







Modelarea piețelor financiare

Seminarul 5: Volatilitate condiționată — modele GARCH



Daniel Traian PELE
Drd. Antoaneta Amza, antoaneta.amza@csie.ase.ro

Academia de Studii Economice din București
IDA Institute Digital Assets
Blockchain Research Center
AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance
Academia Română, Institutul de Prognoză Economică
MSCA Digital Finance

Putem avea încredere în prognoza volatilității?

- Întrebarea seminarului
  - **ne putem baza pe volatilitatea estimată, pe incertitudinea ei și pe prognozele ei?**
- Livrabile
  - tabelul și prognozele A1 la seminar; A2 acasă; A3–A6 dacă sînt alese ca extensii
  - cîte o figură și un tabel pentru fiecare exercițiu B
  - codul corectat din C1 (un răspuns generat de inteligența artificială, AI)
  - o frază de interpretare pentru fiecare exercițiu
- Notebook-ul de azi: capitol5_notebook_seminar.ipynb (Colab)
  - fiecare cerință indică secțiunea din notebook
- Exercițiile, tipurile și ordinea lor: harta exercițiilor
- Seminar: prof. Daniel Traian Pele, danpele@ase.ro; drd. Antoaneta Amza, antoaneta.amza@csie.ase.ro

Harta exercițiilor

Exercițiu	Întrebare	Tip	Model
A1	cum se actualizează dispersia și care este riscul pe 5 zile?	Rezolvat	–
B1	este GARCH-t adecvat pentru S&P 500 și trec reziduurile testele de diagnostic?	Rezolvat	–
B2	cresc știrile proaste mai mult volatilitatea S&P 500?	Rezolvat	–
B3	aceeași întrebare pentru BET	Propus	B2
C1	ce este greșit într-un răspuns AI?	Propus	A1, B1
După cursul 5, acasă: metoda delta, bootstrap-ul parametric și funcțiile de pierdere ale prognozelor			
A2	cît de precise sînt volatilitatea de termen lung și timpul de înjumătățire?	Rezolvat	–
B4	este $\alpha + \beta = 1$? un bootstrap și un test la frontieră	Rezolvat	–
B5	există un model cu prognoze mai bune decît GARCH-t?	Rezolvat	–
Temă	un exercițiu de transfer: B6, B7 sau B8	Propus	B1, B4, B5
Pachete de extensie	A3, A4, A5, A6, B5 extins, C2, C3 (opțional)	Rezolvat sau Propus	indicat la fiecare cerință

- **[Rezolvat]**: rezolvarea completă în slide-uri și în notebook, un model de urmat; **[Propus]**: îl rezolvați dumneavoastră, rezolvarea se discută la seminar
- Partea A: derivări pe hîrtie; Partea B: estimare și inferență pe date reale, fiecare cu o întrebare de interpretare; Partea C: întrebări deschise și critica unui răspuns AI

În ce unități sînt datele?

- O scădere simplă a prețului de 12 procente înseamnă un raport al prețurilor de 0,88. Randamentul logaritmic corespunzător este aproximativ minus 12,8 procente. Aici folosim randamente logaritmice exprimate procentual, nu variații procentuale simple.
- VIX (Cboe Volatility Index) este o cotație procentuală anualizată a volatilității implicite pe 30 de zile pentru S&P 500 (*Standard & Poor's*). Pătratul ei nu este încă o dispersie zilnică: exercițiul precizează conversia folosită.
- BTC/USD înseamnă prețul Bitcoin în dolari americani. BET (Bucharest Exchange Trading) este indicele de referință al Bursei de Valori București (BVB); sărbătorile din Statele Unite ale Americii (SUA) și cele din România pot fi diferite.
- Anualizarea folosește numărul observat de randamente pe an, separat pentru fiecare serie. Distingem întotdeauna dispersia zilnică, dispersia anuală și volatilitatea anuală.

Datele folosite

Serie	Preț folosit	Eșantion	Calendar, filtru	Randamente
S&P 500	închidere	2000-01-03 – 2026-09-18	zile lucrătoare; 0 zile fără tranzacționare eliminate	6 717
BET	închidere	2000-01-05 – 2026-09-18	zile lucrătoare; 0 zile fără tranzacționare eliminate	6 670
Bitcoin	închidere (BTC/USD)	2014-09-17 – 2026-09-18	toate zilele săptămînii, fără filtru	4 384
VIX	închidere	doar C3	zile lucrătoare	–
11 acțiuni SUA	închidere ajustată	doar C3, 1995–2019	aliniate cu VIX pe zilele comune	–

- Prețurile zilnice din datele cursului, cîte o serie pe activ (cîmpul folosit: close / adjusted close); randamente $r_t = 100\,(\ln P_t - \ln P_{t-1})$ în %, fiecare serie pe calendarul ei
- Zile fără tranzacționare, regulă euristică: o zi lucrătoare care repetă închiderea precedentă și nu arată tranzacții (volum raportat zero, open = high = low = close sau o copie a rîndului precedent); un volum lipsă nu contează ca zero
- Motivul fiecărei excluderi se păstrează și se verifică în calendarul bursei; o închidere neschimbată reală (randament zero) rămîne; după filtru nu rămîn valori lipsă
- Anualizare cu frecvența observată A (randamente pe an): 251,5 (S&P 500), 249,8 (BET), 365,3 (Bitcoin) randamente pe an

Pregătire: rulați și verificați

```
# notebook section "Data" defines
# load_close(name) and pct_returns(name)
r = pct_returns('sp500')    # 100 * diff(log P)
print(len(r), r.index[0], r.index[-1])
print(r.head(3).round(4))

from arch import arch_model
res = arch_model(r, p=1, q=1,
                 dist='t').fit(disp='off')
print(res.params)
```

- Rezultat așteptat: 6 717 randamente, 2000-01-04 – 2026-09-18
- Primele trei randamente (%): −3,9099, 0,1920, 0,0955
- GARCH-t (heteroscedasticitate condiționată autoregresivă generalizată, *Generalised AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity*, cu inovații Student-t): $\hat{\alpha} = 0{,}1225$, $\hat{\beta} = 0{,}8723$, $\hat{\nu} = 6{,}25$
- Dacă un număr sau o valoare diferă, opriți-vă și verificați fișierul, cîmpul, datele și filtrul
- Pachete: `numpy`, `pandas`, `scipy`, `statsmodels`, `matplotlib`, `arch`

Randamente și dispersia condiționată

- **Log-randamentul zilnic** în %, din prețurile de închidere P_t

$$r_t = 100\,(\ln P_t - \ln P_{t-1})$$

- **Descompunerea**: o medie constantă plus un șoc a cărui mărime variază în timp; i.i.d. înseamnă independent și identic distribuit

$$r_t = \mu + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t = \sigma_t z_t, \qquad z_t \text{ i.i.d.}, \ \mathbb{E}z_t = 0, \ \mathrm{Var}z_t = 1$$

  - μ: randamentul mediu; ε_t: șocul; z_t: inovația (Normală sau Student-t, scalată la dispersia 1)

- **Dispersia condiționată**: dispersia randamentului de azi, dată fiind informația de ieri

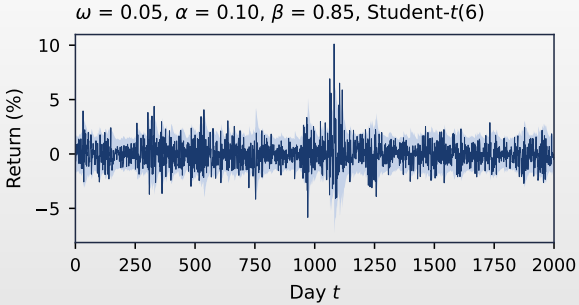
$$\sigma_t^2 = \mathrm{Var}(r_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{E}\left[\varepsilon_t^2 \mid \mathcal{F}_{t-1}\right]$$

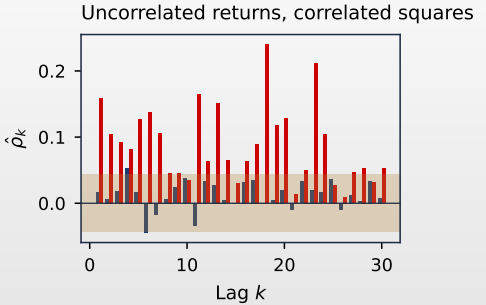
  - $\mathcal{F}_{t-1}$: toate prețurile pînă la închiderea zilei $t-1$; σ_t este cunoscută cu o zi înainte

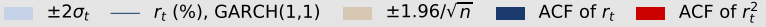
Cum recunoaștem gruparea volatilității?

- Gruparea volatilității (*volatility clustering*) înseamnă că mișcările mari tind să fie urmate de mișcări mari, iar cele mici de mișcări mici. Semnul poate rămîne greu de prezis, chiar dacă mărimea mișcării următoare este parțial previzibilă.
- **Ce credeți**: pe traiectoria simulată de pe slide-ul următor, $\hat{\rho}_1 = 0{,}016$ pentru r_t și $0{,}158$ pentru r_t^2; contrazice această dependență eficiența slabă a pieței?
  - **Răspuns**: gruparea volatilității este compatibilă cu un model cu șocuri de tip diferență de martingal, $\mathbb{E}[\varepsilon_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = 0$; singur nu infirmă eficiența slabă
  - În GARCH, previzibilă este dispersia condiționată σ_{t+1}^2, nu media

Gruparea volatilității pe o traiectorie simulată







- Stînga: 2 000 de zile simulate; perioadele calme și cele agitate alternează, iar $\pm 2\sigma_t$ le urmărește (5,9% din zile cad în afară)
- Dreapta: autocorelația de selecție $\hat{\rho}_k$ a lui r_t și a lui r_t^2 la lagul k (Capitolul 1)
  - $\hat{\rho}_1 = 0{,}016$ pentru r_t, în banda $\pm 1{,}96/\sqrt{n}$; $\hat{\rho}_1 = 0{,}158$ pentru r_t^2: mărimea mișcărilor este previzibilă
  - O autocorelație mică a lui r_t nu exclude o predictibilitate neliniară

ARCH și GARCH

- **ARCH(1)** Engle (1982): dispersia de azi reacționează la pătratul șocului de ieri

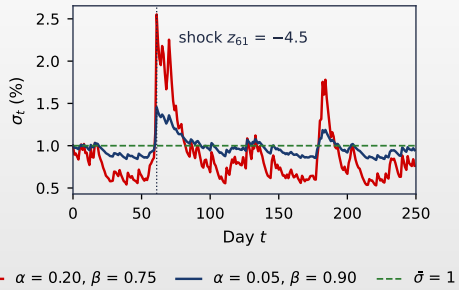
$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2$$

- **GARCH(1,1)** Bollerslev (1986) adaugă memoria dispersiei de ieri

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

  - $\omega > 0$: nivelul; $\alpha \geq 0$: reacția la știri; $\beta \geq 0$: memoria
  - restricțiile asigură $\sigma_t^2 > 0$

- Graficul: aceleași șocuri, același $\alpha + \beta = 0{,}95$
  - α mare: volatilitate în salturi, maximul 2,55% după $z = -4{,}5$
  - β mare: volatilitate netedă, maximul 1,46%



Persistență, dispersie de termen lung și timp de înjumătățire

- **Persistența** $p = \alpha + \beta$; luînd media ambelor părți, $\mathbb{E}\sigma_t^2 = \omega + p\,\mathbb{E}\sigma_{t-1}^2$, deci pentru $p < 1$

$$\bar{\sigma}^2 = \mathbb{E}\sigma_t^2 = \frac{\omega}{1-p}$$

- **Prognozele** revin la $\bar{\sigma}^2$; distanța scade cu factorul p în fiecare zi

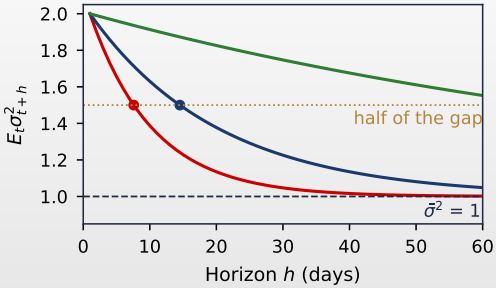
$$\mathbb{E}_t\sigma_{t+h}^2 = \bar{\sigma}^2 + p^{h-1}\left(\sigma_{t+1}^2 - \bar{\sigma}^2\right)$$

  - $\mathbb{E}_t = \mathbb{E}[\cdot \mid \mathcal{F}_t]$; h: orizontul în zile; σ_{t+1}^2 cunoscută la închiderea zilei t

- **Timpul de înjumătățire**: zilele pînă dispare jumătate din distanță, $p^h = 1/2$

$$h_{1/2} = \frac{\ln 0{,}5}{\ln p}$$

  - $p = 0{,}95$: $-0{,}693/(-0{,}0513) = 13{,}5$ zile; $h_{1/2} \to \infty$ cînd $p \to 1$



$p = 0.90$, $h_{1/2} = 6.6$ days
$p = 0.95$, $h_{1/2} = 13.5$ days
$p = 0.99$, $h_{1/2} = 69.0$ days

Unități și dispersia pe mai multe zile

- Randamente în %, deci dispersii în $\%^2$; A: numărul de randamente pe an

$$\text{volatilitatea anuală} = \sqrt{A\,\bar{\sigma}^2}$$

  - rădăcina unei dispersii, niciodată $A\,\bar{\sigma}^2$; $\bar{\sigma}^2 = 1$ și $A = 252$ dau $\sqrt{252} = 15{,}9\%$ pe an
- **Dispersia randamentului pe H zile**: șocurile sînt necorelate (o diferență de martingal, $\mathbb{E}_t \varepsilon_{t+h} = 0$), deci dispersiile se adună

$$V_H = \mathrm{Var}_t\Big(\sum_{h=1}^{H} \varepsilon_{t+h}\Big) = \sum_{h=1}^{H} \mathbb{E}_t \sigma^2_{t+h}$$

  - regula rădăcinii pătrate a timpului: $V_H \approx H\sigma^2_{t+1}$; este exactă doar dacă $\sigma^2_{t+1} = \bar{\sigma}^2$ (A1)

Testarea efectelor ARCH

- H_0: fără efecte ARCH, dispersie condiționată constantă
- **Testul Lagrange Multiplier (LM)** Engle (1982): regresia pătratului randamentului centrat pe cele q laguri ale sale

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = c_0 + c_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \cdots + c_q \hat{\varepsilon}_{t-q}^2 + u_t, \quad LM = nR^2$$

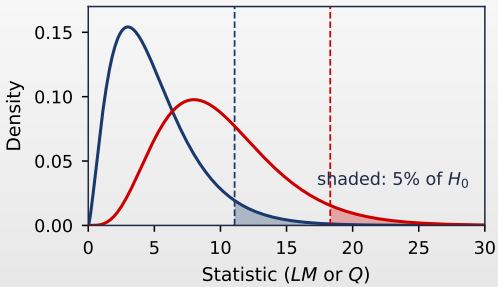
  - $\hat{\varepsilon}_t = r_t - \bar{r}$; n: numărul de observații; R^2: coeficientul de determinare; $LM \sim \chi^2_q$ sub H_0

- **Ljung–Box** pe r_t^2: mărimea comună a m autocorelații

$$Q(m) = n(n+2) \sum_{k=1}^{m} \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k}$$

  - $\hat{\rho}_k$: autocorelația lui r_t^2 la lagul k; $Q(m) \sim \chi^2_m$ sub H_0

- Respingem dacă statistica depășește valoarea critică la 5% (aria hașurată): 11,07 pentru $q = 5$, 18,31 pentru $m = 10$
  - Legile χ^2 pentru r_t^2 cer $\mathbb{E} r_t^4 < \infty$
  - Pe $\hat{z}_t^2$ (după GARCH) cer $\mathbb{E} z_t^4 < \infty$ și o corecție pentru parametrii estimați



Estimarea GARCH prin verosimilitate maximă

- Estimarea prin verosimilitate maximă (*Maximum Likelihood Estimation*, MLE): calculăm recursiv $\sigma_t^2(\theta)$, apoi alegem θ care maximizează log-verosimilitatea

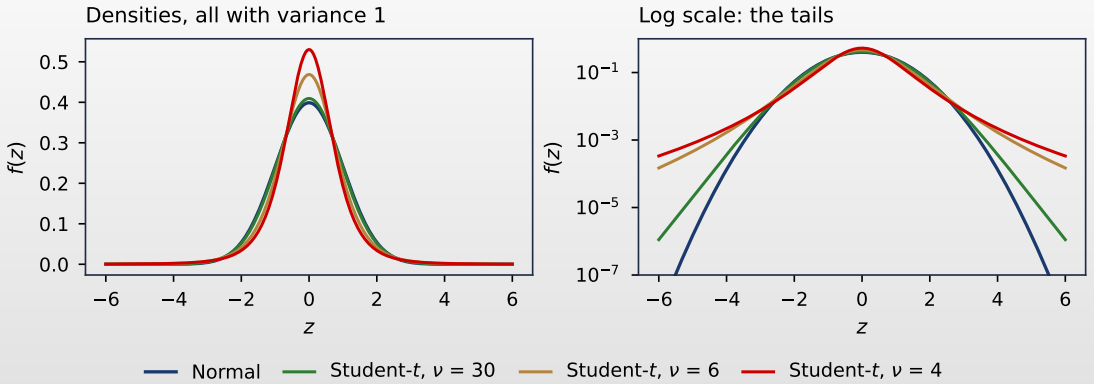
$$\ell(\theta) = \sum_{t=1}^{n} \left[\ln f\left(\frac{\varepsilon_t}{\sigma_t}\right) - \ln \sigma_t \right], \qquad \hat{\theta} = \arg\max_{\theta} \ell(\theta)$$

  - $\theta = (\mu, \omega, \alpha, \beta, \nu)$: toți parametrii; $\varepsilon_t = r_t - \mu$; f: densitatea lui z_t
  - $-\ln \sigma_t$: jacobianul transformării $z_t = \varepsilon_t / \sigma_t$
- z_t Normal: $\ln f(z) = -\frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}z^2$; Student-t cu $\nu > 2$ grade de libertate, scalată la dispersia 1

$$f(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\pi(\nu-2)}} \left(1 + \frac{z^2}{\nu-2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

  - Γ: funcția gamma; ν mic: cozi groase; $\nu \to \infty$: distribuția Normală; $\mathbb{E}z_t^4$ este finit doar dacă $\nu > 4$

Inovații Student-t într-un grafic



- Toate cele patru densități au media 0 și dispersia 1; un ν mai mic pune mai multă masă în centru și în cozi
- Probabilitatea unei mișcări de peste 4 abateri standard, $P(|z_t| > 4)$: Normală 0,0063%, $\nu = 30$: 0,026%, $\nu = 6$: 0,27%, $\nu = 4$: 0,48%

Cvasi-verosimilitate maximă și erori standard robuste

- Dacă ecuația lui σ_t^2 este corect specificată, estimatorul care maximizează verosimilitatea Normală rămîne consistent chiar cu inovații care nu sînt Normale: estimatorul de cvasi-verosimilitate maximă Gaussiană (*Quasi-Maximum Likelihood Estimator*, QMLE)
- Cele două matrice ale verosimilității, cu ℓ_t contribuția zilei t

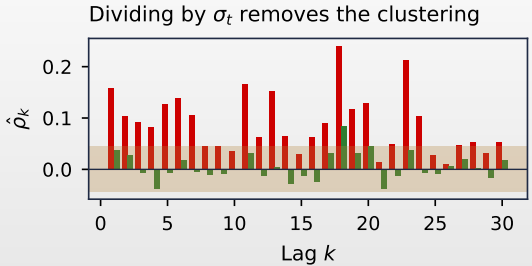
$$\mathrm{A} = -\frac{1}{n}\sum_t \frac{\partial^2 \ell_t}{\partial\theta\,\partial\theta^\top}, \qquad \mathrm{B} = \frac{1}{n}\sum_t \mathrm{s}_t\mathrm{s}_t^\top, \quad \mathrm{s}_t = \frac{\partial \ell_t}{\partial\theta}$$

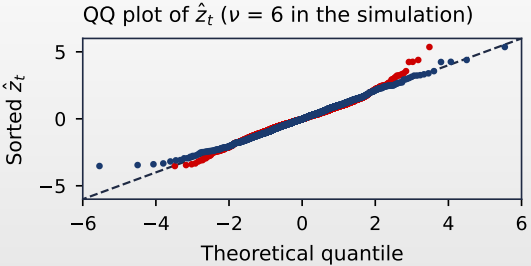
  - A: curbura medie (minus hessiana); s_t: scorul; B: dispersia scorului
- Covarianța robustă (sandwich) Bollerslev & Wooldridge (1992), față de cea clasică

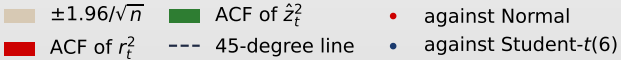
$$\widehat{\mathrm{Var}}(\hat\theta) = \frac{1}{n}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}\mathrm{A}^{-1} \quad \text{față de} \quad \frac{1}{n}\mathrm{A}^{-1}$$

  - dacă f este densitatea adevărată, A = B și cele două coincid
  - raportul erorii standard (e.s.) robuste / clasice peste 1: cozi mai groase decît cele presupuse
  - statistica t a unui parametru: estimarea / e.s. robustă

Verificarea modelului: reziduurile standardizate







- **Reziduul standardizat** $\hat{z}_t = \hat{\varepsilon}_t / \hat{\sigma}_t$: i.i.d. cu media 0 și dispersia 1 dacă modelul este corect
  - Ljung–Box pe $\hat{z}_t$: media; pe $\hat{z}_t^2$ și LM: dispersia (stînga: $\hat{\rho}_1$ scade de la 0,158 la 0,038)
  - graficul cuantilă–cuantilă (*quantile–quantile*, QQ) al lui $\hat{z}_t$ față de f estimată: cozile (dreapta: formă de S față de distribuția Normală)

Testul de asimetrie

- **Testul de asimetrie** Engle & Ng (1993): după estimarea modelului, mai depinde $\hat{z}_t^2$ de semnul șocului de ieri?

$$\hat{z}_t^2 = b_0 + b_1 S_{t-1}^- + b_2 S_{t-1}^- \hat{\varepsilon}_{t-1} + b_3 S_{t-1}^+ \hat{\varepsilon}_{t-1} + u_t$$

  - $S_{t-1}^- = 1(\hat{\varepsilon}_{t-1} < 0)$, cu $1(\cdot)$ indicatorul (1 dacă este adevărat, 0 altfel); $S_{t-1}^+ = 1 - S_{t-1}^-$; u_t: eroarea regresiei
  - b_1: asimetria de semn (o zi negativă crește singură $\hat{z}_t^2$)
  - b_2, b_3: asimetria de mărime a șocurilor negative și pozitive (panta în $\hat{\varepsilon}_{t-1}$ pe fiecare parte)
- Fiecare pantă: statistica t $\hat{b}_j / \widehat{\text{e.s.}}(\hat{b}_j)$, comparată cu $\pm 1{,}96$
- Testul comun pentru $b_1 = b_2 = b_3 = 0$: $nR^2 \sim \chi_3^2$ sub H_0 (fără asimetrie rămasă), valoarea critică la 5%: 7,81

Modele asimetrice: GJR și EGARCH

- Volatilitate asimetrică (faptul stilizat 9, Capitolul 1): știrile proaste cresc volatilitatea mai mult decît știrile bune de aceeași mărime
  - mecanisme posibile: efectul de levier (*leverage effect*: un preț în scădere crește raportul datorii/capital propriu) și feedback-ul volatilității
- **Glosten–Jagannathan–Runkle (GJR)** Glosten, Jagannathan & Runkle (1993): șocurile negative primesc o pantă suplimentară γ

$$\sigma_t^2 = \omega + (\alpha + \gamma I_{t-1})\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2, \qquad I_{t-1} = 1(\varepsilon_{t-1} < 0)$$

  - panta α pentru știrile bune, $\alpha + \gamma$ pentru cele proaste; $\gamma > 0$: știrile proaste contează mai mult; $\gamma = 0$: GARCH
  - z_t simetric: $\mathbb{E}[z_t^2 1(z_t < 0)] = 1/2$, deci persistența este $p = \alpha + \gamma/2 + \beta$
- **Exponential GARCH (EGARCH)** (folosit în B5): logaritmul dispersiei, deci nu sînt necesare restricții de semn

$$\ln \sigma_t^2 = \omega + \alpha\big(|z_{t-1}| - \mathbb{E}|z_{t-1}|\big) + \gamma z_{t-1} + \beta \ln \sigma_{t-1}^2$$

  - α: efectul mărimii șocului; $\gamma < 0$: un z_{t-1} negativ crește dispersia mai mult

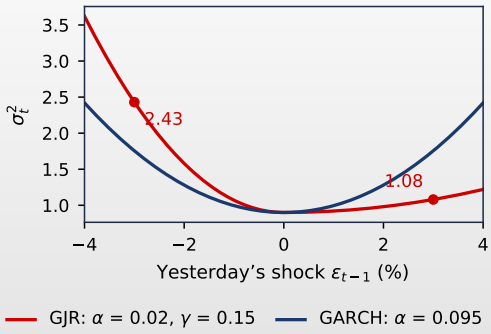
Curba de impact a știrilor (NIC)

- **Curba de impact a știrilor** (*News Impact Curve*, NIC) Engle & Ng (1993): dispersia de mîine ca funcție de șocul de azi, cu σ^2_{t-1} fixată

$$NIC(\varepsilon) = \omega + (\alpha + \gamma\, 1(\varepsilon < 0))\, \varepsilon^2 + \beta \bar{\sigma}^2_s$$

  - $\bar{\sigma}^2_s$: un nivel fixat, de ex. dispersia de selecție
  - parabolă simetrică la GARCH, mai abruptă în stînga la GJR

- Exemplu: $\omega = 0{,}02$, $\alpha = 0{,}02$, $\gamma = 0{,}15$, $\beta = 0{,}88$, $\bar{\sigma}^2_s = 1$
  - $\varepsilon = -3$: $0{,}02 + 0{,}17 \times 9 + 0{,}88 = 2{,}43$
  - $\varepsilon = +3$: $0{,}02 + 0{,}02 \times 9 + 0{,}88 = 1{,}08$
  - GARCH cu aceeași persistență ($\alpha = 0{,}095$): 1,755 pentru ambele semne



Testul raportului de verosimilitate

- Modele imbricate: GARCH este GJR cu $\gamma = 0$; statistica Likelihood Ratio (LR) compară cele două maxime ale verosimilității

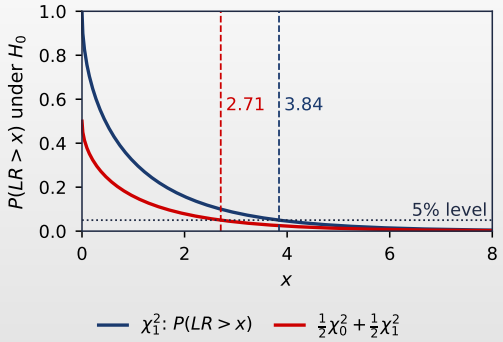
$$LR = 2\left(\ell_{\mathbf{1}} - \ell_{\mathbf{0}}\right) \geq 0$$

  - $\ell_{\mathbf{1}}$, $\ell_{\mathbf{0}}$: log-verosimilitățile maxime ale modelului mai mare (GJR) și ale celui mai mic (GARCH)
  - $LR \sim \chi^{\mathbf{2}}_{\mathbf{1}}$ sub $H_{\mathbf{0}}$ dacă densitatea este corectă și ceilalți parametri sînt interiori: valori critice 3,84 (5%), 6,63 (1%)

- **Frontiera**: dacă $H_{\mathbf{0}}$ pune un parametru la limita lui (de ex. $\alpha = 0$ cu $\alpha \geq 0$ în ARCH(1)), în jumătate din cazuri $LR = 0$ Andrews (2001)

$$LR \sim \tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\chi^{\mathbf{2}}_{\mathbf{0}} + \tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\chi^{\mathbf{2}}_{\mathbf{1}}, \qquad \text{valoarea critică la 5\% 2,71}$$

  - $\chi^{\mathbf{2}}_{\mathbf{0}}$: o masă punctuală în 0; graficul arată cele două probabilități din coadă



Criterii informaționale

- Akaike Information Criterion (AIC) și Bayesian Information Criterion (BIC): adecvarea penalizată cu numărul de parametri (Capitolul 2); mai mic este mai bun

$$\text{AIC} = -2\ell + 2k, \qquad \text{BIC} = -2\ell + k \ln n$$

  - ℓ: log-verosimilitatea maximă; k: numărul de parametri; n: numărul de observații
  - BIC penalizează mai mult de îndată ce $\ln n > 2$, adică $n \geq 8$
- Legătura cu LR, un parametru în plus: $\Delta\text{AIC} = \text{AIC}_1 - \text{AIC}_0 = 2 - LR$
  - AIC preferă modelul mai mare cînd $LR > 2$, BIC cînd $LR > \ln n$, testul LR la 5% cînd $LR > 3{,}84$
  - cu $n \approx 6\,700$ de zile, $\ln n = 8{,}8$: BIC este cel mai strict dintre cele trei praguri
- Detalii: Capitolul 5, secțiunea „Asimetrie și alegerea modelului”

A1 [Rezolvat]: recursia dispersiei — cerința (1/2)

- **Întrebarea**: cum transformă GARCH(1,1) patru șocuri în patru dispersii zilnice?
- **Date**: $\omega = 0{,}05$, $\alpha = 0{,}10$, $\beta = 0{,}85$ (randamente în %); pornire $\sigma_1^2 = \bar{\sigma}^2$; șocurile $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_4 = -2{,}0;\ 0{,}5;\ 3{,}0;\ -1{,}0$; fără fișier de date
- **Cerințe**
  1. Calculați persistența p și dispersia de termen lung $\bar{\sigma}^2 = \omega/(1-p)$.
  2. Completați tabelul de mai jos rînd cu rînd: termenul de știri $\alpha\varepsilon_{t-1}^2$, termenul de memorie $\beta\sigma_{t-1}^2$ și σ_t^2 pentru $t = 3, 4, 5$ (rîndul 2 este completat ca exemplu).
  3. Precizați care șoc modifică cel mai mult dispersia și de ce dispersia zilei 5 este cunoscută la închiderea zilei 4.
- **Raportați**: tabelul completat și o propoziție
- Notebook: secțiunea A1

t	ε_{t-1}	$\alpha\varepsilon_{t-1}^2$	$\beta\sigma_{t-1}^2$	σ_t^2
1	–	–	–	1,0000
2	−2,0	0,4000	0,8500	1,3000
3	0,5	...	...	...
4	3,0	...	...	...
5	−1,0	...	...	...

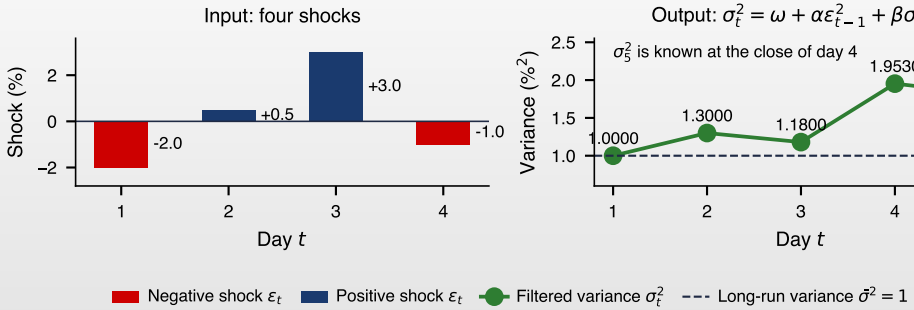
înapoi Lista exercițiilor

A1 [Rezolvat]: rezolvare — dispersiile filtrate

t	ε_{t-1}	$\alpha\varepsilon^2_{t-1}$	$\beta\sigma^2_{t-1}$	σ^2_t
1	–	–	–	1,0000
2	−2,0	0,4000	0,8500	1,3000
3	0,5	0,0250	1,1050	1,1800
4	3,0	0,9000	1,0030	1,9530
5	−1,0	0,1000	1,6600	1,8100

- $p = 0{,}95$, $\bar{\sigma}^2 = 0{,}05/0{,}05 = 1$; fiecare rînd adaugă $\omega = 0{,}05$ celor doi termeni
- Rîndul 2: $0{,}05 + 0{,}10 \times 4 + 0{,}85 \times 1 = 1{,}3000$
- Șocul de $+3\%$ adaugă $\alpha\varepsilon^2 = 0{,}90$: dispersia sare la 1,9530 în ziua 4
- Apoi distanța așteptată față de $\bar{\sigma}^2$ se înmulțește cu $p = \alpha + \beta = 0{,}95$ în fiecare zi
- σ^2_5 folosește doar ε_4 și σ^2_4, ambele cunoscute la închiderea zilei 4: prognoza pe un pas este exactă în model
- Interpretare: contează mărimea șocului, nu semnul; un singur șoc mare crește dispersia multe zile

A1 [Rezolvat]: recursia într-un grafic



- Fiecare bară este un șoc; fiecare punct este dispersia pe care o produce a doua zi; σ_5^2 este prognoza pe un pas făcută la închiderea zilei 4

MFM_ch5_seminar

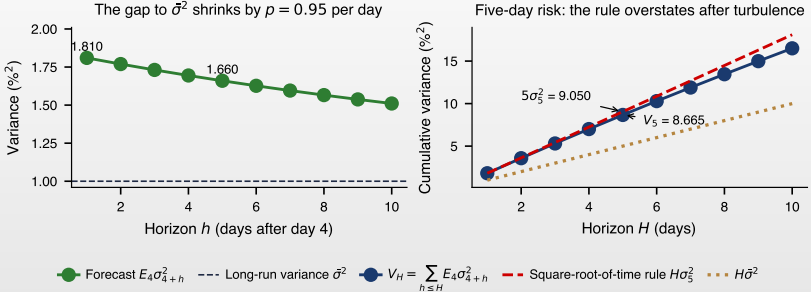
A1 [Rezolvat]: prognoza din ziua 4 — cerința (2/2)

- **Întrebările**
  - care este dispersia pe 5 zile după aceste șocuri?
  - este corectă regula rădăcinii pătrate a timpului?
- **Date**: modelul și $\sigma_5^2 = 1{,}8100$ din cerința 1; originea prognozei: închiderea zilei 4
- **Cerințe**
  1. Aplicați $\mathbb{E}_4$ recursiei și folosiți $\mathbb{E}_4 \varepsilon_t^2 = \mathbb{E}_4 \sigma_t^2$ pentru $t \geq 5$ pentru a deduce $\mathbb{E}_4 \sigma_{4+h}^2 = \bar{\sigma}^2 + p^{h-1}(\sigma_5^2 - \bar{\sigma}^2)$.
  2. Calculați cele cinci prognoze pentru $h = 1, \ldots, 5$.
  3. Explicați de ce dispersia randamentului pe 5 zile este suma $V_5 = \sum_{h=1}^{5} \mathbb{E}_4 \sigma_{4+h}^2$ (indiciu: ε_t sînt necorelate, o diferență de martingal) și calculați V_5 și $\sqrt{V_5}$.
  4. Comparați V_5 cu $5\sigma_5^2$ și deduceți semnul lui $V_H - H\sigma_5^2$ în funcție de $\sigma_5^2 - \bar{\sigma}^2$.
  5. Calculați timpul de înjumătățire $\ln 0{,}5 / \ln p$.
- **Raportați**: formula prognozei, cele cinci prognoze, V_5 și $\sqrt{V_5}$, timpul de înjumătățire; interpretare: după un șoc de $+3\%$, regula rădăcinii pătrate a timpului supraestimează sau subestimează riscul pe 5 zile?
- Notebook: secțiunea A1

A1 [Rezolvat]: rezolvare — prognoze și riscul pe cinci zile

- Derivare: $\mathbb{E}_4\sigma^2_{4+h} = \omega + p\,\mathbb{E}_4\sigma^2_{4+h-1}$; scădem $\bar\sigma^2 = \omega + p\bar\sigma^2$: distanța scade cu p pe zi, pornind de la σ^2_5, cunoscută
- Distanța 0,8101; prognoze 1,8100; 1,7695; 1,7311; 1,6945; 1,6598; $V_5 = 5 + 0{,}8101 \times (1 - 0{,}95^5)/0{,}05 = 8{,}665$, $\sqrt{V_5} = 2{,}944\%$; timp de înjumătățire $-0{,}6931/(-0{,}0513) = 13{,}5$ zile
- $V_H - H\sigma^2_5 = (\bar\sigma^2 - \sigma^2_5)\sum_{j<H}(1 - p^j)$: aici $5\sigma^2_5 = 9{,}050 > V_5$. Interpretare: după o perioadă de volatilitate ridicată regula supraestimează riscul pe 5 zile, în perioade calme îl subestimează, deoarece dispersia revine la $\bar\sigma^2$

A1 [Rezolvat]: prognozele și riscul pe cinci zile într-un grafic



- Stînga: prognozele converg spre $\bar{\sigma}^2 = 1$; dreapta: V_H rămîne sub $H\sigma_5^2$ deoarece dispersia revine la medie

MFM_ch5_seminar

B1 [Rezolvat]: GARCH-t pe S&P 500 — cerința (1/2)

- **Întrebările**
  - există o grupare a volatilității de modelat?
  - ce indică despre acesta o estimare GARCH(1,1)-t?
- **Date**: S&P 500, 6 717 randamente zilnice (Datele folosite); media $r_t = \mu + \varepsilon_t$, inovații Student-t
- **Cerințe**
  1. Testați H_0: fără efecte ARCH cu Ljung–Box $Q(10)$ pe r_t^2 și testul LM al lui Engle cu 5 laguri pe $r_t - \bar{r}$, la 5%.
  2. Estimați GARCH(1,1)-t prin verosimilitate maximă și verificați convergența optimizatorului.
  3. Raportați fiecare parametru cu eroarea standard robustă Bollerslev & Wooldridge (1992) și clasică și reprezentați r_t cu benzile $\pm 2\hat{\sigma}_t$.
- **Raportați**: cele două decizii de test, tabelul estimărilor, graficul
- Notebook: secțiunea B1

```
from arch import arch_model
am = arch_model(r, mean='Constant',
                vol='GARCH', p=1, q=1,
                dist='t')
res = am.fit(disp='off')
print(res.convergence_flag)  # 0 = ok
rob = res.std_err            # robust
cl = am.fit(disp='off',
            cov_type='classic').std_err
sig = res.conditional_volatility
```

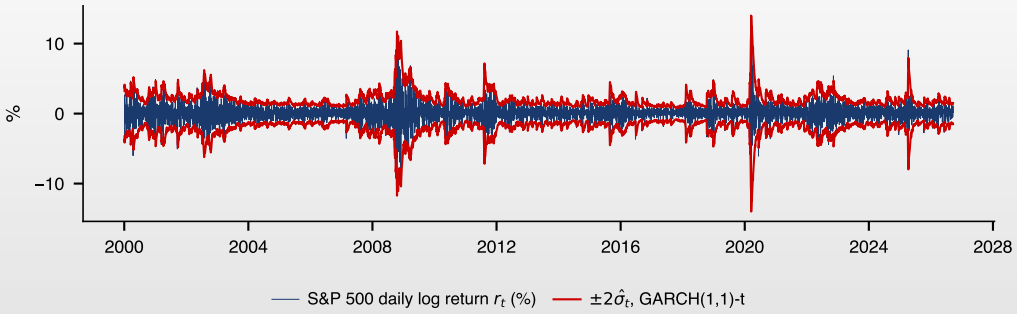
◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

B1 [Rezolvat]: rezolvare — teste, estimări, ajustare

Parametru	Estimare	E.s. robustă	E.s. clasică
μ	0,0787	0,0089	0,0090
ω	0,0157	0,0032	0,0029
α	0,1225	0,0107	0,0101
β	0,8723	0,0103	0,0096
ν	6,25	0,48	0,48

- (1) $Q(10) = 6\,135$ și $\mathrm{LM}(5) = 1\,685$ față de 18,3 și 11,1: absența efectelor ARCH este respinsă ($p < 0{,}001$)
  - Legea χ^2 cere $\mathbb{E}r_t^4 < \infty$; GARCH-t estimat, cu $\kappa_z = \mathbb{E}z_t^4$, dă $(\hat{\alpha} + \hat{\beta})^2 + (\kappa_z - 1)\hat{\alpha}^2 = 1{,}060$, peste 1: moment de ordin patru infinit în model (Capitolul 5: BET 1,273, BET-TR, cu dividende reinvestite, 1,179, aur 1,021)
  - Nu dovedește că datele au moment infinit, dar legea χ^2 se citește cu rezervă
- (2) Convergență după 14 iterații, $\ell = -9\,065{,}0$; persistența 0,9948
- (3) Rapoartele robust/clasic 1,06 (α), 1,08 (β): densitatea Student-t este ea însăși greșit specificată (coeficientul de asimetrie al lui $\hat{z}_t$: $-0{,}58$); covarianța sandwich corectează incertitudinea, nu o posibilă deplasare a estimărilor cauzată de densitatea greșită

B1 [Rezolvat]: volatilitatea estimată



⊡ Interpretare: $\hat{\beta}$ preia dispersia de ieri, $\hat{\alpha}$ adaugă știrile, $\hat{\nu}$ semnalează cozi groase; 5,2% din zile cad în afara benzii $\pm 2\hat{\sigma}_t$

MFM_ch5_seminar

B1 [Rezolvat]: diagnosticul reziduurilor — cerința (2/2)

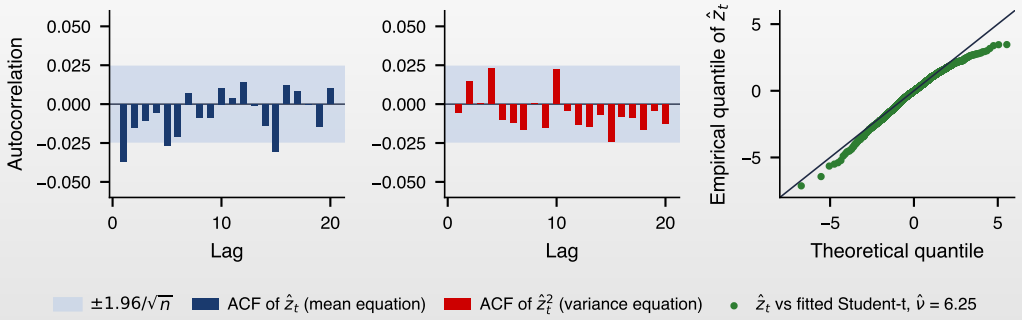
- **Întrebarea**: după estimarea GARCH-t, rămîne vreo structură în $\hat{z}_t = (r_t - \hat{\mu})/\hat{\sigma}_t$?
- **Date**: estimarea din cerința 1; fiecare test are H_0: modelul reproduce proprietatea respectivă
- **Cerințe**
  1. Testați ecuația mediei cu Ljung–Box $Q(10)$ pe $\hat{z}_t$ (H_0: fără autocorelație pînă la lagul 10).
  2. Testați ecuația dispersiei cu $Q(10)$ pe $\hat{z}_t^2$ și testul LM(5) (H_0: fără grupare a volatilității rămasă).
  3. Estimați regresia de asimetrie Engle & Ng (1993) (slide: Testul de asimetrie); raportați cele trei statistici t și testul comun $nR^2 \sim \chi^2_3$ (H_0: fără asimetrie rămasă).
  4. Reprezentați funcția de autocorelație (*AutoCorrelation Function*, ACF) pentru $\hat{z}_t$ și $\hat{z}_t^2$ și un grafic QQ al lui $\hat{z}_t$ față de distribuția Student-t standardizată estimată.
- **Raportați**: un tabel cu statistica, valoarea p (*p-value*) și decizia pentru fiecare test și cele trei grafice; interpretare:
  - ce componentă a modelului nu trece testele de diagnostic?
  - ce ați schimba întîi?
- Notebook: secțiunea B1

B1 [Rezolvat]: rezolvare — diagnostic

Partea	Test	p	Decizia la 5%
Media	$Q(10)$, $\hat{z}$: 21,8	0,016	respins
Dispersia	$Q(10)$, $\hat{z}^2$: 13,5	0,199	nerespins
	LM(5): 5,8	0,327	nerespins
Asimetria	comun χ^2_3: 40,6	$<0{,}001$	respins

- Asimetria de semn $t = 3{,}57$, mărime negativă $t = 1{,}17$, mărime pozitivă $t = -2{,}61$
- QQ: 16 reziduuri sub -4, față de 8,6 așteptate; coada stîngă este mai lungă decît cea a distribuției t estimate

B1 [Rezolvat]: ACF ale reziduurilor și graficul QQ



- Toate valorile p folosesc legile χ^2 naive, doar aproximative cu parametri estimați Li & Mak (1994). Interpretare: gruparea volatilității este reprodusă de model, asimetria nu: se adaugă un termen de semn (B2)

MFM_ch5_seminar

B2 [Rezolvat]: GJR față de GARCH pe S&P 500 — cerința

- **Întrebările**
  - cresc știrile proaste volatilitatea S&P 500 mai mult decît cele bune?
  - cu cît?
- **Date**: datele din B1; `arch_model(r, p=1, o=1, q=1, dist='t')` estimează GJR-GARCH(1,1)-t, care include GARCH-t pentru $\gamma = 0$; curba de impact a știrilor (NIC) la σ^2_{t-1} = dispersia de selecție 1,47
- **Cerințe**
  1. Estimați GJR-GARCH(1,1)-t și raportați $\hat{\alpha}$, $\hat{\gamma}$ cu t robust și $\hat{\beta}$.
  2. Construiți tabelul de comparație: numărul de parametri k, ℓ, AIC, BIC pentru GARCH-t și GJR-t.
  3. Testați H_0: $\gamma = 0$ cu $LR = 2(\ell_{GJR} - \ell_{GARCH})$ față de χ^2_1 și precizați ipotezele din spatele acestei legi.
  4. Calculați dispersia de a doua zi după șocuri de -3% și $+3\%$ în ambele modele și reprezentați cele două curbe NIC.
- **Raportați**: estimările, tabelul de comparație, decizia LR și graficul NIC; interpretare:
  - de ce este $\hat{\alpha} = 0$?
  - ce efect are asupra legii χ^2_1?
- Notebook: secțiunea B2

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

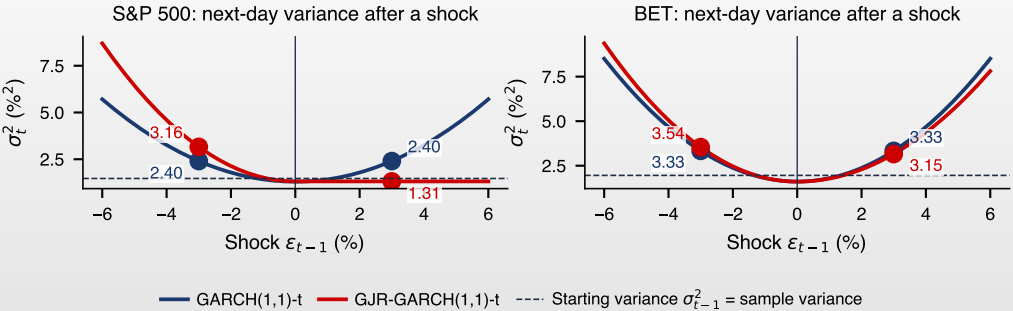
B2 [Rezolvat]: rezolvare — comparația modelelor imbricate

Model	k	ℓ	AIC	BIC
GARCH(1,1)-t	5	−9 064,993	18 140,0	18 174,0
GJR-GARCH(1,1)-t	6	−8 946,905	17 905,8	17 946,7

- (1) $\hat{\alpha} = 0{,}000$, $\hat{\gamma} = 0{,}205$ (t robust $= 10{,}04$), $\hat{\beta} = 0{,}881$, $\hat{\omega} = 0{,}0186$, $\hat{\nu} = 6{,}95$: panta știrilor bune $\hat{\alpha}$, a celor proaste $\hat{\alpha} + \hat{\gamma}$
- De ce $\hat{\alpha} = 0$: după ce γ preia șocurile negative, șocurile pozitive nu mai cresc dispersia de mîine; estimarea atinge limita $\alpha \geq 0$; limita afectează statistica t (Wald) a lui $\hat{\alpha}$, nu testul LR pentru γ
- (2) $\Delta\text{AIC} = -234{,}2$, $\Delta\text{BIC} = -227{,}4$ (GJR minus GARCH): ambele preferă GJR
- (3) $LR = 2(-8\,946{,}905 - (-9\,064{,}993)) = 236{,}17$, mult peste 3,84
- Ipotezele legii $\chi^2_{\mathbf{1}}$: o densitate Student-t corectă și parametrii adevărați sub H_0 interiori
  - Densitatea este îndoielnică aici: B1 a găsit asimetrie
  - Frontiera nu schimbă legea LR: sub ipoteza nulă (GARCH-t estimat), $\hat{\alpha} = 0{,}122 > 0$; $\hat{\alpha} = 0$ în GJR este estimarea alternativei Andrews (2001)
  - Concluzie nuanțată: un LR de 236,17 este de circa 60 de ori valoarea critică la 5%; o verificare calibrată ar simula LR sub GARCH-t estimat (cum face B4 pentru Integrated GARCH (IGARCH))

MFM_ch5_seminar

B2 [Rezolvat]: rezolvare — curba de impact a știrilor



- (4) S&P 500, GJR: -3% dă 3,16, $+3\%$ dă 1,31; GARCH: 2,40 pentru ambele semne
- Cu $\hat{\alpha} = 0$ un șoc de $+3\%$ nu adaugă un termen de șoc; recursia scade dispersia, de la 1,47 la 1,31. Interpretare: la S&P 500, doar știrile proaste cresc dispersia de mîine; panoul pentru BET corespunde exercițiului B3

MFM_ch5_seminar

B3 [Propus]: GJR față de GARCH pe BET — cerința

- **Întrebarea**: este asimetria bursei de la București la fel de puternică precum cea a S&P 500?
- **Date**: BET, 6 670 de randamente zilnice (Datele folosite); aceleași două modele și același cod ca în B2; $\ln n = 8{,}81$
- **Cerințe**
  1. Estimați ambele modele și completați tabelul de comparație din B2 (k, ℓ, AIC, BIC) pentru BET.
  2. Calculați LR și comparați-l cu cele patru praguri: 2 (AIC), 3,84 și 6,63 (χ^2_1 la 5% și 1%) și $\ln n$ (BIC); precizați fiecare decizie.
  3. Calculați NIC pentru BET la $\pm 3\%$ pornind de la dispersia de selecție, ca în B2.
- **Raportați**: tabelul, cele patru decizii, cele două valori de impact; interpretare:
  - de ce pot LR și BIC să conducă la decizii diferite?
  - dovedește un $\hat{\gamma}$ mai mic că BET este mai puțin asimetric decît S&P 500?
- Model: B2
- Notebook: secțiunea B3

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

C1 [Propus]: critica unui răspuns AI — cerința

- **Cererea**: „`px` conține închiderile zilnice S&P 500. Estimează un GARCH(1,1) cu inovații Student-t cu `arch` și dă-mi volatilitatea anualizată de termen lung și timpul de înjumătățire al unui șoc.”
- **Date**: `px = load_close('sp500')`, 6 718 închideri, 2000-01-03 – 2026-09-18
- **Rezultatul răspunsului**: `ann_vol` = 982,07, `half_life` = 0,06 zile și un `DataScaleWarning`
- **Cerințe**
  1. Rulați codul și reproduceți rezultatul.
  2. Găsiți erorile de formulă, erorile de unitate și riscurile numerice, fiecare cu numărul liniei.
  3. Pentru fiecare, indicați dovada care o evidențiază (un avertisment, o cifră din A1 sau B1) și linia corectată.
  4. Rulați codul corectat și notați în `AI_ERRORS.md` linia, tipul erorii, dovada, corecția și rezultatul verificării.
- Model: A1, B1; anualizarea: slide: Unități și dispersia pe mai multe zile și slide-ul „Datele folosite”

```
1  import numpy as np
2  from arch import arch_model
3  r = np.log(px).diff().dropna()
4  am = arch_model(r, vol='GARCH', p=1,
5                  q=1, dist='t')
6  res = am.fit(disp='off')
7  om = res.params['omega']
8  a = res.params['alpha[1]']
9  b = res.params['beta[1]']
10 lr_var = om / (1 - a - b)
11 ann_vol = lr_var * 252
12 half_life = np.log(0.5) / np.log(b)
```

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

Metoda delta

- **Metoda delta**: eroarea standard a unei funcții netede $g(\hat{\theta})$ de estimări, printr-o aproximare liniară (de ordinul întîi)

$$g(\hat{\theta}) \approx g(\theta) + \nabla g^\top (\hat{\theta} - \theta) \;\Rightarrow\; \widehat{\text{e.s.}}\, g(\hat{\theta}) = \sqrt{\nabla g^\top \, \hat{V} \, \nabla g}$$

  - ∇g: gradientul lui g în $\hat{\theta}$ (coloana derivatelor parțiale), $\nabla g^\top$ transpusa sa
  - $\hat{V}$: matricea de covarianță (robustă) estimată a lui $\hat{\theta}$

- Exemplu: persistența $g = \alpha + \beta$ are $\nabla g = (0, 1, 1)^\top$ în ordinea (ω, α, β)

$$\widehat{\text{e.s.}}(\hat{p}) = \sqrt{V_{\alpha\alpha} + 2V_{\alpha\beta} + V_{\beta\beta}}$$

- Fiabilă doar dacă g este aproape liniară pe intervalul de incertitudine al lui $\hat{\theta}$; timpul de înjumătățire $\ln 0{,}5 / \ln p$ este foarte curbat lîngă $p = 1$ (A2)

Bootstrap-ul parametric

- **Bootstrap parametric**: simulăm dintr-un model estimat și reestimăm pe fiecare traiectorie simulată; mărimile cu asterisc ($\hat{\rho}^*$, LR^*) provin din traiectoriile simulate
- Algoritmul, $b = 1, \ldots, B$
  - extragem z_t^* din distribuția estimată, aplicăm recursia $\sigma_t^{*\mathbf{2}} = \hat{\omega} + \hat{\alpha}\varepsilon_{t-\mathbf{1}}^{*\mathbf{2}} + \hat{\beta}\sigma_{t-\mathbf{1}}^{*\mathbf{2}}$, $\varepsilon_t^* = \sigma_t^* z_t^*$
  - reestimăm modelul pe traiectoria simulată și păstrăm $\hat{\rho}_b^*$ (sau LR_b^*)
- Intervalul bazat pe percentile: percentilele de 2,5% și 97,5% ale valorilor $\hat{\rho}_{\mathbf{1}}^*, \ldots, \hat{\rho}_B^*$
- Testul bootstrap: simulăm sub $H_{\mathbf{0}}$ (de ex. IGARCH, $\alpha + \beta = 1$) și numărăm extragerile cel puțin la fel de extreme

$$p_{\mathbf{boot}} = \frac{1 + \#\{b : LR_b^* \geq LR\}}{B + 1}$$

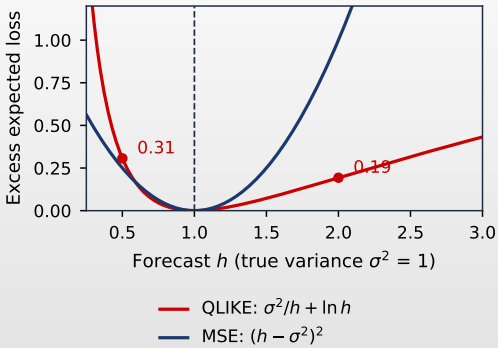
  - $\#\{\cdot\}$: numărul extragerilor care satisfac condiția; se compară cu legea la frontieră $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\chi_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\chi_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}}$ (slide: Testul raportului de verosimilitate)

Pierderea QLIKE

- h_t: prognoza dispersiei zilei t, făcută la închiderea zilei $t-1$; dispersia adevărată nu se observă, deci r_t^2 servește drept aproximare zgomotoasă ($\mathbb{E}_{t-1} r_t^2 = \sigma_t^2$ dacă $\mu = 0$)
- **Pierderea de cvasi-verosimilitate** (*quasi-likelihood*, QLIKE) Patton (2011)

$$L_t = \frac{r_t^2}{h_t} + \ln h_t$$

  - valoarea așteptată $\sigma_t^2/h_t + \ln h_t$, minimă la $h_t = \sigma_t^2$; QLIKE mediu mai mic este mai bun
  - subestimarea costă mai mult (cu $\sigma_t^2 = 1$): $h = 0{,}5$ adaugă 0,31, $h = 2$ adaugă 0,19
  - robustă la zgomotul aproximării: ordinea prognozelor este aceeași ca pentru dispersia adevărată



Diebold–Mariano și Mincer–Zarnowitz

- **Testul Diebold–Mariano (DM)** Diebold & Mariano (1995): au cele două prognoze aceeași acuratețe medie?

$$d_t = L_t^m - L_t^{GARCH\text{-}t}, \qquad DM = \frac{\bar{d}}{\widehat{\text{e.s.}}(\bar{d})}, \qquad \widehat{\text{e.s.}}(\bar{d})^2 = \frac{\hat{c}_0 + 2\sum_{j=1}^{J}\left(1 - \frac{j}{J+1}\right)\hat{c}_j}{n}$$

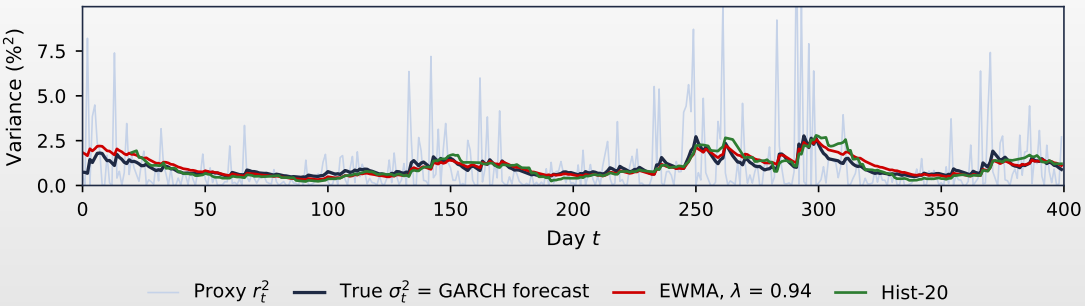
  - L_t^m: pierderea modelului m; $\bar{d}$: media lui d_t; $\hat{c}_j$: autocovarianța lui d_t la lagul j; eroare standard robustă la heteroscedasticitate și autocorelație (*Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent*, HAC), cu $J = 5$ laguri
  - $DM \approx N(0,1)$ sub acuratețe egală; $DM < -1{,}96$: modelul m mai bun, $DM > 1{,}96$: mai slab

- **Regresia Mincer–Zarnowitz (MZ)** Mincer & Zarnowitz (1969): sînt prognozele nedeplasate ca nivel?

$$r_t^2 = a + b\, h_t + u_t, \qquad H_0 : a = 0,\ b = 1$$

  - testul Wald $W = (\hat{\theta} - \theta_0)^\top \hat{V}^{-1} (\hat{\theta} - \theta_0) \sim \chi^2_2$, $\theta = (a, b)^\top$, $\theta_0 = (0, 1)^\top$, $\hat{V}$: covarianța HAC
  - R^2: proporția din variația lui r_t^2 explicată, mică deoarece aproximarea este zgomotoasă

Prognoze de referință



- **Media mobilă ponderată exponențial** (*Exponentially Weighted Moving Average*, EWMA) J.P. Morgan/Reuters (1996): $h_t = \lambda h_{t-\mathbf{1}} + (1-\lambda) r^{\mathbf{2}}_{t-\mathbf{1}}$, λ: factorul de descreștere (0,94); un GARCH cu $\omega = 0$, $\alpha = 1-\lambda$, $\beta = \lambda$, fără revenire la medie
- **Hist-20**: $h_t = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{20}} \sum_{j=\mathbf{1}}^{\mathbf{20}} r^{\mathbf{2}}_{t-j}$, media ultimelor 20 de randamente la pătrat
- Traiectorie GARCH simulată: QLIKE mediu 0,930 (dispersia adevărată), 0,959 (EWMA), 0,967 (Hist-20); Hist-20 rămîne în urma fiecărui salt

A2 [Rezolvat]: volatilitatea de termen lung și timpul de înjumătățire — cerința

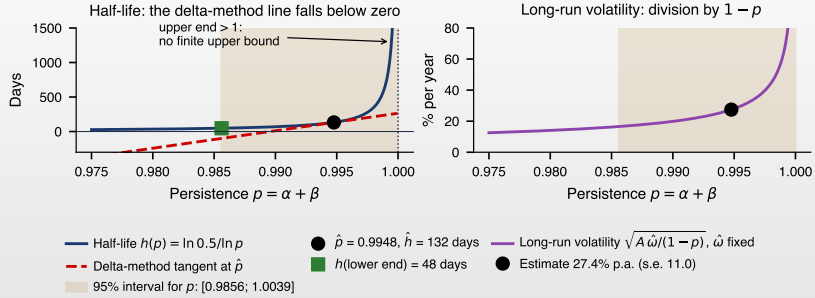
- **Întrebarea**: cît de precis determină estimarea din B1 volatilitatea de termen lung și timpul de înjumătățire?
- **Date**: B1: $\hat{\omega} = 0{,}015669$, $\hat{\alpha} = 0{,}122499$, $\hat{\beta} = 0{,}872270$, $A = 251{,}5$ randamente pe an; covarianța robustă a lui $(\hat{\omega}, \hat{\alpha}, \hat{\beta})$, în această ordine: $\hat{V} = \begin{pmatrix} 9{,}977 \times 10^{-6} & 1{,}416 \times 10^{-5} & -2{,}234 \times 10^{-5} \\ \cdot & 1{,}151 \times 10^{-4} & -9{,}994 \times 10^{-5} \\ \cdot & \cdot & 1{,}066 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$ (`res.param_cov`)
- **Cerințe**
  1. Deduceți $\bar{\sigma}^2 = \omega/(1-\alpha-\beta)$ din recursie și calculați volatilitatea anuală de termen lung $v = \sqrt{A\,\bar{\sigma}^2}$ și timpul de înjumătățire.
  2. Calculați $\nabla \bar{\sigma}^2$, forma pătratică $\nabla^\top \hat{V} \nabla$ și, cu $\partial v / \partial \bar{\sigma}^2 = A/(2v)$, eroarea standard a lui v.
  3. Calculați $\widehat{\text{e.s.}}(\hat{p})$ din $\hat{V}$ și eroarea standard prin metoda delta a lui $h(p) = \ln 0{,}5 / \ln p$, definită pentru $0 < p < 1$ (aici h este timpul de înjumătățire, nu orizontul).
  4. Transformați intervalul de 95% pentru p într-un interval pentru h și precizați ce se întîmplă cînd intervalul depășește 1.
- **Raportați**: v cu e.s., h cu e.s. și intervalul transformat; interpretare: de ce eșuează liniarizarea pentru h?
- Notebook: secțiunea A2

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

A2 [Rezolvat]: rezolvare — gradienți și intervalul timpului de înjumătățire

- (1) $\hat{p} = 0{,}994769$, $\bar{\sigma}^2 = 2{,}995$, $v = 1{,}731 \times \sqrt{251{,}5} = 27{,}4\%$ (volatilitatea anuală de selecție: 19,2%); $h = -0{,}6931/(-0{,}005245) = 132{,}2$ zile
- (2) $\nabla \bar{\sigma}^2 = (1/(1-p), \omega/(1-p)^2, \omega/(1-p)^2) = (191{,}2, 572{,}6, 572{,}6)$; $\widehat{\text{e.s.}}(\bar{\sigma}^2) = 2{,}40$; $\widehat{\text{e.s.}}(v) = 11{,}0$ puncte procentuale în jurul a 27,4%
- (3) $\widehat{\text{e.s.}}(\hat{p}) = \sqrt{V_{\alpha\alpha} + 2V_{\alpha\beta} + V_{\beta\beta}} = 0{,}0047$ (V_{ij}: elementele lui $\hat{V}$); $\partial h/\partial p = 25\,330$, deci $\widehat{\text{e.s.}}(\hat{h}) = 118$ zile
- (4) $[0{,}9856; 1{,}0039]$ depășește 1: $h \in [48; \infty)$, fără limită superioară finită în modelul staționar. Interpretare: $h(p)$ este atît de curbată lîngă 1 încît aproximarea liniară nu mai este informativă; ipoteza $p = 1$ necesită un test (B4)

A2 [Rezolvat]: curba timpului de înjumătățire



- Tangenta (metoda delta) trece prin zero în interiorul intervalului pentru p; transformarea exactă $h(p)$ nu are capăt superior finit

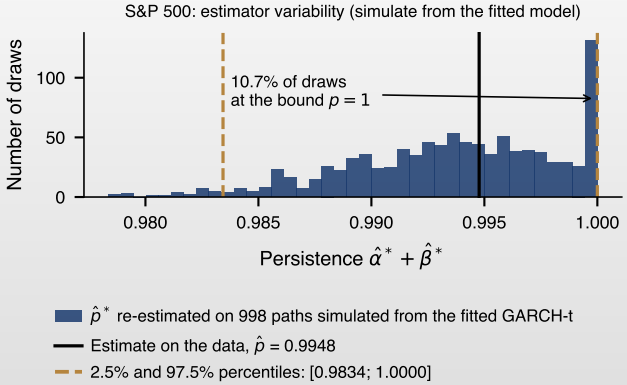
MFM_ch5_seminar

B4 [Rezolvat]: ipoteza $\alpha + \beta = 1$, bootstrap și test la frontieră — cerința

- **Întrebările**
  - cît de variabil este $\hat{p} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}$?
  - poate dispersia S&P 500 să aibă o rădăcină unitară?
- **Date**: estimarea B1, $\hat{p} = 0{,}9948$; cod `param_bootstrap`, `igarch_test` (notebook); sămînța generatorului aleator (*seed*) 42 (43 sub H_0); fiecare traiectorie: 6 717 zile, după 500 de zile inițiale eliminate (*burn-in*), pornind de la dispersia de selecție; fiecare estimare impune $\alpha + \beta \leq 1$ și păstrează cea mai bună din două puncte de pornire
- **Cerințe**
  1. Algoritmul 1 (variabilitatea estimatorului): simulați $B = 999$ traiectorii din GARCH-t **estimat**, reestimați p pe fiecare și raportați percentilele de 2,5% și 97,5% și proporția extragerilor la $p = 1$.
  2. Algoritmul 2 (test): estimați IGARCH-t ($\alpha + \beta = 1$), calculați $LR = 2(\ell_{GARCH} - \ell_{IGARCH})$, simulați B traiectorii **sub** H_0, reestimați ambele modele pe fiecare și calculați valoarea p bootstrap (slide: Bootstrap-ul parametric).
  3. Comparați această valoare p cu cele din χ^2_1 și $\frac{1}{2}\chi^2_0 + \frac{1}{2}\chi^2_1$ și decideți la 5% și 10%.
- **Raportați**: două histograme, intervalul, trei valori p și decizia; interpretare: de ce „intervalul bazat pe percentile atinge 1" nu este un test pentru $p = 1$ Andrews (2000)?
- Notebook: secțiunea B4

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

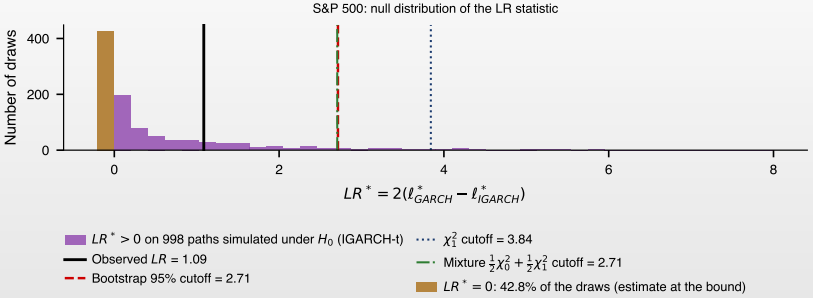
B4 [Rezolvat]: rezolvare — variabilitatea estimatorului



- Interval de 95% bazat pe percentile [0,9834; 1,0000]; abaterea standard bootstrap 0,0046 față de e.s. robustă 0,0047: apropiate; 10,7% din extrageri sînt exact la limita $p = 1$
- Timpul de înjumătățire de la 41 de zile la ∞ (metoda delta, A2: $[48; \infty)$, cu e.s. de 118 zile). Interpretare: lîngă o limită intervalul bazat pe percentile descrie dispersia, nu este automat un interval de încredere valid Andrews (2000)

MFM_ch5_seminar

B4 [Rezolvat]: rezolvare — testul sub ipoteza nulă



- IGARCH-t: $\hat{\alpha}_0 = 0{,}127$, $\hat{\nu}_0 = 6{,}03$; $LR = 1{,}09$; $LR^* = 0$ pentru 42,8% din extrageri, aproape de ponderea 1/2 din distribuția de tip amestec; 167 din 998 de extrageri depășesc LR
- Replicări neconvergente, excluse: 1 din 999 sub H_0, 1 din 999 din modelul estimat
- Valorile p: 0,168 (bootstrap), 0,15 (amestec), 0,30 (χ^2_1 naiv): H_0 nu este respinsă nici la 5%, nici la 10%. Interpretare: 27 de ani de date nu permit distingerea unui timp de înjumătățire de circa 130 de zile de unul infinit

MFM_ch5_seminar

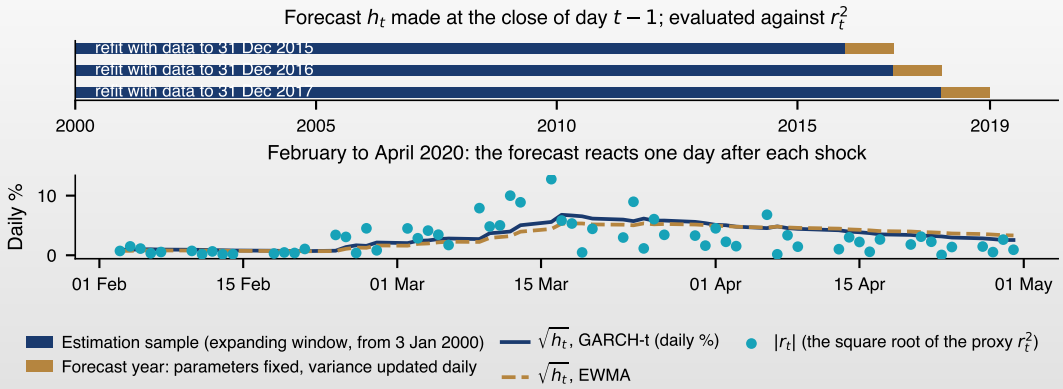
B5 [Rezolvat]: compararea prognozelor pe S&P 500 — cerința (1/2)

- **Întrebarea**: prognozează vreun model dispersia de mîine a S&P 500 mai bine decît GARCH-t?
- **Date**: 2 693 de zile de prognoză, 2016-01-04 – 2026-09-18; GARCH-N (GARCH cu inovații Normale, *GARCH with Normal innovations*), GARCH-t, GJR-t, EGARCH-t reestimate în fiecare ianuarie (fereastră în expansiune); EWMA ($\lambda = 0{,}94$) și Hist-20 (slide: Prognoze de referință); dispersia realizată aproximată prin r_t^2
- **Cerințe**
  1. Pe graficul cronologic, verificați că h_t folosește doar date pînă la închiderea zilei $t-1$ și că parametrii sînt ficși în cursul unui an.
  2. Calculați pierderea QLIKE (slide: Pierderea QLIKE) pas cu pas pentru GARCH-t și EWMA pe 2020-03-13, 2020-03-16 și 2020-03-17 (tabelul de mai jos).
  3. Calculați QLIKE mediu pentru toate cele șase modele și statistica t DM pentru $d_t = L_t^m - L_t^{GARCH\text{-}t}$ (slide: Diebold–Mariano și Mincer–Zarnowitz); reprezentați $\sum d_t$ cumulat.
- **Raportați**: cele trei rînduri QLIKE, un tabel cu QLIKE mediu și t DM, graficul pierderilor; interpretare: ce diferențe pot fi considerate semnificative?
- Notebook: secțiunea B5

Ziua	r_t	r_t^2	h_t GARCH-t	h_t EWMA	QLIKE
2020-03-13	8,88	78,87	25,37	15,66	…
2020-03-16	−12,77	162,95	31,17	19,45	…
2020-03-17	5,82	33,90	46,04	28,06	…

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

B5 [Rezolvat]: rezolvare — momentul prognozei



MFM_ch5_seminar

B5 [Rezolvat]: rezolvare — QLIKE pas cu pas

Ziua	L GARCH-t	L EWMA
2020-03-13	6,342	7,789
2020-03-16	8,668	11,346
2020-03-17	4,566	4,543

- de ex. 2020-03-16: $162{,}95/31{,}17 + \ln 31{,}17 = 8{,}668$; prognoza EWMA este mai mică, deci pierderea este mai mare: subestimarea este penalizată
- Prima țintă 2016-01-04, originea 2015-12-31: reestimare pe datele pînă la 31 decembrie, fără deplasare de anticipare (*look-ahead bias*): nicio informație din viitor

MFM_ch5_seminar

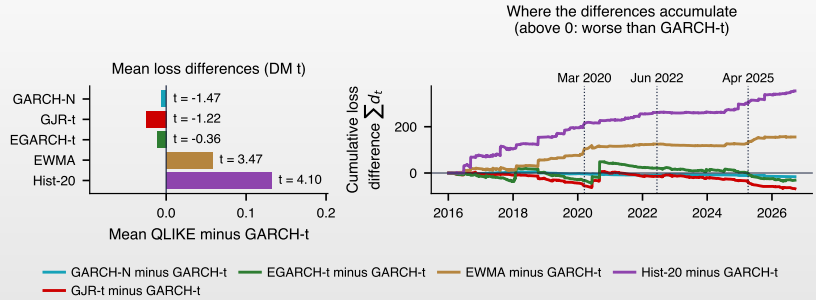
B5 [Rezolvat]: rezolvare — QLIKE mediu și DM pentru cele șase modele

Model	GARCH-N	GARCH-t	GJR-t	EGARCH-t	EWMA	Hist-20
QLIKE	0,7503	0,7562	0,7312	0,7447	0,8140	0,8879
DM t	$-1{,}47$	–	$-1{,}22$	$-0{,}36$	3,47	4,10

- S&P 500, 2 693 de zile de prognoză, 2016-01-04 – 2026-09-18; t DM pentru $d_t = L_t^{m} - L_t^{GARCH\text{-}t}$, cu erori HAC (5 laguri)

MFM_ch5_seminar

B5 [Rezolvat]: rezolvare — diferențele de pierderi



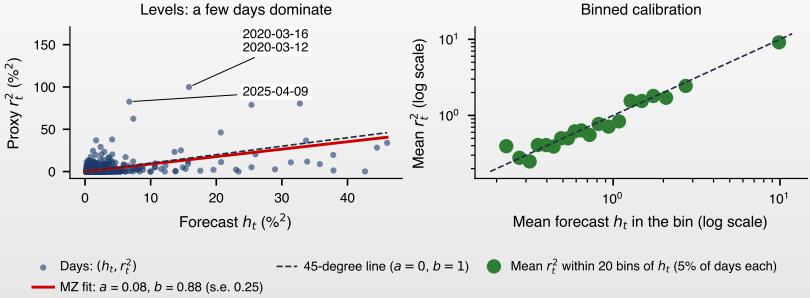
- QLIKE mediu: GJR-t 0,7312, GARCH-t 0,7562; EWMA (t DM $= 3{,}47$) și Hist-20 ($t = 4{,}10$) sînt mai slabe, diferența lor crește în martie 2020; statisticile t din familia GARCH sînt descriptive (modele imbricate, fereastră în expansiune: B5 extins)

MFM_ch5_seminar

B5 [Rezolvat]: calibrarea — cerința (2/2)

- **Întrebările**
  - sînt prognozele GARCH-t nedeplasate în niveluri?
  - ce zile determină răspunsul?
- **Date**: cele 2 693 de perechi (h_t, r_t^2) din cerința 1
- **Cerințe**
  1. Estimați regresia Mincer–Zarnowitz (slide: Diebold–Mariano și Mincer–Zarnowitz) cu erori HAC (5 laguri) și testați comun $a = 0$, $b = 1$.
  2. Reprezentați r_t^2 față de h_t, cu dreapta estimată și dreapta de 45 de grade, și un grafic cu mediile pe 20 de grupe de h_t.
  3. Reestimați fără cele mai mari trei valori r_t^2 și comparați b.
- **Raportați**: a, b cu e.s., R^2, p Wald, graficul, b fără cele trei zile; interpretare: este un R^2 mic semnul unei prognoze proaste?
- Notebook: secțiunea B5

B5 [Rezolvat]: rezolvare — calibrarea



- $a = 0{,}08$ (e.s. 0,24), $b = 0{,}88$ (e.s. 0,25), $R^2 = 0{,}238$, p Wald $= 0{,}802$: nedeplasarea nu este respinsă; mediile pe grupe sînt aproape de dreapta de 45 de grade
- Fără 2020-03-16, 2020-03-12, 2025-04-09: $b = 0{,}64$ (e.s. 0,09), p Wald $< 0{,}001$. Interpretare: trei zile de criză domină regresia în niveluri; R^2 mic reflectă aproximarea zgomotoasă r_t^2, nu un model inadecvat Patton (2011)

MFM_ch5_seminar

Exercițiu de transfer: alegeți B6, B7 sau B8

- Alegeți un exercițiu din pachetele de extensie și rezolvați-l cu codul modelului său
  - B6: distribuțiile inovațiilor pentru Bitcoin (model: B1, B2)
  - B7: compararea prognozelor pe BET (model: B5)
  - B8: bootstrap și testul IGARCH pe BET (model: B4)
- Livrabile
  - Tabelul și graficul cerute, răspunsul la întrebarea de interpretare și o limită
- Criterii de evaluare
  - Reproductibilitate: notebook-ul rulează de la început la sfîrșit și reproduce fiecare cifră raportată
  - Inferență corectă: distribuția potrivită sub H_0 (frontieră, modele imbricate), incertitudinea raportată pentru fiecare estimare
  - Interpretare: o afirmație susținută de cifre, cu limita ei
- Folosirea AI este permisă; notați erorile depistate efectiv, în formatul din `AI_ERRORS.md`

Verificare finală

Verificare finală (răspuns în două rînduri)

- ⊡ O concluzie justificată: ce model ați folosi pentru S&P 500 și de ce?
- ⊡ O limită nerezolvată: ce nu pot decide datele (de ex. $p = 1$)?

Pachetele de extensie: conținut și cerințe

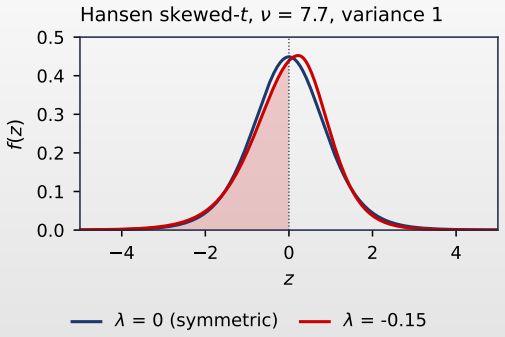
Exercițiu	Întrebare	Tip	Model
A3	persistența GJR cînd inovațiile sînt asimetrice	Propus	A1
A4	este momentul de ordin patru finit?	Propus	A1, A2
A5	dispersia robustă și clasică a QMLE Gaussian	Propus	A2
A6	autocorelația pătratelor șocurilor	Propus	A1
B6	distribuțiile inovațiilor pentru Bitcoin	Propus	B1, B2
B5 extins	Giacomini–White și Model Confidence Set	Rezolvat	–
B7	compararea prognozelor pe BET	Propus	B5
B8	bootstrap și testul IGARCH pe BET	Propus	B4
C2	determină știrile din SUA volatilitatea BET? (proiect)	Propus	B1, B2
C3	Quasi Score-Driven (QSD) GARCH pe acțiuni americane (proiect)	Propus	B1, B2

Inovații asimetrice și momente

- **Distribuția t asimetrică** Hansen (1994) (A3, B6): o Student-t ale cărei jumătăți au lățimi diferite; media 0, dispersia 1
  - $\nu > 2$: grosimea cozilor; $\lambda \in (-1, 1)$: asimetria, $\lambda < 0$ o coadă stîngă mai lungă, $\lambda = 0$ Student-t
- Partea din dispersie provenită din inovațiile negative

$$m_- = \mathbb{E}\left[z_t^2 \, 1(z_t < 0)\right] = \int_{-\infty}^{0} z^2 f(z)\, dz$$

  - graficul: $\lambda = -0{,}15$, $\nu = 7{,}7$: $m_- = 0{,}549$, dar $P(z_t < 0) = 0{,}473$; simetric: $m_- = 0{,}5$
- **Kurtosis-ul inovației** $\kappa_z = \mathbb{E}z_t^4$ (A4, A5): 3 pentru distribuția Normală, $3(\nu - 2)/(\nu - 4)$ pentru Student-t cu $\nu > 4$
- **GED** (*Generalised Error Distribution*, distribuția generalizată a erorilor) (B6): densitatea $\propto \exp(-|z/c|^{\nu_G}/2)$, c: scala care dă dispersia 1; $\nu_G = 2$: distribuția Normală, $\nu_G < 2$: cozi mai groase



Forma ARMA, PIT și mulțimi de modele

- **Forma AutoRegressive Moving Average (ARMA) a GARCH(1,1)** (A6): cu surpriza $v_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$ (media 0)

$$\varepsilon_t^2 = \omega + (\alpha + \beta)\,\varepsilon_{t-1}^2 + v_t - \beta\, v_{t-1}$$

  - ε_t^2 este un ARMA(1,1) cu coeficientul autoregresiv (AR) $\alpha + \beta$ și coeficientul de medie mobilă (*moving average*, MA) $-\beta$; ACF-ul său scade cu rata $\alpha + \beta$

- **Transformarea integrală de probabilitate** (*probability integral transform*, PIT; C3) Diebold, Gunther & Tay (1998): $u_t = F(\epsilon_t)$, ϵ_t inovația standardizată (notată z_t în rest), F funcția ei de repartiție estimată
  - dacă modelul este corect, u_t este i.i.d. $U(0,1)$: histogramă plată, media $1/2$, dispersia $1/12$

- **Model Confidence Set (MCS)** Hansen, Lunde & Nason (2011): mulțimea de modele care conține cel mai bun model cu o probabilitate aleasă (90% în B5 extins)
  - se testează acuratețea egală a modelelor rămase; dacă se respinge, se elimină cel mai slab și se repetă; valoarea p MCS al unui model este cel mai mare p observat pînă la eliminarea lui

- **Giacomini–White (GW)** Giacomini & White (2006): testează dacă diferența de pierderi este previzibilă din informația disponibilă la momentul prognozei

A3 [Propus]: persistența GJR cu inovații asimetrice — cerința

- **Întrebarea**: care este persistența GJR-GARCH cînd z_t este asimetric?
- **Date**: S&P 500, GJR-GARCH(1,1) cu inovații t asimetrice Hansen (1994): $\hat{\alpha} = 0{,}00000$, $\hat{\gamma} = 0{,}21111$, $\hat{\beta} = 0{,}87970$, $\hat{\nu} = 7{,}69$, $\hat{\lambda} = -0{,}150$; densitatea standardizată f a lui z_t se obține prin exponențierea rezultatului `SkewStudent().loglikelihood` din `arch` (dispersie unitară, `individual=True`); λ: parametrul de asimetrie
- **Cerințe**
  1. Luați media ambelor părți ale recursiei și arătați că persistența este $\alpha + \gamma\, m_- + \beta$, cu $m_- = \mathbb{E}[z_t^2 1(z_t < 0)]$.
  2. Arătați că $m_- = 1/2$ pentru z_t simetric și explicați de ce m_- diferă în general de $P(z_t < 0)$.
  3. Integrați numeric `quad(f, -inf, 0)` și `quad(lambda z: z**2*f(z), -inf, 0)`; verificați $\int f = 1$ și $\int z^2 f = 1$ pe toată axa.
  4. Calculați persistența și timpul de înjumătățire cu m_- și cu $1/2$.
- **Raportați**: m_-, $P(z < 0)$, ambele persistențe și ambii timpi de înjumătățire; interpretare: ce se întîmplă dacă se folosește $\alpha + \gamma/2 + \beta$ cu inovații asimetrice?
- Model: A1
- Notebook: secțiunea A3

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

A4 [Propus]: existența momentului de ordin patru — cerința

- **Întrebările**
  - au modelele estimate pentru S&P 500 un kurtosis finit?
  - le poate valida kurtosis-ul de selecție?
- **Date**: GARCH-N: $\hat{\alpha} = 0{,}120487$, $\hat{\beta} = 0{,}860062$; GARCH-t: $\hat{\alpha} = 0{,}1225$, $\hat{\beta} = 0{,}8723$, $\hat{\nu} = 6{,}246$; kurtosis-ul de selecție al randamentelor 13,7 (total, nu exces)
- **Cerințe**
  1. Cu $\kappa_z = \mathbb{E}z_t^4$ (kurtosis-ul lui z_t), arătați că $\mathbb{E}\varepsilon_t^4 = \kappa_z \mathbb{E}\sigma_t^4$ și $\mathbb{E}\sigma_t^4 < \infty$ dacă și numai dacă $\mathbb{E}(\alpha z_t^2 + \beta)^2 = (\alpha+\beta)^2 + (\kappa_z - 1)\alpha^2 < 1$.
  2. Pentru GARCH-N ($\kappa_z = 3$) calculați condiția și kurtosis-ul total $K = 3[1-(\alpha+\beta)^2]/[1-(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha^2]$, cu numitorul afișat; repetați cu estimările rotunjite la 3 zecimale.
  3. Pentru GARCH-t calculați $\kappa_z = 3(\nu-2)/(\nu-4)$ și condiția.
- **Raportați**: un rînd pentru fiecare model: κ_z, condiția, finit sau nu, K; interpretare: este concordanța cu kurtosis-ul de selecție un test al modelului?
- Model: A1, A2
- Notebook: secțiunea A4

Înapoi Lista exercițiilor

A5 [Propus]: dispersia robustă și clasică, ARCH(1) — cerința

- **Întrebarea**: cît de mare este eroarea inversei hessianei ca estimator al dispersiei QMLE Gaussian cînd z_t nu este Normal?
- **Date**: ARCH(1), $\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2$, ω cunoscut; $\ell_t = -\frac{1}{2}(\ln\sigma_t^2 + \varepsilon_t^2/\sigma_t^2)$; $x_t = \varepsilon_{t-1}^2/\sigma_t^2$ este cunoscut la $t-1$ și independent de z_t; identități $\partial\sigma_t^2/\partial\alpha = \varepsilon_{t-1}^2$, $\varepsilon_t^2/\sigma_t^2 = z_t^2$
- **Cerințe**
  1. Arătați că scorul este $s_t = \frac{1}{2}(z_t^2 - 1)x_t$ și că $B = \mathbb{E}s_t^2 = \frac{1}{4}(\kappa_z - 1)\mathbb{E}x_t^2$.
  2. Arătați că $\partial^2\ell_t/\partial\alpha^2 = \frac{1}{2}x_t^2(1 - 2z_t^2)$ și $A = \frac{1}{2}\mathbb{E}x_t^2$.
  3. Arătați că dispersia asimptotică a lui $\sqrt{n}(\hat{\alpha} - \alpha)$ este $A^{-1}BA^{-1} = \frac{\kappa_z - 1}{2}A^{-1}$; dispersia în eșantion finit o împarte la n.
  4. Calculați raportul e.s. $\sqrt{(\kappa_z - 1)/2}$ pentru Student-t cu $\nu = 6{,}25$ și pentru $\hat{\kappa}_z = 4{,}73$ (kurtosis-ul reziduurilor $\hat{z}_t$ ale GARCH-N pe S&P 500).
- **Raportați**: s_t, A, B, raportul, două cifre; interpretare: ce se întîmplă cu teoria în $\sqrt{n}$ cînd $\kappa_z = \infty$?
- Model: A2
- Notebook: secțiunea A5

înapoi Lista exercițiilor

A6 [Propus]: autocorelația pătratelor șocurilor — cerința

- **Întrebările**
  - este ACF a lui r_t^2 implicată de GARCH-N compatibilă cu datele?
  - cît de precisă este ACF de selecție?
- **Date**: forma ARMA(1,1) a lui ε_t^2 (slide: Forma ARMA, PIT și mulțimi de modele); ARMA(1,1) cu coeficientul AR ϕ și coeficientul MA θ: $\rho_1 = (1+\phi\theta)(\phi+\theta)/(1+2\phi\theta+\theta^2)$, $\rho_k = \phi^{k-1}\rho_1$; S&P 500 GARCH-N: $\hat{\omega} = 0{,}0253$, $\hat{\alpha} = 0{,}1205$, $\hat{\beta} = 0{,}8601$
- **Cerințe**
  1. Înlocuiți $\phi = \alpha + \beta$, $\theta = -\beta$ și deduceți $\rho_1(\varepsilon^2)$.
  2. Calculați ρ_1, ρ_{10} și reprezentați ACF teoretică față de ACF de selecție a lui $(r_t - \bar{r})^2$, lagurile 1–50.
  3. Simulați 200 de traiectorii GARCH-N de lungimea eșantionului (500 de zile inițiale eliminate; inovații Normale din `np.random.default_rng(44)`, dispersie inițială $\omega/(1-\alpha-\beta)$) și adăugați anvelopa de 95% a ACF de selecție.
- **Raportați**: formula, ρ_1, ρ_{10}, graficul; interpretare: este concordanța ACF a lui r_t^2 o verificare puternică sau slabă?
- Model: A1
- Notebook: secțiunea A6

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

B6 [Propus]: distribuțiile inovațiilor pentru Bitcoin — cerința

- **Întrebările**
  - ce distribuție a inovațiilor descrie Bitcoin?
  - este validă inferența QMLE Gaussian în acest caz?
- **Date**: prețurile de închidere ale Bitcoin (BTC/USD) din 2014-09-17; randamente 2014-09-18 – 2026-09-18, 4 384 de randamente pe zile calendaristice; GARCH(1,1), medie constantă
- **Cerințe**
  1. Estimați cu inovații Normale și Student-t; comparați ℓ și BIC și reprezentați graficele QQ ale lui $\hat{z}_t$ față de fiecare lege estimată.
  2. Testați distribuția Normală ($1/\nu = 0$) față de Student-t prin LR cu legea la frontieră $\frac{1}{2}\chi^2_0 + \frac{1}{2}\chi^2_1$ (valoarea critică la 5%: 2,71).
  3. Opțional: adăugați distribuția t asimetrică (ν, λ) și GED (forma ν_G); testați $\lambda = 0$ prin LR; raportați fiecare parametru de formă cu e.s. și semnalați limitele active.
- **Raportați**: un tabel cu ℓ, BIC, persistență și parametrii de formă, graficul QQ, testele LR; interpretare:
  - cu $\hat{\nu} < 4$, este validă inferența QMLE Gaussian Hall & Yao (2003)?
  - prin ce diferă pentru MLE Student-t?
- Model: B1, B2
- Notebook: secțiunea B6

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

B5 extins [Rezolvat]: Giacomini–White și Model Confidence Set — cerința

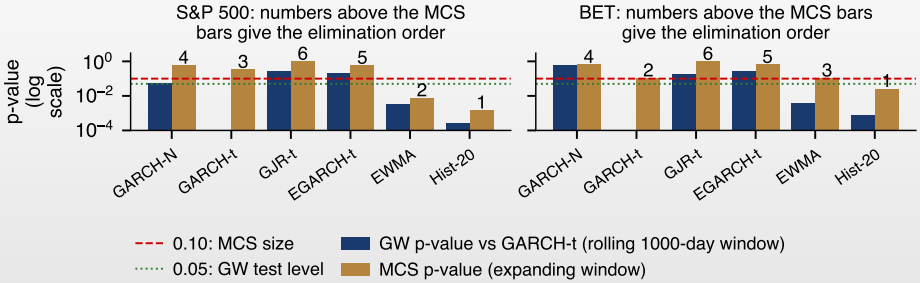
- **Întrebarea**: care comparații din B5 rămîn valabile după luarea în calcul a parametrilor estimați, a modelelor imbricate și a celor șase modele concurente?
- **Date**: S&P 500 și BET; fereastră mobilă (*rolling*) de $W = 1\,000$ de zile, reestimată în fiecare ianuarie (GW); pierderile QLIKE cu fereastră în expansiune din B5 (MCS)
- **Cerințe**
  1. Pentru S&P 500 și fiecare model m, formați $d_{t+1} = L^{m}_{t+1} - L^{GARCH\text{-}t}_{t+1}$ și $Z_{t+1} = (1, d_t)' \, d_{t+1}$; calculați $GW = n\bar{Z}'\hat{\Omega}^{-1}\bar{Z}$ cu $\hat{\Omega} = n^{-1}\sum Z_{t+1}Z'_{t+1}$ (n: numărul de prognoze, $\bar{Z}$: media lui Z_{t+1}) și comparați cu χ^2_2 (5,99) Giacomini & White (2006). Pentru prognoze la un pas, sub ipoteza nulă Z_{t+1} are media condiționată zero, deci $\hat{\Omega}$ este momentul de ordinul doi necentrat, fără laguri HAC.
  2. Calculați Model Confidence Set 90% Hansen, Lunde & Nason (2011): statistica T_R (cel mai mare $|t|$ al diferențelor de pierderi pe perechi), bootstrap staționar cu bloc mediu 10, 10 000 de extrageri, sămînța 42 (`arch.bootstrap.MCS`).
  3. Raportați ordinea eliminării și modelele păstrate, pentru ambele piețe.
- **Raportați**: statisticile GW și valorile lor p, valorile p MCS, graficul; interpretare:
  - de ce nu este valid DM pentru GJR-t față de GARCH-t West (1996), Clark & McCracken (2001)?
  - concordă DM și MCS?
- Notebook: secțiunea B5

B5 extins [Rezolvat]: rezolvare

Model	*GW* S&P	*p*	MCS *p* S&P	MCS *p* BET
GARCH-N	5,70	0,058	0,588	0,658
GARCH-t	–	–	0,341	0,108
GJR-t	2,51	0,285	1,000	1,000
EGARCH-t	3,19	0,202	0,588	0,658
EWMA	11,31	0,004	0,008	0,108
Hist-20	16,35	$<$ 0,001	0,002	0,026

- S&P 500: GW respinge doar EWMA și Hist-20; ordinea eliminării Hist-20, EWMA, GARCH-t, GARCH-N, EGARCH-t, GJR-t; păstrate: cele patru modele GARCH. BET: ordinea Hist-20, GARCH-t, EWMA, GARCH-N, EGARCH-t, GJR-t; MCS păstrează și EWMA ($p = 0{,}108$), aproape de pragul 0,10: includerea depinde de lungimea blocurilor și de frecvența reestimării
- Pe S&P 500, DM și MCS concordă: EWMA și Hist-20 sînt mai slabe în DM ($t = 3{,}47$; 4,10) și sînt primele modele eliminate din MCS; modelele GARCH rămîn în MCS

B5 extins [Rezolvat]: GW și MCS într-un grafic



- Sub H_0, diferența DM (modele imbricate, fereastră în expansiune) degenerează
- GW (fereastră mobilă de lungime fixă) testează metoda, sub condițiile teoremei: momente finite, dependență limitată, Ω nesingulară
- MCS controlează eroarea pentru cele șase modele sub ipotezele sale; pe pierderile din fereastra în expansiune, aceeași rezervă ca DM

MFM_ch5_seminar

B7 [Propus]: compararea prognozelor pe BET — cerința

- **Întrebarea**: rămîn valabile concluziile din B5 pentru bursa de la București?
- **Date**: BET, 2 675 de zile de prognoză, 2016–2026; aceleași șase modele, fereastră în expansiune, aproximare și cod ca în B5
- **Cerințe**
  1. Calculați QLIKE mediu, t DM față de GARCH-t și $\sum d_t$ cumulat.
  2. Estimați regresia MZ pentru GARCH-t cu erori HAC; raportați a, b, e.s., R^2 și p Wald și reprezentați graficul de calibrare.
  3. Puneți rezultatele S&P 500 și BET alături, cu fereastra de estimare a fiecărei cifre.
- **Raportați**: două tabele și două grafice; interpretare:
  - sînt calibrate prognozele pentru BET?
  - ce ați testa în continuare?
- Model: B5
- Notebook: secțiunea B7

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

B8 [Propus]: bootstrap și testul IGARCH pentru BET — cerința

- **Întrebările**
  - cît de precisă este persistența BET?
  - poate dispersia ei să aibă o rădăcină unitară?
- **Date**: BET GARCH-t, $\hat{p} = 0{,}9907$ (timp de înjumătățire 74 de zile); cei doi algoritmi și funcțiile din B4, $B = 999$; traiectorii de lungimea eșantionului BET, după 500 de zile inițiale eliminate, pornind de la dispersia de selecție BET; semințele 42/43
- **Cerințe**
  1. Rulați algoritmul 1 și raportați intervalul bazat pe percentile pentru p, intervalul timpului de înjumătățire și proporția extragerilor la $p = 1$.
  2. Comparați abaterea standard bootstrap a lui $\hat{p}^*$ cu e.s. robustă a lui $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$.
  3. Rulați algoritmul 2 și comparați valorile p bootstrap, din amestec și din χ^2_1, la 5%.
- **Raportați**: intervalele, cele două e.s., testul și graficul cu două panouri; interpretare: arată intervalele calculate separat pentru BET și S&P 500 care timp de înjumătățire este mai lung?
- Model: B4
- Notebook: secțiunea B8

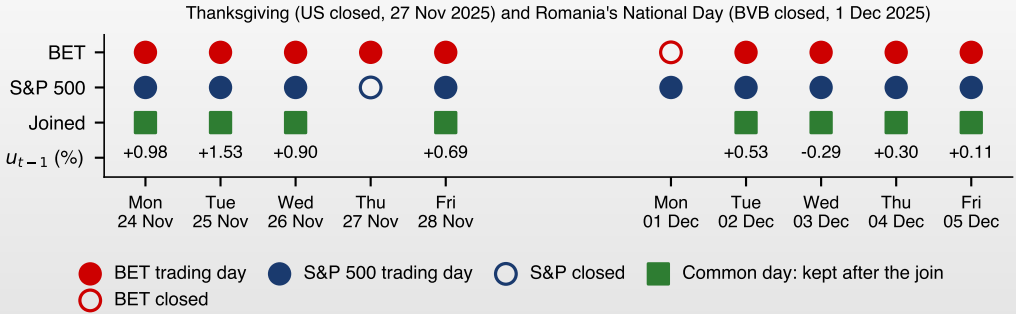
înapoi Lista exercițiilor

C2 [Propus]: efectul știrilor din SUA asupra volatilității BET — cerința (1/2): date și momentul observațiilor

- **Întrebările**
  - crește șocul S&P 500 de ieri dispersia BET de azi?
  - cu cît?
- **Date**: prețurile de închidere BET și S&P 500, 2000-01-07 – 2026-09-18; se aliniază *prețurile* pe zilele comune, apoi se calculează randamentele; t indexează zilele comune
- **Cerințe**
  1. Construiți eșantionul zilelor comune și $u_{t-\mathbf{1}}$, randamentul S&P 500 din ziua comună precedentă (Wall Street închide după București).
  2. Verificați săptămîna cu sărbători de mai jos: pe 2 decembrie 2025, $u_{t-\mathbf{1}}$ este randamentul S&P 500 de la 26 la 28 noiembrie (0,69%); precizați ce ședință americană lipsește și în ce randament este inclusă.
- **Raportați**: numărul zilelor comune și verificarea momentului
- Model: B1, B2
- Notebook: secțiunea C2

Înapoi Lista exercițiilor

C2 [Propus]: calendarul zilelor comune în jurul unei sărbători



- Marcaje pline: zile de tranzacționare; pătrate: zilele păstrate după alinierea prețurilor; cifrele sînt u_{t-1} pentru fiecare zi comună

MFM_ch5_seminar

C2 [Propus]: cerința (2/2): model, test, contribuție

- **Întrebările**: aceleași întrebări, acum ca model estimat
- **Date**: $r_t = \mu + \phi u_{t-1} + \varepsilon_t$, $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 + \delta u_{t-1}^2$, $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$ cu z_t Student-t standardizat; funcțiile din notebook `spill_negll`, `fit_spill`
- **Cerințe**
  1. Scrieți log-verosimilitatea pas cu pas (pornire σ_1^2 = dispersia de selecție) și estimați modelul nerestricționat și modelul cu $\delta = 0$.
  2. Testați $\delta = 0$ prin LR; deoarece $\delta \geq 0$, folosiți $\frac{1}{2}\chi_0^2 + \frac{1}{2}\chi_1^2$; repetați pe 2000–2012 și 2013–2026.
  3. Calculați termenul american cumulat $s_t = \beta s_{t-1} + \delta u_{t-1}^2$ cu $s_1 = 0$, partea s_t/σ_t^2 și volatilitatea fără el, $\sqrt{\sigma_t^2 - s_t}$; reprezentați-le.
- **Raportați**: estimările pe trei eșantioane, testele LR, graficul contribuției; un folder Quantlet (vezi criteriile) și un slide cu concluzia și principala limită; interpretare: legătura este cauzală sau predictivă?
- **Criterii de evaluare**: inferența corectă (frontieră, LR); un folder Quantlet reproductibil (README, script/notebook, sursa datelor, figură și metainfo); principala limită precizată

C3 [Propus]: Quasi Score-Driven (QSD) GARCH pe acțiuni americane — cerința (1/2)

- **Întrebarea**: este grosimea cozilor randamentelor același lucru cu atenuarea șocurilor mari în actualizarea dispersiei Blasques, Francq & Laurent (2023)?
- **Date**: începeți cu JPMorgan (prețuri de închidere ajustate) și VIX (valori de închidere), aliniate pe zilele comune, 3 ianuarie 1995 – 28 februarie 2019; $r_t = 100\,\Delta \ln P_t$, $X_t = \mathrm{VIX}_t^2/252$ (VIX din ziua t intră în f_{t+1}); modelul (recursia estimată): $y_t = r_t - \mu - \phi r_{t-1} = \sqrt{f_t}\,\epsilon_t$, ϵ_t Student-t standardizat cu $1/\xi$ grade de libertate; $f_{t+1} = \omega + \varpi X_t + \alpha\,\Psi\!\left(\frac{1+\zeta}{1-2\zeta+\zeta\epsilon_t^2}\right)\epsilon_t^2 f_t + \beta f_t$, $\Psi(x) = x\tanh(cx/2)$, $c = 1\,000$, $\zeta \in (-1, 1/2)$, f_1 = dispersia lui y_t; ϖ: ponderea termenului VIX X_t; parametrii: ξ = grosimea cozilor, ζ = atenuarea; $\zeta = 0$: GARCH(1,1)-t; $\zeta = \xi$: Beta-t-GARCH
- **Cerințe**
  1. Estimați prin MLE GARCH(1,1)-t ($\zeta = 0$), Beta-t-GARCH ($\zeta = \xi$) și QSD (ζ liber) cu `qsd_negll` și `fit_qsd` (notebook-ul `MFM_ch5_quasi_score_driven`).
  2. Testați $\zeta = 0$ și $\xi = \zeta$ prin LR față de χ^2_1 ($\zeta = 0$ este interior datorită lui Ψ).
- **Raportați**: estimările, log-verosimilitățile, cele două teste LR
- Model: B1, B2

înapoi Lista exercițiilor

C3 [Propus]: cerința (2/2): diagnostic și extindere

- **Întrebările**
  - sînt adecvate cele trei modele?
  - rămîne răspunsul valabil dincolo de o acțiune?
- **Date**: estimările din cerința 1; PIT-ul $u_t = F(\epsilon_t)$ (slide: Forma ARMA, PIT și mulțimi de modele); T: lungimea eșantionului
- **Cerințe**
  1. Reprezentați $\sqrt{f_t}$ pentru cele trei modele în jurul celui mai mare șoc și histogramele PIT.
  2. Calculați statistica naivă $(\sum_t u_t - T/2)/\sqrt{T/12}$ și explicați de ce ignoră eroarea de estimare (corecția din Pierce (1982) scade dispersia sub $T/12$).
  3. Opțional: extindeți la cele 11 acțiuni ale cursului și pînă la 18 septembrie 2026; raportați frecvențele de respingere cu un interval binomial care presupune, ipotetic, respingeri independente.
- **Raportați**: un folder Quantlet (vezi criteriile) și un slide cu tabelul, testele și principala limită; interpretare: de ce nu pot 11 companii selectate, încă listate, confirma proporția de 89,5% din lucrare (acțiunile pentru care $\zeta = 0$ este respinsă)?
- **Criterii de evaluare**: inferența corectă (frontieră, LR); un folder Quantlet reproductibil (README, script/notebook, sursa datelor, figură și metainfo); principala limită precizată

Acronime folosite în acest material (1/2)

- **ACF**: AutoCorrelation Function — *funcția de autocorelație*
- **AI**: Artificial Intelligence — *inteligență artificială*
- **AIC**: Akaike Information Criterion — *criteriul informațional Akaike*
- **AR**: AutoRegressive (model) — *model autoregresiv*
- **ARCH**: AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity — *heteroscedasticitate condiționată autoregresivă*
- **ARMA**: AutoRegressive Moving Average (model) — *model autoregresiv cu medie mobilă*
- **BET**: Bucharest Exchange Trading (index) — *indicele de referință al Bursei de Valori București*
- **BIC**: Bayesian Information Criterion — *criteriul informațional bayesian*
- **BVB**: Bursa de Valori București
- **DM**: Diebold–Mariano (test) — *testul Diebold–Mariano de comparare a prognozelor*
- **EGARCH**: Exponential GARCH — *GARCH exponențial*
- **EWMA**: Exponentially Weighted Moving Average — *medie mobilă ponderată exponențial*
- **GARCH**: Generalised AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity — *heteroscedasticitate condiționată autoregresivă generalizată*
- **GARCH-N**: GARCH with Normal innovations — *GARCH cu inovații Normale*
- **GED**: Generalised Error Distribution — *distribuția generalizată a erorilor*
- **GJR**: Glosten–Jagannathan–Runkle (asymmetric GARCH) — *GARCH asimetric Glosten–Jagannathan–Runkle*

Acronime folosite în acest material (2/2)

- **GJR-GARCH**: Glosten–Jagannathan–Runkle GARCH — *GARCH asimetric Glosten–Jagannathan–Runkle*
- **GW**: Giacomini–White (test) — *testul Giacomini–White*
- **HAC**: Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent (standard errors) — *erori standard robuste la heteroscedasticitate și autocorelație*
- **IGARCH**: Integrated GARCH — *GARCH integrat*
- **LM**: Lagrange Multiplier — *multiplicatorul Lagrange*
- **LR**: Likelihood Ratio (test) — *testul raportului de verosimilitate*
- **MA**: Moving Average — *medie mobilă*
- **MCS**: Model Confidence Set — *mulțimea de încredere a modelelor*
- **MLE**: Maximum Likelihood Estimation — *estimarea prin metoda verosimilității maxime*
- **MZ**: Mincer–Zarnowitz (regression) — *regresia Mincer–Zarnowitz*
- **NIC**: News Impact Curve
- **PIT**: Probability Integral Transform — *transformarea integrală de probabilitate*
- **QLIKE**: Quasi-LIKElihood (loss function) — *funcția de pierdere de tip cvasi-verosimilitate*
- **QMLE**: Quasi-Maximum Likelihood Estimator — *estimatorul de cvasi-verosimilitate maximă*
- **QQ**: Quantile–Quantile (plot) — *graficul cuantilă–cuantilă*
- **QSD**: Quasi Score-Driven (model) — *model bazat pe un cvasi-scor*
- **SUA**: Statele Unite ale Americii
- **VIX**: CBOE Volatility IndeX — *indicele de volatilitate CBOE*

Bibliografie (1/3)

- Andrews, D.W.K. (2000). Inconsistency of the bootstrap when a parameter is on the boundary of the parameter space. *Econometrica*, 68(2), 399–405.
- Andrews, D.W.K. (2001). Testing when a parameter is on the boundary of the maintained hypothesis. *Econometrica*, 69(3), 683–734.
- Blasques, F., Francq, C., Laurent, S. (2023). Quasi score-driven models. *Journal of Econometrics*, 234(1), 251–275.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3), 307–327.
- Bollerslev, T., Wooldridge, J.M. (1992). Quasi-maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time-varying covariances. *Econometric Reviews*, 11(2), 143–172.
- Clark, T.E., McCracken, M.W. (2001). Tests of equal forecast accuracy and encompassing for nested models. *Journal of Econometrics*, 105(1), 85–110.
- Diebold, F.X., Gunther, T.A., Tay, A.S. (1998). Evaluating density forecasts with applications to financial risk management. *International Economic Review*, 39(4), 863–883.

Bibliografie (2/3)

- Diebold, F.X., Mariano, R.S. (1995). Comparing predictive accuracy. *Journal of Business & Economic Statistics*, 13(3), 253–263.
- Engle, R.F., Ng, V.K. (1993). Measuring and testing the impact of news on volatility. *Journal of Finance*, 48(5), 1749–1778.
- Franke, J., Härdle, W.K., Hafner, C.M. (2019). Statistics of Financial Markets: An Introduction, ed. a 5-a. Springer.
- Giacomini, R., White, H. (2006). Tests of conditional predictive ability. *Econometrica*, 74(6), 1545–1578.
- Glosten, L.R., Jagannathan, R., Runkle, D.E. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *Journal of Finance*, 48(5), 1779–1801.
- Hall, P., Yao, Q. (2003). Inference in ARCH and GARCH models with heavy-tailed errors. *Econometrica*, 71(1), 285–317.
- Hansen, B.E. (1994). Autoregressive conditional density estimation. *International Economic Review*, 35(3), 705–730.

Bibliografie (3/3)

- Hansen, P.R., Lunde, A., Nason, J.M. (2011). The model confidence set. *Econometrica*, 79(2), 453–497.
- J.P. Morgan/Reuters (1996). RiskMetrics — Technical Document, ed. a 4-a. New York.
- Li, W.K., Mak, T.K. (1994). On the squared residual autocorrelations in non-linear time series with conditional heteroskedasticity. *Journal of Time Series Analysis*, 15(6), 627–636.
- Mincer, J., Zarnowitz, V. (1969). The evaluation of economic forecasts. În J. Mincer (ed.), *Economic Forecasts and Expectations: Analysis of Forecasting Behavior and Performance*, NBER.
- Patton, A.J. (2011). Volatility forecast comparison using imperfect volatility proxies. *Journal of Econometrics*, 160(1), 246–256.
- Pierce, D.A. (1982). The asymptotic effect of substituting estimators for parameters in certain types of statistics. *The Annals of Statistics*, 10(2), 475–478.
- West, K.D. (1996). Asymptotic inference about predictive ability. *Econometrica*, 64(5), 1067–1084.