $f \to +\infty$ cînd un $y_i \to 0$ și cînd $\|\mathrm{y}\| \to \infty$; deduceți că minimul există și este unic.
  4. Scrieți condiția de ordinul întîi și arătați că egalizează contribuțiile la risc, înainte și după normalizarea $\mathrm{w} = \mathrm{y}/1^\top\mathrm{y}$.
- **Raportați**: cele două demonstrații în cel mult zece rînduri

A6 [Rezolvat]: Black–Litterman cu un activ — cerința

- **Întrebare**: cît de mult ar trebui o opinie precisă să modifice o medie a priori incertă?
- **Date de intrare**: un activ, volatilitatea randamentelor $\sigma = 16\%$, $\tau = 0{,}05$; a priori pentru randamentul **așteptat** $\mu \sim N(\pi, \tau\sigma^2)$ cu $\pi = 5\%$; opinia $q = 8\%$ cu abaterea standard 2%
  - Ambele variațe măsoară incertitudinea despre media μ, nu volatilitatea randamentelor; pentru densitatea a posteriori presupunem distribuția Normală
- **Cerințe**
  1. Calculați varianța a priori $\tau\sigma^2$ și cele două precizii (inversele variațelor).
  2. Calculați μ_{BL} ca medie ponderată cu preciziile, ponderea opiniei și abaterea standard a posteriori; reprezentați cele trei densități.
  3. Generalizați: scrieți $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\mu} + \mathrm{e}_1$ și $\mathrm{q} = \mathrm{P}\boldsymbol{\mu} + \mathrm{e}_2$ ca $\mathrm{y} = \mathrm{Z}\boldsymbol{\mu} + \mathrm{e}$ (Z: I așezată deasupra lui P; $\mathrm{Var}(\mathrm{e}) = \mathrm{V}$, bloc-diagonală cu $\tau\boldsymbol{\Sigma}$ și $\boldsymbol{\Omega}$) și deduceți estimatorul celor mai mici pătrate generalizate (GLS, *generalised least squares*; Theil & Goldberger (1961)); arătați că $\mathrm{P} = \mathrm{I}$, $\boldsymbol{\Omega} = \tau\boldsymbol{\Sigma}$ dă $(\boldsymbol{\pi} + \mathrm{q})/2$.
- **Raportați**: varianța a priori, cele două precizii, μ_{BL}, ponderea opiniei, abaterea standard a posteriori și graficul celor trei densități

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

A6 [Rezolvat]: un activ



- (1) Varianța a priori $0{,}05 \times 0{,}16^2 = 0{,}00128$, precizia 781; varianța opiniei $0{,}02^2 = 0{,}0004$, precizia 2 500
- (2) $\mu_{\mathbf{BL}} = (781 \times 5\% + 2\,500 \times 8\%)/3\,281 = 7{,}29\%$; ponderea opiniei $2\,500/3\,281 = 0{,}76$; abaterea standard a posteriori $1/\sqrt{3281} = 1{,}75\%$
- Opinia este de trei ori mai precisă decît distribuția a priori, deci primește trei sferturi din pondere; distribuția a posteriori este mai precisă decît oricare sursă

MFM_ch4_seminar

A6 [Rezolvat]: Black–Litterman ca GLS

- (3) Dimensiuni: $\boldsymbol{\mu}$ este $N \times 1$, q este $K \times 1$, P este $K \times N$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi} \\ \mathrm{q} \end{pmatrix}}_{\mathrm{y}\ ((N+K)\times 1)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{I}_N \\ \mathrm{P} \end{pmatrix}}_{\mathrm{Z}} \boldsymbol{\mu} + \mathrm{e}, \qquad \mathrm{V} = \mathrm{Var}(\mathrm{e}) = \begin{pmatrix} \tau\boldsymbol{\Sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Omega} \end{pmatrix}$$

- GLS: $\hat{\boldsymbol{\mu}} = (\mathrm{Z}^\top \mathrm{V}^{-1} \mathrm{Z})^{-1} \mathrm{Z}^\top \mathrm{V}^{-1} \mathrm{y}$; o înmulțire pe blocuri: $\mathrm{Z}^\top \mathrm{V}^{-1} = \left((\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1},\ \mathrm{P}^\top \boldsymbol{\Omega}^{-1}\right)$, deci

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{BL}} = \left[(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1} + \mathrm{P}^\top \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathrm{P}\right]^{-1} \left[(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1} \boldsymbol{\pi} + \mathrm{P}^\top \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathrm{q}\right]$$

- Covarianța $[(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1} + \mathrm{P}^\top \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathrm{P}]^{-1}$: distribuția a posteriori Black–Litterman
- $\mathrm{P} = \mathrm{I}$, $\boldsymbol{\Omega} = \tau\boldsymbol{\Sigma}$: $[2(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}]^{-1}(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}(\boldsymbol{\pi} + \mathrm{q}) = (\boldsymbol{\pi} + \mathrm{q})/2$: precizii egale, ponderi egale

A7 [Propus]: o opinie sectorială — cerința

- **Model**: A6 [Rezolvat]
- **Date de intrare**: nouă sectoare în ordinea XLB, XLE, XLF, XLI, XLK, XLP, XLU, XLV, XLY; randamente lunare în exces august 2016 – iulie 2026, $\boldsymbol{\Sigma}$ anualizată; reper 1/N, aversiunea la risc $\delta_{\text{RA}} = 2{,}5$, $\tau = 0{,}05$; Δw: modificarea ponderilor față de reper
- Opinia XLK minus XLU $= 3\%$ pe an: $\mathrm{P} = (0, 0, 0, 0, +1, 0, -1, 0, 0)$; implicit $\mathrm{P}\boldsymbol{\pi} = 2{,}22\%$; varianța spread-ului $\mathrm{P}\boldsymbol{\Sigma}\mathrm{P}^{\top} = 0{,}0477$ (suficientă; întreaga $\boldsymbol{\Sigma}$ este necesară doar pentru verificare)
- **Cerințe**
  1. Scrieți distribuția a priori a lui $\mathrm{P}\boldsymbol{\mu}$ implicată de $\boldsymbol{\mu} \sim N(\boldsymbol{\pi}, \tau\boldsymbol{\Sigma})$.
  2. Cu $\Omega = \tau\,\mathrm{P}\boldsymbol{\Sigma}\mathrm{P}^{\top}$ (He & Litterman (2002)), arătați că opinia a posteriori este media simplă dintre a priori și opinie și calculați-o.
  3. Arătați că $\Delta\mathrm{w} = \mathrm{P}^{\top}(q - \mathrm{P}\boldsymbol{\pi})/(2\delta_{\text{RA}}\mathrm{P}\boldsymbol{\Sigma}\mathrm{P}^{\top})$; calculați scalarul, noile ponderi XLK și XLU și verificați că ajustarea ponderilor are suma zero.
- **Raportați**: distribuția a priori a lui $\mathrm{P}\boldsymbol{\mu}$, opinia a posteriori, scalarul și noile ponderi XLK și XLU
- **Interpretare**: cum se modifică ajustarea ponderilor dacă varianța opiniei Ω se dublează (precizia se înjumătățește)?

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

B5 [Propus]: Black–Litterman pe un set multi-active — cerința

- **Model**: A6 și A7
- **Date de intrare**: SPY, EFA, EEM (acțiuni din piețele emergente), TLT, IEF, LQD (obligațiuni corporative americane cu rating investițional), HYG (obligațiuni corporative americane cu randament ridicat), GLD (în această ordine), randamente lunare în exces august 2016 – iulie 2026 ($T = 120$), $\boldsymbol{\Sigma}$ anualizată; reper 1/N, $\delta_{\mathrm{RA}} = 2{,}5$, $\tau = 0{,}05$; opinia GLD minus TLT $= 4\%$ pe an, $\mathrm{P} = (0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, +1)$, $\Omega = \tau \mathrm{P} \boldsymbol{\Sigma} \mathrm{P}^{\top}$
- Alocare statică fără restricții: o pondere negativă este o poziție short
- **Cerințe**
  1. Calculați $\boldsymbol{\pi} = \delta_{\mathrm{RA}} \boldsymbol{\Sigma} \mathrm{w}_b$ și diferența implicită GLD minus TLT.
  2. Calculați varianța spread-ului, surpriza $q - \mathrm{P}\boldsymbol{\pi}$, scalarul de ajustare din A7 și noile ponderi; reprezentați-le alături de reper.
  3. Comparați cu media de eșantion a lui GLD minus TLT, cu o încredere de zece ori mai mică ($\Omega \times 10$) și cu alocarea long-only care maximizează $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{BL}}^{\top} \mathrm{w} - \delta_{\mathrm{RA}} \mathrm{w}^{\top} \boldsymbol{\Sigma} \mathrm{w}/2$, cu ponderi nenegative de sumă unu. Comparați media de eșantion cu opinia declarată, fără să o folosiți în locul opiniei.
- **Raportați**: $\boldsymbol{\pi}$, diferența implicită, surpriza, scalarul, noile ponderi și cele trei comparații, cu graficul
- **Interpretare**: de ce se modifică ponderile atît de mult, deși opinia este modestă?

Înapoi Lista exercițiilor

A8 [Propus]: deplasarea raportului Sharpe în eșantion — cerința

- **Model**: A4 [Rezolvat] (pentru momente), riscul de estimare în Capitolul 4
- **Ipoteze**: randamente i.i.d. $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$; $\hat{\boldsymbol{\mu}}$, $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ de verosimilitate maximă (împărțire la T); se dau: $\hat{\boldsymbol{\mu}} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}/T)$, $\mathbb{E}[\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}] = \frac{T}{T-N-2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ pentru $T > N+2$, $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ independent de $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ și $\mathbb{E}[\mathrm{x}^\top \mathrm{A}\mathrm{x}] = \mathrm{tr}(\mathrm{A}\,\mathrm{Var}(\mathrm{x})) + \mathbb{E}[\mathrm{x}]^\top \mathrm{A}\,\mathbb{E}[\mathrm{x}]$
- **Cerințe**
  1. Calculați $\mathbb{E}[\hat{\theta}^2 \mid \hat{\boldsymbol{\mu}}]$ pentru $\hat{\theta}^2 = \hat{\boldsymbol{\mu}}^\top \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \hat{\boldsymbol{\mu}}$.
  2. Luați media după $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ și deduceți $\mathbb{E}[\hat{\theta}^2] = (T\theta^2 + N)/(T - N - 2)$ (Kan & Zhou (2007)).
  3. Evaluați pentru $N = 9$, $T = 60$, $\theta = 0{,}66/\sqrt{12}$ lunar; raportați $\sqrt{12\,\mathbb{E}[\hat{\theta}^2]}$, rădăcina mediei pătratice anualizate a estimației (nu media ei), și comparați cu o simulare.
  4. Dați estimatorul nedeplasat al lui θ^2 implicat de formulă.

Înapoi Lista exercițiilor

A9 [Propus]: ponderile tangente prin regresie — cerința

- **Model**: A1 [Rezolvat] (algebră matriceală); anexa Capitolului 4 despre Britten-Jones (1999)
- **Cadru**: X este matricea $T \times N$ a randamentelor în exces, cu rîndurile $r_t^\top$; 1_T variabila dependentă (o coloană de 1), 1_N vectorul de normalizare; $\hat{\mu} = X^\top 1_T / T$, $\hat{\Sigma} = X^\top X / T - \hat{\mu}\hat{\mu}^\top$, inversabilă
- **Cerințe**
  1. Arătați că $X^\top X / T = \hat{\Sigma} + \hat{\mu}\hat{\mu}^\top$ și scrieți estimatorul celor mai mici pătrate (OLS, *ordinary least squares*) al regresiei $1 = b^\top r_t + u_t$ (fără termen liber) în funcție de $\hat{\mu}$, $\hat{\Sigma}$.
  2. Aplicați Sherman–Morrison, $(A + uu^\top)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}uu^\top A^{-1}/(1 + u^\top A^{-1}u)$, pentru a arăta că $\hat{b} = \hat{\Sigma}^{-1}\hat{\mu}/(1 + \hat{\theta}^2)$.
  3. Arătați că $\hat{b}/1_N^\top \hat{b}$ sînt ponderile tangente de eșantion cînd $1_N^\top \hat{\Sigma}^{-1}\hat{\mu} > 0$.
  4. Opțional: pentru $N = 3$ scrieți matricea de restricții a ipotezei „tangent $= 1/N$", apoi generalizați.
- **Raportați**: cele trei demonstrații (și matricea de restricții, opțional), în cel mult o pagină

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

B6 [Propus]: testul egalității dintre portofoliul tangent și 1/N — cerința

- **Model**: A9 și B1
- **Date**: nouă sectoare, randamente lunare în exces ianuarie 1999 – iulie 2026 ($T = 331$) și cele două jumătăți, ianuarie 1999 – septembrie 2012 și octombrie 2012 – iulie 2026
- **Testele** pentru H_0: $\mathrm{Rb} = 0$, $\mathrm{R} = [\mathrm{I}_8, \ -1_8]$, 8 restricții
  - Exact: $F = (\mathrm{R}\hat{b})^\top [\mathrm{R}(\mathrm{X}^\top \mathrm{X})^{-1}\mathrm{R}^\top]^{-1}(\mathrm{R}\hat{b})/(8s^2) \sim F(8, T-9)$, $s^2 = \hat{u}^\top \hat{u}/(T-9)$
  - Wald HAC: $W = (\mathrm{R}\hat{b})^\top (\mathrm{R}\hat{V}\mathrm{R}^\top)^{-1}\mathrm{R}\hat{b} \to \chi^2_8$, $\hat{V} = T(\mathrm{X}^\top \mathrm{X})^{-1}\hat{\mathbf{\Omega}}(\mathrm{X}^\top \mathrm{X})^{-1}$, $\hat{\mathbf{\Omega}}$ Newey–West pentru $r_t \hat{u}_t$, Bartlett, $\lfloor 4(T/100)^{2/9} \rfloor$ laguri
- **Cerințe**
  1. Completați un tabel 3×2 cu statistici și valori p (trei eșantioane, două teste); reprezentați coeficienții cu intervalele OLS și HAC.
  2. Simulați 2 000 de eșantioane de $T = 166$ dintr-un model Normal cu $\boldsymbol{\mu} \propto \boldsymbol{\Sigma}1$ (deci H_0 adevărată, $\boldsymbol{\Sigma}$ din a doua jumătate) și raportați rata de respingere a fiecărui test la 5%. Scalați vectorul mediilor astfel încît 1/N să aibă raportul Sharpe lunar observat în a doua jumătate.
- **Raportați**: tabelul 3×2, graficul coeficienților cu intervalele OLS și HAC, mărimea empirică a celor două teste din simulare
- **Interpretare**
  - cînd testele conduc la concluzii diferite, căruia îi acordați încredere?
  - înseamnă nerespingerea că portofoliul tangent este 1/N?

înapoi Lista exercițiilor

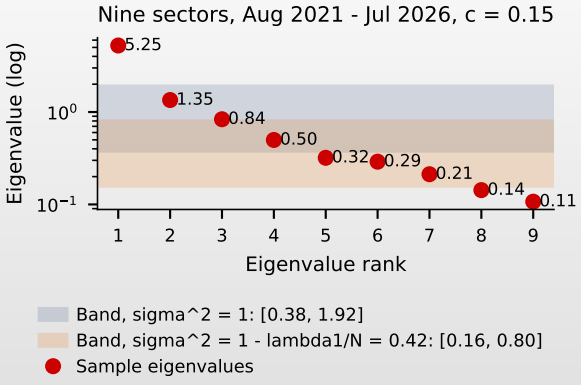
B3 extins [Rezolvat]: valorile proprii ale ultimei ferestre — cerința

- **Întrebare**: cîte valori proprii ale matricei de corelație a sectoarelor se pot distinge de zgomot?
- **Date**: ultima fereastră din B3, august 2021 – iulie 2026, $N = 9$, $T = 60$
- **Cerințe**
  1. Calculați cele nouă valori proprii ale matricei de corelație de eșantion.
  2. Calculați banda Marchenko–Pastur (Valori proprii de zgomot și teste multiple) și numărați valorile proprii de deasupra și de dedesubtul ei.
  3. Repetați cu varianța zgomotului rescalată la $\sigma^2 = 1 - \lambda_1/N$, λ_1 cea mai mare valoare proprie (Laloux et al. (1999)).
- **Raportați**: cele nouă valori proprii, banda Marchenko–Pastur și numărul de valori proprii de deasupra și de dedesubtul ei, în ambele variante
- **Interpretare**: de ce contează pentru GMV mai ales valorile proprii *de sub* bandă?

Înapoi Lista exercițiilor

B3 extins [Rezolvat]: valori proprii și banda de zgomot

- (1) valorile proprii: 5,25; 1,35; 0,84; 0,50; 0,32; 0,29; 0,21; 0,14; 0,11
- (2) $c = 0{,}15$, banda $[0{,}38; 1{,}92]$: 1 deasupra (factorul de piață), 5 dedesubt
- (3) $\sigma^2 = 0{,}42$, banda $[0{,}16; 0{,}80]$: 3 deasupra, 2 dedesubt
- Interpretare: GMV atribuie ponderi mari direcțiilor cu cele mai mici valori proprii (direcțiile de variață standardizată mică în eșantion); dacă acestea sînt subestimate, este subestimat și riscul GMV; contracția le corectează în sus



MFM_ch4_seminar

B7 [Propus]: contracția covarianței pe 16 ETF-uri — cerința

- **Model**: B3 [Rezolvat]
- **Date**: universul combinat (nouă sectoare plus EFA, EEM, TLT, IEF, LQD, HYG, GLD), lunile comune mai 2007 – iulie 2026; fereastră de 60 de luni, în afara eșantionului mai 2012 – iulie 2026 ($T = 171$)
- **Cerințe** (rezultat: un tabel cu rîndurile GMV, GMV-LW, GMV-NL (GMV cu contracție neliniară, cerința 3), 1/N și coloanele volatilitate, turnover, raportul variațelor cu interval)
  1. Volatilitatea în afara eșantionului a GMV, GMV-LW și 1/N; raportul variațelor GMV-LW/GMV cu bootstrap-ul pereche pe blocuri din B3; turnover-urile medii.
  2. δ mediu și numerele de condiționare ale matricei de eșantion și ale celei cu contracție pe ultima fereastră.
  3. Extindere: contracția neliniară (*nonlinear shrinkage*; Ledoit & Wolf (2020); funcția `nl_shrink(X)`), backtest-ul GMV-NL și rapoartele variațelor sale față de GMV și GMV-LW.
- **Interpretare**: este corelația constantă o țintă rezonabilă pentru acțiuni și obligațiuni de stat împreună? Distingeți o diferență semnificativă de o simplă estimație punctuală

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

B8 [Propus]: risk parity cu Bitcoin — cerința

- **Model**: B4 [Rezolvat]; literatură: Petukhina, Trimborn, Härdle & Elendner (2021), Pele et al. (2023)
- **Date**: cele opt ETF-uri multi-active cu și fără Bitcoin (BTC/USD), prețuri aliniate pe zilele comune de tranzacționare (fără weekenduri), randamente de sfîrșit de lună din august 2010; ambele universuri pe **aceleași** luni
- **Cerințe**
  1. Descriptiv, august 2010 – iulie 2026: volatilitatea Bitcoin și cota lui de risc în 1/N cu nouă active.
  2. În afara eșantionului, fereastră de 60 de luni, august 2015 – iulie 2026 ($T = 132$): backtest pentru 1/N, ERC și HRP cu și fără Bitcoin; rapoarte Sharpe, volatilități, drawdown-uri; testul HAC al diferenței „cu Bitcoin" minus „fără Bitcoin" pentru fiecare regulă.
  3. Reprezentați în timp ponderea Bitcoin în ERC și HRP și cota lui de risc în 1/N.
  4. Tratați cele trei teste ca o familie: raportați valorile p brute și ajustate Holm.
- **Raportați**: volatilitatea și cota de risc a lui Bitcoin, tabelul backtest-ului, graficul ponderilor și valorile p brute și Holm
- **Interpretare**
  - vă așteptați ca prima istorică a Bitcoin să persiste?
  - ce efect are alegerea ex post a lui Bitcoin?

Înapoi Lista exercițiilor

B9 [Propus]: HRP față de GMV pe 16 ETF-uri — cerința

- **Model**: B1 [Rezolvat]
- **Date**: universul combinat și backtest-ul din B7 (în afara eșantionului mai 2012 – iulie 2026, $T = 171$)
- **Cerințe**
  1. Raportați raportul Sharpe, volatilitatea și turnover-ul pentru HRP și GMV, brut și net de 50 bp pe unitate de turnover; reprezentați punctele brute și nete.
  2. Testul principal pe randamentele **brute** în exces: H_0: $SR_{\text{HRP}} = SR_{\text{GMV}}$ cu testul HAC și cu bootstrap-ul studentizat (bloc 1), la 5% și 10%; raportați intervalul bootstrap.
  3. Completați un tabel de decizie (test $\times$ nivel).
- **Interpretare**
  - GMV are volatilitatea mai mică, HRP raportul Sharpe mai mare: ce criteriu este potrivit pentru fiecare tip de investitor?
  - ce presupune o comparație la volatilitate egală?

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

Ce firme comparăm în extensia C3?

JPM / BAC	JPMorgan Chase / Bank of America
GS / MS	Goldman Sachs / Morgan Stanley
WFC / C	Wells Fargo / Citigroup
NVDA / AAPL	Nvidia / Apple
MSFT / AMZN	Microsoft / Amazon
GOOGL / GME	Alphabet / GameStop
CSCO / MSTR	Cisco Systems / MicroStrategy

C3 [Propus]: frontiera implementabilă pe datele cursului — întrebarea

- **Întrebare**: se păstrează ierarhia regulilor care țin cont de costuri din Jensen, Kelly, Malamud & Pedersen (2026) (Tabelul 2; studiul de caz din Capitolul 4) pe un univers mic?
- **Un proiect de cercetare**, alternativă la C2; cod de pornire: `jkmp_replication` din Quantlet-ul `MFM_ch4_implementable_frontier`
- **Notație**
  - π_t: ponderile riscante; tranzacția $\pi_t - g_t\pi_{t-1}$, cu g_t drift-ul ponderilor din luna trecută; costul $\frac{W_t}{2}(\pi_t - g_t\pi_{t-1})^\top \mathbf{\Lambda}(\pi_t - g_t\pi_{t-1})$, $\Lambda_i = 0{,}2/V_i$, V_i volumul zilnic mediu în dolari pe 6 luni
  - Utilitatea lunară: randamentul net în exces $-\frac{\gamma}{2}\times$ varianța lui, $\gamma = 10$; regula din articol parcurge prin tranzacții doar o parte (m) din distanța pînă la un portofoliu-țintă învățat din semnale
- **Date**: JPM (JPMorgan Chase), BAC (Bank of America), C (Citigroup), GS (Goldman Sachs), MS (Morgan Stanley), WFC (Wells Fargo), NVDA (NVIDIA), AAPL (Apple), MSFT (Microsoft), AMZN (Amazon), GOOGL (Alphabet, acțiuni de clasă A), GME (GameStop), CSCO (Cisco Systems), MSTR (Strategy, fosta MicroStrategy) și cele nouă ETF-uri sectoriale, prețuri aliniate pe zilele comune (din 19 august 2004); titlul de stat din pregătire
- Semnalele la fiecare sfîrșit de lună, ordonate în $[0, 1]$: $\ln(P_t/P_{t-1})$, $\ln(P_{t-1}/P_{t-6})$, $\ln(P_{t-1}/P_{t-12})$, volatilitatea pe un an a randamentelor zilnice, logaritmul volumului în dolari pe 6 luni

Înapoi Lista exercițiilor

C3 [Propus]: frontiera implementabilă pe datele cursului — cerințe

- **Calendar**: semnalele și covariațnele folosesc doar date trecute; ferestrele de covarianță cresc din august 2004 pînă ajung la 10 ani (august 2014); hiperparametrii se aleg anual doar pe anii de validare de după 2011; primele ponderi de test la sfîrșitul lui ianuarie 2014, randamentele de test februarie 2014 – august 2026
- **Cerințe**
  1. Întîi un caz de bază: construiți Portfolio-ML cu alegerea fixă de pornire $\lambda = 1$, $p = 64$, $\eta = e^{-3}$ (cerința următoare calibrează grila); verificați pas cu pas costul unei luni (W_t, vectorul tranzacțiilor, $\mathbf{\Lambda}$).
  2. Calibrați pe grila din articol (Tabelul 1) și raportați, pentru Portfolio-ML, 1/N, variantă minimă, Markowitz-ML și Static-ML: randament, volatilitate, Sharpe brut și net, cost, utilitate, turnover, levier (formatul Tabelului 2).
  3. Probabilitatea unei utilități mai mari, $\Phi(\bar{d}/(s_d/\sqrt{T}))$ pentru diferențele lunare de utilitate d_t: aproximare Normală i.i.d., condiționată de procedura estimată (nu o probabilitate a posteriori exactă); adăugați un interval HAC de 95% pentru $\bar{d}$.
  4. Extindere: avere de 1, 10, 100 de miliarde de dolari $\times\ \gamma \in \{1, 5, 10, 20, 100\}$; reprezentați frontierele implementabile, cu costurile lui 1/N calculate la fiecare nivel de avere.
- Utilitatea lunară: $u_t = r_t^{net} - \frac{\gamma}{\mathbf{2}} \frac{T}{T-\mathbf{1}} (r_t^{net} - \bar{r}^{net})^{\mathbf{2}}$, cu media întregii perioade evaluate, astfel încît media lui u_t este utilitatea raportată (varianța cu $T - 1$); $d_t = u_{\mathbf{1}t} - u_{\mathbf{2}t}$. Înmulțirea tuturor fluxurilor cu 12 nu schimbă probabilitatea afișată.
- **Raportați**: două tabele, figura frontierelor, un folder Quantlet; distingeți elementele preluate din articol de simplificările introduse
- **Interpretare**
  - dacă Portfolio-ML are un raport Sharpe net mai mic decît 1/N, dar o utilitate mai mare, ce criteriu se potrivește investitorului cu $\gamma = 10$?
  - pentru ce γ s-ar inversa ierarhia?

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

Acronime folosite în acest material (1/3)

- **AAPL**: Apple Inc. (Nasdaq ticker) — *Apple Inc., simbolul bursier Nasdaq*
- **AI**: Artificial Intelligence — *inteligență artificială*
- **AMZN**: Amazon.com, Inc. (Nasdaq ticker) — *Amazon.com, Inc. (simbolul bursier Nasdaq)*
- **BAC**: Bank of America Corporation (NYSE ticker) — *Bank of America Corporation (simbolul bursier NYSE)*
- **BET**: Bucharest Exchange Trading (index) — *indicele de referință al Bursei de Valori București*
- **BET-TR**: BET Total Return (index) — *indicele BET cu dividendele reinvestite*
- **BNR**: Banca Națională a României
- **BVB**: Bursa de Valori București
- **CSCO**: Cisco Systems, Inc. (Nasdaq ticker) — *Cisco Systems, Inc. (simbolul bursier Nasdaq)*
- **ERC**: Equal Risk Contribution portfolio — *portofoliul cu contribuții egale la risc*
- **ETF**: Exchange-Traded Fund — *fond tranzacționat la bursă*
- **GLS**: Generalised Least Squares — *metoda celor mai mici pătrate generalizate*
- **GME**: GameStop Corp. (NYSE ticker) — *GameStop Corp. (simbolul bursier NYSE)*
- **GMV**: Global Minimum-Variance portfolio — *portofoliul de variață minimă globală*

Acronime folosite în acest material (2/3)

- **GMV-LW**: Global Minimum-Variance portfolio with Ledoit–Wolf covariance — *portofoliul de variață minimă globală cu covarianța Ledoit–Wolf*
- **GMV-NL**: Global Minimum-Variance portfolio with Nonlinear shrinkage covariance — *portofoliul de variață minimă globală cu covarianța estimată prin shrinkage neliniar*
- **GOOGL**: Alphabet Inc., Class A shares (Nasdaq ticker) — *Alphabet Inc., acțiuni de clasă A (simbolul bursier Nasdaq)*
- **GS**: The Goldman Sachs Group, Inc. (NYSE ticker) — *The Goldman Sachs Group, Inc. (simbolul bursier NYSE)*
- **HAC**: Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent (standard errors) — *erori standard robuste la heteroscedasticitate și autocorelație*
- **HRP**: Hierarchical Risk Parity — *paritatea ierarhică a riscului*
- **HYG**: iShares iBoxx High Yield Corporate Bond ETF — *ETF de obligațiuni corporative americane cu randament ridicat, sub rating investițional*
- **IEF**: iShares 7–10 Year Treasury Bond ETF — *ETF de obligațiuni de stat americane cu scadența 7–10 ani*
- **JPM**: JPMorgan Chase & Co. (NYSE ticker) — *JPMorgan Chase & Co. (simbolul bursier NYSE)*

Acronime folosite în acest material (3/3)

- **LQD**: iShares iBoxx Investment Grade Corporate Bond ETF — *ETF de obligațiuni corporative americane cu rating investițional*
- **MS**: Morgan Stanley (NYSE ticker) — *Morgan Stanley (simbolul bursier NYSE)*
- **MSFT**: Microsoft Corporation (Nasdaq ticker) — *Microsoft Corporation (simbolul bursier Nasdaq)*
- **MSTR**: Strategy Inc., formerly MicroStrategy (Nasdaq ticker) — *Strategy Inc., fosta MicroStrategy (simbolul bursier Nasdaq)*
- **MV**: Mean–Variance tangency portfolio estimated from sample moments — *portofoliul tangent medie–varianță estimat din momentele de eșantion*
- **MV-LO**: Mean–Variance tangency portfolio, Long-Only — *portofoliul tangent medie–varianță, doar poziții long*
- **NVDA**: NVIDIA Corporation (Nasdaq ticker) — *NVIDIA Corporation, simbolul bursier Nasdaq*
- **OLS**: Ordinary Least Squares — *metoda celor mai mici pătrate*
- **OOS**: Out-Of-Sample — *în afara eșantionului*
- **SE**: Standard Error — *eroare standard*
- **SUA**: Statele Unite ale Americii
- **WFC**: Wells Fargo & Company (NYSE ticker) — *Wells Fargo & Company (simbolul bursier NYSE)*

Bibliografie (1/3)

- Black, F., Litterman, R. (1992). Global portfolio optimization. *Financial Analysts Journal*, 48(5), 28–43.
- Britten-Jones, M. (1999). The sampling error in estimates of mean-variance efficient portfolio weights. *Journal of Finance*, 54(2), 655–671.
- DeMiguel, V., Garlappi, L., Uppal, R. (2009). Optimal versus naive diversification: how inefficient is the 1/N portfolio strategy?. *Review of Financial Studies*, 22(5), 1915–1953.
- Franke, J., Härdle, W.K., Hafner, C.M. (2019). Statistics of Financial Markets: An Introduction, ed. a 5-a. Springer.
- He, G., Litterman, R. (2002). The intuition behind Black-Litterman model portfolios. SSRN Working Paper 334304.
- Jensen, T.I., Kelly, B., Malamud, S., Pedersen, L.H. (2026). Machine learning and the implementable efficient frontier. *Review of Financial Studies*, 39(10), 3035–3078.
- Jobson, J.D., Korkie, B.M. (1981). Performance hypothesis testing with the Sharpe and Treynor measures. *Journal of Finance*, 36(4), 889–908.

Bibliografie (2/3)

- Kan, R., Zhou, G. (2007). Optimal portfolio choice with parameter uncertainty. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 42(3), 621–656.
- Künsch, H.R. (1989). The jackknife and the bootstrap for general stationary observations. *Annals of Statistics*, 17(3), 1217–1241.
- Laloux, L., Cizeau, P., Bouchaud, J.-P., Potters, M. (1999). Noise dressing of financial correlation matrices. *Physical Review Letters*, 83(7), 1467–1470.
- Ledoit, O., Wolf, M. (2004). Honey, I shrunk the sample covariance matrix. *Journal of Portfolio Management*, 30(4), 110–119.
- Ledoit, O., Wolf, M. (2008). Robust performance hypothesis testing with the Sharpe ratio. *Journal of Empirical Finance*, 15(5), 850–859.
- Ledoit, O., Wolf, M. (2017). Nonlinear shrinkage of the covariance matrix for portfolio selection: Markowitz meets Goldilocks. *Review of Financial Studies*, 30(12), 4349–4388.
- Ledoit, O., Wolf, M. (2020). Analytical nonlinear shrinkage of large-dimensional covariance matrices. *Annals of Statistics*, 48(5), 3043–3065.

Bibliografie (3/3)

- López de Prado, M. (2016). Building diversified portfolios that outperform out of sample. *Journal of Portfolio Management*, 42(4), 59–69.
- Maillard, S., Roncalli, T., Teïletche, J. (2010). The properties of equally weighted risk contribution portfolios. *Journal of Portfolio Management*, 36(4), 60–70.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7(1), 77–91.
- Pele, D.T., Wesselhöfft, N., Härdle, W.K., Kolossiatis, M., Yatracos, Y.G. (2023). Are cryptos becoming alternative assets?. *The European Journal of Finance*, 29(10), 1064–1105.
- Petukhina, A., Trimborn, S., Härdle, W.K., Elendner, H. (2021). Investing with cryptocurrencies – evaluating their potential for portfolio allocation strategies. *Quantitative Finance*, 21(11), 1825–1853.
- Theil, H., Goldberger, A.S. (1961). On pure and mixed statistical estimation in economics. *International Economic Review*, 2(1), 65–78.
- Date: Kenneth R. French Data Library; cursurile de referință BNR, www.bnr.ro.