








# Modelarea piețelor financiare

## Seminarul 7: VaR și Expected Shortfall — aplicații



Daniel Traian PELE
Drd. Antoaneta Amza, antoaneta.amza@csie.ase.ro

Academia de Studii Economice din București
IDA Institute Digital Assets
Blockchain Research Center
AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance
Academia Română, Institutul de Prognoză Economică
MSCA Digital Finance

# Cît de mare poate fi pierderea într-o zi?

- Întrebarea seminarului
  - **cît de mari sînt pierderile extreme de mîine și cu ce precizie le putem estima?**
- Livrabile
  - răspunsurile la exercițiile A
  - un tabel și o figură pentru fiecare exercițiu B
  - codul corectat din C1
  - o frază de interpretare pentru fiecare exercițiu
- Notebook-ul de azi: deschideți notebook-ul seminarului în Colab
- Exercițiile, tipurile și ordinea lor: harta exercițiilor de după definiții
  - B4, A5 și B5 folosesc teoria valorilor extreme (Extreme Value Theory, EVT) și contribuțiile Euler, definite în noțiunile de mai jos
- Seminar: prof. Daniel Traian Pele, danpele@ase.ro; drd. Antoaneta Amza, antoaneta.amza@csie.ase.ro

## Ce piețe și unități folosim pentru randamente?

- BET este indicele Bucharest Exchange Trading; BVB este Bursa de Valori București. BNR este Banca Națională a României, sursa cursului de referință EUR/RON: lei (RON) pentru un euro (EUR).
- Un fond tranzacționat la bursă (*Exchange-Traded Fund*, ETF) urmărește un indice sau un activ: SPY (*SPDR S&P 500 ETF Trust*) urmărește indicele S&P 500 (*Standard & Poor's*); TLT (*iShares 20+ Year Treasury Bond ETF*) deține obligațiuni de stat americane cu scadențe de peste 20 de ani; GLD (*SPDR Gold Shares*) oferă expunere pe aur. US: *United States* (SUA); USD: dolarul american.
- Pierderile unui activ folosesc randamente logaritmice procentuale. De la 100 la 90, randamentul simplu este -10%, cel logaritmic aproximativ -10,54%; pierderea log este pozitivă, 10,54%. Randamentele portofoliilor folosesc randamente simple și ponderile activelor.
- C1 verifică un răspuns de inteligență artificială (AI). O explicație plauzibilă trebuie să respecte semnul, unitățile și eșantionul exercițiului.

# Datele folosite

| Seria | Prețul folosit | Perioada | Calendarul | Folosită în |
|---|---|---|---|---|
| BET | închiderea zilnică | 2000–2026 | zile lucrătoare | B1, B2, B4, C1 |
| S&P 500 | închiderea zilnică | 2000–2026 | zile de tranzacționare SUA | B2 |
| Bitcoin | închiderea zilnică (USD) | 2014–2026 | în fiecare zi | B3 |
| SPY, TLT, GLD | închiderea ajustată | 2014–2026 | zile comune cu Bitcoin | B5 |
| Aur; EUR/RON | aur: închiderea zilnică (USD pe uncie); EUR/RON: cursul de referință BNR | 2000–2026; 2005–2026 | zile lucrătoare; zile lucrătoare în România | B6 |
| Acțiuni BVB | Banca Transilvania, OMV Petrom și alte șase acțiuni mari de la BVB, închiderea ajustată | 2016–2026 | zile de tranzacționare BVB | C2 |

- Prețurile zilnice din datele cursului, cîte o serie pe activ (cîmpul folosit: close sau adjusted close, ca în tabel); toate selecțiile se încheie la 18 septembrie 2026
- EUR/RON: cursul oficial de referință BNR, nu seria EUR/RON a furnizorului de date de piață (conține cotații eronate, vezi Seminarul 0)
- Două sau mai multe active: întîi aliniem *prețurile* pe zilele comune de tranzacționare, apoi calculăm randamentele

# Pregătire: rulați și verificați

```
import numpy as np, pandas as pd
URL = ('https://raw.githubusercontent.com/'
       'danpele/MFM/main/data/market/')
px = pd.read_csv(URL + 'BET.csv', index_col='date',
                 parse_dates=True)['close']
px = px.loc['2000-01-01':'2026-09-18']
px = px[px.index.dayofweek < 5]
r = 100 * np.log(px).diff().dropna()    # % log returns
L = -r                                  # losses
print(px.head(3)); print(len(r), r.index[-1])
```

- Codul din secțiunea „Date" a notebook-ului
- Rezultatul așteptat: $n = 6\,670$ randamente, ultima dată 2026-09-18

| date | close | $r_t$ (%) |
|---|---|---|
| 2000-01-05 | 460,67 | – |
| 2000-01-06 | 484,04 | 4,95 |
| 2000-01-07 | 526,34 | 8,38 |

- Ultima închidere: 32 757,81 la 2026-09-18
- Dacă numărul sau prima valoare diferă, verificați seria, coloana de preț (close sau adjusted close) și filtrul zilelor lucrătoare
- Celelalte serii: folosiți fișierele și coloanele de preț de pe slide-ul „Ce fișiere definesc eșantionul?"

# VaR și ES

- Detalii: Capitolul 7
- Randamentul $X$, pierderea $L = -X$; nivelul $\alpha$ este o **probabilitate a cozii** (de ex. 1% sau 2,5%)
- **Valoarea la risc** (*Value-at-Risk*, VaR): pierderea depășită cu probabilitatea $\alpha$, adică cuantila de ordin $\alpha$ a randamentului, cu semn schimbat

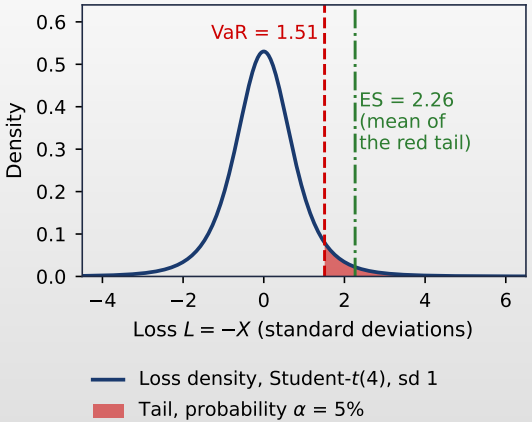
$$\mathrm{VaR}_\alpha = -q_\alpha(X), \qquad q_\alpha(X) = \inf\{x : \ P(X \le x) > \alpha\}$$

  - $q_\alpha(X)$: cuantila de ordin $\alpha$, cel mai mic $x$ (infimumul) în care funcția de repartiție $P(X \le x)$ depășește $\alpha$; VaR indică frecvența depășirii unui prag de pierdere, nu mărimea ei
  - pentru o pierdere continuă $L = -X$, $\mathrm{VaR}_\alpha = q_{1-\alpha}(L)$; pentru pierderi discrete (exemplul de mai jos) se folosește definiția prin randamente
- **Pierderea așteptată în coadă** (*Expected Shortfall*, ES): pierderea medie în cele mai rele $\alpha$ dintre rezultate

$$\mathrm{ES}_\alpha = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha q_u(X)\,du \ = \ \mathbb{E}[L \mid L \ge \mathrm{VaR}_\alpha] \ \text{ (pentru } L \text{ continuu)}$$

  - O medie a valorilor VaR la toate nivelurile $u \le \alpha$, deci $\mathrm{ES}_\alpha \ge \mathrm{VaR}_\alpha$; $\mathbb{E}[\cdot \mid \cdot]$: media pe rezultatele care satisfac condiția
  - Exemplu: zece pierderi egal probabile $-2, -1, 0, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 9$, $\alpha = 20\%$: $P(L \ge 5) = 20\%$ nu depășește $\alpha$, $P(L \ge 3) = 30\%$ da, deci $\mathrm{VaR}_{20\%} = 3$; cele mai rele 20% sînt $\{9, 5\}$, deci $\mathrm{ES}_{20\%} = 7$
  - Reglementare: regulile Basel pentru riscul de piață au înlocuit VaR 1% cu ES 2,5% Basel Committee (2019)

# VaR și ES pe densitatea pierderii




- O pierdere cu distribuția Student-$t(4)$ rescalată la abaterea standard 1; probabilitatea cozii $\alpha = 5\%$ în roșu
- VaR: punctul în care începe coada roșie, $P(L > \mathrm{VaR}_\alpha) = \alpha$
  - Aici $\mathrm{VaR}_{5\%} = 1{,}51$ abateri standard
- ES: centrul de greutate al cozii roșii, deci mereu la dreapta lui VaR
  - Aici $\mathrm{ES}_{5\%} = 2{,}26$; două cozi cu același VaR pot avea valori ES foarte diferite
- Semnele: VaR și ES se raportează ca numere **pozitive** atunci cînd sînt pierderi

# VaR și ES pentru distribuția Normală

- Randamente Normale: $X = \mu + \sigma Z$, $Z \sim N(0,1)$

$$\mathrm{VaR}_\alpha = -(\mu + \sigma z_\alpha), \qquad \mathrm{ES}_\alpha = -\mu + \sigma \frac{\varphi(z_\alpha)}{\alpha}$$

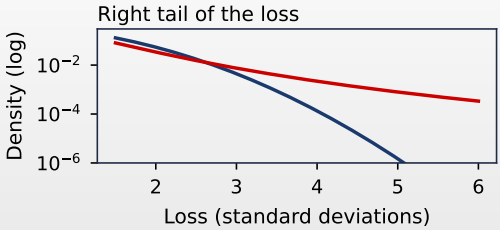
  - $\mu$: media; $\sigma$: abaterea standard; $\Phi$, $\varphi$: funcția de repartiție și densitatea lui $N(0,1)$; $z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha) < 0$: cuantila ei de ordin $\alpha$
  - VaR se află la $|z_\alpha|$ abateri standard sub medie; ES folosește factorul mai mare $\varphi(z_\alpha)/\alpha$, media lui $-Z$ în coadă (A1 îl derivă)
  - $z_{1\%} = -2{,}326$, $\varphi(z_{1\%})/0{,}01 = 2{,}665$; $z_{2{,}5\%} = -1{,}960$, $\varphi(z_{2{,}5\%})/0{,}025 = 2{,}338$; cu $\mu = 0$, $\sigma = 1\%$: VaR 1% = 2,33%, ES 2,5% = 2,34%

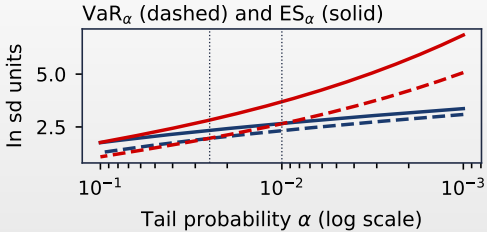
- Randamente Student-$t$: $X = m + sT$, $T \sim t_\nu$ cu densitatea $g_\nu$ și cuantila $t_\alpha = t_\nu^{-1}(\alpha)$

$$\mathrm{VaR}_\alpha = -(m + s\, t_\alpha), \qquad \mathrm{ES}_\alpha = -m + s \frac{g_\nu(t_\alpha)}{\alpha} \frac{\nu + t_\alpha^2}{\nu - 1} \quad (\nu > 1)$$

  - $m$: poziția; $s > 0$: scala; $\nu$: gradele de libertate, $\nu$ mai mic = cozi mai grele; $\mathrm{Var}(T) = \nu/(\nu-2)$ pentru $\nu > 2$, deci o abatere standard $\sigma$ cere $s = \sigma\sqrt{(\nu-2)/\nu}$ (A2)

# Distribuția Normală și distribuția Student-t




Normal, sd 1 — Student-$t$(4), sd 1

- Ambele distribuții au abaterea standard 1; stînga: coada dreaptă a pierderii pe scală logaritmică, unde densitatea Student-$t$(4) este de multe ori mai mare dincolo de 3 abateri standard
- Dreapta: VaR (întrerupt) și ES (continuu) în abateri standard, pentru $\alpha$ de la 10% la 0,1%; punctat: $\alpha = 2{,}5\%$ și 1%
  - La niveluri moderate cele două modele sînt apropiate; diferența apare în extremitatea cozii și crește mai repede pentru ES decît pentru VaR
  - Întrebare pentru sală: la $\alpha = 5\%$ și aceeași abatere standard, care model dă VaR mai mare?
  - Răspuns: distribuția Normală (1,64 față de 1,51 abateri standard); la 1% ordinea se inversează (2,33 față de 2,65)

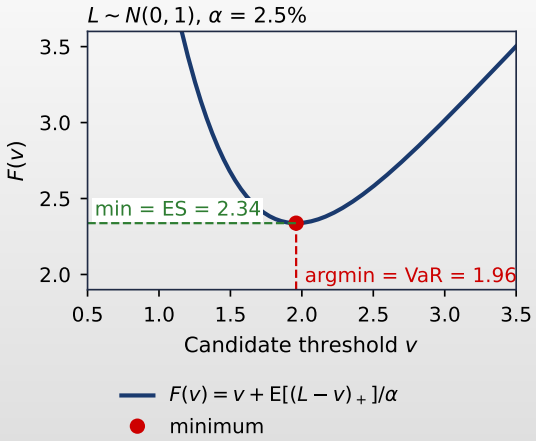
## Măsuri de risc coerente

- **Măsură de risc coerentă** $\rho$ Artzner et al. (1999): o regulă care asociază unei pierderi $L$ capitalul necesar și satisface patru axiome

$$L_1 \leq L_2 \Rightarrow \rho(L_1) \leq \rho(L_2), \qquad \rho(L + c) = \rho(L) + c,$$
$$\rho(\lambda L) = \lambda\, \rho(L)\ (\lambda > 0), \qquad \rho(L_1 + L_2) \leq \rho(L_1) + \rho(L_2)$$

  - Monotonă (pierderi mai mari, mai mult capital); invariantă la translații (o pierdere sigură $c$ adaugă $c$); pozitiv omogenă (poziție dublă, capital dublu)
  - **Subaditivă**: combinarea a două poziții $L_1$, $L_2$ nu cere niciodată mai mult capital decît păstrarea lor separată, deci diversificarea nu este penalizată
- ES este coerent; VaR satisface primele trei axiome, dar poate să nu fie subaditiv
  - Cazuri tipice: pierderi discrete (neplăți, A4) și cozi foarte grele; pentru pierderi cu distribuție Normală comună și o probabilitate a cozii sub 50%, VaR este subaditiv

# ES ca minim



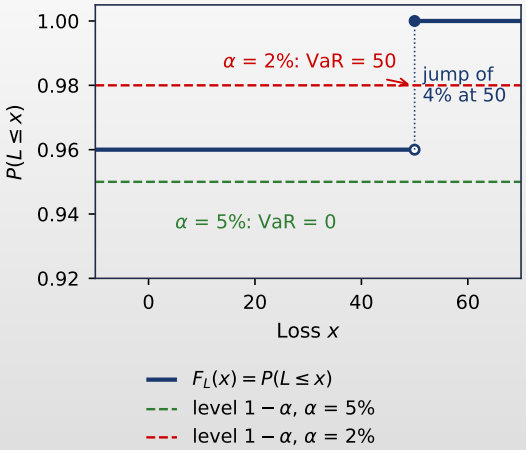

- **Rockafellar–Uryasev** Rockafellar & Uryasev (2000): ES este minimul unei funcții convexe de un prag candidat $v$

$$F_\alpha(v) = v + \frac{\mathbb{E}[(L-v)_+]}{\alpha}, \qquad \mathrm{ES}_\alpha = \min_v F_\alpha(v)$$

  - $(x)_+ = \max(x, 0)$; $\mathbb{E}[(L-v)_+]$: pierderea medie peste $v$ (zero sub $v$)
  - Graficul ($L \sim N(0,1)$, $\alpha = 2{,}5\%$): minimul este atins în $v = \mathrm{VaR}_\alpha = 1{,}96$ și este egal cu $\mathrm{ES}_\alpha = 2{,}34$

- Utilizări: estimarea ES ca problemă de optimizare (A7), contribuțiile la ES prin derivare (A5 extins)

# Pierderi cu un atom

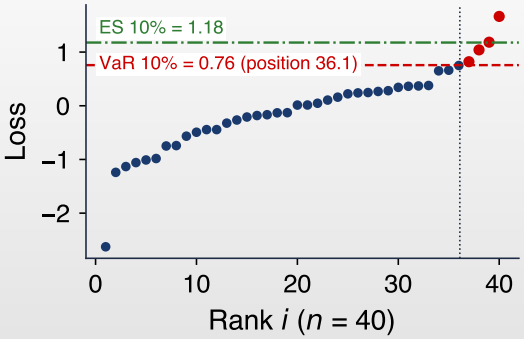



- Un atom: o valoare a pierderii cu probabilitate pozitivă, de ex. o neplată; funcția de repartiție are acolo un salt
- VaR din definiția cu infimum: primul $x$ în care $P(L \le x) \ge 1-\alpha$
  - Graficul (pierdere 50 cu probabilitatea 4%): $\alpha = 5\%$ dă VaR = 0; $\alpha = 2\%$ dă VaR = 50
- ES trebuie să acopere o coadă de probabilitate exact $\alpha$ Acerbi & Tasche (2002)

$$\mathrm{ES}_\alpha = \frac{1}{\alpha}\Big(\mathbb{E}\big[L\,1\{L > \mathrm{VaR}_\alpha\}\big] + \mathrm{VaR}_\alpha\big(\alpha - P(L > \mathrm{VaR}_\alpha)\big)\Big)$$

  - $1\{\cdot\}$: 1 dacă are loc condiția, 0 altfel; primul termen: pierderile strict dincolo de VaR; al doilea: probabilitatea care lipsește din coadă, plasată în VaR
  - Graficul, $\alpha = 5\%$: $(50 \times 0{,}04 + 0 \times 0{,}01)/0{,}05 = 40$

# Simularea istorică




- sorted losses $L_{(1)} \leq \ldots \leq L_{(n)}$
- the $k = 4$ losses $\geq$ VaR

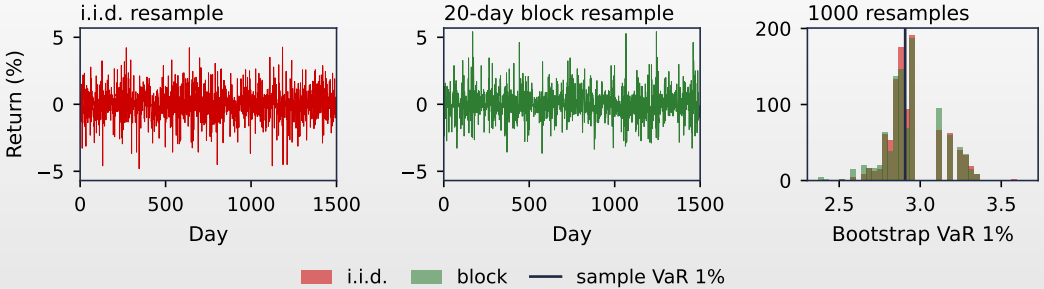
- Simularea istorică (HS): niciun model, doar pierderile trecute ordonate, $L_{(\mathbf{1})} \leq \cdots \leq L_{(n)}$

$$\widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha = L_{(j)} + (p-j)\big(L_{(j+\mathbf{1})} - L_{(j)}\big),$$
$$p = 1 + (n-1)(1-\alpha), \quad j = \lfloor p \rfloor$$

  - $p$: poziția între pierderile ordonate (`np.quantile`, interpolare liniară); $j = \lfloor p \rfloor$: partea ei întreagă

- $\widehat{\mathrm{ES}}_\alpha = \frac{\mathbf{1}}{n\alpha}\big[\sum_{i=\mathbf{1}}^{m} L_{(n-i+\mathbf{1})} + (n\alpha - m)L_{(n-m)}\big]$, $m = \lfloor n\alpha \rfloor$: cele mai mari $m$ pierderi cu ponderea 1, următoarea cu ponderea fracționară $n\alpha - m$
  - Graficul: $n = 40$, $\alpha = 10\%$, $p = 36{,}1$, $m = 4$
  - Numărul din coadă $n\alpha$ determină precizia: $n = 500$, $\alpha = 1\%$ lasă cinci pierderi
- HS este necondiționată: o fereastră calmă dă un VaR mic chiar dacă azi piața este volatilă

## Intervale bootstrap




- **Bootstrap** Efron (1979): extragem $n$ pierderi cu revenire, recalculăm statistica $\hat{\theta}^{(b)}$, repetăm pentru $b = 1, \ldots, B$
  - Intervalul de încredere (Confidence Interval, CI) percentil de 95%: $[q_{\mathbf{2,5\%}},\ q_{\mathbf{97,5\%}}]$ ale valorilor $\hat{\theta}^{(b)}$; lățimea lui măsoară incertitudinea de selecție
- Extragerile independente și identic distribuite (i.i.d.) rup gruparea volatilității (*volatility clustering*; stînga); **bootstrap-ul pe blocuri suprapuse** Künsch (1989) extrage blocuri de, de ex., 20 de zile consecutive, concatenate și tăiate la lungimea $n$ (mijloc)
  - Dreapta: cînd crizele sînt grupate, distribuția bootstrap pe blocuri a lui VaR 1% este mai largă decît cea i.i.d.

# Precizia VaR

- **Eroarea standard (Standard Error, SE) asimptotică a VaR istoric** (pierderi i.i.d.)

$$\mathrm{SE}(\widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha) \approx \frac{\sqrt{\alpha(1-\alpha)/n}}{f(\mathrm{VaR}_\alpha)}$$

  - $f$: densitatea lui $L$ în VaR; puține observații în jurul lui VaR ($f$ mic) = VaR imprecis; $\sqrt{\alpha(1-\alpha)/n}$: eroarea standard a proporției pierderilor de peste VaR
  - $\hat{f}$: densitate nucleu Gaussian, lățimea de bandă $h = \hat{\sigma}\,(4/(3n))^{\mathbf{1/5}}$ (regula Silverman din SciPy), $\hat{\sigma}$: abaterea standard de selecție

- Varianta **HAC** (*Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent*, robustă la heteroscedasticitate și autocorelație): înlocuim $\alpha(1-\alpha)$ cu dispersia de termen lung a lui $I_t = 1\{L_t > \widehat{\mathrm{VaR}}\}$

$$\hat{\Omega} = \hat{\gamma}_{\mathbf{0}} + 2\sum_{j=\mathbf{1}}^{m}\Big(1 - \frac{j}{m+1}\Big)\hat{\gamma}_j$$

  - $\hat{\gamma}_j$: autocovarianța de selecție a lui $I_t$ la lagul $j$; ponderi Bartlett $1 - j/(m+1)$; lagul Newey–West $m = \lfloor 4(n/100)^{\mathbf{2/9}} \rfloor$; depășirile grupate dau $\hat{\Omega} > \alpha(1-\alpha)$

# Precizia ES

- **ES**: funcția de influență Chen (2008) și dispersia ei

$$\mathrm{IF}(x) = \mathrm{VaR}_\alpha + \frac{(x - \mathrm{VaR}_\alpha)_+}{\alpha} - \mathrm{ES}_\alpha, \qquad \mathrm{Var}(\widehat{\mathrm{ES}}_\alpha) \approx \frac{\mathrm{Var}(\mathrm{IF}(L))}{n}$$

  - $\mathrm{IF}(x)$: efectul unei observații suplimentare $x$ asupra estimării; doar pierderile de dincolo de VaR o modifică, fiecare cu ponderea $1/\alpha$
  - Deci precizia lui $\widehat{\mathrm{ES}}_\alpha$ este determinată de cele mai mari cîteva pierderi: numărul din coadă $n\alpha$ și cît de grea este coada dincolo de VaR
- Regulă practică: eroarea standard relativă a unei estimări ES i.i.d. este aproximativ $\propto 1/\sqrt{n\alpha}$
  - $n = 250$, $\alpha = 2{,}5\%$: doar 6,25 pierderi în coadă; un bootstrap pe blocuri lărgește și mai mult intervalul cînd zilele din coadă sînt grupate

## Simularea istorică filtrată

- Simularea istorică filtrată (*Filtered Historical Simulation*, FHS) Barone-Adesi et al. (1999): estimăm un model AR(1) (autoregresiv) pentru medie și un GARCH(1,1) (*Generalised AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity*, Capitolul 5) pentru varianță, prin cvasi-verosimilitate maximă Normală (*Quasi-Maximum Likelihood*, QML), cu intercept în AR, apoi standardizăm randamentele

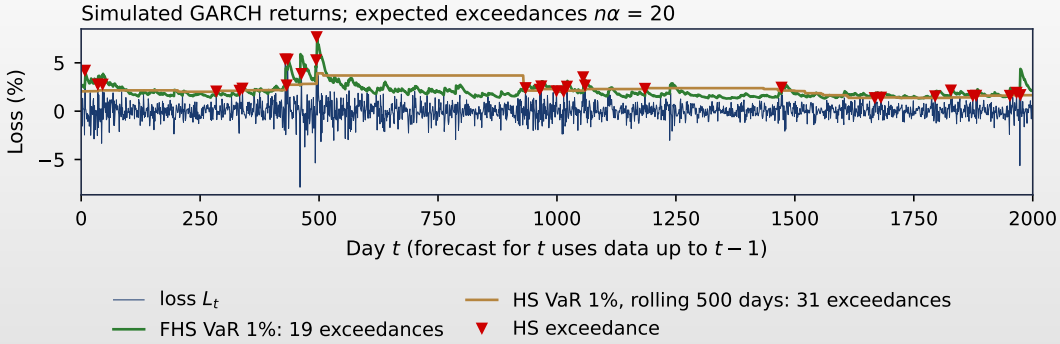
$$r_t = \mu_t + \sigma_t z_t, \quad \mu_t = c + \phi\, r_{t-\mathbf{1}}, \quad \sigma_t^{\mathbf{2}} = \omega + \alpha_{\mathbf{1}}(r_{t-\mathbf{1}} - \mu_{t-\mathbf{1}})^{\mathbf{2}} + \beta_{\mathbf{1}}\sigma_{t-\mathbf{1}}^{\mathbf{2}}, \quad \hat{z}_t = \frac{r_t - \hat{\mu}_t}{\hat{\sigma}_t}$$

  - $\mu_t$: media condiționată (AR(1): $c$ constanta, $\phi$ coeficientul autoregresiv); $\sigma_t$: volatilitatea condiționată; $z_t$: șoc i.i.d. cu media 0 și dispersia 1; $\hat{z}_t$: reziduul standardizat
  - $\omega > 0$; $\alpha_{\mathbf{1}}$: reacția la șocul de ieri; $\beta_{\mathbf{1}}$: memoria; $\alpha_{\mathbf{1}} + \beta_{\mathbf{1}} < 1$
- VaR și ES de mîine: scala prognozată înmulțită cu o statistică a cozii reziduurilor, minus media prognozată

$$\mathrm{VaR}_{t+\mathbf{1}} = -\hat{\mu}_{t+\mathbf{1}} + \hat{\sigma}_{t+\mathbf{1}}\,\hat{\xi}_\alpha, \qquad \hat{\xi}_\alpha = -q_\alpha(\hat{z}), \qquad \mathrm{ES}_{t+\mathbf{1}} = -\hat{\mu}_{t+\mathbf{1}} + \hat{\sigma}_{t+\mathbf{1}}\,\overline{(-\hat{z})}_{\geq \hat{\xi}_\alpha}$$

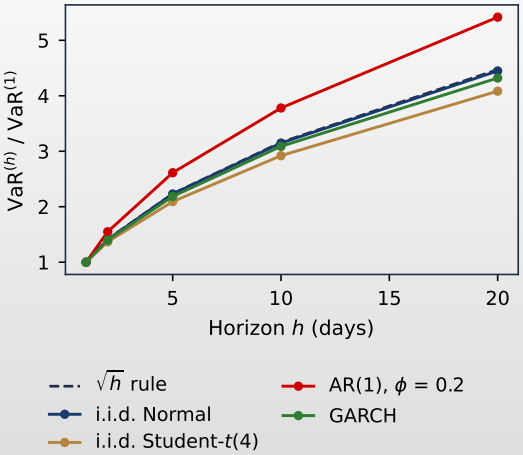
  - $\overline{(-\hat{z})}_{\geq \hat{\xi}_\alpha}$: media celei mai rele fracțiuni $\alpha$ a pierderilor reziduale $-\hat{z}_t$, cu ponderea fracționară de la simularea istorică
  - Exemplu: $\hat{\mu}_{t+\mathbf{1}} = 0{,}1\%$, $\hat{\sigma}_{t+\mathbf{1}} = 3\%$, $\hat{\xi}_{\mathbf{1\%}} = 2{,}8$: $\mathrm{VaR}_{\mathbf{1\%}} = -0{,}1 + 3 \times 2{,}8 = 8{,}3\%$

# VaR filtrat și depășirile




- Depășire în ziua $t$: $L_t > \mathrm{VaR}_t$, cu $\mathrm{VaR}_t$ calculat doar din datele pînă în ziua $t-1$ (în afara eșantionului)
  - Sub un model corect, numărul $N$ din $n$ zile este $\mathrm{Bin}(n, \alpha)$: media $n\alpha$, abaterea standard $\sqrt{n\alpha(1-\alpha)}$; $n = 2\,000$, $\alpha = 1\%$: $20 \pm 4{,}4$
  - Graficul (GARCH simulat): FHS urmează volatilitatea și dă 19 depășiri; VaR HS pe fereastră mobilă reacționează tîrziu și dă 31, grupate după salturile volatilității

# Orizonturi mai lungi




- Orizont de $h$ zile: pierderile log se adună

$$L_t^{(h)} = L_t + L_{t-1} + \cdots + L_{t-h+1}$$

  - $\mathrm{VaR}^{(h)}$: cuantila acestor sume; sumele consecutive au $h-1$ zile comune (se suprapun)
  - Randamentele simple se compun: $100\big[1 - \prod_{i=1}^{h}(1 + R_{t+i}/100)\big]$, $R$ în %

- Regula rădăcinii pătrate a timpului: $\mathrm{VaR}^{(h)} = \sqrt{h}\,\mathrm{VaR}^{(1)}$

  - Exactă, în particular, pentru pierderi i.i.d. Normale cu media zero: dispersia sumei a $h$ zile independente este de $h$ ori dispersia zilnică
  - Graficul (simulat): autocorelația pozitivă duce raportul peste $\sqrt{h}$; cozile groase îl coboară sub $\sqrt{h}$

# Depășiri de prag: distribuția GPD

- Excesele $Y = L - u$ peste un prag ridicat $u$ urmează aproximativ o **distribuție Pareto generalizată** (GPD) McNeil, Frey & Embrechts (2015)

$$P(Y \le y \mid L > u) \approx G_{\xi,\beta}(y) = 1 - \Big(1 + \frac{\xi y}{\beta}\Big)^{-\mathbf{1}/\xi}, \qquad y \ge 0$$

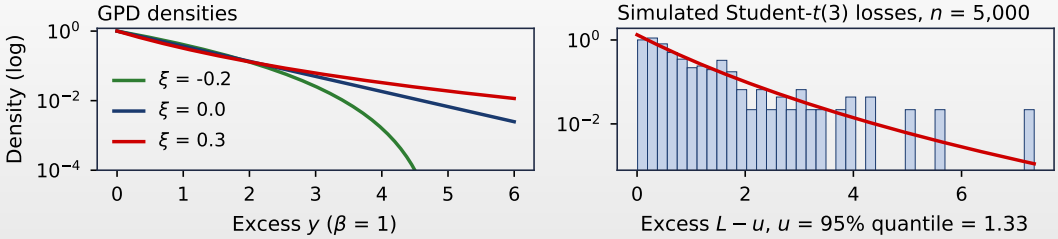
  - $\xi$: forma; $\xi > 0$: coadă grea, de tip putere (momentele de ordin $\ge 1/\xi$ sînt infinite); $\xi = 0$: domeniul Gumbel, excesele normalizate au limită exponențială $(1 - e^{-y/\beta})$, de ex. pentru distribuția Normală; $\xi < 0$: coadă mărginită; $\beta > 0$: scala

- VaR și ES din coadă ($n$: mărimea selecției, $N_u$: numărul de depășiri, $\xi < 1$)

$$\mathrm{VaR}_\alpha = u + \frac{\beta}{\xi}\Big[\Big(\frac{n}{N_u}\,\alpha\Big)^{-\xi} - 1\Big], \qquad \mathrm{ES}_\alpha = \frac{\mathrm{VaR}_\alpha + \beta - \xi u}{1 - \xi}$$

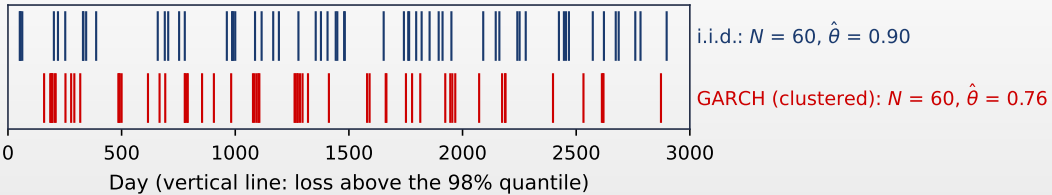
  - $N_u/n$ estimează $P(L > u)$; GPD extrapolează dincolo de cele mai mari pierderi observate, unde HS nu are date
  - Erorile standard i.i.d. ale estimărilor de verosimilitate maximă: $\mathrm{SE}(\hat\xi) = (1 + \hat\xi)/\sqrt{N_u}$, $\mathrm{SE}(\hat\beta) = \hat\beta\sqrt{2(1 + \hat\xi)/N_u}$; alegerea lui $u$: deplasare (prag prea mic) față de dispersie (prag prea mare)

# Distribuția GPD pe pierderi simulate




- Stînga: densități GPD cu $\beta = 1$ pe scală logaritmică: $\xi = -0{,}2$ se termină în $y = 5$, $\xi = 0$ este o dreaptă (exponențială), $\xi = 0{,}3$ scade ca o putere
- Dreapta: 5 000 de pierderi Student-$t$(3), pragul la cuantila de 95%, 250 de excese; $\hat{\xi} = 0{,}13$ estimat este sub valoarea adevărată a cozii, 1/3: cu 250 de excese $\mathrm{SE}(\hat{\xi}) \approx 0{,}07$, iar un prag insuficient de ridicat deplasează $\hat{\xi}$

# Depășiri grupate: indicele extremal

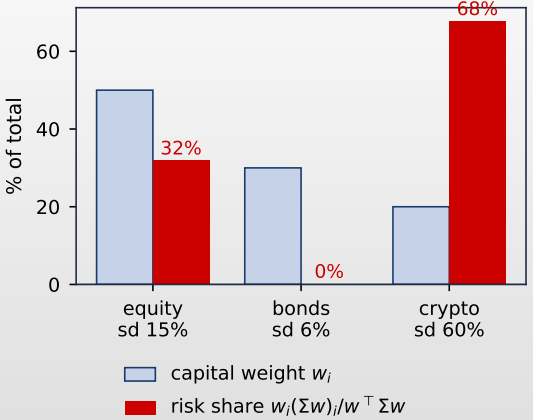



- **Indicele extremal** $\theta \in (0, 1]$: inversul măririi medii a grupurilor de depășiri; $\theta = 1$: depășirile nu se grupează asimptotic (de ex. în cazul i.i.d.; nu implică independența seriei), $\theta = 0{,}5$: grupuri de cîte două în medie

$$\hat{\theta} = \min\left\{1,\ \frac{2\left(\sum_i (T_i - 1)\right)^2}{(N-1)\sum_i (T_i - 1)(T_i - 2)}\right\} \quad \text{dacă } \max_i T_i > 2$$

  - Estimatorul pe intervale Ferro & Segers (2003): $S_1 < \cdots < S_N$: zilele celor $N$ depășiri; $T_i = S_{i+1} - S_i$: intervalele dintre ele; graficul: depășiri ale cuantilei de 98%, i.i.d. față de GARCH
  - Circa $\theta N$ grupuri independente: erorile standard i.i.d. calculate din $N$ depășiri sînt prea mici cînd $\theta < 1$

# Contribuțiile la risc (alocarea Euler)



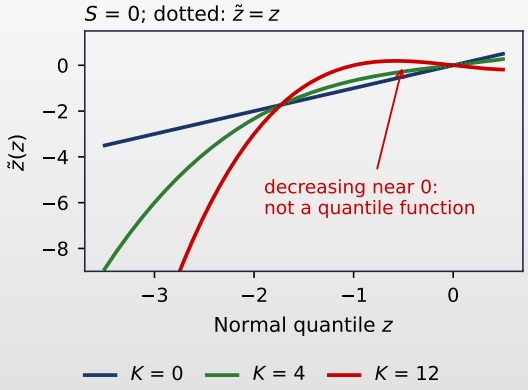

- Portofoliu Normal: expunerile $w$, matricea de covarianță $\Sigma$, media neglijată

$$\sigma_p = \sqrt{w^\top \Sigma w}, \qquad \mathrm{VaR} = z_{\mathbf{1}-\alpha}\sigma_p,$$
$$\frac{\partial \mathrm{VaR}}{\partial w_i} = z_{\mathbf{1}-\alpha}\frac{(\Sigma w)_i}{\sigma_p}, \qquad C_i = w_i \frac{\partial \mathrm{VaR}}{\partial w_i}$$

  - VaR marginal $\partial \mathrm{VaR}/\partial w_i$: variația VaR la o unitate în plus în activul $i$; VaR pe componente $C_i$ Tasche (2008): $\sum_i C_i = \mathrm{VaR}$ (Euler: VaR este omogen de gradul 1)
  - Contribuțiile la ES: $\mathbb{E}[-w_i R_i \mid L_p \geq \mathrm{VaR}]$, media pierderii activului $i$ în zilele din coada portofoliului

- Beneficiul diversificării: $\sum_i z_{\mathbf{1}-\alpha} w_i \sigma_i - \mathrm{VaR} \geq 0$
  - Paritatea riscului: ponderi cu cote egale, $w_i(\Sigma w)_i = w_j(\Sigma w)_j$ pentru orice $i, j$
  - Date (acțiuni, obligațiuni, cripto): ponderi 50/30/20%, abateri standard 15/6/60% pe același orizont; corelații $\rho_{\mathbf{12}} = -0{,}2$, $\rho_{\mathbf{13}} = 0{,}3$, $\rho_{\mathbf{23}} = 0$. Cripto: 20% din capital, circa două treimi din risc

# Dezvoltarea Cornish–Fisher (CF)



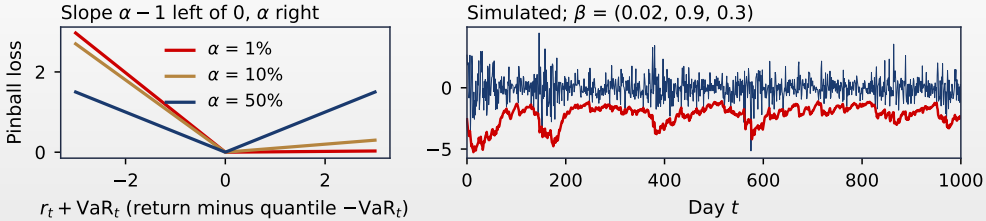

- Ajustează cuantila Normală pentru asimetria $S$ și excesul de kurtosis $K$ Cornish & Fisher (1938)

$$\tilde{z} = z + \frac{(z^2 - 1)S}{6} + \frac{(z^3 - 3z)K}{24} - \frac{(2z^3 - 5z)S^2}{36}$$

  - $S = \mathbb{E}[(X-\mu)^3]/\sigma^3$; $K = \mathbb{E}[(X-\mu)^4]/\sigma^4 - 3$ (0 pentru distribuția Normală); $\mathrm{VaR}_\alpha = -(\mu + \sigma\tilde{z}(z_\alpha))$
  - $K > 0$ împinge cuantila din extremitatea cozii mai departe; $S < 0$ lungește coada stîngă

- O funcție cuantilă validă trebuie să fie crescătoare în $z$; graficul ($S = 0$): pentru $K$ mare, $\tilde{z}$ scade în jurul lui 0, deci dezvoltarea nu mai este o funcție cuantilă

# Regresia cuantilă, pierderea pinball și CAViaR




- **Pierderea pinball**: pierderea a cărei medie este minimizată de cuantila adevărată de ordin $\alpha$, $-\mathrm{VaR}_t$

$$\ell_\alpha(r_t, \mathrm{VaR}_t) = \left(\alpha - 1\{r_t < -\mathrm{VaR}_t\}\right)(r_t + \mathrm{VaR}_t)$$

  - O depășire costă $(1 - \alpha)$ pe unitate, o zi deasupra cuantilei costă $\alpha$ pe unitate (stînga); o pierdere pinball medie mai mică = prognoze VaR mai bune
- **CAViaR** (Conditional Autoregressive VaR), specificația SAV (Symmetric Absolute Value) Engle & Manganelli (2004): o recursie pentru VaR, estimată prin minimizarea lui $\sum_t \ell_\alpha$
  - $\mathrm{VaR}_t = \beta_0 + \beta_1 \mathrm{VaR}_{t-1} + \beta_2 |r_{t-1}|$; $|\beta_1| < 1$: persistența (în curs și în B7: $0 < \beta_1 < 1$); $\beta_2$: reacția la $|r_{t-1}|$ (dreapta, simulat)

## Compararea prognozelor și capitalul reglementat

- **Testul Diebold–Mariano (DM)** Diebold & Mariano (1995): au două prognoze aceeași acuratețe?

$$d_t = \ell_t^A - \ell_t^B, \qquad DM = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\hat{\Omega}_d / n}} \approx N(0,1) \text{ sub } H_0 : \mathbb{E}[d_t] = 0$$

  - $\ell_t^A$, $\ell_t^B$: pierderile (de ex. pinball) modelelor $A$ și $B$ în ziua $t$; $\bar{d}$: diferența medie; $\hat{\Omega}_d$: dispersia HAC de termen lung a lui $d_t$; $DM < -1{,}96$: $A$ semnificativ mai bun la 5%

- **Pierderea comună VaR–ES** Fissler–Ziegel omogenă de grad zero (FZ0) Patton, Ziegel & Chen (2019): evaluează o pereche $(v_t, e_t)$ = (cuantila randamentului, media cozii), $e_t \le v_t < 0$

$$\mathrm{FZ0} = -\frac{1\{r_t \le v_t\}\,(v_t - r_t)}{\alpha\, e_t} + \frac{v_t}{e_t} + \ln(-e_t) - 1$$

  - $\mathrm{FZ0}(cv_t, ce_t; cr_t) = \mathrm{FZ0}(v_t, e_t; r_t) + \ln c$: diferențele dintre scorurile a două modele, nu scorul însuși, sînt omogene de grad zero

- **Capital de tip FRTB** (Fundamental Review of the Trading Book; C2, simplificat) Basel Committee (2019): ES dintr-o fereastră de stres de 250 de zile, scalat la orizontul de lichiditate

$$\text{Capital} = m_c \times \mathrm{ES}_{\mathbf{10}}^{stres} \times \sqrt{LH/10} \times \text{suma}$$

  - $m_c = 1{,}5$: multiplicatorul; $\mathrm{ES}_{\mathbf{10}}^{stres}$: ES 2,5% pe 10 zile în cea mai rea fereastră; $LH$: orizontul de lichiditate în zile (10 sau 20)

# Harta exercițiilor

| Exercițiul | Întrebarea | Tipul | Reper sau exemplu |
|---|---|---|---|
| A1, A2 | VaR și ES sub distribuțiile Normală și Student-$t$ | Rezolvat | – |
| A3 | VaR și ES pentru o pierdere discretă de neplată | Rezolvat | – |
| A4 | penalizarea diversificării de către VaR | Propus | A3 |
| B1 | VaR și ES istorice pentru BET, cu intervale bootstrap | Rezolvat | – |
| B2 | cît de precisă este o estimare ES? | Propus | B1 |
| B3 | VaR filtrat al zilei următoare pentru Bitcoin | Propus | B1 |
| C1 | ce este greșit într-un răspuns AI? | Propus | B1 |
| B4 | o coadă GPD pentru BET (după curs) | Rezolvat | – |
| A5, B5 | contribuțiile la risc pentru două active și într-un portofoliu cu patru active (după curs) | Rezolvat; Propus | A5 |
| Pachete de extensie | A2, A4, A5, B1, B3, B4, B5 extinse; A6–A8, B6, B7 (opționale); proiectul de echipă: unul dintre C2 și C3 | Rezolvat, Propus și Deschis | indicat la fiecare cerință |

- **[Rezolvat]**: rezolvarea completă în slide-uri și în notebook, un model de urmat; **[Propus]**: o rezolvați individual, iar rezolvarea se discută la seminar; **[Deschis]**: o temă de proiect fără un singur răspuns corect (C2, C3)
- Partea A: derivări pe hîrtie; Partea B: estimare și inferență pe date reale, fiecare încheiată cu o întrebare de interpretare; Partea C: critica unui răspuns AI și proiecte deschise

## Notații și convenții folosite în toate exercițiile

- Randamentul $X$ (în %), pierderea $L = -X$; nivelul $\alpha$ = probabilitatea cozii; VaR și ES sînt numere **pozitive** atunci cînd sînt pierderi (definițiile: „VaR și ES")
- Convenția empirică (toate exercițiile B): `np.quantile(L, 1 - alpha)` și media cozii din secțiunea „Simularea istorică"
  - $\widehat{\mathrm{ES}}_\alpha$ este media fracționară a cozii: ponderea 1 pentru cele mai mari $\lfloor n\alpha \rfloor$ pierderi, $n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor$ pentru următoarea; media simplă a pierderilor $\geq \widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha$ coincide cu ea doar cînd $n\alpha$ este întreg
- Unități: pierderi log în % din poziție pentru un activ; randamente simple pentru portofolii (se adună între active); puncte procentuale (pp) pentru erori standard și lățimi de intervale
- Simboluri asemănătoare: $\alpha$ = probabilitatea cozii, $\alpha_1$ = coeficient GARCH; $\xi$ = forma GPD, $\hat{\xi}_\alpha$ = cuantila reziduurilor (B3); $w$ = expuneri monetare (A5) sau ponderi de portofoliu (B5)

# A1 [Rezolvat]: VaR și ES pentru distribuția Normală — cerința

- **Întrebare**: care sînt valorile VaR și ES pentru o poziție cu randament zilnic Normal?
- **Date**
  - $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, randamentul log zilnic în % din poziție, $\mu = 0{,}04\%$, $\sigma = 1{,}2\%$; pierderea $L = -X$, cu densitatea $f$
  - $z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha) < 0$; $\Phi$, $\varphi$: funcția de repartiție și densitatea distribuției Normale standard
- **Cerințe**
  1. Derivați $\mathrm{ES}_\alpha = -\mu + \sigma\varphi(z_\alpha)/\alpha$ din $\mathrm{ES}_\alpha = -\mathbb{E}[X \mid X \le q_\alpha(X)]$.
  2. Calculați $z_\alpha$ și $\varphi(z_\alpha)$ la $\alpha = 1\%$ și $\alpha = 2{,}5\%$.
  3. Calculați VaR și ES la ambele niveluri, în % din poziție.
- **Raportați**: un tabel cu patru celule (VaR, ES $\times$ 1%, 2,5%)
- **Interpretare**
  - care dintre cele patru cifre sînt aproape egale?
  - de ce contează acest lucru pentru reglementare?
- Notebook: secțiunea A1

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

# A1 [Rezolvat]: rezolvare — VaR și ES pentru distribuția Normală

- **1. Derivare.** Scriem $X = \mu + \sigma Z$; $X \le q_\alpha$ înseamnă $Z \le z_\alpha$, de probabilitate $\alpha$
  - Deoarece $\varphi'(u) = -u\varphi(u)$: $\int_{-\infty}^{z} u\varphi(u)\,du = [-\varphi(u)]_{-\infty}^{z} = -\varphi(z)$
  - $\mathbb{E}[X \mid X \le q_\alpha] = \mu + \dfrac{\sigma}{\alpha}\displaystyle\int_{-\infty}^{z_\alpha} u\varphi(u)\,du = \mu - \sigma\dfrac{\varphi(z_\alpha)}{\alpha}$; schimbăm semnul
- **2–3.** $\mathrm{VaR}_\alpha = -(\mu + \sigma z_\alpha)$, de ex. $-(0{,}04 + 1{,}2 \cdot (-2{,}326)) = 2{,}75$; $\mathrm{ES}_{\mathbf{1\%}} = -0{,}04 + 1{,}2 \cdot 2{,}665 = 3{,}16$

| $\alpha$ | $z_\alpha$ | $\varphi(z_\alpha)$ | $\varphi/\alpha$ | $\mathrm{VaR}_\alpha$ | $\mathrm{ES}_\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1% | −2,326 | 0,0267 | 2,665 | 2,75 | 3,16 |
| 2,5% | −1,960 | 0,0584 | 2,338 | 2,31 | 2,77 |

- VaR și ES în % din poziție; pentru o poziție de 1 milion de unități monetare: VaR 1% $\approx$ 27 516, ES 1% $\approx$ 31 583
- Interpretare: ES 2,5% (2,77%) $\approx$ VaR 1% (2,75%): sub distribuția Normală trecerea la ES 2,5% lasă capitalul practic neschimbat; de aceea FRTB a ales acest nivel

## A2 [Rezolvat]: ES pentru distribuția Student-$t$ — cerința

- **Întrebare**: în ce măsură modifică cozile grele VaR și ES cînd abaterea standard este aceeași ca în A1?
- **Date**
  - $X = m + sT$, $T \sim t_\nu$ cu densitatea $g_\nu$, $t_\alpha = t_\nu^{-1}(\alpha) < 0$; $\nu = 4$, $m = 0{,}04\%$, abaterea standard 1,2%
  - Integrala cozii (demonstrația în pachetul de extensie 1): $\int_{-\infty}^{t} x g_\nu(x)\,dx = -g_\nu(t)\,\dfrac{\nu + t^2}{\nu - 1}$ pentru $\nu > 1$
- **Cerințe**
  1. Folosiți integrala cozii pentru a scrie $\mathrm{ES}_\alpha = -m + s\,\dfrac{g_\nu(t_\alpha)}{\alpha}\,\dfrac{\nu + t_\alpha^2}{\nu - 1}$.
  2. Găsiți scala $s$ care dă o abatere standard de 1,2%, folosind $\mathrm{Var}(T) = \nu/(\nu - 2)$ (finită doar pentru $\nu > 2$).
  3. Calculați VaR și ES la 1% și 2,5% și puneți-le lîngă A1.
- **Raportați**: tabelul din A1 cu o coloană Student-$t$
- **Interpretare**
  - la ce nivel diferă cel mai mult cele două modele?
  - de ce surprinde ES diferența primul?
- Greșeală frecventă: folosirea lui $\sigma = 1{,}2$ în loc de $s$ ca scală

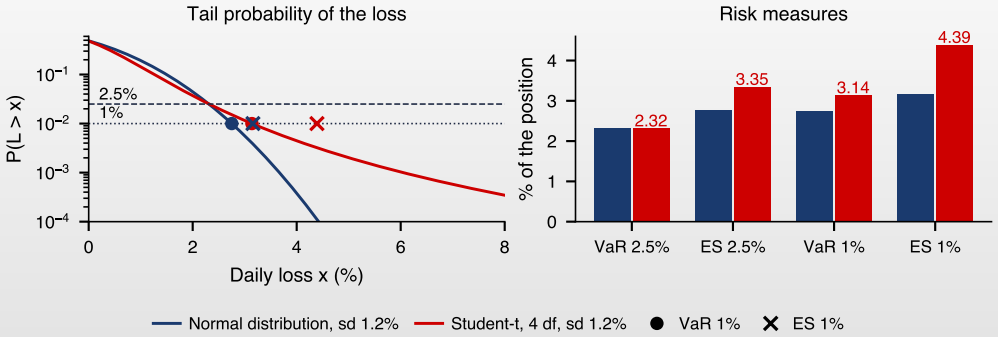
◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

# A2 [Rezolvat]: rezolvare — ES pentru distribuția Student-$t$ (1/2)

- **1.** Împărțim integrala cozii la $\alpha$ și rescalăm cu $X = m + sT$, ca în A1
- **2.** $s^2 \cdot 4/2 = 1{,}2^2$, deci $s = 1{,}2\sqrt{2/4} = 0{,}849$
- **3.** La 1%: $t_{1\%} = -3{,}747$, $g_4(t_{1\%}) = 0{,}0087$, factorul ES $\dfrac{0{,}0087}{0{,}01} \cdot \dfrac{4 + 14{,}04}{3} = 5{,}221$
  - $\mathrm{VaR}_{1\%} = -(0{,}04 + 0{,}849 \cdot (-3{,}747)) = 3{,}14$; $\mathrm{ES}_{1\%} = -0{,}04 + 0{,}849 \cdot 5{,}221 = 4{,}39$

| | $\mathrm{VaR}_{2{,}5\%}$ | $\mathrm{ES}_{2{,}5\%}$ | $\mathrm{VaR}_{1\%}$ | $\mathrm{ES}_{1\%}$ |
|---|---|---|---|---|
| Normală | 2,31 | 2,77 | 2,75 | 3,16 |
| $t_4$ | 2,32 | 3,35 | 3,14 | 4,39 |

# A2 [Rezolvat]: rezolvare — ES pentru distribuția Student-$t$ (2/2)




- Interpretare: VaR 2,5% este același în ambele modele; VaR 1% și ambele ES sînt mult mai mari sub $t_4$: efectul cozilor grele apare doar în extremitatea cozii, iar ES îl surprinde primul

MFM_ch7_seminar

# A3 [Rezolvat]: VaR și ES pentru o pierdere discretă — cerința

- **Întrebare**: care sînt valorile VaR și ES cînd pierderea are un atom (o neplată)?
- **Date**: o obligațiune pierde 60 de unități monetare (pierderea în caz de neplată, LGD) cu probabilitatea $p = 3\%$ și 0 altfel
- **Cerințe**
  1. Calculați VaR 5% și VaR 2,5% din definiția VaR cu infimum („VaR și ES").
  2. Calculați ES 5% și ES 2,5% cu formula pentru o pierdere cu atom („Pierderi cu un atom") Acerbi & Tasche (2002).
  3. Explicați de ce $\mathrm{ES}_{5\%}$ diferă de $\mathbb{E}[L \mid L \geq \mathrm{VaR}_{5\%}]$.
- **Raportați**: patru cifre și o frază

| Pierderea $L$ | 0 | 60 |
|---|---|---|
| $P(L)$ | 97% | 3% |
| $P(L \geq \cdot)$ | 100% | 3% |

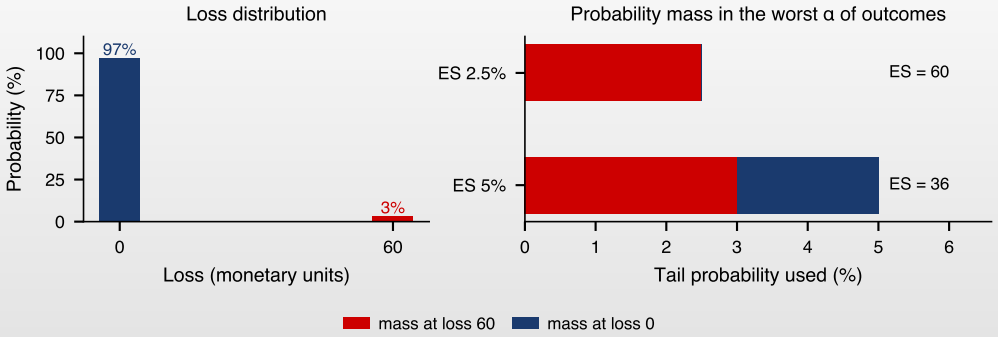
- Coada de probabilitate $\alpha$ trebuie acoperită cu masă de probabilitate; la $\alpha = 5\%$ masa de 3% a neplății nu este suficientă

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

# A3 [Rezolvat]: rezolvare — VaR și ES pentru o pierdere discretă (1/2)

- **1.** $P(X \le -60) = 3\% \le 5\%$, $P(X \le 0) = 100\% > 5\%$: $q_{\mathbf{5\%}} = 0$, $\mathrm{VaR}_{\mathbf{5\%}} = 0$; $P(X \le -60) = 3\% > 2{,}5\%$: $\mathrm{VaR}_{\mathbf{2{,}5\%}} = 60$
- **2.** $\mathrm{ES}_{\mathbf{5\%}} = \dfrac{60 \cdot 0{,}03 + 0 \cdot (0{,}05 - 0{,}03)}{0{,}05} = 36$; $\mathrm{ES}_{\mathbf{2{,}5\%}} = \dfrac{0 + 60 \cdot (0{,}025 - 0)}{0{,}025} = 60$
- **3.** $\mathbb{E}[L \mid L \ge 0] = 1{,}8$ este media pe **toate** rezultatele; ES 5% folosește masa de 3% a neplății plus 2% din atomul pierderii zero (graficul)
- Interpretare: aceeași pondere fracționară dă ES istoric din B1: ultima pierdere din coadă intră cu ponderea $n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor$

# A3 [Rezolvat]: rezolvare — VaR și ES pentru o pierdere discretă (2/2)




MFM_ch7_seminar

# A4 [Propus]: penalizarea diversificării de către VaR — cerința

- **Întrebare**: poate o limită VaR să facă un portofoliu diversificat să pară mai riscant decît componentele lui?
- **Date**: două obligațiuni independente A și B; fiecare pierde 100 cu probabilitatea $p = 0{,}7\%$ (cursul a folosit 0,9%) și 0 altfel; portofoliul A + B Artzner et al. (1999)
- **Cerințe**
  1. Scrieți distribuția pierderii portofoliului: valorile 0, 100, 200 și probabilitățile lor.
  2. Calculați VaR 1% și ES 1% pentru o obligațiune și pentru portofoliu, cu formula discretă din A3.
  3. Arătați că VaR 1% nu este subaditiv aici, iar ES 1% este.
  4. Recalculați ambele măsuri de risc și decideți dacă subadditivitatea se păstrează la $\alpha = 1{,}5\%$.
- **Raportați**: un tabel cu VaR și ES pentru A, B și A + B la ambele niveluri
- **Interpretare**: ce ar recompensa o limită bazată pe VaR?
- **Repere și exemple**: A3

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

## Ce fișiere definesc eșantionul?

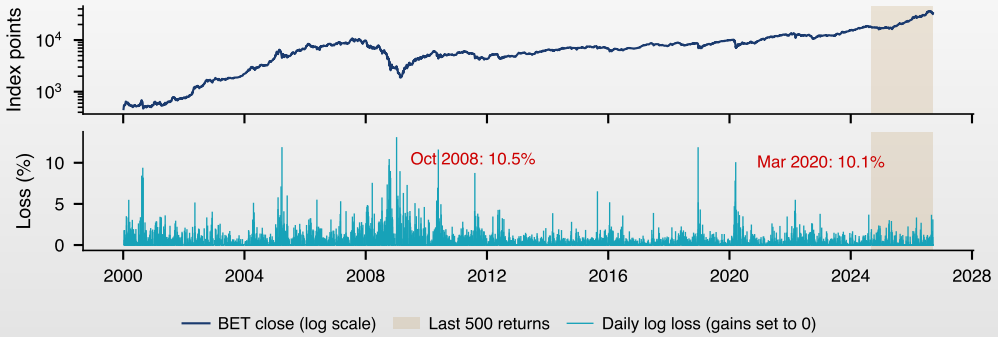
- Fișierele au indexul `date`. Pentru BET, S&P 500, Bitcoin și aur folosiți `close` din `BET.csv`, `GSPC.INDX.csv`, `BTC-USD.CC.csv`, `XAUUSD.FOREX.csv`, în data/market.
- ETF-urile folosesc `adjusted_close`: `SPY.US.csv`, `TLT.US.csv`, `GLD.US.csv`. Bitcoin păstrează închiderea; aliniați prețurile pe date comune observate înainte de diferențiere.
- Coșul BVB folosește închiderile ajustate ale acțiunilor (în paranteză, simbolul bursier BVB) Banca Transilvania (TLV), OMV (*Österreichische Mineralölverwaltung*, Administrația austriacă a uleiurilor minerale, grupul OMV) Petrom (SNP), BRD–Groupe Société Générale (BRD), Transgaz (TGN), Romgaz (SNG), Nuclearelectrica (SNN), Electrica (EL) și Transelectrica (TEL), fiecare în `SIMBOL.RO.csv`. Ponderile egale se aplică randamentelor simple, nu logaritmilor lor.
- EUR/RON provine din arhiva XML (*eXtensible Markup Language*, limbaj de marcare extensibil) anuală BNR, cîmpul EUR: descărcați fișierele anuale `https://curs.bnr.ro/files/xml/years/nbrfxrates<AN>.xml`, pentru fiecare an 2005–2026. Păstrați capetele de eșantion precizate în fiecare cerință.

# B1 [Rezolvat]: VaR și ES istorice pentru BET — cerința

- **Întrebări**
  - cît de mari sînt pierderile din coada pieței românești de acțiuni?
  - cît de precise sînt estimările?
- **Date**
  - Indicele BET, închideri zilnice 2000-01-05 – 2026-09-18, doar zilele lucrătoare; $n = 6\,670$ randamente log zilnice în %, $r_t = 100\,(\ln P_t - \ln P_{t-1})$, pierderea $L_t = -r_t$
  - Două selecții: întreaga perioadă și ultimele 500 de randamente (de la 2024-09-12, hașurate în grafic)
- **Cerințe**
  1. Calculați VaR și ES istorice la 1% și 2,5% pe ambele selecții și numărați pierderile de dincolo de VaR 1%.
  2. Construiți un interval bootstrap percentil de 95% pentru VaR 1% cu 2 000 de reeșantionări i.i.d., seed 42 Efron (1979).
  3. Repetați pasul 2 cu bootstrap pe blocuri suprapuse: blocuri de 20 de zile extrase cu revenire, concatenate și tăiate la lungimea $n$ Künsch (1989).
- **Raportați**: un tabel cu cele opt cifre VaR/ES și cele două intervale pentru fiecare selecție
- **Interpretare**
  - ce estimare ați prezenta unui comitet de risc?
  - de ce este intervalul pe blocuri mai larg pe întreaga selecție?

Înapoi Lista exercițiilor

# B1 [Rezolvat]: VaR și ES istorice pentru BET — datele




- Observați: cele mai mari pierderi (octombrie 2008: 10,45%; martie 2020: 10,08%) apar grupat

MFM_ch7_seminar

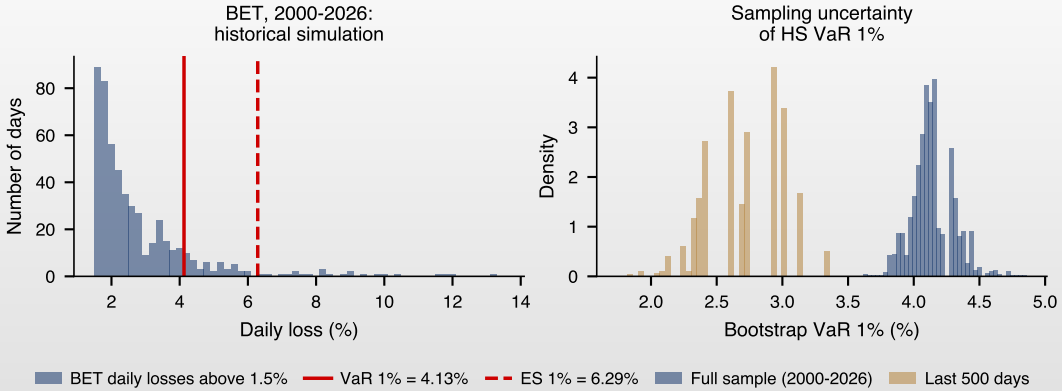
# B1 [Rezolvat]: rezolvare (1/4) — pas cu pas

- **1. Ultimele 500 de zile.** Ordonăm pierderile; VaR 1% se află în poziția $1 + 499 \cdot 0{,}99 = 495{,}01$; $L_{(i)}$: a $i$-a cea mai mică pierdere
  - $\widehat{\mathrm{VaR}}_{\mathbf{1\%}} = L_{(\mathbf{495})} + 0{,}01\,(L_{(\mathbf{496})} - L_{(\mathbf{495})}) = 2{,}710 + 0{,}01\,(2{,}925 - 2{,}710) = 2{,}712\%$
  - Cele cinci pierderi de dincolo: 3,68, 3,35, 3,12, 3,03, 2,93: media lor este $\widehat{\mathrm{ES}}_{\mathbf{1\%}} = 3{,}22\%$

| | $n$ | $\mathrm{VaR}_{\mathbf{1\%}}$ | $\mathrm{ES}_{\mathbf{1\%}}$ | $\mathrm{VaR}_{\mathbf{2{,}5\%}}$ | $\mathrm{ES}_{\mathbf{2{,}5\%}}$ | dincolo de VaR 1% |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2000–2026 | 6 670 | 4,13 | 6,29 | 2,80 | 4,57 | 67 |
| Ultimele 500 de zile | 500 | 2,71 | 3,22 | 2,05 | 2,72 | 5 |

- ES 1% pe 500 de zile se sprijină pe cinci pierderi, ES 2,5% pe $n\alpha = 12{,}5$ (a 13-a cu ponderea 0,5): le raportăm împreună cu aceste numere
- Ambele sînt rezumate necondiționate: selecția completă descrie 26 de ani, ultimele 500 de zile o perioadă calmă; riscul de mîine cere o prognoză condiționată (B3)

# B1 [Rezolvat]: rezolvare (2/4) — coada și bootstrap-ul



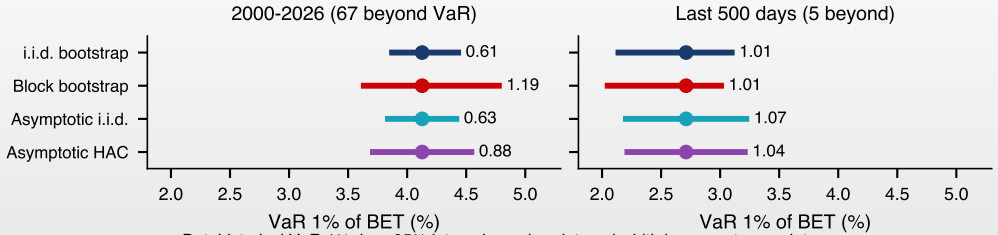

MFM_ch7_seminar

## B1 [Rezolvat]: rezolvare (3/4) — coada și bootstrap-ul

- Stînga: pierderile BET de peste 1,5% cu VaR 1% și ES 1% istorice; dreapta: cele 2 000 de valori bootstrap i.i.d. ale VaR 1% pentru fiecare selecție
- Fiecare reeșantionare recalculează atît cuantila, cît și pierderile de dincolo de ea; percentilele de 2,5% și 97,5% ale celor 2 000 de valori dau intervalul
- Cele două distribuții bootstrap nu se suprapun: perioada recentă este mai puțin volatilă decît media celor 26 de ani

MFM_ch7_seminar

# B1 [Rezolvat]: rezolvare (4/4) — intervale




Dot: historical VaR 1%; bar: 95% interval; number: interval width in percentage points

- **2.** Bootstrap i.i.d.: complet [3,85; 4,46], ultimele 500 de zile [2,11; 3,12]
- **3.** Bootstrap pe blocuri: [3,61; 4,80] și [2,02; 3,03]

- Interpretare: depășirile sînt grupate în 2008 și 2020, deci blocurile care păstrează o criză întreagă aproape dublează lățimea intervalului bootstrap pe întreaga selecție; ultimele 500 de zile, calme, nu arată acest efect

MFM_ch7_seminar

# B2 [Propus]: precizia unei estimări ES — cerința

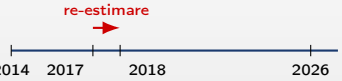
- **Întrebare**: estimează un ES 2,5% istoric pe 500 de zile riscul din coadă cu o precizie de $\pm 0{,}3$ pp Chen (2008), Pele & Mazurencu-Marinescu-Pele (2026)?
- **Date**
  - S&P 500 (închideri zilnice) și BET, pierderi log zilnice în %, 2000–2026; selecții: completă și ultimele 500 de zile
  - Folosiți funcția de reeșantionare din B1 (2 000 de reeșantionări, seed 42, blocuri de 20 de zile), cu ES 2,5% ca statistică
- **Cerințe**
  1. Calculați ES 2,5%, numărul de observații din coadă $n\alpha$ și numărul $k$ de pierderi cu pondere pozitivă în estimator.
  2. Extrageți o reeșantionare i.i.d. și una pe blocuri pentru ultimele 500 de zile ale S&P 500 și recalculați pe fiecare VaR 2,5%, pierderile din coadă și ES.
  3. Construiți intervalele de 95% i.i.d. și pe blocuri pentru toate cele patru selecții și comparați lățimile lor cu 0,6 pp ($\pm 0{,}3$).
- **Raportați**: un tabel ($n\alpha$, $k$, ES, două intervale) și un grafic cu intervalele
- **Interpretare**
  - care selecții ating ținta de $\pm 0{,}3$ pp?
  - ce determină lățimea?
- **Repere și exemple**: B1

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

# B3 [Propus]: VaR filtrat al zilei următoare pentru Bitcoin — cerința

- **Întrebare**: VaR 1% pentru Bitcoin pe 19 septembrie 2026: filtrat sau istoric?
- **Date**
  - Bitcoin (USD), închideri zilnice, 17 septembrie 2014 – 18 septembrie 2026, 7 zile pe săptămînă; randamente log zilnice în %
  - AR(1)-GARCH(1,1) prin QML Normal, cu intercept în AR: $r_t = \mu_t + \sigma_t z_t$ Barone-Adesi et al. (1999); `garch_filter(r)` apelează `arch_model(r, mean="AR", lags=1, vol="GARCH", p=1, q=1, dist="normal", rescale=False)`, iar `garch_next(r, params)` dă $\hat{\mu}_{t+1}$, $\hat{\sigma}_{t+1}$
- **Cerințe**
  1. Estimați modelul pe întreaga selecție și prognozați $\hat{\mu}_{t+1}$, $\hat{\sigma}_{t+1}$.
  2. Calculați $\hat{\xi}_{1\%} = -q_{1\%}(\hat{z})$ și media fracționară a lui $-\hat{z}$ dincolo de ea, apoi VaR 1% și ES 1% filtrate (exemplul din „Simularea istorică filtrată").
  3. Comparați cu VaR și ES istorice: ultimele 500 de zile și întreaga selecție.
  4. Cu prognozele din cronologie, numărați zilele din 18 septembrie 2024 – 18 septembrie 2026 cu pierdere peste VaR FHS și peste VaR HS pe fereastră mobilă de 500 de zile.
- **Raportați**: trei perechi VaR/ES, două numere de depășiri și numărul așteptat $n\alpha$ pentru cele 731 de zile de evaluare
- **Repere și exemple**: B1 (cuantile istorice)

## Cronologia prognozelor (pasul 4)




în fiecare ianuarie: GARCH pe toate datele anterioare
în fiecare zi: $\hat{\sigma}_{t+1}$ din datele pînă la $t$
reziduurile folosite: cele de dinainte de acel ianuarie

- Nicio prognoză nu folosește informație din ziua ei sau de mai tîrziu: un prag din întreaga selecție nu este o prognoză în afara eșantionului
- **Interpretare**
  - de ce diferă cele trei VaR?
  - care metodă greșește mai des?

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

# C1 [Propus]: critica unui răspuns AI — răspunsul

- **Cererea**: „px conține închiderile zilnice BET, 2000–2026. Dă-mi VaR 1% și ES 2,5% istorice pe o zi, ca pierderi log pozitive în %, și VaR 1% pe 10 zile."
- **Răspunsul**: codul de mai jos, care rulează fără niciun mesaj de eroare

```
import numpy as np
r = 100 * np.log(px).diff().dropna()                # daily log returns, %
loss = -r                                           # log loss, %
var1 = np.percentile(r, 99)                         # VaR 1%
es25 = loss[loss >= np.percentile(loss, 99)].mean()  # ES 2.5%
var10 = 10 * var1                                   # 10-day VaR 1%
```

- **Concluzia AI**: „VaR 1% = 3,95%, ES 2,5% = 6,28%, VaR 1% pe 10 zile = 39,46%."

Înapoi Lista exercițiilor

# C1 [Propus]: critica unui răspuns AI — cerința

- **Întrebări**
  - ce linii din răspunsul AI sînt greșite?
  - care sînt cifrele corecte?
- **Date**: datele BET din B1; răspunsul conține **trei** greșeli tipice pentru VaR și ES, restul este corect
- **Cerințe**
  1. Pentru fiecare greșeală, indicați numărul liniei și explicați într-o frază de ce este greșită, folosind $\mathrm{VaR}_\alpha = -q_\alpha(r)$ (pentru o pierdere continuă, $= q_{1-\alpha}(L)$).
  2. Precizați cum ați depista-o: o numărătoare a observațiilor, o cifră din B1 sau un slide din curs.
  3. Scrieți liniile corectate, inclusiv VaR pe 10 zile din pierderile suprapuse pe 10 zile, și recalculați cele trei cifre.
  4. Verificați ES 2,5% corectat: pe cîte pierderi se calculează media? Pe cîte ar trebui calculată?
- **Raportați**: un tabel al erorilor (linia, eroarea, depistarea, corecția) și cifrele corectate; notați fiecare eroare găsită efectiv în `AI_ERRORS.md`
- **Interpretare**: de ce rulează codul fără mesaj de eroare, deși răspunsul este greșit?
- **Repere și exemple**: B1

# B4 [Rezolvat]: o coadă GPD pentru BET — cerința

- **Întrebare**: ce aduce în plus un model de valori extreme pentru coadă față de simularea istorică, în extremitatea cozii?
- **Date**
  - Pierderile BET din B1 ($n = 6\,670$)
  - Depășiri de prag McNeil, Frey & Embrechts (2015): GPD cu forma $\xi$ și scala $\beta$, erorile ei standard și VaR și ES pentru coadă (formulele: „Depășiri de prag: distribuția GPD"); $N_u$ = numărul de depășiri
- **Cerințe**
  1. Fixați $u$ = cuantila empirică de 95% a lui $L$ și formați excesele $L - u$ ale pierderilor de peste el.
  2. Estimați GPD prin verosimilitate maximă cu locația fixată la 0: `scipy.stats.genpareto.fit(excese, floc=0)`.
  3. Calculați erorile standard i.i.d. $\mathrm{SE}(\hat{\xi})$ și $\mathrm{SE}(\hat{\beta})$.
  4. Calculați VaR și ES GPD la 1%, 0,5% și 0,1% și comparați cu simularea istorică.
  5. Re-estimați pentru praguri depășite de 10% pînă la 1,5% dintre pierderi și reprezentați $\hat{\xi}$ cu benzi de 95%.
- **Raportați**: estimarea cu erorile standard, un tabel VaR/ES cu șase rînduri și numărul de observații din coadă, graficul de stabilitate
- **Interpretare**
  - este coada BET mai grea decît distribuția Normală?
  - cît de precisă este această concluzie?

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

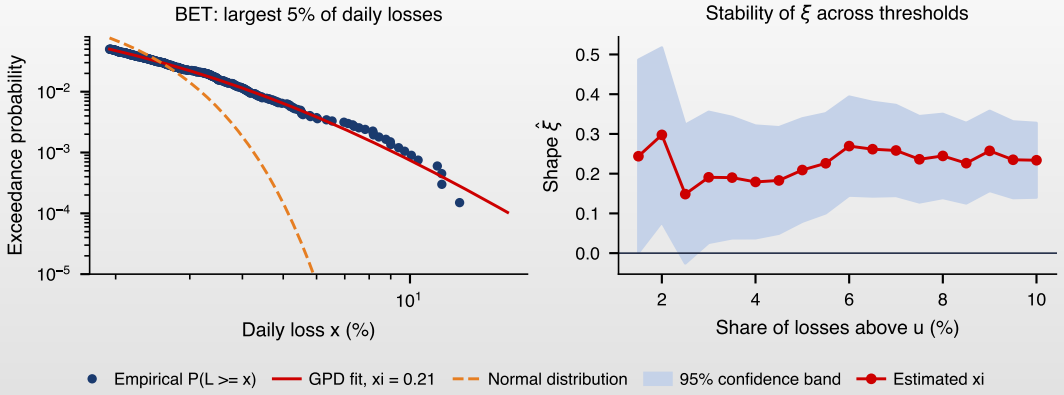
# B4 [Rezolvat]: rezolvare (1/3) — estimarea și tabelul

- **1–2.** $u = 1{,}93\%$ lasă deasupra $N_u = 334$ din $n = 6\,670$ pierderi; $\hat{\xi} = 0{,}209$, $\hat{\beta} = 1{,}20$
- **3.** $\mathrm{SE}(\hat{\xi}) = (1 + 0{,}209)/\sqrt{334} = 0{,}066$, $\mathrm{SE}(\hat{\beta}) = 0{,}10$; $\hat{\xi}/\mathrm{SE} = 3{,}2$
- **4.** VaR 1%: $N_u/n = 0{,}050$, $(0{,}01/0{,}050)^{-\mathbf{0{,}209}} = 1{,}401$
  - $\mathrm{VaR}_{\mathbf{1\%}} = 1{,}93 + \frac{\mathbf{1{,}20}}{\mathbf{0{,}209}}(1{,}401 - 1) = 4{,}22\%$

| | VaR GPD | VaR ist. | ES GPD | ES ist. |
|---|---|---|---|---|
| 1% | 4,22 | 4,13 | 6,34 | 6,29 |
| 0,5% | 5,47 | 5,38 | 7,92 | 7,90 |
| 0,1% | 9,18 | 9,50 | 12,61 | 11,33 |

- Pierderi dincolo de VaR istoric: 67 la 1%, 34 la 0,5%, 7 la 0,1%
- Cele două metode coincid pînă la 0,5%; la 0,1% ES istoric se sprijină pe $n\alpha = 6{,}7$ pierderi, în timp ce GPD folosește toate cele 334 de excese printr-o coadă estimată

# B4 [Rezolvat]: rezolvare (2/3) — diagnostic




MFM_ch7_seminar

# B4 [Rezolvat]: rezolvare (3/3) — diagnostic

- Stînga: GPD urmează coada empirică, coada Normală cade mult sub ea; dreapta: $\hat{\xi}$ variază între 0,15 și 0,30 pe praguri, iar VaR 0,1% doar între 9,04% și 9,51%
- Interpretare: coada este mai grea decît cea Normală, dar SE i.i.d. presupune depășiri independente; pierderile BET sînt grupate, deci incertitudinea reală este mai mare (B4 extins: indicele extremal)

MFM_ch7_seminar

# A5 [Rezolvat]: contribuțiile la risc pentru două active — cerința

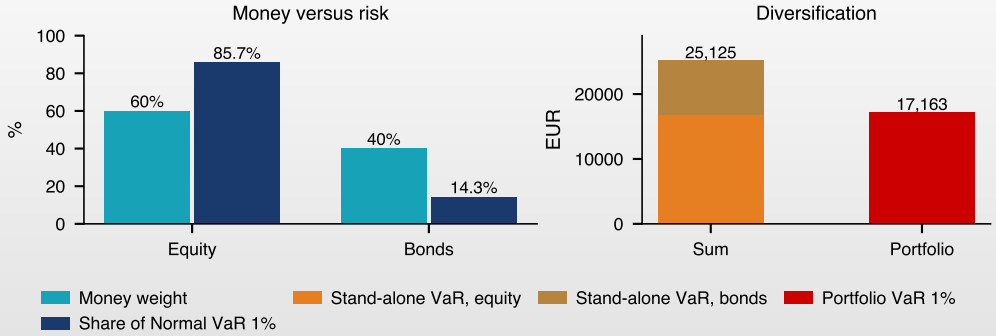
- **Întrebare**: contribuie fiecare activ la risc proporțional cu capitalul investit în el?
- **Date**
  - Expuneri monetare $w = (600\,000,\ 400\,000)$ EUR în acțiuni și obligațiuni; randamente simple zilnice $R$ în zecimale, abateri standard $\sigma_{\mathbf{1}} = 0{,}012$, $\sigma_{\mathbf{2}} = 0{,}009$, corelația $\rho = -0{,}2$
  - $\Sigma = \begin{pmatrix} 0{,}000144 & -0{,}0000216 \\ -0{,}0000216 & 0{,}000081 \end{pmatrix}$; ($\Sigma$: matricea de covarianță) randamente cu distribuție Normală comună, media neglijată, $\alpha = 1\%$, $z_{\mathbf{99\%}} = 2{,}326$ (cuantila de 99% a distribuției Normale standard)
- **Cerințe**
  1. Calculați abaterea standard a portofoliului $\sigma_p$ în EUR și VaR 1% al portofoliului (formulele: „Contribuțiile la risc (alocarea Euler)").
  2. Calculați $\Sigma w$, VaR marginal pe EUR și VaR pe componente $C_i$; verificați $C_{\mathbf{1}} + C_{\mathbf{2}} = \mathrm{VaR}$ Tasche (2008).
  3. Calculați beneficiul diversificării: suma VaR-urilor individuale minus VaR-ul portofoliului.
  4. Sub distribuția Normală, rescalați fiecare $C_i$ cu $\dfrac{\varphi(z_{\mathbf{1\%}})/0{,}01}{z_{\mathbf{99\%}}}$ pentru a obține contribuțiile la ES 1%.
- **Raportați**: un tabel cu $C_i$, $C_i^{ES}$ și cotele lor și beneficiul diversificării în EUR
- **Interpretare**: contribuie obligațiunile la risc proporțional cu ponderea lor de 40% din capital?

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

# A5 [Rezolvat]: rezolvare — contribuțiile la risc pentru două active (1/2)

- **1.** $\sigma_p^2 = 7\,200^2 + 3\,600^2 + 2(-0{,}2)(7\,200)(3\,600) = 54\,432\,000$, $\sigma_p = 7\,378$ EUR, $\mathrm{VaR}_{1\%} = 2{,}326 \cdot 7\,378 = 17\,163$ EUR
- **2.** $\Sigma w = (77{,}76;\, 19{,}44)$; VaR marginal pe EUR $(0{,}0245;\, 0{,}0061)$; $C_1 = 14\,711$ (85,7%), $C_2 = 2\,452$ (14,3%), suma 17 163 EUR
- **3.** Individual $16\,750 + 8\,375 = 25\,125$ EUR față de 17 163 EUR
- **4.** Factorul 1,146: $C_1^{ES} = 16\,854$, $C_2^{ES} = 2\,809$, total 19 663 EUR = ES 1%; aceleași cote ca VaR sub distribuția Normală

# A5 [Rezolvat]: rezolvare — contribuțiile la risc pentru două active (2/2)




- Interpretare: obligațiunile au 40% din capital, dar 14,3% din risc: corelația negativă le transformă într-o acoperire parțială a riscului

MFM_ch7_seminar

# B5 [Propus]: contribuțiile la risc într-un portofoliu cu patru active — cerința

- **Întrebare**: într-un portofoliu cu ponderi egale în SPY, TLT, GLD și Bitcoin, ce active generează riscul?
- **Date**
  - SPY, TLT, GLD (închideri ajustate) și Bitcoin (închideri în USD), 18 septembrie 2014 – 18 septembrie 2026; aliniați mai întîi prețurile, apoi păstrați 3 017 randamente simple zilnice comune $R$ în %
  - Ponderi fracționare $w_i = 25\%$, rebalansare zilnică; $\Sigma$ = covarianța de selecție a lui $R$ (în $\%^2$); VaR 1% Normal cu media neglijată; ES 2,5% istoric
- **Cerințe**
  1. Calculați VaR 1% Normal, VaR marginal și VaR pe componente pentru fiecare activ, ca în A5.
  2. Calculați ES 2,5% istoric al pierderii portofoliului $L_p = -w^\top R$ și contribuțiile $\mathbb{E}[-w_i R_i \mid L_p \geq \mathrm{VaR}_{\mathbf{2,5\%}}]$ ca medii pe zilele din coadă, cu ponderile ES istoric.
  3. Calculați VaR nediversificat $\sum_i z_{\mathbf{99\%}} w_i \sigma_i$.
- **Raportați**: un tabel cu ponderi, contribuții și cote și un grafic al ponderilor în capital față de cotele de risc
- **Interpretare**: implică ponderi egale în capital contribuții egale la risc? (compararea VaR 1% Normal cu ES 2,5% istoric schimbă atît modelul, cît și nivelul)
- **Repere și exemple**: A5

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

# Verificarea finală și proiectul de echipă

## Verificare finală: puteți explica de ce

- un ES 1% pe 500 de zile trebuie raportat împreună cu numărul 5?
- scalarea cu $\sqrt{10}$ este prea mică pentru BET?
- o poziție de 25% poate genera cea mai mare parte din risc (B5, după curs)?
- pierderile portofoliului cer randamente simple, nu log?

## Proiectul de echipă

- Alegeți unul dintre C2 și C3 (pachetul de extensie 4), cu criteriile de evaluare comune
- Notați folosirea AI în `AI_USE.md` și fiecare eroare prinsă efectiv în `AI_ERRORS.md` (fără un număr minim)

# Pachetele de extensie: conținut și cerințe prealabile

| Pachetul | Exercițiile | Cerințe prealabile |
|---|---|---|
| 1. Algebra cozii | A2 extins [Rezolvat], A4 extins, A6, A7, A5 extins [Rezolvat], A8 | A1–A5 |
| 2. Inferență | B1 extins [Rezolvat], B3 extins, B6, B5 extins | B1, B3, B5 |
| 3. Extreme și dinamică | B4 extins [Rezolvat], B7 | B3, B4 |
| 4. Proiecte | C2 (capitalul ES, BVB față de S&P 500), C3 (regresie cuantilă cu rețele neuronale); criteriile de evaluare | studiul de caz din curs, B1–B3 |

# A2 extins [Rezolvat]: integrala cozii Student-$t$ — cerința și rezolvarea

- **Întrebare**: cum se obține factorul ES Student-$t$ din A2?
- **Date**: $g_\nu(x) = c_\nu(1 + x^2/\nu)^{-(\nu+1)/2}$, densitatea $t_\nu$; $c_\nu$: constanta care face ca integrala ei să fie 1
- **Cerințe**
  1. Derivați $(1 + x^2/\nu)^{-(\nu-1)/2}$.
  2. Deduceți $\int_{-\infty}^{t} x g_\nu(x)\,dx = -g_\nu(t)\frac{\nu+t^2}{\nu-1}$ și precizați unde este nevoie de $\nu > 1$.
- **Raportați**: demonstrația în două rînduri

## Rezolvare

- **1.** $\frac{d}{dx}(1 + x^2/\nu)^{-(\nu-1)/2} = -\frac{\nu-1}{\nu}\, x\,(1 + x^2/\nu)^{-(\nu+1)/2}$, deci $x g_\nu(x) = -\frac{\nu c_\nu}{\nu-1}\frac{d}{dx}(1 + x^2/\nu)^{-(\nu-1)/2}$
- **2.** Integrînd de la $-\infty$ la $t$: $-\frac{\nu}{\nu-1} g_\nu(t)(1 + t^2/\nu) = -g_\nu(t)\frac{\nu+t^2}{\nu-1}$; termenul de la $-\infty$ se anulează doar dacă $\nu > 1$
- ES cere $\nu > 1$; pentru o dispersie finită este necesar $\nu > 2$

Înapoi Lista exercițiilor

# A4 extins [Propus]: nivelurile la care VaR nu este subaditiv — cerința

- **Întrebare**: pentru ce probabilități ale cozii $\alpha$ nu este VaR subaditiv în A4?
- **Date**: obligațiunile din A4, $p = 0{,}7\%$, și definiția VaR din secțiunea „VaR și ES"
- **Cerințe**
  1. Scrieți $\mathrm{VaR}_\alpha(A)$ și $\mathrm{VaR}_\alpha(A+B)$ ca funcții în trepte de $\alpha$.
  2. Găsiți intervalul lui $\alpha$ în care $\mathrm{VaR}_\alpha(A+B) > 2\mathrm{VaR}_\alpha(A)$ și explicați ambele capete.
- **Raportați**: intervalul și cîte o frază pentru fiecare capăt
- **Repere și exemple**: A4

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

# A6 [Propus]: validitatea transformării Cornish–Fisher ca funcție cuantilă — cerința

- **Întrebare**: pentru ce exces de kurtosis mai este transformarea Cornish–Fisher o funcție cuantilă?
- **Date**
  - $\mu = 0$, $\sigma = 1{,}2\%$, asimetria $S = -0{,}5$, excesul de kurtosis $K$ Cornish & Fisher (1938)
  - Transformarea Cornish–Fisher $\tilde{z}(z)$ din secțiunea „Dezvoltarea Cornish–Fisher (CF)"; $\mathrm{VaR}_\alpha = -\sigma\tilde{z}(z_\alpha)$
- **Cerințe**
  1. Cu $K = 3$, calculați cei trei termeni de corecție în $z_{1\%}$, $\tilde{z}_{1\%}$ și VaR 1% Cornish–Fisher.
  2. Scrieți $d\tilde{z}/dz = Az^2 + Bz + C$ și găsiți vîrful acestei parabole.
  3. Găsiți cel mai mare $K$ pentru care $\tilde{z}$ este crescătoare pe $[z_{0,1\%}, 0]$ și decideți dacă $K = 10$ este admisibil.
- **Raportați**: VaR, limita pentru $K$ și un grafic al lui $\tilde{z}$ și $d\tilde{z}/dz$ pentru $K = 3$ și $K = 10$
- **Interpretare**: garantează o transformare cuantilă validă și un VaR precis?
- **Repere și exemple**: A1

înapoi Lista exercițiilor

# A7 [Propus]: ES ca minim și subaditivitatea — cerința

- **Întrebare**: de ce nu poate ES recompensa niciodată divizarea unui portofoliu?
- **Date**
  - Pierdere integrabilă $L$; funcția obiectiv $F_\alpha(v)$ Rockafellar & Uryasev (2000) din secțiunea „ES ca minim”
  - Cifre: portofoliul din A4 (două obligațiuni, $p = 0{,}7\%$) la $\alpha = 1\%$
- **Cerințe**
  1. Pentru portofoliul din A4, calculați pantele lui $F$ pe $(0, 100)$ și $(100, 200)$, punctul de minim și minimul.
  2. Arătați că derivata la dreapta a lui $F$ este $1 - P(L > v)/\alpha$ și deduceți că $\mathrm{VaR}_\alpha$ minimizează $F$, cu minimul $\mathrm{ES}_\alpha$.
  3. Deduceți $\mathrm{ES}_\alpha(L_1 + L_2) \leq \mathrm{ES}_\alpha(L_1) + \mathrm{ES}_\alpha(L_2)$ din $(a + b)_+ \leq a_+ + b_+$.
- **Raportați**: cele trei cifre de la pasul 1 și două demonstrații scurte
- **Repere și exemple**: A3, A4

Înapoi Lista exercițiilor

# A5 extins [Rezolvat]: contribuțiile la ES din minim — cerința și rezolvarea

- **Întrebare**: de ce sînt contribuțiile istorice la ES din B5 medii pe zilele din coadă?
- **Date**: $\mathrm{ES}_\alpha(w) = \min_v F(w, v)$, $F(w, v) = v + \mathbb{E}[(L_p - v)_+]/\alpha$, $L_p = -w^\top R$ (A7)
- **Cerințe**
  1. Folosiți argumentul înfășurătoarei în $v^* = \mathrm{VaR}_\alpha$ pentru a calcula $\partial \mathrm{ES}_\alpha / \partial w_i$.
  2. Arătați că $w_i\, \partial \mathrm{ES}_\alpha / \partial w_i = \mathbb{E}[-w_i R_i \mid L_p \geq \mathrm{VaR}_\alpha]$ pentru $L_p$ continuu.
- **Raportați**: o demonstrație scurtă
- **Repere și exemple**: A7

## Rezolvare

- $\partial F / \partial v = 0$ în $v^*$, deci $\partial \mathrm{ES}_\alpha / \partial w_i = \partial F / \partial w_i (w, v^*) = \mathbb{E}[-R_i 1\{L_p > v^*\}]/\alpha$
- Pentru $L_p$ continuu, $P(L_p > v^*) = \alpha$: aceasta este $\mathbb{E}[-R_i \mid L_p \geq \mathrm{VaR}_\alpha]$; suma lui $w_i \times$ ea dă $\mathrm{ES}_\alpha$ (Euler)
- Estimarea istorică: media lui $-w_i R_i$ pe zilele din coadă, cu ponderile ES istoric, deci contribuțiile însumează ES (B5); sub distribuția Normală este egală cu rescalarea VaR din A5

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

# A8 [Propus]: dispersia de selecție a ES istoric — cerința

- **Întrebare**: cît de imprecis este un ES 2,5% istoric pe 500 de zile, chiar pentru pierderi Normale?
- **Date**
  - $n$ pierderi i.i.d., continue, densitate pozitivă în $\mathrm{VaR}_\alpha$, $\mathbb{E}[L^2] < \infty$; $Y = (L - \mathrm{VaR}_\alpha)_+$, excesul pierderii peste VaR (0 sub el)
  - Funcția de influență IF Chen (2008) și $\mathrm{Var}(\widehat{\mathrm{ES}}_\alpha) \approx \mathrm{Var}(\mathrm{IF}(L))/n$ din secțiunea „Precizia ES"
- **Cerințe**
  1. Arătați că $\mathrm{Var}(\mathrm{IF}(L)) = \mathrm{Var}(Y)/\alpha^2$ și explicați, cu A7, de ce estimarea VaR nu adaugă niciun termen de ordinul întîi.
  2. Pentru $L \sim N(0,1)$, $\alpha = 2{,}5\%$, integrați, cu $v = \mathrm{VaR}_\alpha = -z_\alpha$, $\mathbb{E}[Y] = \int_v^\infty (x - v)\varphi(x)\,dx$ și $\mathbb{E}[Y^2]$ în formă închisă.
  3. Calculați SE a lui $\widehat{\mathrm{ES}}_{2{,}5\%}$ pentru $n = 500$ și $\sigma = 1{,}2\%$ și verificați-o cu 4 000 de selecții independente (NumPy default_rng(42)); folosiți ES istoric fracționar din „Simularea istorică" ($n\alpha = 12{,}5$) și ddof=1 pentru abaterea standard simulată.
- **Raportați**: cele două momente, SE în pp și abaterea standard simulată
- **Interpretare**: de ce este valoarea pentru S&P 500 (B2) mult mai mare?
- **Repere și exemple**: A1, A7

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

# B1 extins [Rezolvat]: intervale asimptotice și HAC pentru VaR — cerința

- **Întrebare**: coincid formulele asimptotice cu bootstrap-ul din B1?
- **Date**
  - Pierderile BET din B1; erorile standard i.i.d. și HAC din secțiunea „Precizia VaR" (densitatea nucleu $\hat{f}$, lagul Newey–West $\lfloor 4(n/100)^{2/9} \rfloor$)
- **Cerințe**
  1. Reperul Normal (din A1): cu $f(\mathrm{VaR}_{1\%}) = \varphi(z_{1\%})/1{,}2$, calculați SE pentru $n = 500$ și $n = 6\,670$.
  2. Pentru BET, calculați $\hat{f}$, SE i.i.d. și HAC și cele două intervale de 95% pe ambele selecții.
- **Raportați**: cele patru intervale pentru VaR 1% lîngă cele două intervale bootstrap din B1
- **Interpretare**: de ce sînt intervalele BET mai largi decît reperul Normal?

Înapoi Lista exercițiilor

# B1 extins [Rezolvat]: rezolvare — intervale asimptotice și HAC pentru VaR

- **1.** $f = 0{,}0267/1{,}2 = 0{,}0222$: SE 0,20 pp ($n = 500$, lățime 0,79), 0,055 pp ($n = 6\,670$, lățime 0,22)
- **2.** BET complet: $\hat{f} = 0{,}0076$, SE 0,16 (i.i.d.), 0,23 (HAC); intervale $[3{,}81; 4{,}44]$, $[3{,}69; 4{,}57]$
- Ultimele 500 de zile: $\hat{f} = 0{,}0163$, SE 0,27 și 0,27
- Interpretare: coada BET este mai grea decît cea Normală, deci densitatea în VaR este mai mică și cuantila mai puțin precisă; HAC și blocurile confirmă că gruparea volatilității lărgește intervalul pe întreaga selecție

MFM_ch7_seminar

# B3 extins [Propus]: un interval bootstrap pentru VaR FHS al zilei următoare — cerința

- **Întrebare**: cît de incert este VaR filtrat din B3?
- **Date**: modelul și datele din B3; bootstrap pe reziduuri Christoffersen & Gonçalves (2005) cu 999 de traiectorii, seed 42, funcția `fhs_bootstrap` din Quantlet-ul seminarului
- **Cerințe**
  1. Pentru fiecare traiectorie, simulați o serie AR(1)-GARCH(1,1) de lungimea selecției cu $\hat{z}$ reeșantionate și re-estimați $\theta^* = (c^*, \phi^*, \omega^*, \alpha_1^*, \beta_1^*)$.
  2. Calculați $\mu_{t+1}^*$ și $\sigma_{t+1}^*$ trecînd randamentele Bitcoin **originale** prin $\theta^*$ și $\hat{\xi}_{1\%}^*$ din reziduurile traiectoriei.
  3. Raportați intervalul percentil de 90% al lui $\mathrm{VaR}^* = -\mu_{t+1}^* + \sigma_{t+1}^* \hat{\xi}_{1\%}^*$ și intervalele celor două surse.
- **Raportați**: histograma celor 999 de prognoze cu intervalul
- **Interpretare**
  - include intervalul VaR istoric pe 500 de zile?
  - este aceasta un test?
- **Repere și exemple**: B3

Înapoi Lista exercițiilor

# B6 [Propus]: Cornish–Fisher față de cuantilele empirice — cerința

- **Întrebare**: corectează dezvoltarea Cornish–Fisher VaR Normal pe date reale?
- **Date**
  - BET (obligatoriu): datele din B1; extindere: S&P 500, Bitcoin și aur (închideri zilnice, zile lucrătoare pentru aur) și cursul de referință BNR EUR/RON (2005–2026), toate pînă la 18 septembrie 2026
  - Momentele randamentelor $X$: media, abaterea standard cu `ddof=1`, `scipy.stats.skew` și `scipy.stats.kurtosis` (exces, deplasat)
- **Cerințe**
  1. Calculați $S$ și $K$ pentru BET.
  2. Calculați VaR 1% și VaR 2,5% prin distribuția Normală, Cornish–Fisher (A6) și simularea istorică.
  3. Construiți intervale bootstrap i.i.d. de 95% (1 000 de reeșantionări) pentru cele două VaR istorice și verificați dacă valorile Cornish–Fisher cad în interior.
  4. Separat, verificați dacă $K$ depășește limita de monotonie din A6.
- **Raportați**: un tabel mic pe activ și un grafic cu cele trei metode și intervalele bootstrap
- **Interpretare**: la ce nivel al cozii se apropie Cornish–Fisher mai mult de reperul istoric? Se păstrează concluzia pentru fiecare activ?
- **Repere și exemple**: A1, A6, B1

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

# B5 extins [Propus]: ponderi de paritate a riscului — cerința

- **Întrebare**: ce ponderi nenegative, cu investiție integrală, dau fiecărui activ din B5 aceeași cotă din VaR Normal?
- **Date**: randamentele și covarianța $\Sigma$ din B5
- **Cerințe**
  1. Rezolvați numeric $w_i(\Sigma w)_i = w_j(\Sigma w)_j$ pentru toți $i, j$, cu $w \geq 0$ și $\sum_i w_i = 1$.
  2. Comparați cu ponderile invers proporționale cu volatilitatea, $w_i \propto 1/\sigma_i$.
  3. La ponderile de paritate a riscului, calculați VaR 1% Normal, ES 2,5% istoric și cotele ES.
- **Raportați**: ponderile, VaR, ES și cotele
- **Interpretare**: implică cotele egale din VaR cote egale din ES?
- **Repere și exemple**: B5

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

# B4 extins [Rezolvat]: depășiri grupate și indicele extremal — cerința

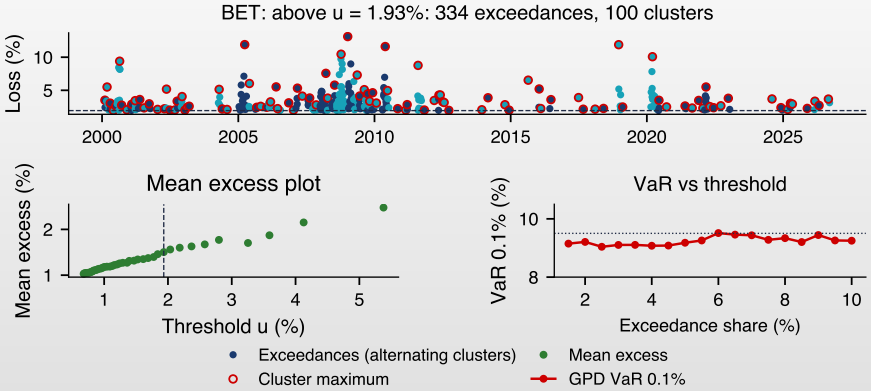
- **Întrebare**: cîte informații independente despre coadă conțin cele 334 de depășiri BET din B4?
- **Date**
  - Momentele de depășire $S_1 < \cdots < S_N$ ale lui $u$ (B4), intervalele $T_i = S_{i+1} - S_i$
  - Estimatorul pe intervale $\hat{\theta}$ Ferro & Segers (2003) din secțiunea „Depășiri grupate: indicele extremal"
- **Cerințe**
  1. Calculați $\hat{\theta}$ cu precizia completă (rotunjiți doar valoarea afișată) și numărul țintă de grupuri $C = \lfloor \hat{\theta} N \rfloor + 1$.
  2. Împărțiți depășirile la cele mai mari $C - 1$ intervale; dacă al $(C-1)$-lea și al $C$-lea cel mai mare interval sînt egale, reduceți $C$ pînă cînd diferă.
  3. Estimați GPD pe maximele grupurilor și comparați $\hat{\xi}/\mathrm{SE}$ cu B4.
- **Raportați**: $\hat{\theta}$, numărul de grupuri, estimarea pe maximele grupurilor și un grafic cronologic
- **Interpretare**: este credibilă SE i.i.d. din B4?

Înapoi Lista exercițiilor

# B4 extins [Rezolvat]: rezolvare — depășiri grupate și indicele extremal (1/2)

- **1.** $\hat{\theta} = 0{,}32$, $C = 108$
- **2.** Egalitate la pragul de separare ($T = 12$ zile): 100 de grupuri de cîte 3,3 depășiri în medie; cel mai mare grup 33, 47 depășiri izolate
- **3.** $\hat{\xi} = 0{,}269$ (SE 0,127) față de 0,209 (SE 0,066); $\hat{\xi}/\mathrm{SE}$ scade de la 3,2 la 2,1; la pragul VaR 1% $\hat{\theta} = 0{,}40$
- Interpretare: coada rămîne grea, dar SE i.i.d. nu este credibilă; raportăm estimarea pe maximele grupurilor sau filtrăm întîi cu GARCH (EVT condiționată, McNeil & Frey (2000))

# B4 extins [Rezolvat]: rezolvare — depășiri grupate și indicele extremal (2/2)




MFM_ch7_seminar

# B7 [Propus]: CAViaR pentru BET — cerința

- **Întrebare**: oferă modelarea directă a cuantilei BET prognoze mai bune decît simularea filtrată și cea istorică în afara eșantionului?
- **Date**
  - Randamentele BET din B1 ($n = 6\,670$)
  - CAViaR SAV Engle & Manganelli (2004) și pierderea pinball din secțiunea „Regresia cuantilă, pierderea pinball și CAViaR"; $\mathrm{VaR}_{\mathbf{1}} = -\hat{q}_{\mathbf{1\%}}$ din primele 300 de randamente; funcțiile `caviar_path`, `caviar_fit` (Quantlet-ul seminarului): $10^{\mathbf{4}}$ puncte de start în $(0, 1)^{\mathbf{3}}$, seed 42, cele mai bune 10 rafinate
- **Cerințe**
  1. Estimați $\beta$ pe 2000–2015 prin minimizarea sumei pierderilor pinball la $\alpha = 1\%$.
  2. Calculați pas cu pas un termen al pierderii pinball pentru prima zi din afara eșantionului și verificați că prognoza pentru ziua $t$ folosește doar $r_{t-\mathbf{1}}$.
  3. Cu $\beta$ fixat, prognozați VaR pentru 2016–2026 și comparați depășirile și pierderea pinball medie cu FHS (re-estimat în fiecare ianuarie) și HS pe 500 de zile.
  4. Pentru 20 februarie – 30 aprilie 2020 numărați depășirile și raportați VaR maxim al fiecărei metode.
- **Raportați**: estimările, un tabel de comparație și un grafic cu detaliu pe COVID-19
- **Interpretare**: poate fi atribuită diferența tipului de model cînd CAViaR este estimat o dată, iar FHS în fiecare an?
- **Repere și exemple**: B3; cursul, CAViaR pentru S&P 500

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

# C2 [Deschis]: capitalul ES, BVB față de S&P 500 — cerința (1/2)

- **Întrebare**: care portofoliu cere mai mult capital ES pe unitatea investită: acțiunile mari (*blue chips*) de la București sau S&P 500?
- **Date**
  - Coșul BVB: Banca Transilvania, OMV Petrom (OMV: *Österreichische Mineralölverwaltung*, grupul austriac OMV), BRD–Groupe Société Générale, Transgaz, Romgaz, Nuclearelectrica, Electrica, Transelectrica (închideri ajustate), ponderi egale, rebalansare zilnică; păstrați datele comune cu prețuri observate și randamentele individuale zero; eliminați zilele în care toate cele opt randamente sînt zero
  - Portofoliul S&P 500: SPY, ETF-ul pe S&P 500 (închideri ajustate); ambele de la 2016-09-20 pînă la 18 septembrie 2026; randamente simple zilnice $R_t$ în %, în moneda locală
- **Cerințe**
  1. Construcție: calculați ES 2,5% istoric pe o zi al fiecărui portofoliu (pierderea $-R_t$) și numărul de observații din coadă.
  2. Orizontul: calculați ES 2,5% pe 10 zile prin scalare cu $\sqrt{10}$, din pierderi compuse suprapuse $100[1 - \prod_{i=1}^{10}(1 + R_{t+i}/100)]$ și prin Monte Carlo filtrat: transformați întîi randamentul simplu al coșului în $r_t = 100 \ln(1 + R_t/100)$, estimați AR(1)-GARCH(1,1) pe această serie, simulați 100 000 de traiectorii din starea de azi (seed 42) și convertiți fiecare pierdere log simulată în pierdere simplă înainte de raportarea sumelor.
- **Raportați**: continuarea pe slide-ul următor
- **Repere și exemple**: B1, B3; cursul, secțiunile despre orizont și Basel

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

# C2 [Deschis]: capitalul ES, BVB față de S&P 500 — cerința (2/2)

- **Cerințe (continuare)**

3. Stres: găsiți cele 250 de zile consecutive cu cel mai mare ES 2,5% istoric pe o zi, reprezentați ES pe fereastră mobilă, cu fereastra de stres hașurată și raportați ES de stres pe o zi și, prin $\sqrt{10}$, pe 10 zile.
4. Capital: capitalul la 1 000 000 investit $= 1\,000\,000 \times 1{,}5 \times \mathrm{ES}_{\mathbf{10}}^{stres}$ (%)/100 (1,5: multiplicatorul FRTB $m_c$; $\mathrm{ES}_{\mathbf{10}}^{stres}$: ES de stres pe 10 zile), pentru un orizont de lichiditate de 10 și de 20 de zile (încă un factor $\sqrt{2}$); sumele în RON pentru BVB și în USD pentru SPY, rapoartele sînt comparabile.
5. Incertitudine: intervale bootstrap de 95% pe blocuri suprapuse (blocuri de 20 de zile, 2 000 de reeșantionări) pentru ES pe o zi și pentru ES de stres, cu fereastra ținută fixă.

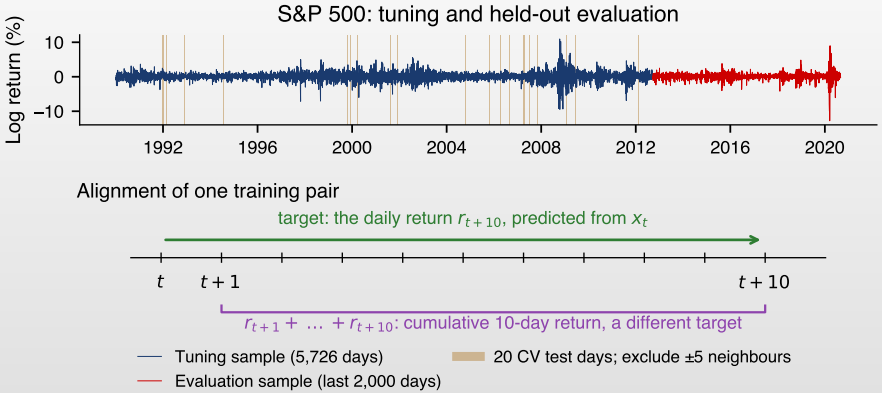
- **Raportați**: un tabel cu toate cifrele și intervalele și o argumentație de o pagină
  - care portofoliu cere mai mult capital?
  - cum schimbă răspunsul tranzacționarea rară și moneda?
- O ilustrare simplificată inspirată de FRTB Basel Committee (2019), nu calculul complet al capitalului din Basel Committee, MAR33

# C3 [Deschis]: VaR prin regresie cuantilă cu rețele neuronale — cerința (1/2), versiunea minimă

- **Întrebare**: oferă o rețea neuronală mică prognoze mai bune decît regresia cuantilă liniară pentru VaR 1% al S&P 500, ca în studiul de caz din curs Chronopoulos, Raftapostolos & Kapetanios (2024)?
- **Date**
  - S&P 500, închideri zilnice, 1990-01-03 – 31 august 2020 (articolul începe în 1985); randamente log zilnice nescalate $r_t$; calibrare: primele 5 726 de zile, evaluare: ultimele 2 000 (de la 2012-09-19)
  - Un singur set de predictori: $\sigma_t$ GARCH(1,1); $\alpha = 1\%$
- **Cerințe**
  1. Construiți perechi de antrenare $(x_t, r_{t+\mathbf{10}})$ ale căror ținte se află toate în eșantionul de calibrare, ca în grafic; ținta este randamentul zilnic $r_{t+\mathbf{10}}$, nu randamentul cumulat pe 10 zile.
  2. Estimați o regresie cuantilă liniară și o rețea (un strat ascuns ReLU (*Rectified Linear Unit*, funcția de activare liniară rectificată) cu 5 unități, penalizare ridge 0,01, Adam (algoritm de optimizare stocastică cu pas adaptiv), oprire timpurie) prin pierderea pinball. În fiecare partiție cronologică de validare încrucișată, reestimați GARCH și standardizați predictorii doar pe partea de antrenare și eliminați perechile ale căror ținte $r_{t+\mathbf{10}}$ trec de limita antrenării; după alegerea configurației, reestimați GARCH pe întregul eșantion de calibrare.
  3. Înainte de evaluare, fixați în protocol rata de învățare, mărimea lotului (*batch size*), numărul maxim de epoci, validarea cronologică, numărul de epoci fără îmbunătățire permis înainte de oprirea timpurie și cele cinci valori seed. Comparați pierderile pinball medii pe eșantionul de evaluare cu un test Diebold–Mariano (HAC, 10 laguri) Diebold & Mariano (1995), pentru fiecare dintre cele 5 valori seed.
- **Raportați**: un tabel cu pierderile pinball medii, statisticile DM și numărul de depășiri, pentru fiecare seed

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

# C3 [Deschis]: VaR prin regresie cuantilă cu rețele neuronale — datele




MFM_ch7_seminar

## C3 [Deschis]: VaR prin regresie cuantilă cu rețele neuronale — cerința (2/2), extinderi

- **Extinderea de replicare**: cele patru seturi de predictori și grila de validare încrucișată din articol (Anexa cursului); RMSFE relativ (rădăcina erorii pătratice medii de prognoză, *Root Mean Squared Forecast Error*) doar pentru a reproduce Tabelul 6, deoarece RMSFE este minimizat de media condiționată, nu de cuantilă
- **Extinderea pe fereastră mobilă**: reestimați o dată pe an, pe o fereastră mobilă, și prognozați septembrie 2020 – 2026 pentru S&P 500 și BET
- **Extinderea comună**: două ieșiri $(v_t, e_t)$ antrenate pe pierderea FZ0 Patton, Ziegel & Chen (2019), ($v_t$: cuantila randamentului, $e_t$: media cozii, ca în curs) cu $e_t = -\exp(a_t)$ și $v_t = e_t + \exp(b_t)$, $a_t$, $b_t$ ieșiri nerestricționate ale rețelei, astfel încît $e_t < 0$ și $e_t \leq v_t$
- **Interpretare** (o pagină): poate fi atribuit un cîștig neliniarității cînd arhitectura, penalizarea și calibrarea se schimbă simultan?

# Alegerea proiectului și criteriile de evaluare

## Alegeți unul

- C2: comparați capitalul ES pentru coșul BVB și SPY precizate, urmînd toate cele cinci cerințe; un portofoliu suplimentar cu cel puțin trei active este o extensie opțională
- C3: versiunea minimă, apoi o extindere
- Predați un folder Quantlet (cod, `Metainfo.txt`, grafice) și trei slide-uri: cifre, interpretare, limite

## Criterii de evaluare

- Reproductibilitate: date încărcate prin cod, valori seed fixe, orice cifră dintr-un script (30%)
- Convenții corecte: semn, nivel, orizont, tipul randamentului (20%)
- Incertitudine: numărul de observații din coadă și intervale pentru orice estimare din coadă (25%)
- Interpretare și limite, inclusiv folosirea AI notată și erorile AI găsite efectiv (25%)

# Acronime folosite în acest material (1/2)

- **AI**: Artificial Intelligence — *inteligență artificială*
- **AR**: AutoRegressive (model) — *model autoregresiv*
- **BET**: Bucharest Exchange Trading (index) — *indicele de referință al Bursei de Valori București*
- **BNR**: Banca Națională a României
- **BVB**: Bursa de Valori București
- **CAViaR**: Conditional Autoregressive Value at Risk — *VaR condițional autoregresiv*
- **CF**: Cornish–Fisher (expansion) — *dezvoltarea Cornish–Fisher*
- **CI**: Confidence Interval — *interval de încredere*
- **COVID-19**: COronaVIrus Disease 2019 — *boala provocată de coronavirus, 2019*
- **DM**: Diebold–Mariano (test) — *testul Diebold–Mariano de comparare a prognozelor*
- **ES**: Expected Shortfall — *pierderea așteptată în coadă*
- **ETF**: Exchange-Traded Fund — *fond tranzacționat la bursă*
- **EVT**: Extreme Value Theory — *teoria valorilor extreme*
- **FHS**: Filtered Historical Simulation — *simulare istorică filtrată*
- **FRTB**: Fundamental Review of the Trading Book — *revizuirea fundamentală a portofoliului de tranzacționare*
- **FZ0**: Fissler–Ziegel loss, zero-homogeneous version — *funcția de pierdere Fissler–Ziegel, varianta omogenă de grad zero*

# Acronime folosite în acest material (2/2)

- **GARCH**: Generalised AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity — *heteroscedasticitate condiționată autoregresivă generalizată*
- **GPD**: Generalised Pareto Distribution — *distribuția Pareto generalizată*
- **HAC**: Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent (standard errors) — *erori standard robuste la heteroscedasticitate și autocorelație*
- **HS**: Historical Simulation — *simulare istorică*
- **LGD**: Loss Given Default — *pierderea în caz de nerambursare*
- **MAR33**: Basel Framework, chapter MAR33 (internal models approach: capital requirements calculation) — *cadrul Basel, capitolul MAR33 (abordarea pe modele interne: calculul cerințelor de capital)*
- **OMV**: Österreichische Mineralölverwaltung — *Administrația austriacă a uleiurilor minerale (grupul OMV)*
- **QML**: Quasi-Maximum Likelihood — *cvasi-verosimilitate maximă*
- **RMSFE**: Root Mean Squared Forecast Error — *rădăcina erorii pătratice medii de prognoză*
- **SAV**: Symmetric Absolute Value (CAViaR specification) — *specificația CAViaR cu valoare absolută simetrică*
- **SD**: Standard Deviation — *abatere standard*
- **SE**: Standard Error — *eroare standard*
- **SUA**: Statele Unite ale Americii
- **US**: United States — *Statele Unite ale Americii*

# Bibliografie (1/2)


- Acerbi, C., Tasche, D. (2002). On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking & Finance*, 26(7), 1487–1503.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9(3), 203–228.
- Barone-Adesi, G., Giannopoulos, K., Vosper, L. (1999). VaR without correlations for portfolios of derivative securities. *Journal of Futures Markets*, 19(5), 583–602.
- Basel Committee on Banking Supervision (2019). Minimum capital requirements for market risk. Bank for International Settlements.
- Chen, S.X. (2008). Nonparametric estimation of expected shortfall. *Journal of Financial Econometrics*, 6(1), 87–107.
- Christoffersen, P., Gonçalves, S. (2005). Estimation risk in financial risk management. *Journal of Risk*, 7(3), 1–28.
- Chronopoulos, I., Raftapostolos, A., Kapetanios, G. (2024). Forecasting Value-at-Risk using deep neural network quantile regression. *Journal of Financial Econometrics*, 22(3), 636–669.
- Cornish, E.A., Fisher, R.A. (1938). Moments and cumulants in the specification of distributions. *Revue de l'Institut International de Statistique*, 5(4), 307–320.
- Diebold, F.X., Mariano, R.S. (1995). Comparing predictive accuracy. *Journal of Business & Economic Statistics*, 13(3), 253–263.
- Efron, B. (1979). Bootstrap methods: another look at the jackknife. *Annals of Statistics*, 7(1), 1–26.
- Engle, R.F., Manganelli, S. (2004). CAViaR: conditional autoregressive value at risk by regression quantiles. *Journal of Business & Economic Statistics*, 22(4), 367–381.
- Ferro, C.A.T., Segers, J. (2003). Inference for clusters of extreme values. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, 65(2), 545–556.

# Bibliografie (2/2)


- Künsch, H.R. (1989). The jackknife and the bootstrap for general stationary observations. *Annals of Statistics*, 17(3), 1217–1241.
- McNeil, A.J., Frey, R. (2000). Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach. *Journal of Empirical Finance*, 7(3–4), 271–300.
- McNeil, A.J., Frey, R., Embrechts, P. (2015). Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools, revised ed. Princeton University Press.
- Patton, A.J., Ziegel, J.F., Chen, R. (2019). Dynamic semiparametric models for expected shortfall (and Value-at-Risk). *Journal of Econometrics*, 211(2), 388–413.
- Pele, D.T., Mazurencu-Marinescu-Pele, M. (2026). Finite-sample precision limits for expected shortfall forecast comparisons. *Mathematics*, 14(13), 2316.
- Rockafellar, R.T., Uryasev, S. (2000). Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of Risk*, 2(3), 21–41.
- Tasche, D. (2008). Capital allocation to business units and sub-portfolios: the Euler principle. arXiv:0708.2542.