








Modelarea piețelor financiare

Seminarul 6: Volatilitate multivariată și dependență — aplicații



Daniel Traian PELE
Drd. Antoaneta Amza, antoaneta.amza@csie.ase.ro

Academia de Studii Economice din București
IDA Institute Digital Assets
Blockchain Research Center
AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance
Academia Română, Institutul de Prognoză Economică
MSCA Digital Finance

Cînd evoluează împreună două piețe?

- Întrebarea seminarului
  - **cînd evoluează împreună două piețe și cît de precise sînt estimările?**
- Livrabile
  - răspunsurile la exercițiile A
  - un tabel și un grafic pentru fiecare exercițiu B
  - liniile corectate ale răspunsului de inteligență artificială (AI) din C1
  - o frază de interpretare pentru fiecare exercițiu
- Criterii de evaluare
  - derivări corecte în exercițiile A
  - estimări însoțite de incertitudine: erori standard, intervale sau valori p bootstrap
  - o interpretare pentru fiecare rezultat
  - fiecare eroare a răspunsului AI din C1 explicată, nu doar corectată
- Notebook-ul de azi: chapter6_seminar_notebook.ipynb (Colab)
- Seminar: prof. Daniel Traian Pele, danpele@ase.ro; drd. Antoaneta Amza, antoaneta.amza@csie.ase.ro

Ce active și orizonturi comparăm?

- Un Exchange-Traded Fund (ETF) este un fond tranzacționat la bursă
- SPY (*SPDR S&P 500 ETF Trust*) urmărește indicele bursier S&P 500 (*Standard & Poor's* 500); TLT (*iShares 20+ Year Treasury Bond ETF*) deține obligațiuni de stat americane cu scadențe de peste 20 de ani
- BET: indicele de referință al Bursei de Valori București (*Bucharest Exchange Trading*); Euro Stoxx 50 și S&P 500 au ore de închidere diferite
- VIX: indicele de volatilitate al bursei Cboe (*Chicago Board Options Exchange*), dedus din cotațiile opțiunilor pe S&P 500; în C3, VIX este comparat cu volatilitatea comună globală (COVOL, *common volatility*)
- Prețurile se aliniază pe date comune înainte de calculul randamentelor logaritmice
- Observațiile săptămînale folosesc închiderile de vineri; un randament pe două zile acoperă două zile de tranzacționare

Datele folosite

Exercițiu	Seria, prețul folosit	Frecvență, eșantion	Rînduri
B1, A5	SPY și TLT, prețuri de închidere ajustate	zilnic, 31 iulie 2002 – 18 septembrie 2026	6 073
A2, B2, B6	S&P 500 și Euro Stoxx 50, închideri	săptămînal (vineri), 14 ianuarie 2000 – 18 septembrie 2026	1 393
B4	BET și Euro Stoxx 50, închideri	zilnic, 5 ianuarie 2010 – 18 septembrie 2026	4 154
B3, A1 ext.	S&P 500, Euro Stoxx 50 și BET, închideri	pe 2 zile, 5 ianuarie 2006 – 30 decembrie 2021	3 880
B5	Bitcoin (în USD) și S&P 500, închideri	zilnic, 18 septembrie 2014 – 18 septembrie 2026	3 018
C2	BET și Euro Stoxx 50, închideri	săptămînal, 15 ianuarie 2010 – 18 septembrie 2026	871

- Rînduri: observațiile de randament după alinierea prețurilor pe zilele comune de tranzacționare (regula pentru orice analiză comună); randamente logaritmice; randamentele săptămînale din ultima închidere comună a fiecărei săptămîni
- Prețurile zilnice din datele cursului, cîte o serie pe activ: pentru ETF-uri se folosește prețul de închidere ajustat pentru spliturі și distribuții, pentru indici și Bitcoin prețul de închidere; C3 folosește 20 de ETF-uri listate în SUA (Statele Unite ale Americii) și indicele VIX

Pregătire: rulați și verificați

```
# notebook section "Data" defines
# joint_returns(names, start) and
# weekly_returns(names, start):
# prices aligned on common days, then log returns
R = joint_returns(['spy', 'tlt'])
print(len(R), R.index[0].date(),
      R.index[-1].date())
print((100 * R).head(3).round(3))
W = weekly_returns(['sp500', 'stoxx'],
                   start='2000-01-01')
print(len(W))
```

- Rezultat așteptat: 6 073 rînduri de la 31 iulie 2002 la 18 septembrie 2026, apoi

date	SPY (%)	TLT (%)
31 iulie 2002	0,242	1,231
1 august 2002	−2,646	0,568
2 august 2002	−2,267	1,019

- și 1 393 de perechi săptămînale
- Dacă un număr diferă: verificați seria, prețul folosit (închiderea sau închiderea ajustată) și faptul că prețurile au fost aliniate înainte de calculul randamentelor

Harta exercițiilor

Exercițiu	Întrebarea	Tip	Exemplu de urmat
A1	cît dintr-o corelație de criză se datorează volatilității?	Rezolvat	–
A2	ce parametru de copulă corespunde lui τ Kendall?	Rezolvat	–
A3	apar valorile extreme simultan în copula t?	Rezolvat	–
B1	cum evoluează corelația SPY–TLT?	Rezolvat	–
B2	copula Gaussiană sau t pentru doi indici bursieri?	Rezolvat	–
B3	contagiune în 2008 și 2020? (cerințele 3–4 după curs)	Propus	A1
C1	ce este greșit într-un răspuns AI?	Propus	A2, A3
B4, C2	pierderi comune; integrare după 2020 (acasă, după curs)	Propus	B2, A2; A1, B1
Extensii	A1, A2, B1, B2 extinse; A4–A6, B5, B6, C3 (opționale)	ambele	la fiecare cerință

- **[Rezolvat]**: rezolvarea completă în slide-uri și în notebook, un model de urmat; **[Propus]**: îl rezolvați dumneavoastră, rezolvarea se discută la seminar
- Partea A: derivări pe hîrtie; Partea B: estimare și inferență pe date reale, fiecare cu o interpretare; Partea C: critica unui răspuns AI și o întrebare deschisă

Corelația Pearson

- **Corelația Pearson**: covarianța a două randamente împărțită la produsul abaterilor lor standard

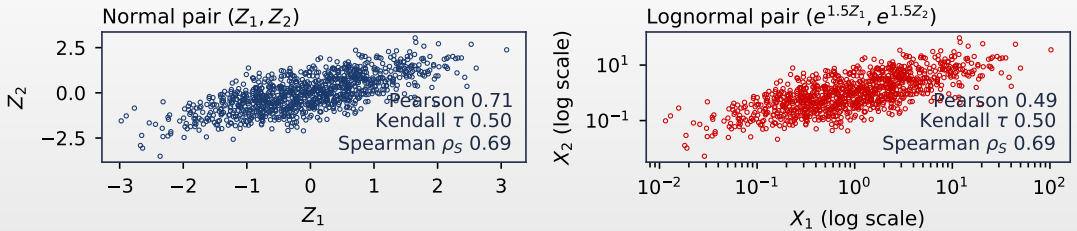
$$\rho = \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sigma_1 \sigma_2}, \qquad \hat{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i} - \bar{x}_1)^2 \sum_{i=1}^{n}(x_{2i} - \bar{x}_2)^2}}$$

  - X_1, X_2: cele două randamente; σ_1, σ_2: abaterile lor standard; x_{1i}, x_{2i}: observația i din n; $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$: mediile de selecție; $\hat{}$ indică o estimare
  - $\rho = 0$: nicio dependență *liniară*, ceea ce nu implică independența
  - Necesită dispersii finite și depinde de marginale: o transformare crescătoare a lui X_1 (de ex. e^{X_1}) modifică ρ (slide-ul următor)
- **Beta** lui X_2 față de X_1 (C2): panta regresiei lui X_2 pe X_1

$$\beta = \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\text{Var}(X_1)} = \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

  - $\beta = 0{,}5$: o variație de 1% a lui X_1 este însoțită în medie de o variație de 0,5% a lui X_2

Corelația Pearson și măsurile de rang



- Stînga: 1 000 de perechi simulate dintr-o distribuție Normală bivariată cu $\rho = 0{,}7$; dreapta: aceleași perechi după transformarea $x \mapsto e^{\mathbf{1{,}5}x}$ a ambelor coordonate
- Dependența este aceeași, deoarece transformarea este crescătoare și păstrează rangurile
  - Corelația Pearson scade de la 0,71 la 0,49: ea amestecă dependența cu forma marginalelor
  - τ Kendall (0,50) și ρ_S Spearman (0,69) nu se modifică: depind doar de ranguri, adică de copulă (slide-urile următoare)
- Consecință (A6): cu marginale fixate, nu orice ρ din $[-1, 1]$ poate fi atins

Copule și teorema lui Sklar

- **Teorema lui Sklar** Nelsen (2006): o repartiție comună = marginalele ei + o copulă care conține toată dependența

$$F(x_1, x_2) = C\big(F_1(x_1), F_2(x_2)\big), \qquad C(u, v) = P(U \le u,\ V \le v)$$

  - F: funcția de repartiție comună a lui (X_1, X_2); F_1, F_2: funcțiile de repartiție marginale
  - $U = F_1(X_1)$, $V = F_2(X_2)$: transformatele integrale de probabilitate, ambele uniforme pe $[0, 1]$; copula C este funcția lor de repartiție comună
  - Deci marginalele (cozi groase, volatilitate) și dependența C se pot modela separat

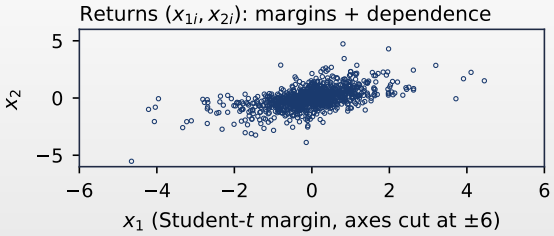
- **Densitatea copulei** și densitatea comună

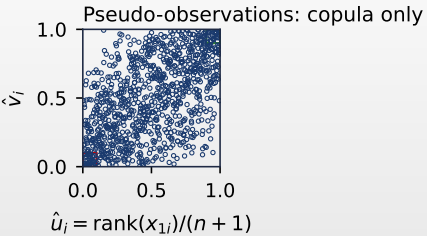
$$c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u\, \partial v}, \qquad f(x_1, x_2) = c\big(F_1(x_1), F_2(x_2)\big)\, f_1(x_1)\, f_2(x_2)$$

  - f_1, f_2: densitățile marginale; c este factorul prin care densitatea comună diferă de cea de sub independență ($c \equiv 1$)

- Trei copule de referință; orice copulă se află între **marginile Fréchet–Hoeffding** $W \le C \le M$
  - $\Pi(u, v) = uv$: independență; $M(u, v) = \min(u, v)$: $V = U$ (comonotonie); $W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$: $V = 1 - U$ (contramonotonie)

Pseudo-observații și copula empirică





1000 simulated pairs — lower-tail corner (joint lows) — upper-tail corner (joint highs)

- În date F_i sînt necunoscute: **pseudo-observațiile** Genest, Ghoudi & Rivest (1995) le înlocuiesc cu ranguri
  - $\hat{u}_i = \mathrm{rang}(x_{\mathbf{1}i})/(n+1)$, $\hat{v}_i = \mathrm{rang}(x_{\mathbf{2}i})/(n+1)$; împărțirea la $n+1$ menține valorile strict în $(0,1)$; exemplu, $n=4$: $x = (0{,}3,\ -1{,}2,\ 2{,}0,\ 0{,}1)$ are rangurile $(3,1,4,2)$, deci $\hat{u} = (0{,}6,\ 0{,}2,\ 0{,}8,\ 0{,}4)$
  - **Copula empirică**: $C_n(u,v) = \frac{1}{n}\sum_{i=\mathbf{1}}^{n} 1\{\hat{u}_i \le u,\ \hat{v}_i \le v\}$, cu $1\{\cdot\} = 1$ dacă are loc condiția și 0 altfel
- Graficul: perechi simulate cu marginale cu cozi groase (stînga) și pseudo-observațiile lor (dreapta); colțurile sînt extremele comune

Corelații de rang

- τ **Kendall**: probabilitatea concordanței minus probabilitatea discordanței

$$\tau = P\big[(X_1 - X_1')(X_2 - X_2') > 0\big] - P\big[(X_1 - X_1')(X_2 - X_2') < 0\big], \qquad \hat{\tau} = \frac{n_c - n_d}{n(n-1)/2}$$

  - (X_1, X_2), (X_1', X_2'): două extrageri independente ale perechii; concordante: ambele coordonate variază în același sens
  - n_c, n_d: numerele de perechi concordante și discordante dintre cele $n(n-1)/2$ perechi de observații

- ρ_S **Spearman**: corelația Pearson a rangurilor

$$\rho_S = \operatorname{corr}(U, V) = 12\,\mathbb{E}[UV] - 3, \qquad \hat{\rho}_S = \operatorname{corr}(\hat{u}_i, \hat{v}_i)$$

  - $\mathbb{E}[UV] = 1/4$ sub independență, deci $\rho_S = 0$; atît τ, cît și ρ_S iau valori în $[-1, 1]$ și depind doar de C

- Pentru copula Gaussiană cu parametrul ρ (slide-ul următor), ambele sînt funcții cunoscute de ρ

$$\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho, \qquad \rho_S = \frac{6}{\pi} \arcsin \frac{\rho}{2}$$

  - Exemplu: $\rho = 0{,}5$ dă $\tau = 0{,}333$ și $\rho_S = 0{,}483$; prima formulă este valabilă și pentru copula t

Copule eliptice

- **Copula Gaussiană**: dependența unei distribuții Normale bivariate

$$C_{\rho}^{Ga}(u, v) = \Phi_{\rho}(\Phi^{-1}(u),\ \Phi^{-1}(v))$$

  - Φ: funcția de repartiție a lui $N(0, 1)$, Φ^{-1} funcția ei cuantilă; Φ_{ρ}: funcția de repartiție a Normalei bivariate cu dispersii 1 și corelația $\rho \in (-1, 1)$

- **Copula t**: dependența unei distribuții Student t bivariate

$$C_{\rho,\nu}^{t}(u, v) = t_{\rho,\nu}(t_{\nu}^{-1}(u),\ t_{\nu}^{-1}(v))$$

  - t_{ν}: funcția de repartiție Student t cu ν grade de libertate, t_{ν}^{-1} funcția ei cuantilă; $t_{\rho,\nu}$: funcția de repartiție t bivariată cu parametrul de corelație ρ
  - ρ: intensitatea dependenței; ν: cît de des apar extremele simultan, ν mai mic = mai multe extreme comune; $\nu \to \infty$ readuce copula Gaussiană

- Ambele sînt simetrice: valorile mici comune și valorile mari comune sînt la fel de probabile
  - Legătura cu τ Kendall, pentru ambele: $\rho = \sin(\pi\tau/2)$, de ex. $\tau = 0{,}5$ dă $\rho = 0{,}707$

Copule arhimediene

- **Clayton** ($\theta > 0$): dependența este concentrată în valorile *mici* comune

$$C_\theta^{Cl}(u,v) = \left(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1\right)^{-\mathbf{1}/\theta}, \qquad \tau = \frac{\theta}{\theta+2} \iff \theta = \frac{2\tau}{1-\tau}$$

- **Gumbel** ($\theta \geq 1$): dependența este concentrată în valorile *mari* comune

$$C_\theta^{Gu}(u,v) = \exp\Big(-\left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right]^{\mathbf{1}/\theta}\Big), \qquad \tau = 1 - \frac{1}{\theta} \iff \theta = \frac{1}{1-\tau}$$

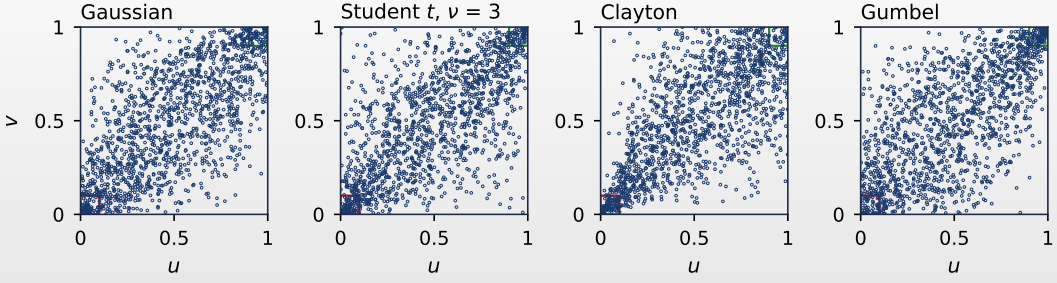
- **Frank** ($\theta \neq 0$): simetrică, fără extreme comune

$$C_\theta^{Fr}(u,v) = -\frac{1}{\theta}\ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)}{e^{-\theta}-1}\right), \qquad \tau = 1 - \frac{4}{\theta}\left[1 - D_{\mathbf{1}}(\theta)\right]$$

  - $D_{\mathbf{1}}(\theta) = \frac{\mathbf{1}}{\theta}\int_{\mathbf{0}}^{\theta} \frac{t}{e^t - \mathbf{1}}\,dt$: funcția Debye; $\tau(\theta)$ nu are inversă explicită, deci θ se obține numeric (A2)

- θ: parametrul de dependență; un θ mai mare înseamnă dependență mai puternică; Clayton cu $\theta \to 0$ și Gumbel cu $\theta = 1$ dau independența *uv*

Patru familii cu același tau Kendall



- 1 500 de perechi simulate din fiecare familie, toate cu $\tau = 0{,}5$: Gaussiană $\rho = 0{,}707$, t $\rho = 0{,}707$ și $\nu = 3$, Clayton $\theta = 2$, Gumbel $\theta = 2$
  - Norii de puncte arată asemănător la mijloc; diferă în colțuri: Clayton aglomerează colțul de jos, Gumbel colțul de sus, t pe amîndouă
- **Copula de supraviețuire (rotită)**: copula lui $(1 - U, 1 - V)$, folosită pentru pierderi $L = -X$ (B4)
  - $\hat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v)$: inversează cele două colțuri, deci un Clayton rotit are dependența în valorile mari comune

Dependența în cozi

- **Dependența în cozi** Demarta & McNeil (2005): probabilitatea ca o variabilă să fie extremă, dat fiind că cealaltă este extremă

$$\lambda_L = \lim_{q \downarrow \mathbf{0}} P(V \leq q \mid U \leq q) = \lim_{q \downarrow \mathbf{0}} \frac{C(q,q)}{q}, \qquad \lambda_U = \lim_{q \downarrow \mathbf{0}} P(V > 1-q \mid U > 1-q)$$

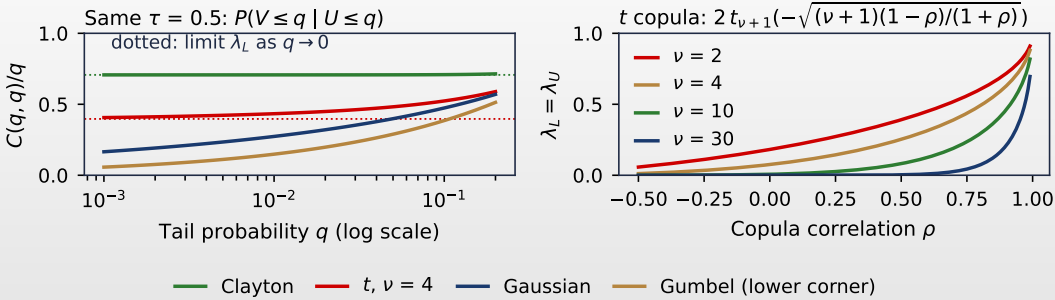
  - q: probabilitatea din coadă (de ex. $q = 5\%$: cele mai proaste 5% dintre zile); λ_L: coada inferioară (*lower tail*, crahuri comune), λ_U: coada superioară (*upper tail*, creșteri comune); ambele în $[0,1]$
  - $\lambda > 0$: extremele apar simultan indiferent cît de extreme sînt; $\lambda = 0$: independență asimptotică
  - La un q finit, $C(q,q)/q$ este o probabilitate care se poate estima (B2: $C_n(q,q)/q$); λ este doar limita ei

- Forme închise

$$\lambda_L^t = \lambda_U^t = 2\, t_{\nu+\mathbf{1}}\Big(-\sqrt{\tfrac{(\nu+\mathbf{1})(\mathbf{1}-\rho)}{\mathbf{1}+\rho}}\Big), \qquad \lambda_L^{Cl} = 2^{-\mathbf{1}/\theta}, \qquad \lambda_U^{Gu} = 2 - 2^{\mathbf{1}/\theta}$$

  - $t_{\nu+\mathbf{1}}$: funcția de repartiție Student t cu $\nu+1$ grade de libertate (A3 o derivă); Gaussiană: $\lambda = 0$ pentru $|\rho| < 1$; Clayton $\lambda_U = 0$, Gumbel $\lambda_L = 0$, Frank $\lambda_L = \lambda_U = 0$
  - Exemplu, $\tau = 0{,}5$: Gaussiană $\lambda = 0$; Clayton $\theta = 2$, $\lambda_L = 2^{-\mathbf{1}/\mathbf{2}} = 0{,}707$; Gumbel $\theta = 2$, $\lambda_U = 2 - \sqrt{2} = 0{,}586$: același τ, crahuri comune foarte diferite

Crahurile comune la un nivel finit



- Stînga: $C(q,q)/q$ pentru patru copule cu $\tau = 0{,}5$, din funcțiile de repartiție exacte; punctat: limitele λ_L
  - La $q = 10\%$ cele patru valori sînt apropiate; la $q = 0{,}1\%$ Clayton păstrează 0,71, t 0,41, iar copula Gaussiană coboară la 0,17 și continuă să scadă
- Dreapta: limita copulei t crește cu ρ și scade cînd ν crește; este pozitivă chiar și pentru $\rho < 0$

Estimarea unei copule: verosimilitatea și AIC

- **Verosimilitatea maximă canonică** (CML) Genest, Ghoudi & Rivest (1995): maximizăm log-verosimilitatea copulei pe pseudo-observații; marginalele nu se modelează

$$\ell(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln c_\theta(\hat{u}_i, \hat{v}_i), \qquad \hat{\theta} = \arg\max_\theta \ell(\theta)$$

  - c_θ: densitatea copulei cu vectorul de parametri θ (de ex. (ρ, ν) pentru copula t); un ℓ mai mare = perechile sînt mai probabile sub model

- **AIC** (criteriul informațional Akaike): adecvarea penalizată cu numărul de parametri

$$\mathrm{AIC} = -2\,\ell(\hat{\theta}) + 2k$$

  - k: numărul parametrilor copulei; se preferă familia cu AIC *mai mic*; o diferență de peste 10 puncte este un sprijin puternic
  - Familiile cu același k (Clayton, Gumbel, Frank, Gaussiană: $k = 1$) se ordonează simplu după ℓ

Testul raportului de verosimilitate

- **Raportul de verosimilitate** (LR) pentru un model restricționat H_0 inclus într-un model mai larg H_1

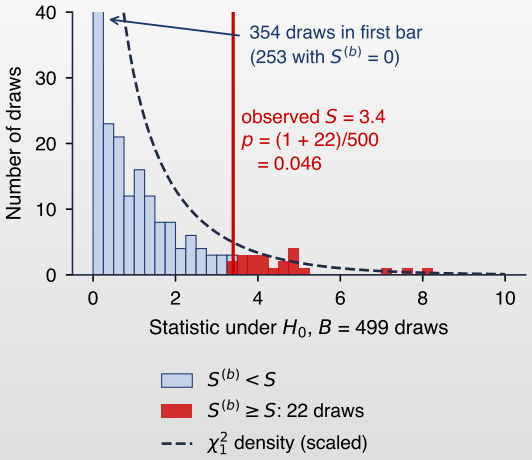
$$LR = 2(\ell_1(\hat{\theta}_1) - \ell_0(\hat{\theta}_0)) \geq 0$$

  - ℓ_1, ℓ_0: log-verosimilitățile maximizate ale celor două modele; un LR mare = restricția reduce mult adecvarea = dovadă împotriva lui H_0
- Distribuția de referință cînd valoarea din H_0 este *în interiorul* spațiului parametrilor

$$LR \xrightarrow{d} \chi^2_r, \qquad p = P(\chi^2_r \geq LR)$$

  - r: numărul restricțiilor; $\xrightarrow{d}$: convergență în distribuție cînd $n \to \infty$; de ex. $r = 1$: respingem la 5% cînd $LR > 3{,}84$
  - Pe *frontieră*, referința χ^2_r nu mai este valabilă: copula Gaussiană este copula t cu $\nu = \infty$
  - Atunci valoarea p se obține printr-un bootstrap parametric (slide-ul următor)

Valoarea p prin bootstrap parametric



- Cînd distribuția de referință este necunoscută, o simulăm sub H_0
  - estimăm modelul din H_0; simulăm din el B eșantioane de volum n
  - pe fiecare eșantion: recalculăm rangurile, reestimăm ambele modele, recalculăm statistica $S^{(b)}$, $b = 1, \ldots, B$
- Valoarea p: proporția statisticilor simulate cel puțin egale cu S observat

$$p = \frac{1 + \#\{b : \ S^{(b)} \geq S\}}{B + 1}$$

  - $\#\{\cdot\}$: numărul extragerilor; cu $B = 499$, cel mai mic p posibil este $1/500 = 0{,}002$
  - Graficul (simulat): jumătate dintre valorile sub H_0 sînt exact 0, deci coada χ^2_1 ($p = 0{,}065$) este prea mare aici; bootstrap-ul dă $p = 0{,}046$

Adecvarea: transformarea Rosenblatt

- **Transformarea Rosenblatt**: dacă copula este corectă, transformă perechile în uniforme *independente*

$$e_{1i} = \hat{u}_i, \qquad e_{2i} = C_{\hat{\theta}}(\hat{v}_i \mid \hat{u}_i) = \frac{\partial C_{\hat{\theta}}(u, v)}{\partial u}\Big|_{(\hat{u}_i, \hat{v}_i)}$$

  - $C(v \mid u) = P(V \le v \mid U = u)$: funcția de repartiție condiționată a lui V dat fiind $U = u$
  - Gaussiană: $C(v \mid u) = \Phi\big((y - \rho x)/\sqrt{1-\rho^2}\big)$, $x = \Phi^{-1}(u)$, $y = \Phi^{-1}(v)$
  - t: $C(v \mid u) = t_{\nu+1}\Big((y - \rho x)/\sqrt{(\nu + x^2)(1-\rho^2)/(\nu+1)}\Big)$, $x = t_\nu^{-1}(u)$, $y = t_\nu^{-1}(v)$ (rezultatul folosit în A3)

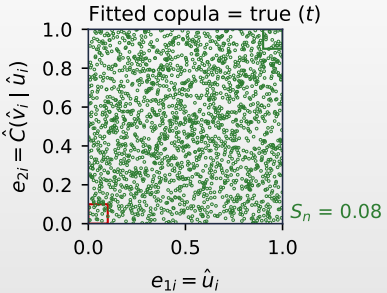
- **Statistica testului** Genest, Rémillard & Beaudoin (2009): distanța Cramér–von Mises a lui (e_{1i}, e_{2i}) față de independență

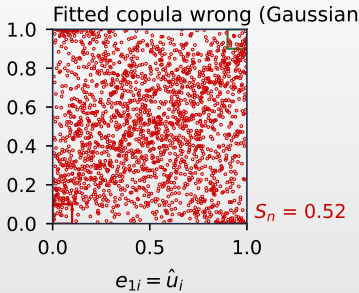
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \big[D_n(e_{1i}, e_{2i}) - e_{1i}\, e_{2i}\big]^2, \qquad D_n(a, b) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} 1\{e_{1j} \le a,\ e_{2j} \le b\}$$

  - D_n: funcția de repartiție empirică a perechilor transformate; $e_1 e_2$: valoarea ei sub independență; S_n mare = model inadecvat; valoarea p prin bootstrap-ul parametric de pe slide-ul anterior

- În B2 și B4 folosim varianta integrală pe pătratul unitate, $S_n^{(B)} = n \int_0^1 \int_0^1 [D_n(a, b) - ab]^2\, da\, db$, cu bootstrap-ul aplicat aceleiași statistici; valorile ei nu se compară cu S_n de mai sus

Transformarea Rosenblatt pe date simulate





- 2 000 de perechi simulate dintr-o copulă t ($\rho = 0{,}5$, $\nu = 2$), transformate cu copula t corectă (stînga) și cu o copulă Gaussiană cu același τ (dreapta)
- Stînga: un nor uniform, $S_n = 0{,}08$; dreapta: punctele se aglomerează lîngă margini, acolo unde copula Gaussiană nu poate explica extremele comune, $S_n = 0{,}52$

GARCH(1,1) și reziduurile standardizate

- **GARCH(1,1)** (Capitolul 5): dispersia de azi este o sumă ponderată a unei constante, a șocului de ieri la pătrat și a dispersiei de ieri

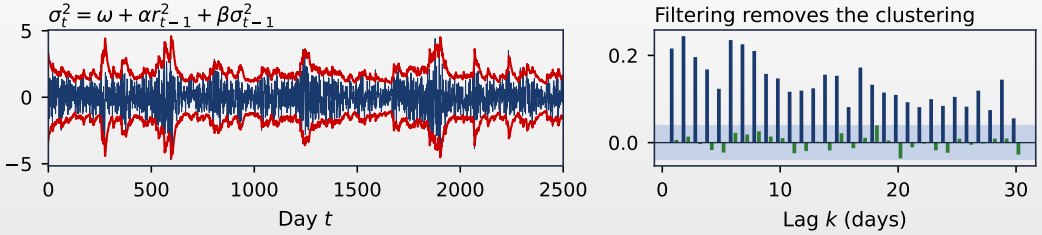
$$r_{it} = \mu_i + \sigma_{it}\varepsilon_{it}, \qquad \sigma^2_{it} = \omega_i + \alpha_i \left(r_{i,t-1} - \mu_i\right)^2 + \beta_i \, \sigma^2_{i,t-1}$$

  - r_{it}: randamentul activului i în ziua t; μ_i: media constantă; σ_{it}: volatilitatea condiționată; ε_{it}: șoc independent și identic distribuit (i.i.d.), cu media 0 și dispersia 1
  - $\omega_i > 0$; $\alpha_i \geq 0$: reacția la șocul de ieri; $\beta_i \geq 0$: memoria; $\alpha_i + \beta_i$ măsoară persistența; $\alpha_i + \beta_i < 1$ dă staționaritate în covarianță, cu dispersia de termen lung $\omega_i/(1 - \alpha_i - \beta_i)$
  - Volatilitatea anualizată dintr-o dispersie zilnică σ^2 a randamentelor în %: $\sqrt{252\,\sigma^2}$ %
- Ambele piețe pot deveni mai volatile, iar șocurile standardizate pot rămîne la fel de corelate: o corelație brută mai mare în criză nu dovedește singură contagiunea
- **Reziduurile standardizate**: randamentele împărțite la volatilitatea estimată

$$\hat{\varepsilon}_{it} = \frac{r_{it} - \hat{\mu}_i}{\hat{\sigma}_{it}}$$

  - Dacă modelul este corect, nu mai prezintă gruparea volatilității (*volatility clustering*): autocorelația lui $\hat{\varepsilon}^2_{it}$ rămîne în banda $\pm 1{,}96/\sqrt{T}$ (B1, cerința 1)
  - Parametrii prin cvasi-verosimilitate maximă (QML): verosimilitatea Normală, validă și cînd ε_{it} nu este Normal

Filtrarea GARCH pe date simulate



- Stînga: 2 500 de zile simulate dintr-un GARCH(1,1) cu $\omega = 0{,}02$, $\alpha = 0{,}10$, $\beta = 0{,}88$ și banda $\pm 2\sigma_t$: perioadele calme și cele agitate alternează
- Dreapta: ACF (funcția de autocorelație) a lui r_t^2 este circa 0,2 la toate lagurile pînă la 30; după împărțirea la σ_t, ACF a lui ε_t^2 rămîne în bandă
- De ce contează pentru corelație: fără filtrare, estimarea corelației amestecă dependența cu regimurile de volatilitate

DCC în doi pași: recursia

- Pasul 1: un GARCH(1,1) pe fiecare serie dă $\varepsilon_t = (\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t})^\top$; pasul 2, modelul DCC (*Dynamic Conditional Correlation*, corelație condiționată dinamică) Engle (2002): o recursie de tip GARCH pentru o matrice Q_t de 2×2, rescalată la o matrice de corelație R_t

$$Q_t = (1 - a - b)\,\bar{Q} + a\,\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-1}^\top + b\,Q_{t-1}, \qquad R_t = Q_t^{*-1/2}\,Q_t\,Q_t^{*-1/2}, \qquad \rho_{12,t} = \frac{Q_{12,t}}{\sqrt{Q_{11,t}Q_{22,t}}}$$

- Notațiile
  - $a \geq 0$: reacția la șocul comun de ieri $\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-1}^\top$; $b \geq 0$: memoria; $a + b < 1$: revenirea spre $\bar{Q}$
  - $\bar{Q}$: parametrul fix al țintei, înlocuit la estimare cu covariația de selecție a lui ε_t (fixarea țintei, *correlation targeting*); $Q_t^* = \mathrm{diag}(Q_t)$: diagonala lui Q_t; R_t: corelația condiționată, $\mathbb{E}(\varepsilon_t\varepsilon_t^\top \mid \mathcal{F}_{t-1}) = R_t$, $\mathcal{F}_{t-1}$: informația până în ziua $t-1$
  - CCC (corelație condiționată constantă): $a = b = 0$, deci $R_t = \bar{Q}$ în fiecare zi dacă ținta are diagonala unitară; altfel normalizăm ținta cu diagonala ei
- Exemplu: $\bar{Q}$ cu diagonala 1 și $\bar{Q}_{12} = 0{,}3$, $Q_{t-1} = \bar{Q}$, $a = 0{,}05$, $b = 0{,}90$, $\varepsilon_{t-1} = (2, -1)$: $Q_{12} = 0{,}015 - 0{,}100 + 0{,}270 = 0{,}185$, $Q_{11} = 1{,}15$, $Q_{22} = 1{,}00$, $\rho_{12,t} = 0{,}185/\sqrt{1{,}15} = 0{,}173$

DCC în doi pași: estimarea și persistența

- **Partea de corelație a cvasi-verosimilității**, maximizată în (a, b), cu ε_t și $\bar{Q}$ fixate

$$\ell_C(a,b) = -\frac{1}{2}\sum_{t=\mathbf{1}}^{T}\left(\ln|R_t| + \varepsilon_t^\top R_t^{-\mathbf{1}}\varepsilon_t - \varepsilon_t^\top\varepsilon_t\right)$$

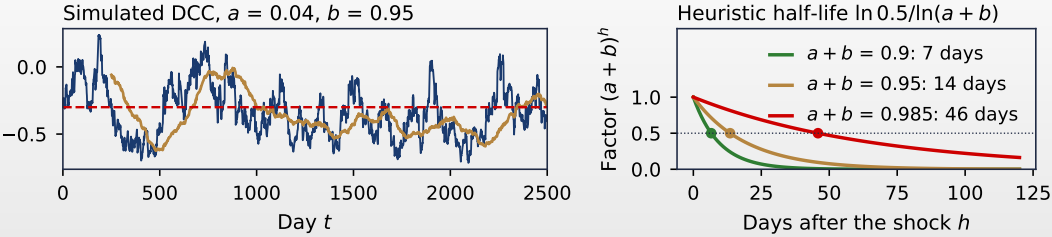
  - $|R_t|$: determinantul lui R_t; $\varepsilon_t^\top R_t^{-\mathbf{1}}\varepsilon_t$: cît de surprinzător este șocul comun sub R_t; ultimul termen nu depinde de (a, b)
  - Erorile standard din inversa hessianei (matricea derivatelor de ordinul doi ale lui $-\ell_C$) tratează pasul 1 drept cunoscut; un bootstrap pe ambii pași Newey & McFadden (1994) adaugă incertitudinea pasului 1

- **Persistența**: indicatorul euristic $h_{\mathbf{1}/\mathbf{2}} = \ln 0{,}5 / \ln(a+b)$ rezumă cît de lent revine Q_t la $\bar{Q}$

$$\mathbb{E}_t[Q_{t+\mathbf{2}}] - \bar{Q} = a\,(R_{t+\mathbf{1}} - \bar{Q}) + b\,(Q_{t+\mathbf{1}} - \bar{Q})$$

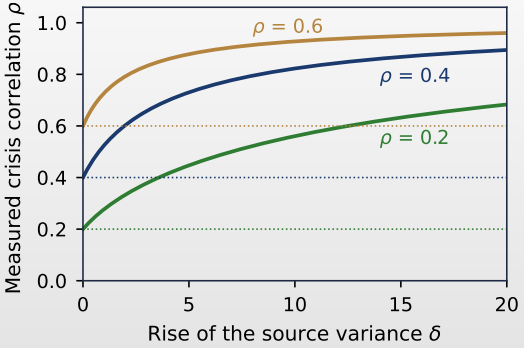
  - $\mathbb{E}_t[\varepsilon_{t+\mathbf{1}}\varepsilon_{t+\mathbf{1}}^\top] = R_{t+\mathbf{1}} \neq Q_{t+\mathbf{1}}$, deci abaterea nu scade exact cu factorul $a+b$: $h_{\mathbf{1}/\mathbf{2}}$ nu este un timp exact de înjumătățire; răspunsul efectiv al corelației se obține prin simulare condiționată (A5)
  - Cu aceleași șocuri ε viitoare, diferența dintre două traiectorii ale lui Q scade cu factorul b: un alt experiment decît cel descris de $a+b$
  - Testul CCC: $LR = 2(\ell_C^{DCC} - \ell_C^{CCC})$; sub $a = 0$ parametrul b nu este identificat, deci valoarea p se obține printr-un bootstrap sub CCC

DCC pe date simulate



- Stînga: 2 500 de zile simulate dintr-un DCC cu $\bar{Q}_{\mathbf{12}} = -0{,}3$, $a = 0{,}04$, $b = 0{,}95$; $\rho_{\mathbf{12},t}$ zilnic variază între $-0{,}71$ și $0{,}24$ în jurul țintei
- Corelația pe fereastră mobilă (*rolling*) de 250 de zile urmează aceleași oscilații cu întîrziere și le netezește; o corelație constantă ar fi linia întreruptă
- Dreapta: factorul $(a+b)^h$ și indicatorul euristic $h_{\mathbf{1/2}}$; o persistență apropiată de 1 înseamnă o revenire lentă

Corecția Forbes–Rigobon



- Modelul Forbes & Rigobon (2002): $y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t$, $\mathrm{Cov}(x_t, \varepsilon_t) = 0$; în criză crește doar dispersia sursei x

$$\rho_c = \rho\sqrt{\frac{1+\delta}{1+\delta\rho^2}}, \qquad \delta = \frac{\sigma^2_{x,c}}{\sigma^2_{x,calm}} - 1$$

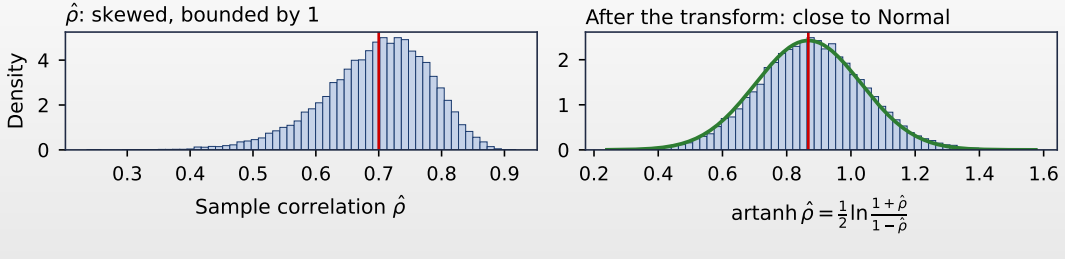
  - ρ: corelația din perioada calmă; ρ_c: corelația de criză măsurată cu *aceeași* legătură β; δ: creșterea relativă a dispersiei sursei
  - Graficul: $\rho_c > \rho$ ori de cîte ori $\delta > 0$: doar volatilitatea mai mare crește corelația măsurată

- Corelația de criză corectată: fără efectul volatilității

$$\rho^* = \frac{\rho_c}{\sqrt{1+\delta(1-\rho_c^2)}}$$

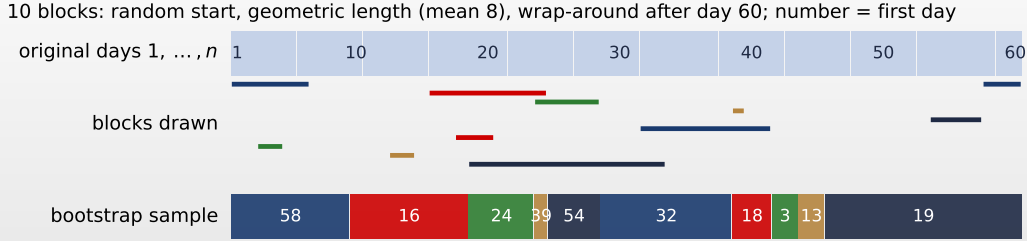
  - Contagiune: ρ^* semnificativ peste ρ_{calm}; altfel interdependență

Compararea a două corelații: testul Fisher z



- Transformarea Fisher $\operatorname{artanh}\hat{\rho} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\hat{\rho}}{1-\hat{\rho}}$ este aproape Normală, cu dispersia $1/(n-3)$ (graficul, $n = 40$, $\rho = 0{,}7$)
  - $z = \dfrac{\operatorname{artanh}\hat{\rho}_{\mathbf{1}} - \operatorname{artanh}\hat{\rho}_{\mathbf{0}}}{\sqrt{1/(n_{\mathbf{1}}-3) + 1/(n_{\mathbf{0}}-3)}} \approx N(0,1)$ sub $H_{\mathbf{0}}: \rho_{\mathbf{1}} = \rho_{\mathbf{0}}$; $\hat{\rho}_{\mathbf{1}}$, $\hat{\rho}_{\mathbf{0}}$: corelațiile din $n_{\mathbf{1}}$ și $n_{\mathbf{0}}$ observații independente
  - Test unilateral pentru $H_{\mathbf{0}}: \rho_{\mathbf{1}} \leq \rho_{\mathbf{0}}$: $p = 1 - \Phi(z)$; respingem la 5% cînd $z > 1{,}645$; presupune perechi i.i.d. Normale și o dată a testului fixată înainte de a vedea datele
- **Distribuția Fisher F** (folosită în A1 extins): sub normalitate i.i.d., raportul dintre dispersia de selecție din criză și cea din perioada calmă, fiecare împărțită la dispersia ei adevărată, are distribuția $F(n_c - 1, n_{\mathbf{0}} - 1)$

Randamente pe mai multe zile și bootstrap-ul staționar



- Randamentul logaritmic pe 2 zile (B3): $r_t^{(\mathbf{2})} = \ln P_t - \ln P_{t-\mathbf{2}}$, P_t: nivelul de închidere din ziua t
  - Randamentele consecutive pe 2 zile au o zi comună (se suprapun); de aceea, ca mărime efectivă a eșantionului, folosim jumătate din numărul lor, rotunjită în jos: o regulă euristică, nu o identitate exactă
- **Bootstrap-ul staționar** Politis & Romano (1994): reeșantionăm blocuri de zile consecutive cu începuturi aleatoare și lungimi geometrice de medie $\bar{L}$, deci dependența serială din interiorul unui bloc se păstrează
  - Recalculăm statistica D pe fiecare dintre cele B reeșantionări; intervalul percentil de 90%: cuantilele de 5% și 95% ale valorilor $D^{(b)}$; p unilateral pentru $H_{\mathbf{0}} : D \leq 0$: proporția valorilor $D^{(b)} \leq 0$, o aproximare prin inversarea intervalului percentil, nu o simulare a statisticii sub $H_{\mathbf{0}}$

A1 [Rezolvat]: componenta de volatilitate a unei corelații de criză

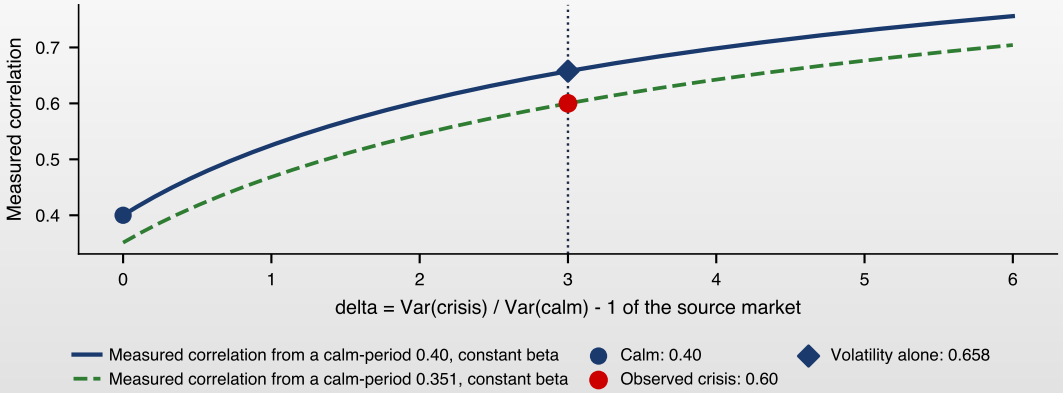
- **Întrebarea**: o corelație crește de la 0,40 într-un an calm la 0,60 într-o criză, iar varianța pieței-sursă se înmulțește cu 4; este contagiune?
- **Modelul**: $y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t$, $\mathrm{Cov}(x_t, \varepsilon_t) = 0$, β și σ^2_ε constante; în criză $\sigma^2_{x,c} = (1+\delta)\sigma^2_x$
  - Indicații: $\mathrm{Cov}(x, y) = \beta\sigma^2_x$, $\mathrm{Var}(y) = \beta^2\sigma^2_x + \sigma^2_\varepsilon$, deci $\rho^2 = \beta^2\sigma^2_x / (\beta^2\sigma^2_x + \sigma^2_\varepsilon)$, de unde ρ_c (slide-ul «Corecția Forbes–Rigobon»)
- **Cerințe**

1. Calculați δ și corelația de criză corectată ρ^* (slide-ul «Corecția Forbes–Rigobon»).
2. Calculați corelația pe care am măsura-o în criză numai din creșterea volatilității, cu β constant și corelația din perioada calmă de 0,40.
3. Precizați dacă creșterea este o dovadă de contagiune în ipotezele modelului și numiți ipoteza în care aveți cea mai mică încredere.

- **Raportați**: fiecare cifră cu formula și valorile înlocuite, plus o propoziție de interpretare; notebook: secțiunea A1

înapoi Lista exercițiilor

A1 [Rezolvat]: rezolvare (1/2)



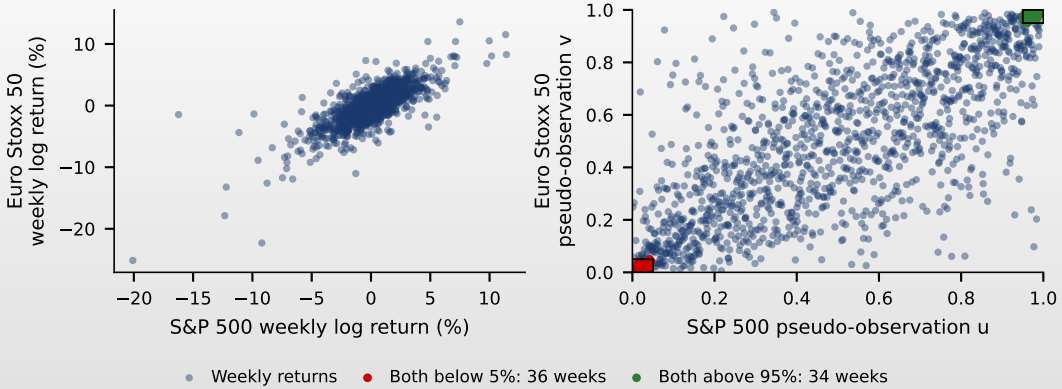
MFM_ch6_seminar

A1 [Rezolvat]: rezolvare (2/2)

- (1) Raportul variațelor este 4, deci $\delta = 3$; $\rho^* = 0{,}60/\sqrt{1+3(1-0{,}36)} = 0{,}60/\sqrt{2{,}92} = 0{,}60/1{,}709 = 0{,}351$
- (2) $\rho_c = 0{,}40\sqrt{4/(1+3\times 0{,}16)} = 0{,}40\sqrt{4/1{,}48} = 0{,}40\times 1{,}644 = 0{,}658$
- (3) Valoarea corectată 0,351 este sub cea calmă de 0,40, iar numai creșterea volatilității ar duce 0,40 la 0,658, peste valoarea observată de 0,60: nicio dovadă de creștere după această corecție
- Cea mai puțin credibilă: absența unui șoc comun; un șoc global crește și σ_ε, iar corecția devine excesivă (A4, cursul)
- Valoarea observată 0,60 este sub curba unei corelații de 0,40 în perioada calmă, cu β constant
- Ea se află pe curba unei corelații de 0,351 în perioada calmă

MFM_ch6_seminar

A2 [Rezolvat]: tau Kendall și parametrii copulelor — cerința (1/2)



MFM_ch6_seminar

A2 [Rezolvat]: tau Kendall și parametrii copulelor — cerința (2/2)

- **Întrebările**
  - ce parametru de copulă reproduce dependența de rang a doi indici bursieri?
  - determină el riscul din cozi?
- **Date**: randamente logaritmice săptămînale S&P 500 și Euro Stoxx 50 (tabelul datelor), $n = 1\,393$; $\hat{\tau} = 0{,}5642$, $\hat{\rho}_S = 0{,}7462$, Pearson 0,781; perechi tratate ca i.i.d. (un model de lucru necondiționat, săptămînal)
- **Cerințe**

1. Inversați $\hat{\tau}$ pentru copulele Gaussiană (slide-ul «Copule eliptice»), Clayton, Gumbel și Frank (slide-ul «Copule arhimediene»); pentru Frank rezolvați numeric $\tau(\theta) = \hat{\tau}$ (funcția `theta_from_tau`).
2. Calculați dependența în cozi implicată de fiecare copulă estimată.
3. Calculați ρ_S implicat de copula Gaussiană (slide-ul «Corelații de rang») și comparați-l cu $\hat{\rho}_S$.

- **Raportați**: un tabel cu cei patru parametri și λ_L, λ_U, plus diferența de la cerința 3

- Stînga: randamentele săptămînale; dreapta: pseudo-observațiile, cu coada inferioară și coada superioară de 5% marcate; notebook: secțiunea A2

MFM_ch6_seminar

Înapoi Lista exercițiilor

A2 [Rezolvat]: rezolvare

Copula	Parametru	λ_L	λ_U
Gaussiană	$\rho = 0{,}775$	0	0
Clayton	$\theta = 2{,}589$	0,765	0
Gumbel	$\theta = 2{,}295$	0	0,647
Frank	$\theta = 7{,}044$	0	0

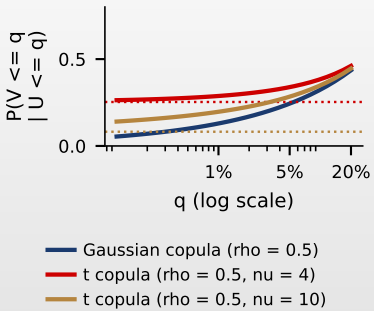
- Gaussiană: $\sin(\pi \times 0{,}564/2) = 0{,}775$; Clayton: $2 \times 0{,}564/0{,}436 = 2{,}589$; Gumbel: $1/0{,}436 = 2{,}295$; Frank: rădăcina numerică
- Clayton $\lambda_L = 2^{-1/\theta}$, Gumbel $\lambda_U = 2 - 2^{1/\theta}$
- Cerința 3: $\frac{6}{\pi} \arcsin(0{,}775/2) = 0{,}760$ față de $\hat{\rho}_S = 0{,}746$: o diferență de 0,0134 (precizia ei: extensia A2)
- Același $\hat{\tau}$ dă o dependență în cozi între 0 și 0,77, în funcție doar de familia aleasă
- Interpretare: $\hat{\tau}$ identifică un parametru în interiorul unei familii, niciodată familia; coada comună trebuie estimată (B2), nu dedusă din τ

A3 [Rezolvat]: dependența în cozi a copulei t

- **Întrebarea**: în grafic, cînd q scade, probabilitatea Gaussiană tinde la 0, iar curbele t se stabilizează; ce se întîmplă cînd $q \to 0$?
- **Date**: $\rho = 0{,}5$, $\nu \in \{3, 4, 10, 30\}$; repartiția condiționată t $C(v \mid u)$ (slide-ul «Adecvarea: transformarea Rosenblatt»)
- **Cerințe**

1. Folosiți regula lui L'Hôpital și interschimbabilitatea pentru a arăta că $\lambda_L = 2 \lim_{q \downarrow 0} P(V \le q \mid U = q)$.
2. Înlocuiți repartiția t condiționată, treceți la limită $x = t_\nu^{-1}(q) \to -\infty$ și deduceți $\lambda = 2\, t_{\nu+1}\big(-\sqrt{(\nu+1)(1-\rho)/(1+\rho)}\big)$.
3. Repetați raționamentul pentru copula Gaussiană și arătați că $\lambda = 0$ pentru $|\rho| < 1$.
4. Calculați λ pentru fiecare ν și $C(q,q)/q$ la $q = 5\%$ și 0,1% pentru copula Gaussiană și copula t cu $\nu = 4$, cu același ρ (funcția `joint_tail_prob` din notebook).

- **Raportați**: derivarea ca șir de egalități și un tabel cu λ și cele patru probabilități



- Valoarea exactă a lui $P(V \le q \mid U \le q)$ din funcțiile de repartiție bivariate; punctat: limitele λ; notebook: secțiunea A3

MFM_ch6_seminar

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

A3 [Rezolvat]: rezolvare (1/2) — derivare

- (1) $C(q,q) \to 0$ și $q \to 0$, deci prin L'Hôpital $\lambda_L = \lim \frac{d}{dq} C(q,q) = \lim[\partial_1 C(q,q) + \partial_2 C(q,q)]$, cu $\partial_1 C(u,v) = P(V \le v \mid U = u)$; interschimbabilitatea face termenii egali: $\lambda_L = 2 \lim P(V \le q \mid U = q)$
- (2) Cu $x = t_\nu^{-1}(q)$: $P(V \le q \mid U = q) = P(X_2 \le x \mid X_1 = x) = t_{\nu+1}\Big(\dfrac{(1-\rho)\,x}{\sqrt{(\nu + x^2)(1-\rho^2)/(\nu+1)}}\Big)$
- Cînd $x \to -\infty$, $x/\sqrt{\nu + x^2} \to -1$; cum $(1-\rho)/\sqrt{1-\rho^2} = \sqrt{(1-\rho)/(1+\rho)}$, argumentul tinde la $-\sqrt{(\nu+1)(1-\rho)/(1+\rho)}$, ceea ce dă formula
- (3) Gaussiană: $P(V \le q \mid U = q) = \Phi\big(x\sqrt{(1-\rho)/(1+\rho)}\big)$ cu $x = \Phi^{-1}(q) \to -\infty$, deci limita este 0
- Explicație: la t, scara condiționată crește cu $|x|$, deci argumentul standardizat rămîne mărginit; la Gaussiană scara este fixă, iar argumentul diverge

A3 [Rezolvat]: rezolvare (2/2) — cifre

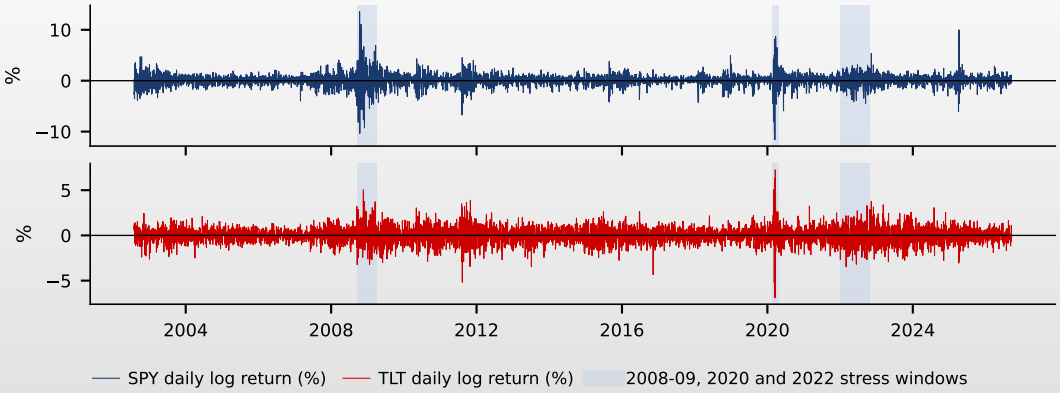
ν	$a_\nu = \sqrt{(\nu+1)/3}$	$\lambda = 2t_{\nu+1}(-a_\nu)$
3	1,155	0,313
4	1,291	0,253
10	1,915	0,082
30	3,215	0,003

- $\nu = 4$ pas cu pas: $t_5(-1{,}291) = 0{,}1266$, deci $\lambda = 2 \times 0{,}1266 = 0{,}253$
- Dependența în cozi dispare cînd ν crește

	$q = 5\%$	$q = 0{,}1\%$
Gaussiană, $\rho = 0{,}5$	0,244	0,054
t, $\rho = 0{,}5$, $\nu = 4$	0,339	0,263

- $C(q,q)/q = P(V \le q \mid U \le q)$ cu același ρ în ambele modele
- Interpretare: la 5% cele două modele par asemănătoare, dar la 0,1% probabilitatea Gaussiană este o fracțiune din cea t; un model evaluat pe pierderi moderate nu poate evidenția crahurile simultane

B1 [Rezolvat]: DCC pentru SPY și TLT — cerința (1/2)



MFM_ch6_seminar

B1 [Rezolvat]: DCC pentru SPY și TLT — cerința (2/2)

- **Întrebările**
  - cum a evoluat corelația acțiuni–obligațiuni din 2002?
  - este ea constantă?
- **Date**: SPY și TLT, prețuri de închidere ajustate, aliniate pe zilele comune, randamente logaritmice în %, $T = 6\,073$
- **Cerințe**

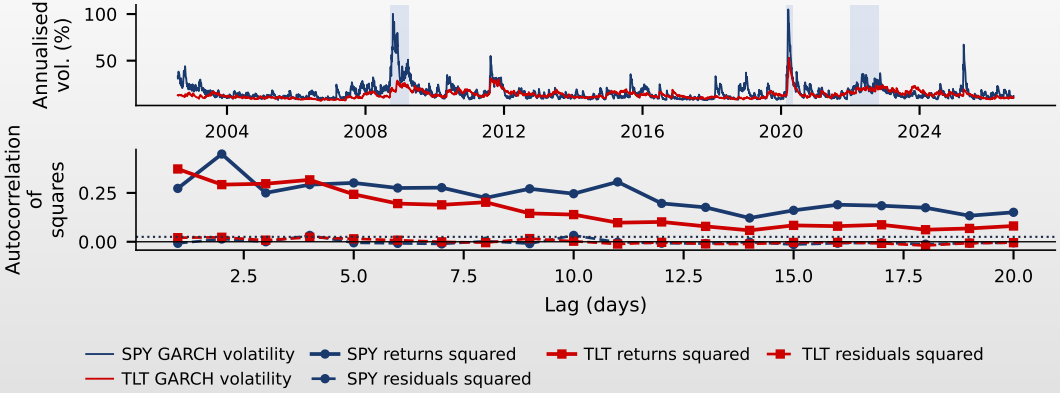
1. Estimați un GARCH(1,1) cu medie constantă pentru fiecare serie, calculați $\varepsilon_{it} = (r_{it} - \hat{\mu}_i)/\hat{\sigma}_{it}$ și comparați autocorelația lui $r_{it}^{\mathbf{2}}$ cu cea a lui $\varepsilon_{it}^{\mathbf{2}}$.
2. Fixați $\bar{Q}$ la covarianța de selecție a lui ε_t, $Q_{\mathbf{1}} = \bar{Q}$, calculați $R_{\mathbf{2}}$ din $\varepsilon_{\mathbf{1}}$, apoi maximizați $\ell_C(a, b)$ (slide-ul «DCC în doi pași: estimarea și persistența») cu $a, b \geq 0$, $a + b < 1$.
3. Reprezentați $\rho_{\mathbf{12},t}$ față de corelația pe fereastră mobilă de 252 de zile și de țintă și reestimați pe 2002–2019 și 2020–2026.
4. Testați CCC ($a = b = 0$) cu raportul de verosimilitate, calibrat printr-un bootstrap al ambilor pași sub CCC (199 de traiectorii).

- **Raportați**: tabelele GARCH și DCC, $R_{\mathbf{2}}$, graficul traiectoriei, LR cu p bootstrap, o interpretare; notebook: secțiunea B1

MFM_ch6_seminar

Înapoi Lista exercițiilor

B1 [Rezolvat]: Traiectoriile volatilității GARCH



MFM_ch6_seminar

B1 [Rezolvat]: Estimațiile parametrilor GARCH

	ω	α	β	vol. anuală medie
SPY	0,0283	0,127	0,848	16,0%
TLT	0,0057	0,049	0,943	13,6%

- Randamente în %; vîrfurile volatilității: SPY 105% (17 martie 2020), TLT 53% (24 martie 2020)
- Punct de control: autocorelația de ordinul 1 a pătratelor, SPY 0,273 $\to -0{,}008$, TLT 0,373 $\to$ 0,021; media pe lagurile 1–20 SPY 0,233 $\to -0{,}002$
- Filtrarea elimină gruparea volatilității: corelația lui ε_t nu mai este determinată de regimurile de volatilitate

MFM_ch6_seminar

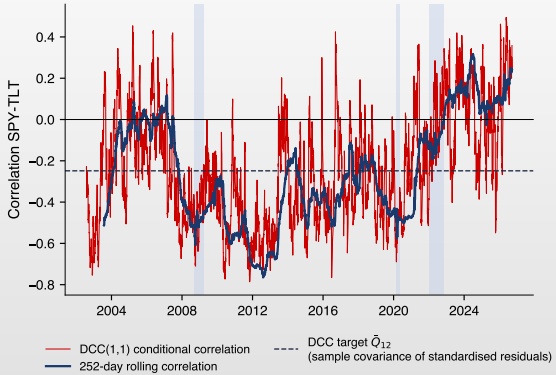
B1 [Rezolvat]: pasul 2, estimările DCC

- Un pas al recursiei: $\bar{Q} = \begin{pmatrix} 0{,}998373 & -0{,}248487 \\ -0{,}248487 & 1{,}000091 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_{\mathbf{1}} = (0{,}079960,\ 1{,}497987)$ pe 31 iulie 2002
- $Q_{\mathbf{2}} = (1-a-b)\bar{Q} + a\,\varepsilon_{\mathbf{1}}\varepsilon_{\mathbf{1}}^{\top} + b\bar{Q}$: $Q_{\mathbf{2},\mathbf{11}} = 0{,}946560$, $Q_{\mathbf{2},\mathbf{22}} = 1{,}065060$, $Q_{\mathbf{2},\mathbf{12}} = -0{,}229252$
- $R_{\mathbf{2},\mathbf{12}} = -0{,}229252/\sqrt{0{,}946560 \times 1{,}065060} = -0{,}2283$: un șoc pozitiv TLT într-o zi în care SPY aproape nu variază apropie corelația de zero

	estimare	e.s. (eroarea standard, din hessian
a	0,052232	0,00
b	0,933518	0,00
$a+b$	0,985749	
$\bar{Q}_{12}$	−0,248	

- Indicatorul euristic de persistență $\ln 0{,}5 / \ln(a+b) = 48{,}3$ zile, nu timpul exact de înjumătățire al lui Q_t, deoarece $R_t \neq Q_t$
- E.s. din hessiană tratează pasul 1 drept cunoscut; bootstrap-ul pe ambii pași: extensia B1

B1 [Rezolvat]: traiectoria și subperioadele

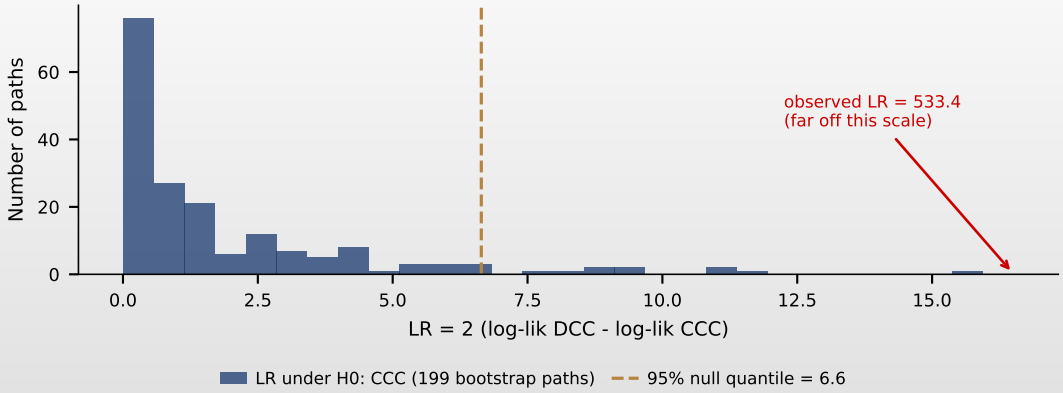


	2002–2019	2020–2026
a	0,0565	0,0341
b	0,9199	0,9527
$\bar{Q}_{12}$	−0,350	0,003
T	4 386	1 687

- Tot eșantionul: $\rho_{\mathbf{12},t}$ între $-0{,}79$ și $0{,}49$; deasupra țintei în 92% din zile după 2022
- Persistența este similară în ambele jumătăți, dar ținta se deplasează de la circa $-0{,}35$ la circa 0
- Interpretare: un DCC pe tot eșantionul atrage corelația curentă spre o țintă care nu mai este relevantă

MFM_ch6_dcc_spy_tlt

B1 [Rezolvat]: Distribuția bootstrap a statisticii LR



MFM_ch6_seminar

B1 [Rezolvat]: Testul bootstrap al corelației constante

- $LR = 2(\ell_C^{DCC} - \ell_C^{CCC}) = 2(460{,}2593 - 193{,}5447) = 533{,}4$
- χ^2_2 nu este legea sub H_0: sub $a = 0$, b nu este identificat; bootstrap-ul sub CCC

1. decorelăm ε_t cu matricea de corelație constantă și reeșantionăm perechile;
2. reconstruim inovații CCC și randamente GARCH cu parametrii estimați;
3. reestimăm ambii pași și LR pe fiecare dintre cele 199 de traiectorii;
4. $p = (1 + \#\{LR^{(b)} \geq LR\})/200$.

- Cea mai mare valoare sub H_0 15,7, cuantila de 95% 6,6: $p = 0{,}005$, minimul posibil; respingem corelația constantă
- Acest bootstrap simulează sub CCC ca să testeze dinamica; bootstrap-ul pe ambii pași din extensie simulează sub DCC-ul estimat ca să măsoare incertitudinea

MFM_ch6_seminar

B1ext [Propus]: incertitudinea corelației și EWMA

- **Date**: aceleași randamente log zilnice din prețuri ajustate SPY–TLT ca în B1, restrînse la 2002–2021; aliniați prețurile înainte de diferențiere
- **Cerințe**

1. Calculați corelația și trei erori standard: Fisher, metoda delta fără laguri ($L = 0$) și HAC (*Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent*, robustă la heteroscedasticitate și autocorelație), cu nucleu Bartlett și $L = \lfloor 4(T/100)^{2/9} \rfloor$ (derivarea prin metoda delta pe vectorul de momente: Anexa cursului).
2. Calculați traiectoria corelației EWMA (*Exponentially Weighted Moving Average*, medie mobilă ponderată exponențial) cu factorul de descompunere (*decay*) 0,94: inițializați covarianța din primele 100 de randamente, apoi prognozați fiecare zi folosind numai randamentul precedent.
3. Comparați traiectoria EWMA cu o corelație pe fereastră mobilă de 252 de zile.
4. Explicați de ce o eroare standard mai mare schimbă forța inferenței fără să schimbe corelația estimată pe întregul eșantion.

- **Valori de control**: erori standard de aproximativ 0,0120, 0,0217, 0,0227
- **Raportați**: mărimea eșantionului, lagul, tabelul celor trei erori, raportul HAC/Fisher și graficul celor două traiectorii; notebook: secțiunea B1ext (alt exercițiu decît „B1 extins", data rupturii)

B2 [Rezolvat]: copula Gaussiană față de copula t pentru S&P 500 și Euro Stoxx 50

- **Întrebarea**: necesită crahurile simultane săptămînale ale acțiunilor din SUA și din zona euro o copulă cu dependență în cozi?
- **Date și model**: pseudo-observațiile din A2 ($n = 1\,393$); un model de lucru necondiționat, i.i.d., săptămînal (fără filtru GARCH: copula combină regimurile de volatilitate cu dependența); verosimilitate maximă canonică (CML) pe ranguri; copula Gaussiană este copula t cu $\nu = \infty$, un punct pe frontieră
- **Cerințe**

1. Estimați copulele Gaussiană și t prin CML și comparați-le după AIC.
2. Calculați raportul de verosimilitate pentru $H_0 : \nu = \infty$; valoarea p a lui se obține printr-un bootstrap parametric sub H_0 (simulare, ranguri noi, reestimarea ambelor; 499 de extrageri).
3. Aplicați testul de adecvare Rosenblatt (Genest, Rémillard & Beaudoin (2009)) pentru ambele copule cu statistica integrală $S_n^{(B)}$ (simulare din copula estimată, ranguri noi, reestimare; 499 de extrageri).
4. Comparați $C_n(q, q)/q$ empiric ($C_n(q, q)$: proporția săptămînilor cu ambele pseudo-observații $\leq q$) cu $C_\theta(q, q)/q$ estimat la același $q = 5\%$ și raportați separat limita λ a copulei t.

- **Raportați**: un tabel ($\hat{\rho}$, $\hat{\nu}$, ℓ, AIC, p de adecvare), LR cu valoarea p, graficul la prag finit; notebook: secțiunea B2

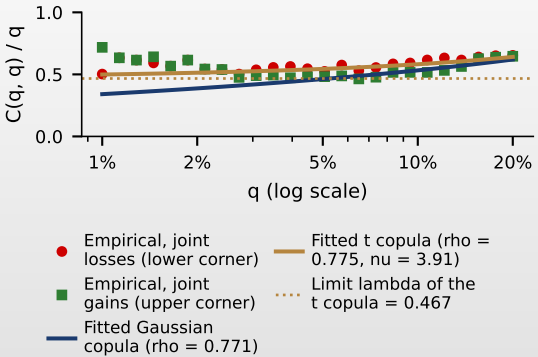
◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

B2 [Rezolvat]: rezolvare (1/2) — estimare și teste

	$\hat{\rho}$	$\hat{\nu}$	ℓ	AIC	p adecvare
Gaussiană	0,771	–	623,3	−1 244,6	0,002
Student t	0,775	3,91	674,2	−1 344,4	0,874

- (1) Copula t are AIC mai mic cu 99,8 puncte: parametrul suplimentar ν este puternic susținut
- (2) $LR = 2(674{,}2 - 623{,}3) = 101{,}8$; cuantila de 95% a celor 499 de valori sub H_0 este 3,2 și nicio valoare simulată nu depășește 101,8, deci $p = 0{,}002$, minimul posibil $(1/500)$: respingem copula Gaussiană
- χ^2_1 ar fi greșit: $\nu = \infty$ este pe frontieră, iar amestecul $\frac{1}{2}\chi^2_0 + \frac{1}{2}\chi^2_1$ nu este stabilit pentru o pseudo-verosimilitate pe ranguri
- (3) Testul de adecvare: copula Gaussiană $p = 0{,}002$, respinsă la 5%; t $p = 0{,}874$, nerespinsă: lipsa dovezilor împotriva copulei t nu este o dovadă în favoarea ei

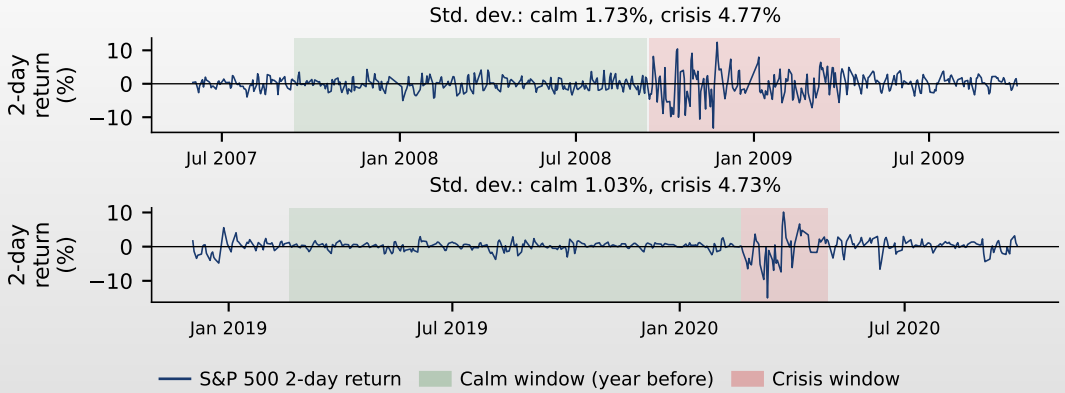
B2 [Rezolvat]: rezolvare (2/2) — cozile la un prag finit



- (4) La $q = 5\%$: valoarea empirică în coada inferioară 0,517 (36 de săptămîni), în coada superioară 0,488 (34 de săptămîni)
- Estimat la același q: copula Gaussiană 0,462, t 0,544; limita copulei t este $\lambda = 0{,}467$, un obiect diferit
- Curba t urmărește punctele empirice pînă la q mic; curba Gaussiană coboară, conform rezultatului din A3
- Interpretare: modelul săptămînal necondiționat arată extreme comune; nu am testat dacă ele rămîn după filtrarea GARCH (B4 arată filtrarea pentru o pereche zilnică); la q mic, coada superioară empirică se bazează pe cîteva săptămîni

MFM_ch6_seminar

B3 [Propus]: contagiunea în 2008 și 2020 — Date și ferestre



MFM_ch6_seminar

B3 [Propus]: contagiunea în 2008 și 2020 — Convențiile testelor

- **Întrebările**
  - s-au întărit legăturile dintre S&P 500 și Euro Stoxx 50 sau BET în cele două crize?
  - rămîn ele mai puternice după luarea în calcul a volatilității mai mari din SUA?
- **Date**: randamente logaritmice pe 2 zile $\ln P_t - \ln P_{t-2}$ (P_t: nivelul de închidere din ziua t) în zilele comune de tranzacționare; S&P 500 este sursa; un randament este atribuit ferestrei care conține data lui finală

	calm	criză
2008	14.09.2007 – 12.09.2008	15.09.2008 – 31.03.2009
2020	19.02.2019 – 19.02.2020	20.02.2020 – 30.04.2020
2008: n (pe 2 zile)	242	130
2020: n (pe 2 zile)	241	47

MFM_ch6_seminar

Înapoi Lista exercițiilor

B3 [Propus]: contagiunea în 2008 și 2020 — Cerințele din seminar

- **Exemplu de urmat**: A1; **Cerințe la seminar**

1. Rezolvați complet cazul BET în 2008: calculați ρ_{calm}, ρ_c, δ și ρ^*, apoi repetați pentru celelalte trei cazuri.
2. Ca termen de comparație istoric, aplicați testele Fisher z unilaterale (slide-ul «Compararea a două corelații: testul Fisher z») pentru $H_0 : \rho_c \leq \rho_{calm}$ și $H_0 : \rho^* \leq \rho_{calm}$, cu n partea întreagă a jumătății numărului de randamente suprapuse pe 2 zile, o corecție euristică. Criza din 2020 are doar 23 de perechi efective după această regulă: Fisher este orientativ; comparați cu bootstrap-ul.

- **Raportați**: un tabel pe crize și piețe (δ, ρ_{calm}, ρ_c, p_{brut}, ρ^*, $p_{corectat}$); notebook: secțiunea B3
- **Interpretare**
  - de ce este δ mult mai mare în 2020?
  - ce ipoteză este cea mai puțin credibilă pentru o pandemie?
- Cerințele 3–4 (bootstrap cu δ estimat, ferestre mai scurte) vin după curs, în secțiunea de temă

C1 [Propus]: critica unui răspuns AI — răspunsul

- **Cererea** trimisă unui asistent AI: „Tabelul pandas e conține reziduurile standardizate GARCH pentru JPM (JPMorgan Chase) și BAC (Bank of America), două acțiuni bancare americane. Calibrează o copulă t cu $\nu = 4$ din τ Kendall și dă-mi dependența ei în cozi."
- **Răspunsul**: codul de mai jos și concluzia

```
import numpy as np
from scipy import stats
tau = stats.kendalltau(e['JPM'], e['BAC'])[0]       # Kendall's tau
rho = 2 * np.sin(np.pi * tau / 6)                   # copula correlation
u = e.rank() / len(e)                               # pseudo-observations
z = stats.t.ppf(u, df=4)                            # input of the t-copula likelihood
nu = 4
x = np.sqrt((nu + 1) * (1 - rho) / (1 + rho))
lam = 2 * stats.t.cdf(-x, df=nu)                    # tail dependence
```

- **Concluzia AI**: „Cu $\hat{\tau} = 0{,}50$: $\rho = 0{,}518$ și $\lambda_L = \lambda_U = 0{,}276$."

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

C1 [Propus]: critica unui răspuns AI

- **Exemplu de urmat**: A2 și A3 [Rezolvat]; **date**: codul de mai sus cu $\hat{\tau} = 0{,}50$ și $\nu = 4$; pentru verificarea pe date, reziduurile JPM (JPMorgan Chase & Co., simbolul bursier NYSE)–BAC din notebook (secțiunea C1)
- Răspunsul conține **trei** greșeli tipice pentru lucrul cu copule; restul este corect
- **Cerințe**

1. Găsiți cele trei linii greșite și explicați într-o propoziție de ce este greșită fiecare.
2. Pentru fiecare, indicați dovada care o evidențiază: o formulă din A2 sau A3, o verificare a celei mai mari pseudo-observații sau o mică simulare.
3. Scrieți cele trei linii corectate și recalculați ρ și λ pentru $\hat{\tau} = 0{,}50$, $\nu = 4$.
4. Precizați care erori modifică λ afișat și care afectează doar datele de intrare ale verosimilității.

- **Raportați**: un tabel cu trei rînduri (eroare, dovadă, corecție) și ρ și λ corectate; notați în `AI_ERRORS.md` erorile găsite efectiv

B3 [Propus]: contagiunea în 2008 și 2020 — cerințele 3–4, după curs

Rezolvarea se discută la seminar

- **Exemplu de urmat**: A1 și tabelul B3 de la seminar; **Cerințe**

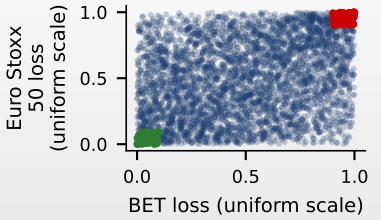
3. Testați $D = \rho^* - \rho_{calm}$ prin bootstrap, cu δ estimat la fiecare extragere:
   - reeșantionați vectorii comuni (S&P 500, ținta) în interiorul fiecărei ferestre cu un bootstrap staționar Politis & Romano (1994), bloc mediu de 10 zile, 1 999 de extrageri;
   - recalculați $\hat{\delta}$, ρ^* și ρ_{calm}; raportați intervalul de 90% al lui D și $p =$ proporția extragerilor cu $D \leq 0$.
4. Sensibilitate: încheiați ferestrele de criză pe 31 decembrie 2008 și pe 31 martie 2020.

- **Raportați**: tabelul de la seminar cu o coloană pentru intervalul de 90% al lui D și un grafic; notebook: secțiunea B3, celula de bootstrap
- **Interpretare**: modifică estimarea lui δ vreo concluzie de la cerința 2?

B4 [Propus]: Pierderi simultane: BET și Euro Stoxx 50

- **Exemplu de urmat**: B2 și A2; **date**: închideri zilnice BET și Euro Stoxx 50 din 5 ianuarie 2010, aliniate pe zilele comune (închideri aproape sincrone), $T = 4\,154$; notebook: secțiunea B4
- Filtrați fiecare serie cu GARCH(1,1) cu medie constantă, QML Gaussian ca în B1; pierderile $L = -\varepsilon$ (minus randamentele standardizate) și pseudo-observațiile lor: crahurile simultane se află în *coada superioară*
- **Cerințe**

1. **Ce credeți**: care familie își plasează dependența în cozi acolo unde se află crahurile simultane, Clayton sau Gumbel pe pierderi?
2. Estimați Clayton și Gumbel prin CML (copulele Gaussiană și t ca repere); raportați AIC, λ_L, λ_U și p de adecvare Rosenblatt (200 de extrageri; 100 pentru t).
3. Calculați probabilitățile empirice din cele două cozi la $q = 5\%$ și 10% și comparați-le cu curbele estimate.
4. Explicați ce reprezintă copula Clayton rotită cu 180° (de supraviețuire) pe pierderi.



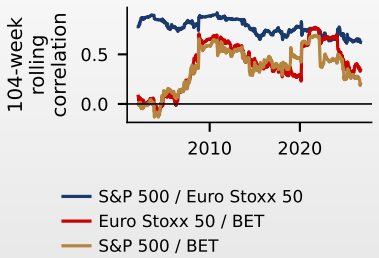
MFM_ch6_seminar

Înapoi Lista exercițiilor

C2 [Propus]: integrarea pieței de acțiuni din România cu zona euro după 2020

- **Exemplu de urmat**: A1, B1; **date**: randamente săptămînale BET și Euro Stoxx 50 în zilele comune, 2010–2019 ($n = 520$) față de 2020–2026 ($n = 351$); notebook: secțiunea C2
- 2020 a adus COVID-19 și trecerea României la statutul de piață emergentă secundară (*Secondary Emerging*) la furnizorul de indici FTSE Russell (FTSE: *Financial Times Stock Exchange*; FTSE Russell (2019)): o comparație descriptivă între perioade, nu un test cauzal al trecerii
- **Cerințe**

1. Estimați schimbarea corelației săptămînale cu un interval bootstrap staționar de 95% (Politis & Romano (1994), reeșantionare în fiecare perioadă, bloc mediu de 8 săptămîni, 2 000 de extrageri) și p unilateral pentru H_0: nicio creștere, proporția extragerilor ≤ 0.
2. Efectuați două verificări separate față de aceeași referință: corecția Forbes–Rigobon pentru schimbarea volatilității Euro Stoxx 50 și corelația fără 20 februarie – 30 aprilie 2020.
3. Opțional: τ Kendall, beta Cov(BET, Stoxx)/Var(Stoxx), probabilitatea din coada inferioară la $q = 10\%$ și un DCC săptămînal.



- Context din curs: corelații pe ferestre mobile de 104 săptămîni
- **Raportați**: tabelul măsurilor pe perioade, concluzia și limitele ei

MFM_ch6_integration

Înapoi Lista exercițiilor

Instrumente pentru extensii: erori standard

- **Metoda delta**: eroarea standard a unei funcții netede g de o estimare

$$\mathrm{Var}(g(\hat{\theta})) \approx g'(\theta)^{\mathbf{2}}\,\mathrm{Var}(\hat{\theta}), \qquad \mathrm{Var}(g(\hat{\theta}_{\mathbf{1}}, \hat{\theta}_{\mathbf{2}})) \approx \nabla g^{\top}\,\Sigma_{\hat{\theta}}\,\nabla g$$

  - g': derivata; ∇g: gradientul; $\Sigma_{\hat{\theta}}$: matricea de covarianță a estimărilor; de ex. pentru Clayton, $\theta = 2\tau/(1-\tau)$ are $g'(\tau) = 2/(1-\tau)^{\mathbf{2}}$

- **Eroarea standard a lui $\hat{\tau}$ Kendall**, o U-statistică (o medie pe toate perechile de observații)

$$\mathrm{se}(\hat{\tau}) \approx \frac{4\,\mathrm{sd}(W)}{\sqrt{n}}, \qquad W_i = 2\,C_n(\hat{u}_i, \hat{v}_i) - \hat{u}_i - \hat{v}_i$$

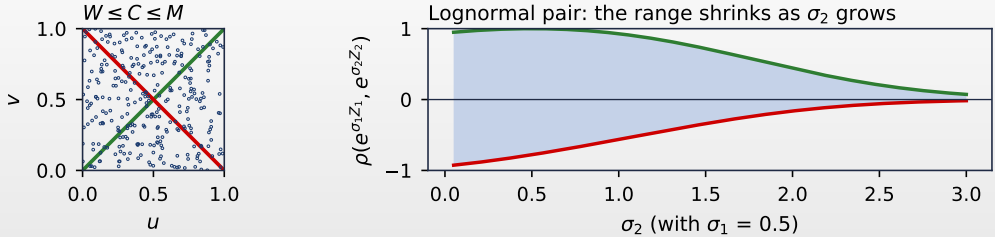
  - W_i: proiecția Hoeffding, contribuția observației i la $\hat{\tau}$; sd: abaterea standard de selecție

- Covarianța **sandwich** a unei estimări CML

$$\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\theta}) = \frac{1}{n}\,A^{-\mathbf{1}}\,\Sigma\,A^{-\mathbf{1}}$$

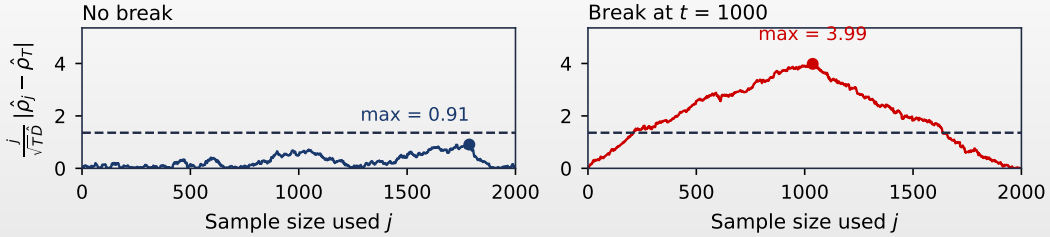
  - A: informația Fisher (minus derivata a doua așteptată a lui $\ln c_\theta$); Σ: dispersia scorului plus corecțiile pentru ranguri; doar $A^{-\mathbf{1}}/n$ ignoră faptul că rangurile sînt estimate

Instrumente pentru extensii: corelațiile posibile



- **Identitatea lui Hoeffding**: covarianța este diferența integrată dintre repartiția comună și independență
  - $\mathrm{Cov}(X, Y) = \iint \left[F(x, y) - F_{\mathbf{1}}(x)F_{\mathbf{2}}(y)\right] dx\, dy$; cu $F = C(F_{\mathbf{1}}, F_{\mathbf{2}})$ și $W \le C \le M$, marginalele fixează intervalul lui ρ
  - Dreapta: două lognormale $e^{\sigma_{\mathbf{1}} Z_{\mathbf{1}}}$, $e^{\sigma_{\mathbf{2}} Z_{\mathbf{2}}}$, $Z_i \sim N(0, 1)$, $\mathbb{E}(e^{aZ}) = e^{a^{\mathbf{2}}/\mathbf{2}}$; intervalul corelațiilor Pearson se îngustează cînd marginalele diferă mai mult

Instrumente pentru extensii: testarea unei corelații constante



- **Testul de fluctuație** Wied, Krämer & Dehling (2012): comparăm corelația primelor j perechi cu cea din întregul eșantion, pentru fiecare j
  - $Q_T = \max_j \frac{j}{\sqrt{T}\hat{D}}|\hat{\rho}_j - \hat{\rho}_T|$; $\hat{D}$: abaterea standard de termen lung a corelației (metoda delta cu gradientul celor cinci momente, HAC Bartlett, lățimea $\lfloor T^{1/4} \rfloor$); j din maxim datează ruptura
  - Sub H_0 (corelație constantă), Q_T tinde la supremumul lui |punte browniană|; valoarea critică de 5% este 1,358; graficul: simulat, fără și cu ruptură

Instrumente pentru extensii: modele dinamice

- **DCC corectat** Aielli (2013): șocul este rescalat cu $Q_{t-\mathbf{1}}^{*\mathbf{1/2}}$, astfel încît $\mathbb{E}[Q_t] = \bar{Q}^*$; matricea fixă cu stea este ținta recursiei corectate (normalizată cu diagonala unitară), nu diagonala variabilă în timp

$$Q_t = (1 - a - b)\,\bar{Q}^* + a\,Q_{t-\mathbf{1}}^{*\mathbf{1/2}}\varepsilon_{t-\mathbf{1}}\varepsilon_{t-\mathbf{1}}^{\top}Q_{t-\mathbf{1}}^{*\mathbf{1/2}} + b\,Q_{t-\mathbf{1}}$$

- **Decorelarea** (B5): $\eta_t = L_t^{-\mathbf{1}}\varepsilon_t$, cu L_t factorul Cholesky al lui R_t ($R_t = L_t L_t^{\top}$, L_t inferior triunghiulară): η_t are matricea de covarianță identitate și poate fi reeșantionat
- **Copula t Generalised Autoregressive Score (GAS)** Creal, Koopman & Lucas (2013): corelația se modifică după scorul observației de ieri

$$\rho_t = \tanh f_t, \qquad f_{t+\mathbf{1}} = \omega + A\,s_t + \beta_{GAS} f_t, \qquad s_t = (1 - \rho_t^{\mathbf{2}})\,\frac{\partial \ln c(\hat{u}_t, \hat{v}_t; \rho_t, \nu)}{\partial \rho}$$

  - $\tanh$ menține ρ_t în $(-1, 1)$; A: reacția la scorul s_t; β_{GAS}: persistența; $A = 0$ dă copula statică
- **Volatilitatea comună** (COVOL, C3) Engle & Campos-Martins (2023): pătratele reziduurilor GARCH au un factor global comun x_t

$$e_{it}^{\mathbf{2}} = (s_i\,x_t + 1 - s_i)\,\varepsilon_{it}^{\mathbf{2}}$$

  - e_{it}: reziduul standardizat GARCH al seriei i; $s_i \in [0, 1]$: încărcarea (*loading*) seriei i pe factorul comun; ε_{it}: șoc idiosincratic cu dispersia 1

Pachetele de extensie: conținut și cerințe

Pachet	Exerciții	Se bazează pe
1. Inferența pentru copule	A2 extins [Rezolvat], B2 extins [Rezolvat]	A2, B2
2. Inferența pentru contagiune	A4 [Propus], A1 extins [Rezolvat]	A1, B3
3. Dinamica DCC	A5 [Propus], B1 extins [Rezolvat], B5 [Propus]	B1
4. Marginale și copule dinamice	A6 [Propus], B6 [Propus]	A2, B2
5. Temă de proiect	C3 [Propus]: volatilitatea comună globală	B1, C2, studiul de caz din curs

- Fiecare pachet are secțiunea lui în notebook
- C3 este un proiect, nu un exercițiu de seminar: rezultatele de referință sînt parțiale, deci este potrivit unei echipe interesate de o replicare

A2 extins [Rezolvat]: precizia lui τ Kendall și a parametrilor copulelor

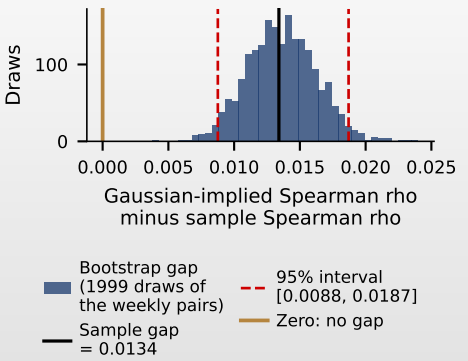
- **Date**: pseudo-observațiile din A2, $n = 1\,393$, $\hat{\tau} = 0{,}5642$; copula empirică C_n (slide-ul «Pseudo-observații și copula empirică»)
- **Cerințe**

1. Folosind proiecția Hoeffding W_i (slide-ul «Instrumente pentru extensii: erori standard»; abaterea ei standard de selecție este 0,1239), arătați că $\mathrm{se}(\hat{\tau}) = 4\,\mathrm{sd}(W)/\sqrt{n}$ și calculați-o.
2. Propagați-o la $\hat{\theta}_{Clayton}$ și $\hat{\rho}_{Gauss}$ prin metoda delta.
3. Reeșantionați împreună perechile săptămînale (1 999 de extrageri), recalculați ambele statistici de rang la fiecare extragere și raportați intervalul percentil de 95% al diferenței $g(\hat{\tau}) - \hat{\rho}_S$ din A2.

- **Raportați**: trei erori standard, intervalul și o decizie la 5%; bootstrap-ul i.i.d. presupune lipsa dependenței seriale a perechilor săptămînale

A2 extins [Rezolvat]: rezolvare

- (1) $\hat{\tau}$ este o U-statistică cu $E[h \mid Z_i] = 2W_i + 1$, deci $\mathrm{Var}(\hat{\tau}) \approx 16\mathrm{Var}(W)/n$: $\mathrm{se} = 4 \times 0{,}1239/\sqrt{1\,393} = 0{,}0133$
- (2) Clayton: $d\theta/d\tau = 2/(1-\tau)^2 = 10{,}53$, e.s. 0,140; Gaussiană: $\frac{\pi}{2}\cos(\pi\tau/2) = 0{,}993$, e.s. 0,0132 (Genest & Rivest (1993))
- (3) Diferența 0,0134, e.s. 0,0026, interval de 95% [0,0088; 0,0187]: zero este în afară, deci diferența este semnificativă la 5%
- Explicația preciziei: $\hat{\tau}$ și $\hat{\rho}_S$ variază împreună între eșantioane, deci diferența lor are o e.s. mult mai mică decît fiecare
- Interpretare: perechea $(\hat{\tau}, \hat{\rho}_S)$ respinge deja copula Gaussiană, în acord cu B2



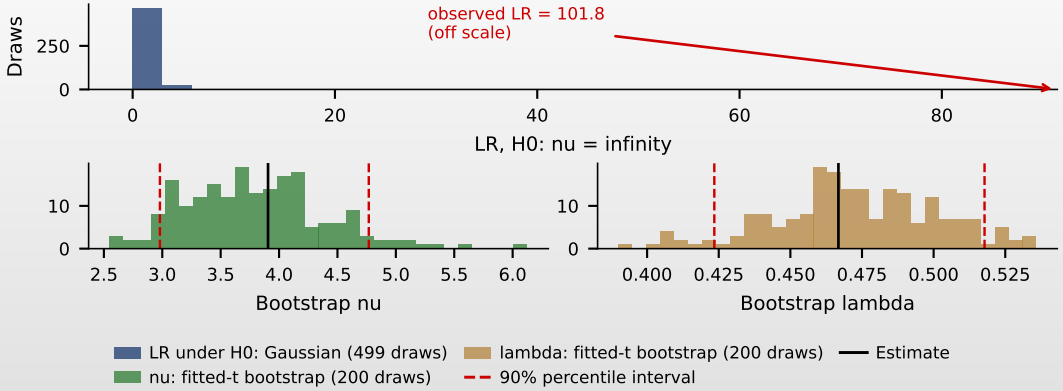
MFM_ch6_seminar

B2 extins [Rezolvat]: distribuții bootstrap și erori standard sandwich

- **Date**: estimările din B2; rangurile sînt estimate, deci inversa hessianei subestimează incertitudinea estimărilor CML
- **Cerințe**

1. Reprezentați distribuția sub H_0 a LR din B2 față de valoarea observată.
2. Construiți intervale de 90% pentru ν și λ din 200 de extrageri din copula t estimată, cu ranguri noi și reestimare.
3. Calculați e.s. pentru $\hat{\rho}$ și $\hat{\nu}$ din inversa hessianei A^{-1}/n și din sandwich-ul Genest, Ghoudi & Rivest (1995) $A^{-1}\Sigma A^{-1}/n$, $\Sigma = \mathrm{Var}[\dot{\ell}_\theta + W_1(U) + W_2(V)]$; A: informația Fisher a copulei, $\dot{\ell}_\theta$: scorul lui $\ln c_\theta$, W_1, W_2: corecțiile pentru marginalele estimate prin ranguri.

B2 extins [Rezolvat]: rezolvare (1/2)



MFM_ch6_seminar

B2 extins [Rezolvat]: rezolvare (2/2)

- (1) 499 de extrageri sub H_0: cuantila de 95% este 3,2; nicio valoare simulată nu atinge valoarea observată 101,8
- (2) $\hat{\nu} = 3{,}91$, interval de 90% [2,98; 4,77]; $\hat{\lambda} = 0{,}467$, [0,423; 0,518]
- (3) Gaussiană: e.s.($\hat{\rho}$) 0,0086 din inversa hessianei, 0,0138 din sandwich
- t, în aceeași ordine: e.s.($\hat{\rho}$) 0,0115 față de 0,0131; e.s.($\hat{\nu}$) 0,56 față de 0,58
- Interpretare: rangurile adaugă varianță lui $\hat{\rho}$; ν este determinat de cozi, unde erorile rangurilor contează puțin

MFM_ch6_seminar

A4 [Propus]: derivarea distorsiunii Forbes–Rigobon

- **Exemplu de urmat**: A1; **modelul**: $y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t$ cu $\mathrm{Cov}(x_t, \varepsilon_t) = 0$ presupusă; β și σ_ε^2 egale în perioada calmă și în criză; se schimbă doar $\sigma_{x,c}^2 = (1+\delta)\sigma_x^2$
- **Cerințe**

1. Scrieți ρ^2 ca funcție de $k = \beta^2\sigma_x^2/\sigma_\varepsilon^2$, folosind $\mathrm{Cov}(x, y)$ și $\mathrm{Var}(y)$.
2. Deduceți $\rho_c = \rho\sqrt{(1+\delta)/(1+\delta\rho^2)}$ și arătați că $|\rho_c| > |\rho|$ pentru $0 < |\rho| < 1$.
3. Inversați relația pentru a obține $\rho^* = \rho_c/\sqrt{1+\delta(1-\rho_c^2)}$.
4. Presupuneți că în criză crește și σ_ε^2, la $(1+\gamma)\sigma_\varepsilon^2$ cu $0 < \gamma < \delta$: calculați corelația adevărată din criză și, luînd corelația calmă drept reper, precizați în ce direcție este atunci deplasat ρ^*.

- **Raportați**: fiecare pas cu o propoziție de justificare și răspunsul la cerința 4 cu o interpretare economică

Înapoi Lista exercițiilor

A1 extins [Rezolvat]: corecția Forbes–Rigobon cu δ estimat

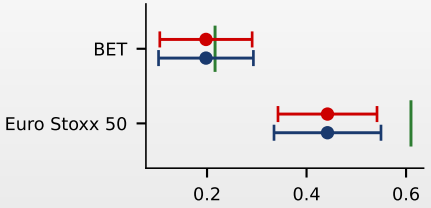
- **Date** (ferestrele din 2008 ale B3): $\hat{\delta} = 6{,}54$; n efectiv $n_c = 65$, $n_0 = 121$, partea întreagă a jumătății numărului de randamente suprapuse pe 2 zile (reper euristic, nu mărime efectivă exactă)
- **Cerințe**

1. Sub normalitate i.i.d., $(1+\hat{\delta})/(1+\delta) \sim F(n_c - 1, n_0 - 1)$, distribuția Fisher F: deduceți $\mathrm{Var}(\hat{\delta})$ la ordinul întîi.
2. Scrieți gradientul (g_r, g_δ) al lui ρ^* în $(\hat{\rho}_c, \hat{\delta})$ și covarianța lor (aceeași fereastră de criză).
3. Calculați $\mathrm{se}(\rho^*)$ cu δ fixat și aleator pentru ambele piețe și z pentru $\rho^* - \hat{\rho}_{calm}$, incluzînd incertitudinea lui $\hat{\rho}_{calm}$.

- Aceste formule Normale, cu eșantion efectiv, sînt ilustrative; bootstrap-ul staționar din B3 este inferența principală
- **Raportați**: $\mathrm{se}(\hat{\delta})$, cele două e.s. ale lui ρ^*, diferența lor procentuală, cele două valori z

A1 extins [Rezolvat]: rezolvare

- (1) $\mathrm{Var}\ln(1+\hat{\delta}) \approx \frac{2}{n_c-1} + \frac{2}{n_0-1}$, deci $\mathrm{se}(\hat{\delta}) = 7{,}54\sqrt{2(1/64+1/120)} = 1{,}65$
- (2) $k = 1+\delta(1-\rho_c^2)$, $g_r = (1+\delta)k^{-3/2}$, $g_\delta = -\rho_c(1-\rho_c^2)k^{-3/2}/2$; $\mathrm{Cov}(\hat{\rho}_c, \hat{\delta}) \approx (1+\delta)\rho_c(1-\rho_c^2)/n_c$
- $\mathrm{Var}(\rho^*) \approx g_r^2 \mathrm{Var}\hat{\rho}_c + g_\delta^2 \mathrm{Var}\hat{\delta} + 2g_r g_\delta \mathrm{Cov}(\hat{\rho}_c, \hat{\delta})$
- (3) Euro Stoxx 50: e.s. 0,055 → 0,051 (−7%), $z = -2{,}44$; BET: 0,049 → 0,047 (−3%), $z = -0{,}19$
- Un δ aleator nu lărgește neapărat intervalul: o fereastră volatilă crește împreună $\hat{\delta}$ și $\hat{\rho}_c$, iar erorile lor se compensează parțial; tot nu apare nicio dovadă de creștere



MFM_ch6_seminar

De ce diferența corectată cere o covarianță

- Notăm $r_0 = \hat{\rho}_{calm}$. Deși ferestrele sînt independente, ρ^* și r_0 folosesc aceleași date din perioada calmă prin $\hat{\delta}$.
- Sub aproximația i.i.d. Normală, $s_0 = (1 - r_0^2)/\sqrt{n_0}$ și $c_{*0} = \mathrm{Cov}(\rho^*, r_0) \approx -g_\delta(1+\delta) r_0 (1 - r_0^2)/n_0$.
- Statistica raportată mai sus folosește $z_{random} = (\rho^* - r_0)/\sqrt{s_{random}^2 + s_0^2 - 2c_{*0}}$, unde s_{random} este eroarea standard de pe pagina precedentă.
- Cu δ fixat, dispersia din numitor este $s_{fixed}^2 + s_0^2$. Acest test pe scara corelației diferă de transformarea Fisher anterioară.

A5 [Propus]: algebra DCC și un șoc

- **Exemplu de urmat**: B1; ținta $\bar{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}248487 \\ -0{,}248487 & 1 \end{pmatrix}$, $a = 0{,}052232$, $b = 0{,}933518$, $Q_{t-1} = \bar{Q}$, un șoc $\varepsilon_{t-1} = (-2{,}0,\ 1{,}0)$; notație: $Q_t^* = \operatorname{diag}(Q_t)$, o matrice variabilă în timp, nu ținta fixă
- **Cerințe**

1. Arătați prin inducție că Q_t este pozitiv definită pentru orice t cînd $Q_0 = \bar{Q}$ este.
2. Calculați Q_t și $R_{t,12}$ după șoc și indicatorul euristic de persistență $\ln 0{,}5 / \ln(a + b)$.
3. Arătați că $\mathbb{E}[Q_t] = \bar{Q}$ cere $\mathbb{E}[R_t] = \bar{Q}$, fals în general; pentru DCC-ul corectat al lui Aielli (2013) (slide-ul «Instrumente pentru extensii: modele dinamice»), arătați că $\mathbb{E}[Q_t] = \bar{Q}^*$.

- **Raportați**: demonstrațiile, $R_{t,12}$ și indicatorul de persistență; este acesta o regulă pentru frecvența reechilibrării unei acoperiri a riscului (*hedge*)?

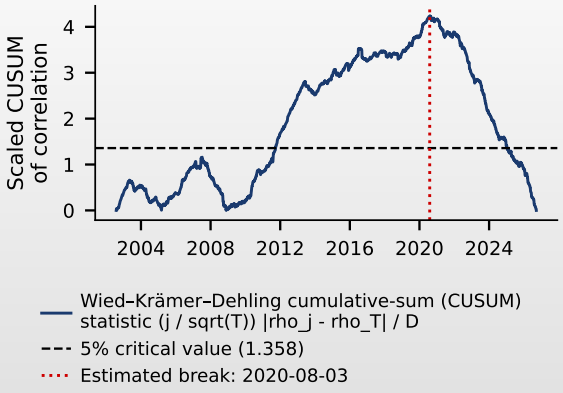
◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

B1 extins [Rezolvat]: data rupturii și precizia DCC

- **Întrebările**
  - cînd a avut loc ruptura corelației?
  - cît de precis este DCC?
- **Date**: reziduurile standardizate și DCC-ul estimat din B1
- **Cerințe**

1. Calculați statistica Wied, Krämer & Dehling (2012) Q_T (slide-ul «Instrumente pentru extensii: testarea unei corelații constante»), testați la 5% (1,358) și datați ruptura.
2. Explicați de ce un test Fisher la ianuarie 2022, o dată aleasă după graficul din curs, nu este valid.
3. Simulați 199 de traiectorii sub DCC-ul estimat (reziduuri decorelate reeșantionate); calculați e.s. pentru (a, b) reestimînd doar pasul 2 și ambii pași (Newey & McFadden (1994)).

B1 extins [Rezolvat]: rezolvare (1/2)



MFM_ch6_corr_inference

B1 extins [Rezolvat]: rezolvare (2/2)

e.s. pentru	$\hat{a}$	$\hat{b}$
hessiană	0,0059	0,0084
doar pasul 2	0,0051	0,0077
ambii pași	0,0052	0,0077

- (1) $Q_T = 4{,}25 > 1{,}358$ ($p < 0{,}001$); ruptura 3 august 2020; corelația reziduurilor $-0{,}361$ înainte, 0,066 după; o a doua ruptură pe 9 iulie 2007
- Legea limită este demonstrată pentru serii observate; pe reziduuri GARCH estimate, valoarea p este doar aproximativă
- (2) Fisher la ianuarie 2022 dă $z = 14{,}9$, dar data a fost aleasă după ce am văzut datele, iar Fisher presupune perechi i.i.d. Normale
- (3) În acest experiment bootstrap, pasul 1 adaugă 2% și 1% la dispersie, sub eroarea Monte Carlo de circa 5% a unei abateri standard bootstrap cu $B = 199$; rezultatul nu este general: contribuția pasului 1 poate rămîne de ordinul întîi și cînd T crește
- E.s.($\hat{b}$) din hessiană depășește abaterea standard bootstrap, ceea ce nu dovedește o acoperire conservatoare

MFM_ch6_corr_inference

B5 [Propus]: Bitcoin și S&P 500: DCC cu benzi bootstrap

- **Exemplu de urmat**: B1; **date**: Bitcoin (în USD) și indicele S&P 500 (indicele, nu SPY: rezultatul cu SPY din curs este un reper separat), zilele comune de tranzacționare din 18 septembrie 2014, $T = 3\,018$; mișcările Bitcoin din weekend intră în randamentul de luni
- **Cerințe**

1. Estimați GARCH(1,1) cu medie constantă prin QML Gaussian și DCC(1,1); calculați corelația condiționată medie înainte și după 1 ianuarie 2020.
2. Evaluați prin bootstrap incertitudinea parametrilor, 200 de extrageri:
   - păstrați fixate reziduurile GARCH și ținta $\bar{Q}$; decorelați $\eta_t = L_t^{-1}\varepsilon_t$ (slide-ul «Instrumente pentru extensii: modele dinamice»); reeșantionați împreună η_t;
   - simulați un DCC cu $(\hat{a}, \hat{b})$, reestimați (a, b), apoi refiltrați reziduurile *observate* cu fiecare (a, b) bootstrap.
3. Trasați banda punctuală de 90% pentru ρ_t și un interval de 90% pentru schimbarea corelației medii după 2020.

- **Interpretare**
  - ce incertitudine ignoră banda?
  - de ce nu este un interval de prognoză?

înapoi Lista exercițiilor

A6 [Propus]: corelațiile posibile

- **Exemplu de urmat**: A2; $X = e^{\sigma_1 Z_1}$, $Y = e^{\sigma_2 Z_2}$, $Z_i \sim N(0,1)$: variabile lognormale ipotetice, cu marginale fixate și dependență liberă
- **Instrumente**: marginile Fréchet–Hoeffding $W \leq C \leq M$ (slide-ul «Copule și teorema lui Sklar»); identitatea lui Hoeffding și $\mathbb{E}(e^{aZ}) = e^{a^2/2}$ (slide-ul «Instrumente pentru extensii: corelațiile posibile»)
- **Cerințe**

1. Arătați că $\rho(X, Y)$ este maximă pentru $Z_2 = Z_1$ și minimă pentru $Z_2 = -Z_1$.
2. Calculați pe rînd $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}Y$, $\mathbb{E}XY$, $\mathrm{Var}X$, $\mathrm{Var}Y$ și deduceți $\rho_{\max}$ și $\rho_{\min}$ în formă închisă.
3. Calculați-le pentru $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 2$ și interpretați $\rho = 0{,}3$ față de acest interval.

Înapoi Lista exercițiilor

B6 [Propus]: o copulă t dinamică pentru S&P 500 și Euro Stoxx 50

- **Exemplu de urmat**: B2 și copula t dinamică din curs; date: pseudo-observațiile săptămînale din A2 ($n = 1\,393$); reper: copula t statică din B2
- Rangurile săptămînale nu sînt filtrate GARCH: corelația dinamică poate absorbi și regimuri comune de volatilitate. Comparați cu reziduuri filtrate înainte de a o interpreta drept schimbare a dependenței.
- Copula t GAS (Creal, Koopman & Lucas (2013), scalare unitară) (slide-ul «Instrumente pentru extensii: modele dinamice»), pornită din $f_1 = \omega/(1-\beta_{GAS})$; cu x, y cuantilele t_ν și $Q = x^2 + y^2 - 2\rho xy$:
  $\ln c = \text{const} - \frac{1}{2}\ln(1-\rho^2) - \frac{\nu+2}{2}\ln\left(1 + \frac{Q}{\nu(1-\rho^2)}\right) + \frac{\nu+1}{2}\sum \ln(1 + x^2/\nu)$
- **Cerințe**

1. Deduceți $s_t = (1-\rho_t^2)\,\partial \ln c/\partial\rho$ prin derivarea funcției compuse și verificați-l numeric cu o diferență finită.
2. Estimați $(\omega, A, \beta_{GAS}, \nu)$ cu $0 \le A \le 1$, $0 \le \beta_{GAS} < 1$, $\nu > 2$, pornind de la estimarea statică.
3. Calculați LR față de copula t statică și valoarea p a lui printr-un bootstrap sub copula statică ($B_{boot} = 199$, simulare, ranguri noi, reestimarea ambelor); reprezentați ρ_t față de ρ static.

înapoi Lista exercițiilor

Ce fonduri intră în proiectul de volatilitate globală?

- Fonduri sectoriale: XLB (*Materials Select Sector SPDR Fund*), materiale; XLC, servicii de comunicații; XLE (*Energy Select Sector SPDR Fund*), energie; XLF (*Financial Select Sector SPDR Fund*), financiar; XLI (*Industrial Select Sector SPDR Fund*), industrie; XLK (*Technology Select Sector SPDR Fund*), tehnologie.
- Celelalte sectoare: XLP (*Consumer Staples Select Sector SPDR Fund*), bunuri de consum de bază; XLRE, imobiliare; XLU (*Utilities Select Sector SPDR Fund*), utilități; XLV (*Health Care Select Sector SPDR Fund*), sănătate; XLY (*Consumer Discretionary Select Sector SPDR Fund*), bunuri de consum ciclice.
- Stiluri și geografie: IWF (*iShares Russell 1000 Growth ETF*), acțiuni americane mari de tip creștere; IWD (*iShares Russell 1000 Value ETF*), acțiuni americane mari de tip valoare; IWM (*iShares Russell 2000 ETF*), acțiuni americane cu capitalizare mică; EFA (*iShares MSCI EAFE ETF*), piețe dezvoltate din afara SUA și Canadei; EEM (*iShares MSCI Emerging Markets ETF*), piețe emergente.
- Alte active: GLD (*SPDR Gold Shares*), aur; TLT, obligațiuni de stat americane pe termen lung; LQD (*iShares iBoxx Investment Grade Corporate Bond ETF*), obligațiuni corporative cu rating investițional; USO (*United States Oil Fund*), futures pe petrol.

C3 [Propus]: volatilitatea comună globală, temă de proiect

- **Exemplu de urmat**: B1, C2 și studiul de caz din curs (Engle & Campos-Martins (2023)); modelul COVOL (slide-ul «Instrumente pentru extensii: modele dinamice»), x_t pătratul COVOL global
- **Date**: prețurile de închidere ajustate ale celor 20 de ETF-uri listate în SUA din datele de piață ale cursului (11 ETF-uri sectoriale; Russell 1000 Growth și Value; Russell 2000; piețe dezvoltate și emergente din afara SUA; aur; obligațiuni de stat pe termen lung; obligațiuni corporative; petrol): XLB, XLC, XLE, XLF, XLI, XLK, XLP, XLRE, XLU, XLV, XLY, IWF, IWD, IWM, EFA, EEM, GLD, TLT, LQD, USO, fiecare de la prima zi pînă la 18 septembrie 2026 (panel neechilibrat); indicele VIX, închideri zilnice
- **Cerințe**

1. Filtrare: randamente logaritmice zilnice; medie autoregresivă AR(1), cu prima componentă principală (PC1, *first Principal Component*) a randamentelor ca factor (precizați cum formați PC1 pe panelul neechilibrat); GARCH(1,1); păstrați reziduurile standardizate ale ETF-urilor și ale PC1.
2. Încărcări egale: $\hat{x}_t = \frac{1}{N}\sum_i e_{it}^2$ pe seriile observate în acea zi; listați cele mai mari 20 de zile înainte și după 1 martie 2021, cu randamentul mediu și eticheta evenimentului.
3. Comparați corelația medie a reziduurilor cu cea a pătratelor lor; apoi, ca proiect de echipă, estimați încărcări diferite prin algoritmul alternant (iterativ) (Secțiunea 5.3 a articolului), testul ξ și regresia VIX.

- **Raportați**: cele două tabele cu primele 20 de zile, comparația corelațiilor și, pentru proiect, încărcările, ξ și regresia cu erori standard; interpretare: de ce poate o zi cu randament mediu pozitiv să ocupe o poziție înaltă în clasament?

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

Acronime folosite în acest material (1/2)

- **ACF**: AutoCorrelation Function — *funcția de autocorelație*
- **AI**: Artificial Intelligence — *inteligență artificială*
- **AIC**: Akaike Information Criterion — *criteriul informațional Akaike*
- **AR**: Autoregressive model — *model autoregresiv*
- **BAC**: Bank of America Corporation (NYSE ticker) — *Bank of America Corporation (simbolul bursier NYSE)*
- **BET**: Bucharest Exchange Trading (index) — *indicele de referință al Bursei de Valori București*
- **CBOE**: Chicago Board Options Exchange — *bursa de opțiuni din Chicago*
- **CCC**: Constant Conditional Correlation (model) — *modelul cu corelație condiționată constantă*
- **CML**: Canonical Maximum Likelihood — *verosimilitate maximă canonică (pe pseudo-observații)*
- **COVID-19**: COronaVIrus Disease 2019 — *boala provocată de coronavirus, 2019*
- **COVOL**: COmmon VOLatility (global COVOL: the size of the volatility shock common to all assets) — *volatilitatea comună (COVOL global: mărimea șocului de volatilitate comun tuturor activelor)*
- **DCC**: Dynamic Conditional Correlation — *corelație condiționată dinamică*
- **ETF**: Exchange-Traded Fund — *fond tranzacționat la bursă*
- **EWMA**: Exponentially Weighted Moving Average — *medie mobilă ponderată exponențial*

Acronime folosite în acest material (2/2)

- **FTSE**: Financial Times Stock Exchange (FTSE Russell, index provider) — *furnizorul de indici FTSE Russell*
- **GARCH**: Generalised AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity — *heteroscedasticitate condiționată autoregresivă generalizată*
- **GAS**: Generalised Autoregressive Score (model) — *model cu scor autoregresiv generalizat*
- **HAC**: Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent (standard errors) — *erori standard robuste la heteroscedasticitate și autocorelație*
- **JPM**: JPMorgan Chase & Co. (NYSE ticker) — *JPMorgan Chase & Co. (simbolul bursier NYSE)*
- **LQD**: iShares iBoxx Investment Grade Corporate Bond ETF — *ETF de obligațiuni corporative americane cu rating investițional*
- **LR**: Likelihood Ratio (test) — *testul raportului de verosimilitate*
- **NYSE**: New York Stock Exchange — *Bursa din New York*
- **PC1**: first Principal Component — *prima componentă principală*
- **QML**: Quasi-Maximum Likelihood — *cvasi-verosimilitate maximă*
- **SUA**: Statele Unite ale Americii
- **US**: United States — *Statele Unite ale Americii*
- **USO**: United States Oil Fund (ETF ticker) — *fondul United States Oil Fund (simbolul ETF-ului pe petrol)*
- **VIX**: CBOE Volatility IndeX — *indicele de volatilitate CBOE*

Bibliografie (1/2)

- Aielli, G.P. (2013). Dynamic conditional correlation: on properties and estimation. *Journal of Business & Economic Statistics*, 31(3), 282–299.
- Creal, D., Koopman, S.J., Lucas, A. (2013). Generalized autoregressive score models with applications. *Journal of Applied Econometrics*, 28(5), 777–795.
- Demarta, S., McNeil, A.J. (2005). The t copula and related copulas. *International Statistical Review*, 73(1), 111–129.
- Engle, R.F. (2002). Dynamic conditional correlation: a simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models. *Journal of Business & Economic Statistics*, 20(3), 339–350.
- Engle, R.F., Campos-Martins, S. (2023). What are the events that shake our world? Measuring and hedging global COVOL. *Journal of Financial Economics*, 147(1), 221–242.
- Forbes, K.J., Rigobon, R. (2002). No contagion, only interdependence: measuring stock market comovements. *Journal of Finance*, 57(5), 2223–2261.
- Franke, J., Härdle, W.K., Hafner, C.M. (2019). Statistics of Financial Markets: An Introduction, ed. a 5-a. Springer.
- FTSE Russell (2019). FTSE Russell announces results of country classification review (press release, 26 September 2019).

Bibliografie (2/2)

- Genest, C., Ghoudi, K., Rivest, L.-P. (1995). A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distributions. *Biometrika*, 82(3), 543–552.
- Genest, C., Rivest, L.-P. (1993). Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas. *Journal of the American Statistical Association*, 88(423), 1034–1043.
- Genest, C., Rémillard, B., Beaudoin, D. (2009). Goodness-of-fit tests for copulas: a review and a power study. *Insurance: Mathematics and Economics*, 44(2), 199–213.
- Nelsen, R.B. (2006). An Introduction to Copulas, ed. a 2-a. Springer.
- Newey, W.K., McFadden, D. (1994). Large sample estimation and hypothesis testing. În R.F. Engle, D.L. McFadden (ed.), *Handbook of Econometrics*, Vol. 4, 2111–2245. Elsevier.
- Politis, D.N., Romano, J.P. (1994). The stationary bootstrap. *Journal of the American Statistical Association*, 89(428), 1303–1313.
- Wied, D., Krämer, W., Dehling, H. (2012). Testing for a change in correlation at an unknown point in time using an extended functional delta method. *Econometric Theory*, 28(3), 570–589.