









Modelarea piețelor financiare

Seminarul 8: Backtesting și evaluarea prognozelor de risc — aplicații



Daniel Traian PELE
Drd. Antoaneta Amza, antoaneta.amza@csie.ase.ro

Academia de Studii Economice din București
IDA Institute Digital Assets
Blockchain Research Center
AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance
Academia Română, Institutul de Prognoză Economică
MSCA Digital Finance

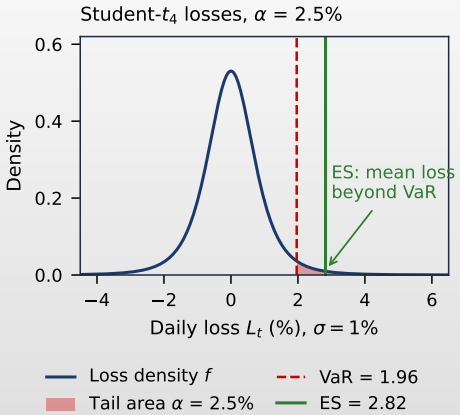
Ce prognoză de risc este susținută de date?

- Întrebarea seminarului
  - **ce procedură de prognoză ați alege provizoriu pentru Value-at-Risk (VaR) 1% și Expected Shortfall (ES) 2,5% și cît de puternice sînt dovezile?**
- Livrabile
  - refacerea calculelor A rezolvate și răspunsurile la verificările independente
  - un tabel și o figură reproduse pentru fiecare exercițiu B repartizat, cu interpretarea proprie
  - codul corectat din C1
  - o frază de interpretare pentru fiecare exercițiu
- Notebook-ul de azi: deschideți notebook-ul seminarului în Colab
- B3 și B4 folosesc bootstrap-ul pe reziduuri și predicția conformală, dezvoltate în cursul 8: rezolvați-le după curs; B5 este temă pentru acasă
- Seminar: prof. Daniel Traian Pele, danpele@ase.ro; drd. Antoaneta Amza, antoaneta.amza@csie.ase.ro

Cum aliniem observațiile și prognozele?

- BET înseamnă Bucharest Exchange Trading index; BVB este Bursa de Valori București. BNR este Banca Națională a României; cursul EUR/RON dă numărul de lei (RON) pentru un euro (EUR). Activele din Statele Unite ale Americii (SUA) sînt cotate în dolari americani (USD).
- UTC înseamnă Coordinated Universal Time. Bitcoin se tranzacționează zilnic; ziua bursieră a acțiunilor are alt calendar. Comparăm prognozele doar pe datele de evaluare precizate.
- Transformarea integrală de probabilitate (Probability Integral Transform, PIT) plasează observația în distribuția prognozată. Pentru prognoze continue corecte, valorile PIT trebuie să se comporte ca extrageri independente și identic distribuite (i.i.d.) din distribuția Uniformă.
- Pierderile din cod sînt zecimale: scăderea prețului de la 100 la 95 dă pierderea logaritmică de circa 0,0513, adică 5,13%. Graficele cursului exprimă aceeași pierdere procentual.

VaR și ES ale unei pierderi



- Detalii: Capitolul 8
- **Pierderea** $L_t = -r_t$; $\mathcal{F}_{t-\mathbf{1}}$: informația disponibilă la închiderea zilei $t-1$
- **VaR** la probabilitatea de coadă α: pierderea depășită cu probabilitatea α

$$P\left(L_t > \mathrm{VaR}_t \mid \mathcal{F}_{t-\mathbf{1}}\right) = \alpha$$

  - VaR_t este cuantila de ordin $1-\alpha$ a distribuției prognozate a pierderii
- **ES**: pierderea medie în zilele de dincolo de VaR

$$\mathrm{ES}_t = E\left[L_t \mid L_t > \mathrm{VaR}_t,\ \mathcal{F}_{t-\mathbf{1}}\right]$$

  - întotdeauna $\mathrm{ES}_t \geq \mathrm{VaR}_t$; diferența crește cu grosimea cozii
  - graficul: Student-$t_{\mathbf{4}}$ cu $\sigma = 1\%$, $\alpha = 2{,}5\%$: VaR = 1,96%, ES = 2,82%

Depășiri și ipoteza nulă

- Un backtest compară prognoze în afara eșantionului, emise la $t-1$, cu pierderile realizate
- **Depășirea** din ziua t

$$I_t = 1\{L_t > \mathrm{VaR}_t\} = \begin{cases} 1, & L_t > \mathrm{VaR}_t \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

  - $1\{\cdot\}$: funcția indicator, egală cu 1 cînd are loc evenimentul din acolade
  - $x = \sum_{t=\mathbf{1}}^{T} I_t$: numărul de depășiri în T zile de evaluare; $\hat{\pi} = x/T$: rata de depășire observată
- **Ipoteza nulă** a oricărui backtest VaR: o prognoză corectă la nivelul α

$$H_{\mathbf{0}}: \; P\left(I_t = 1 \mid \mathcal{F}_{t-\mathbf{1}}\right) = \alpha \quad \text{pentru orice } t$$

  - implică: I_t sînt Bernoulli(α) i.i.d., variabile 0/1 independente, egale cu 1 cu probabilitatea α; reciproca nu este valabilă cînd $\mathcal{F}_{t-\mathbf{1}}$ conține și alte informații
  - testele următoare verifică doar anumite consecințe: *numărul* corect de depășiri (acoperirea necondiționată)
  - și lipsa *memoriei*: o depășire de azi nu conține informație despre ziua de mîine (independența)

Prin ce diferă metodele de prognoză?

- Simularea istorică (Historical Simulation, HS) folosește distribuția empirică a pierderilor. Simularea istorică filtrată (Filtered Historical Simulation, FHS) elimină întîi volatilitatea variabilă, apoi rescalează cuantila reziduurilor pentru mîine.
- Modelul GARCH (heteroscedasticitate condiționată autoregresivă generalizată, *Generalised Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) descrie varianța condiționată. Inovațiile Student-t permit cozi mai grele decît inovațiile Normale.
- Teoria valorilor extreme (Extreme Value Theory, EVT) modelează coada extremă. GARCH-EVT (filtru GARCH plus EVT pentru coadă) modelează coada reziduurilor filtrate cu o distribuție Pareto generalizată (Generalised Pareto Distribution, GPD), estimată peste un prag al pierderii.
- De exemplu, HS păstrează observația unei crize pînă cînd aceasta iese din fereastră. FHS îi schimbă impactul odată cu volatilitatea prognozată, chiar dacă fereastra istorică rămîne aceeași.

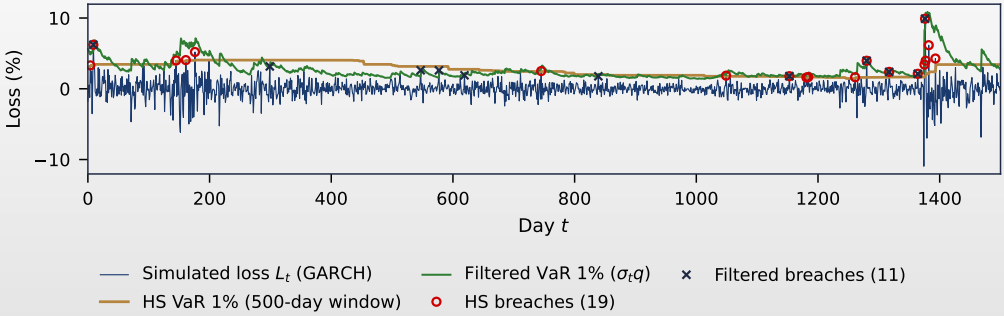
Cele șase proceduri de prognoză

- Panelul conține șase proceduri VaR/ES (Capitolul 8); W: fereastra mobilă (*rolling*) de 1 000 de zile. Parametrii și calendarul reestimării
- **Necondiționate**: o singură distribuție pentru toată fereastra
  - HS: $\mathrm{VaR}_t = \hat{q}_{\mathbf{1}-\alpha}(L_{t-W}, \ldots, L_{t-\mathbf{1}})$, cuantila empirică de ordin $1-\alpha$ a pierderilor din fereastră
  - Normal: $\mathrm{VaR}_t = -\hat{\mu} + \hat{\sigma}\, z_{\mathbf{1}-\alpha}$; $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$: media și abaterea standard a lui r în fereastră; $z_{\mathbf{1}-\alpha} = \Phi^{-\mathbf{1}}(1-\alpha)$
  - Student-t: estimați prin verosimilitate maximă poziția m, scala s și ν în fiecare fereastră; VaR este $-m + s\, t_\nu^{-\mathbf{1}}(1-\alpha)$. Echivalent, pentru $\nu > 2$, folosiți $\sigma = s\sqrt{\nu/(\nu-2)}$ și cuantila unei distribuții t_ν cu dispersia 1, $t_\nu^{-\mathbf{1}}(1-\alpha)\sqrt{(\nu-2)/\nu}$
- **Filtrate**: întîi o volatilitate GARCH(1,1), apoi o distribuție pentru $z_t = (r_t - \mu)/\sigma_t$

$$\sigma_t^{\mathbf{2}} = \omega + a\,(r_{t-\mathbf{1}} - \mu)^{\mathbf{2}} + b\,\sigma_{t-\mathbf{1}}^{\mathbf{2}}, \qquad \mathrm{VaR}_t = -\mu + \sigma_t\, q_{\mathbf{1}-\alpha}(-z)$$

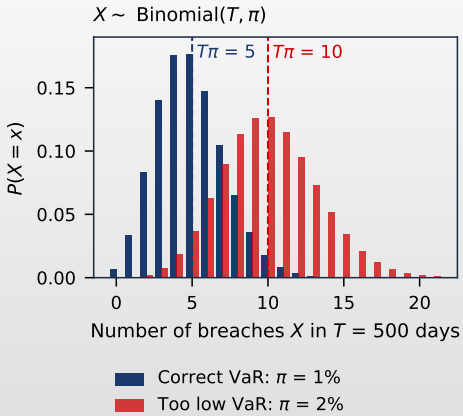
  - $\omega > 0$, $a, b \geq 0$, $a + b < 1$; $q_{\mathbf{1}-\alpha}(-z)$: cuantila de ordin $1-\alpha$ a pierderii standardizate $-z_t$
  - GARCH-t: z_t Student-t_ν cu dispersia 1; FHS: cuantila empirică a reziduurilor estimate $\hat{z}_t$
  - GARCH-EVT: o coadă GPD pentru $-\hat{z}_t$ peste un prag u: $q = u + \frac{\beta}{\xi}\left[\left(\frac{n}{N_u}\alpha\right)^{-\xi} - 1\right]$
  - ξ: forma cozii, β: scala, N_u: numărul reziduurilor, din cele n, aflate peste u

Depășirile unui VaR necondiționat și ale unui VaR filtrat



- Pierderi GARCH(1,1) simulate, cu șocuri Student-t_5, 1 500 de zile, VaR 1%: 15 depășiri așteptate
  - HS (fereastră de 500 de zile) variază în trepte și reacționează tîrziu la volatilitate: 19 depășiri, grupate la trecerea de la perioade calme la turbulențe
  - VaR filtrat $\sigma_t q$ crește odată cu σ_t: 11 depășiri, răspîndite pe tot eșantionul

Numărul de depășiri are distribuție Binomială



- Sub H_0, numărul $X = \sum_t I_t$ al celor T depășiri Bernoulli(π) i.i.d. are distribuția Binomială(T, π)

$$P(X = x) = \binom{T}{x} \pi^x (1-\pi)^{T-x}, \quad x = 0, \ldots, T$$

  - media $E[X] = T\pi$, dispersia $\mathrm{Var}(X) = T\pi(1-\pi)$
- Valoarea p (*p-value*) **exactă** unilaterală pentru prea multe depășiri

$$P(X \geq x) = \sum_{k=x}^{T} \binom{T}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{T-k}$$

  - probabilitatea, sub $\pi = \alpha$, unui număr cel puțin la fel de mare ca cel observat
- Graficul, $T = 500$: medii de 5 și 10 depășiri, dar cele două distribuții se suprapun
  - **Ce credeți**: 7 depășiri în 500 de zile resping un VaR 1%?
  - **Răspuns**: nu; un număr în jur de 7 este compatibil atît cu $\pi = 1\%$, cît și cu $\pi = 2\%$

Ce ipoteză verifică fiecare backtest?

- Testul raportului de verosimilitate (Likelihood Ratio, LR) compară verosimilitățile restricționată și nerestricționată; estimarea prin verosimilitate maximă (Maximum Likelihood Estimation, MLE) dă estimările nerestricționate. Testul Kupiec al proporției de depășiri (Proportion of Failures, POF) verifică frecvența totală a depășirilor.
- Acoperirea condiționată (Conditional Coverage, CC) combină frecvența corectă cu independența depășirilor. Regresia cuantilei dinamice (Dynamic Quantile, DQ) verifică dacă informația cunoscută prezice depășirile; coeficienții ei se estimează prin metoda celor mai mici pătrate (Ordinary Least Squares, OLS).
- Un model poate produce zece depășiri în o mie de zile și totuși să fie respins deoarece toate se concentrează într-o criză. Numărul corect și momentele imprevizibile sînt cerințe distincte.

Testul Kupiec

- Acoperirea necondiționată Kupiec (1995): este rata de depășire observată compatibilă cu α?
  - $H_0 : \pi = \alpha$, cu π probabilitatea reală de depășire; $H_1 : \pi \neq \alpha$
- Log-verosimilitatea Binomială a numărului de depășiri, dacă probabilitatea de depășire ar fi π

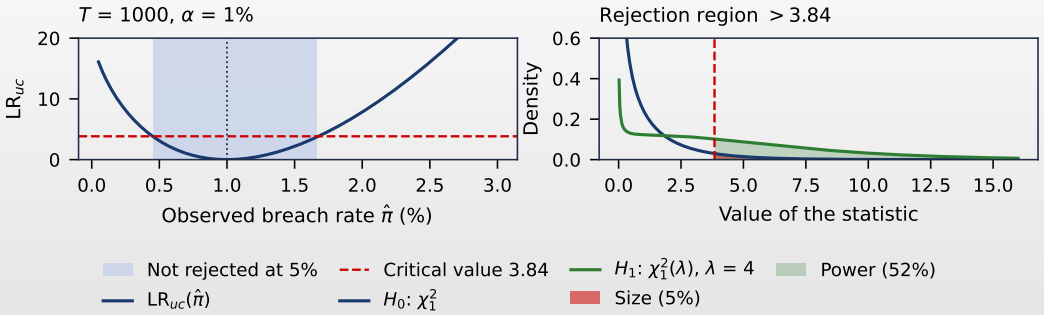
$$\ell(\pi) = (T - x)\ln(1 - \pi) + x \ln \pi$$

  - maximă în $\hat{\pi} = x/T$ (nerestricționată); $\ell(\alpha)$: valoarea sub H_0 (restricționată)
- Raportul de verosimilitate: cu cît explică rata observată numărul de depășiri mai bine decît α

$$\mathrm{LR}_{uc} = 2\left[\ell(\hat{\pi}) - \ell(\alpha)\right] \xrightarrow{d} \chi^2_1 \text{ sub } H_0$$

  - $\mathrm{LR}_{uc} \geq 0$, nul cînd $\hat{\pi} = \alpha$; χ^2_1: chi-pătrat cu 1 grad de libertate (o restricție)
  - respingem la 5% dacă $\mathrm{LR}_{uc} > 3{,}84$, cuantila de 95% a lui χ^2_1; valoarea p $= P(\chi^2_1 > \mathrm{LR}_{uc})$
  - principiul LR din Capitolul 5 (GJR față de GARCH), aici pentru un număr Binomial
- Exemplu: $T = 250$, $\alpha = 1\%$: 2,5 depășiri așteptate
  - $x = 2$ dă $\mathrm{LR}_{uc} = 0{,}11$: nicio dovadă împotriva modelului
  - cu atît de puține depășiri așteptate, valoarea p Binomială exactă este mai fiabilă decît aproximarea χ^2_1

Mărimea și puterea unui backtest



- **Mărimea**: $P(\text{respingere} \mid H_0)$, nominal 5%; **puterea**: $P(\text{respingere} \mid \pi \neq \alpha)$
  - stînga: LR_{uc} în funcție de $\hat{\pi}$ pentru $T = 1\,000$; nu respingem pentru $\hat{\pi}$ între 0,46% și 1,67%
  - dreapta: sub H_1, $\mathrm{LR}_{uc} \approx \chi^2_1(\lambda)$, necentrală, cu $\lambda = T(\pi - \alpha)^2/[\alpha(1-\alpha)]$; puterea locală $P(\chi^2_1(\lambda) > 3{,}84)$
  - $\lambda = 4$ dă o putere de 52%; cu x discret, mărimea și puterea exacte se obțin din sume Binomiale

Independența: testul Christoffersen

- Christoffersen (1998): depășirile urmează un lanț Markov cu două stări (0 = fără depășire, 1 = depășire)

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1-\pi_{01} & \pi_{01} \\ 1-\pi_{11} & \pi_{11} \end{pmatrix}, \quad \pi_{01} = P(I_t = 1 \mid I_{t-1} = 0), \quad \pi_{11} = P(I_t = 1 \mid I_{t-1} = 1)$$

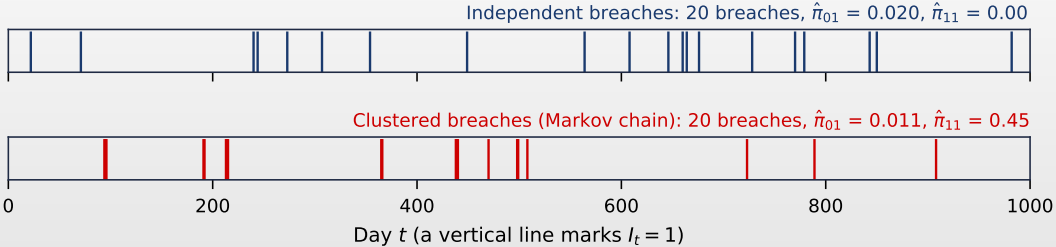
  - n_{ij}: numărul de zile în starea j după o zi în starea i; estimări $\hat{\pi}_{01} = \frac{n_{01}}{n_{00}+n_{01}}$, $\hat{\pi}_{11} = \frac{n_{11}}{n_{10}+n_{11}}$, $\hat{\pi} = \frac{n_{01}+n_{11}}{n}$, $n = \sum n_{ij}$

- Log-verosimilitatea tranzițiilor, nerestricționată

$$\ln L(\pi_{01}, \pi_{11}) = n_{00} \ln(1-\pi_{01}) + n_{01} \ln \pi_{01} + n_{10} \ln(1-\pi_{11}) + n_{11} \ln \pi_{11}$$

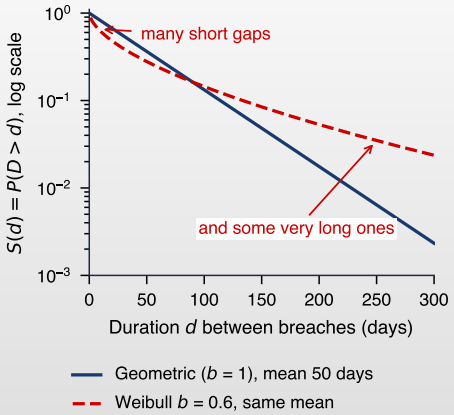
- Două teste ale raportului de verosimilitate
  - $\mathrm{LR}_{ind} = 2[\ln L(\hat{\pi}_{01}, \hat{\pi}_{11}) - \ln L(\hat{\pi}, \hat{\pi})]$, $H_0 : \pi_{01} = \pi_{11}$ (fără memorie), χ^2_1; mare cînd o depășire face mai probabilă depășirea următoare
  - $\mathrm{LR}_{cc} = \mathrm{LR}_{uc} + \mathrm{LR}_{ind}$, $H_0 : \pi_{01} = \pi_{11} = \alpha$ (rata corectă, fără memorie), două restricții, χ^2_2, valoarea critică 5,99 la 5%
- Exemplu: 12 zile $0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0$
  - cele 11 perechi (I_{t-1}, I_t) dau $n_{00} = 6$, $n_{01} = 2$, $n_{10} = 2$, $n_{11} = 1$

Depășiri independente și depășiri grupate



- Două șiruri simulate de 1 000 de zile, fiecare cu 20 de depășiri: același număr, deci același LR_{uc}
  - sus: Bernoulli(2%) i.i.d.; nicio depășire nu urmează alteia, $\hat{\pi}_{\mathbf{11}} = 0$
  - jos: lanț Markov cu $\pi_{\mathbf{01}} = 0{,}012$, $\pi_{\mathbf{11}} = 0{,}40$; $\hat{\pi}_{\mathbf{11}} = 0{,}45$ față de $\hat{\pi}_{\mathbf{01}} = 0{,}011$: depășirile apar în rafale
  - doar LR_{ind} și LR_{cc} pot deosebi cele două șiruri

Duratele dintre depășiri



- Testul duratelor Christoffersen & Pelletier (2004): D_i, numărul de zile de la o depășire la următoarea
  - sub H_0 geometrică, fără memorie, cu media $1/\alpha$: $P(D = d) = \alpha(1-\alpha)^{d-1}$, $S(d) = P(D > d) = (1-\alpha)^d$
- Alternativa: durate Weibull cu $a > 0$ (inversul scalei) și forma $b > 0$

$$S(d) = e^{-(ad)^b}, \qquad h(d) = a^b\, b\, d^{\,b-1}$$

  - $h(d)$: rata de hazard, o rată, nu o probabilitate; $h(d)\Delta$ aproximează probabilitatea unei depășiri într-un interval scurt Δ după d zile fără depășiri
  - $b = 1$: hazard constant, fără memorie; $b < 1$: hazard descrescător, grupuri urmate de perioade lungi fără depășiri
- $\mathrm{LR}_{dur} = 2[\ln L(\hat{a}, \hat{b}) - \ln L(\tilde{a}, 1)] \approx \chi^2_1$, $H_0 : b = 1$
  - primul și ultimul interval sînt cenzurate: pentru ele intră doar $S(d)$

Testul cuantilei dinamice

- Testul cuantilei dinamice (DQ) Engle & Manganelli (2004): poate ceva cunoscut ieri să prezică depășirea de azi?
  - $\mathrm{Hit}_t = I_t - \alpha$: depășirea centrată, cu media 0 și imprevizibilă sub H_0
- Regresia depășirii centrate pe informația din $t-1$

$$\mathrm{Hit}_t = \beta_0 + \sum_{k=1}^{4} \beta_k \,\mathrm{Hit}_{t-k} + \beta_5 \,\mathrm{VaR}_t + u_t$$

  - β_0: o rată de depășire greșită; $\beta_1, \ldots, \beta_4$: memorie; β_5: depășiri care depind de nivelul VaR
  - H_0: $\beta_0 = \cdots = \beta_5 = 0$
- Statistica Wald, cu X matricea celor șase regresori și $\hat{\beta}$ estimările OLS

$$\mathrm{DQ} = \frac{\hat{\beta}^\top X^\top X \,\hat{\beta}}{\alpha(1-\alpha)} \xrightarrow{d} \chi^2_6$$

  - $\alpha(1-\alpha)$: dispersia lui Hit_t sub H_0; DQ mare = depășiri previzibile
  - cu un an de date, mărimea acestor teste este departe de 5%, iar puterea lor este mică: B1 le interpretează folosind mărimile simulate

Cum influențează backtesting-ul capitalul reglementat?

- Comitetul de la Basel pentru Supraveghere Bancară (Basel Committee on Banking Supervision, BCBS) stabilește cadrul discutat aici. Revizuirea fundamentală a portofoliului de tranzacționare (Fundamental Review of the Trading Book, FRTB) este reforma riscului de piață din spatele noilor multiplicatori de capital.
- Păstrăm împreună fereastra regulii, probabilitatea cozii și multiplicatorul. Numărul depășirilor dintr-un eșantion mai lung nu poate fi introdus direct în semaforul Basel pe 250 de zile (slide-ul următor).

Semaforul Basel

- Semaforul Basel BCBS (1996): numărăm excepțiile X ale VaR 1% din ultimele 250 de zile

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{x} \binom{250}{k} 0{,}01^k \, 0{,}99^{250-k}$$

  - model corect: $X \sim$ Binomială(250; 0,01); $F(x)$: probabilitatea a cel mult x excepții
- Zonele, definite prin $F(x)$
  - verde cît timp $F(x) < 95\%$; roșu de la $F(x) \geq 99{,}99\%$; galben între ele
  - în galben și roșu multiplicatorul de capital crește: 1996, 3 plus un supliment; FRTB BCBS (2019), de la 1,5 la 2
- O zonă este o regulă de încadrare pentru supraveghetor, nu un test de 5%
  - ea fixează probabilitatea ca un model corect să ajungă în roșu, nu puterea față de un model greșit

Backtesting pentru ES: Z_1 și Z_2

- Acerbi–Szekely Acerbi & Szekely (2014): pierderile din zilele cu depășire, în unități ale ES prognozat, cu depășirile VaR la același nivel α (2,5%)

$$Z_1 = 1 - \frac{1}{N_T}\sum_{t=1}^{T}\frac{L_t I_t}{\mathrm{ES}_t}, \qquad Z_2 = 1 - \frac{1}{T\alpha}\sum_{t=1}^{T}\frac{L_t I_t}{\mathrm{ES}_t}$$

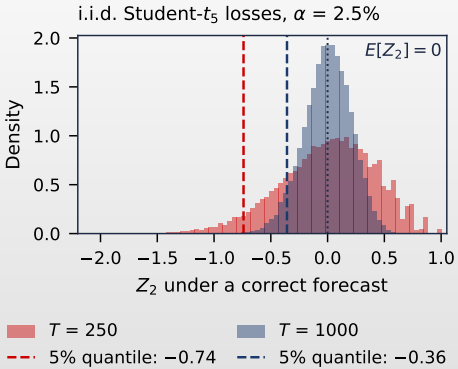
  - $N_T = \sum_t I_t$: numărul observat de depășiri; $T\alpha$: numărul așteptat
  - Z_1: sînt pierderile din zilele cu depășire, în medie, mai mari decît ES? (doar mărimea)
  - Z_2: pierderi din coadă prea multe *sau* prea mari (numărul și mărimea împreună)

- De ce $E[Z_2] = 0$ pentru o prognoză corectă (demonstrația în A4)

$$E\left[L_t I_t \mid \mathcal{F}_{t-1}\right] = P(L_t > \mathrm{VaR}_t \mid \mathcal{F}_{t-1})\, E[L_t \mid L_t > \mathrm{VaR}_t, \mathcal{F}_{t-1}] = \alpha\,\mathrm{ES}_t$$

  - $Z_2 < 0$: ES subestimat; distribuția lui Z_2 sub H_0 nu are o formă explicită și se obține prin simulare (B3)
  - Exemplu: $T\alpha = 6{,}25$, șapte depășiri, fiecare cu $L_t/\mathrm{ES}_t = 1{,}1$: $Z_2 = 1 - 7{,}7/6{,}25 = -0{,}23$

Distribuția lui Z_2 sub o prognoză corectă



- Simulare: pierderi Student-t_5 i.i.d., cu VaR și ES adevărate la 2,5%, 20 000 de eșantioane
  - ambele histograme sînt centrate în $E[Z_2] = 0$
  - abaterea standard scade aproximativ ca $1/\sqrt{T\alpha}$: circa 6 depășiri așteptate pentru $T = 250$, 25 pentru $T = 1\,000$
- Test unilateral: respingem cînd Z_2 este sub cuantila de 5% a distribuției sale sub H_0
  - aici $-0{,}74$ pentru $T = 250$ și $-0{,}36$ pentru $T = 1\,000$
  - coada stîngă este lungă: o singură pierdere mare poate împinge Z_2 mult sub 0

Cum ordonăm prognozele și cuantificăm incertitudinea?

- Pierderea Fissler–Ziegel cu diferențe de scor omogene de grad zero (FZ0) evaluează perechea VaR–ES: $\mathrm{FZ0}(cv, ce; cL) = \mathrm{FZ0}(v, e; L) + \ln c$. Un scor mediu mai mic este mai bun; diferențele de scoruri nu sînt diferențe de pierderi monetare.
- Diebold–Mariano (DM) testează egalitatea scorurilor medii; Giacomini–White (GW) testează capacitatea predictivă condiționată. Mulțimea de încredere a modelelor (Model Confidence Set, MCS) reține modelele pe care procedura sa nu le poate separa prin performanță.
- Erorile standard robuste la heteroscedasticitate și autocorelație (Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent, HAC) țin cont de dependența diferențelor de scor. Într-un proces autoregresiv AR(1), o diferență mare astăzi tinde să persiste mîine; funcția de autocorelație (Autocorrelation Function, ACF) măsoară dependența la fiecare lag.

Scoruri consistente pentru VaR și ES

- **Scor consistent** Gneiting (2011): valoarea lui așteptată este minimă la VaR (și ES) adevărate
  - o prognoză de coadă nu se compară prin eroarea pătratică: eroarea pătratică așteptată este minimizată de medie, nu de o cuantilă, deci nu recompensează un VaR corect
- VaR: pierderea pinball (de cuantilă), v: prognoza VaR

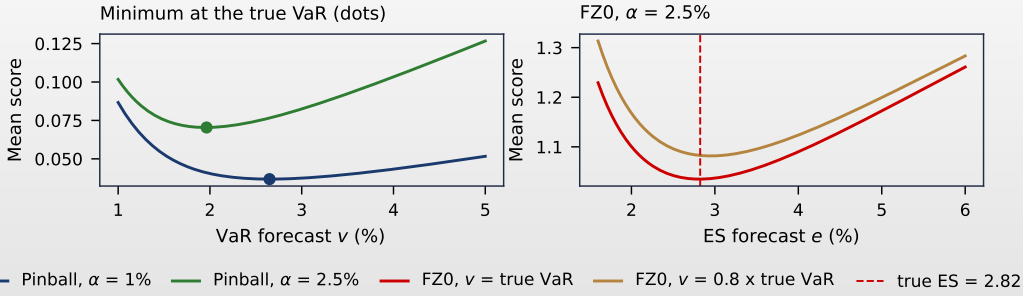
$$S(v, L) = \big(1\{L > v\} - \alpha\big)(L - v)$$

  - o depășire costă $(1 - \alpha)(L - v)$, o zi fără depășire $\alpha(v - L)$: este penalizat atît un VaR prea mic, cît și unul prea mare
  - de ex. $\alpha = 1\%$, $v = 3$: o pierdere $L = 5$ are scorul $0{,}99 \times 2 = 1{,}98$, un cîștig $L = -1$ are $0{,}01 \times 4 = 0{,}04$
- (VaR, ES) împreună: FZ0 Patton, Ziegel & Chen (2019), cu $v = \mathrm{VaR}$ și $e = \mathrm{ES} > 0$

$$\mathrm{FZ0}(v, e; L) = \frac{1\{L > v\}(L - v)}{\alpha\, e} + \frac{v}{e} + \ln e - 1$$

  - ES singur nu este elicitabil: niciun scor nu are minimul în ES luat separat, dar perechea (VaR, ES) este elicitabilă Fissler & Ziegel (2016)
  - pentru ambele scoruri, o medie mai mică pe zilele de evaluare indică o prognoză mai bună

Scorurile medii în funcție de prognoză



- Pierderi Student-t_4 simulate, cu dispersia 1 (400 000 de zile)
  - stînga: pierderea pinball medie este minimă exact la VaR adevărat, 2,65 pentru $\alpha = 1\%$ și 1,96 pentru $\alpha = 2{,}5\%$
  - dreapta: cu v egal cu VaR adevărat, FZ0 medie este minimă la ES adevărat $= 2{,}82$; un v prea mic ridică toată curba

Compararea a două prognoze: testul Diebold–Mariano

- Diebold & Mariano (1995) (Capitolul 5): este diferența medie de scor dintre modelele A și B diferită de 0?

$$d_t = S_{A,t} - S_{B,t}, \qquad \bar{d} = \frac{1}{T}\sum_{t=\mathbf{1}}^{T} d_t, \qquad \mathrm{DM} = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\widehat{\mathrm{LRV}}/T}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

  - $S_{A,t}$: scorul lui A în ziua t; H_0: $E[d_t] = 0$ (scoruri așteptate egale); $\mathrm{DM} > 1{,}96$: B semnificativ mai bun la 5%

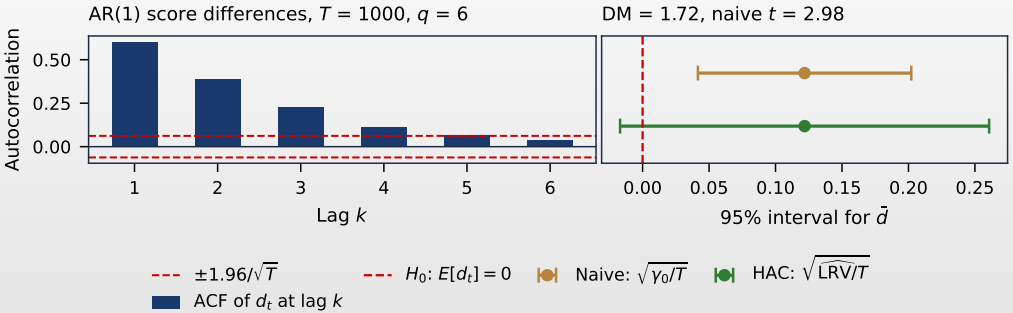
- d_t este autocorelat, deci dispersia pe termen lung (*long-run variance*, LRV; Newey–West Newey & West (1987)) înlocuiește dispersia γ_0

$$\widehat{\mathrm{LRV}} = \gamma_0 + 2\sum_{k=\mathbf{1}}^{q}\Big(1 - \frac{k}{q+1}\Big)\gamma_k, \qquad \gamma_k = \frac{1}{T}\sum_{t=k+\mathbf{1}}^{T}(d_t - \bar{d})(d_{t-k} - \bar{d})$$

  - γ_k: autocovarianța lui d_t la lagul k; ponderile $1 - k/(q+1)$ asigură $\widehat{\mathrm{LRV}} \geq 0$; $q = \lfloor 4(T/100)^{\mathbf{2/9}} \rfloor$ laguri, $\lfloor\cdot\rfloor$: partea întreagă
  - Exemplu, $q = 1$: $\gamma_0 = 4$, $\gamma_1 = 1$: $\widehat{\mathrm{LRV}} = 4 + 2 \times 0{,}5 \times 1 = 5$; cu $\bar{d} = 0{,}1$, $T = 2000$: $\mathrm{DM} = 0{,}1/\sqrt{5/2000} = 2{,}0$

- Giacomini–White Giacomini & White (2006) (opțional în B2): formăm $Z_t = (d_t, d_{t-\mathbf{1}} d_t)^\top$ și testăm media nulă: $W = T\bar{Z}^\top \hat{\Omega}^{-\mathbf{1}} \bar{Z} \sim \chi^2_{\mathbf{2}}$, unde $\hat{\Omega} = T^{-\mathbf{1}} \sum_t Z_t Z_t^\top$
  - el verifică dacă un model este mai bun *condiționat* de informația din $t-1$

Importanța erorii standard HAC



- Diferențe de scor simulate $d_t = 0{,}17 + x_t$, x_t un AR(1) cu coeficientul 0,6, $T = 1\,000$, $q = 6$
  - stînga: autocorelații pozitive la primele laguri, deci $\widehat{\mathrm{LRV}}/\gamma_0 = 3{,}0$
  - dreapta: intervalul naiv nu conține 0 ($t = 2{,}98$), intervalul HAC îl conține ($\mathrm{DM} = 1{,}72$): ignorarea autocorelației exagerează semnificația

Instrumente pentru B3: reziduuri de depășire și bootstrap

- McNeil–Frey McNeil & Frey (2000): în cele n zile cu depășire, pierderea de dincolo de ES, în unități de σ_t

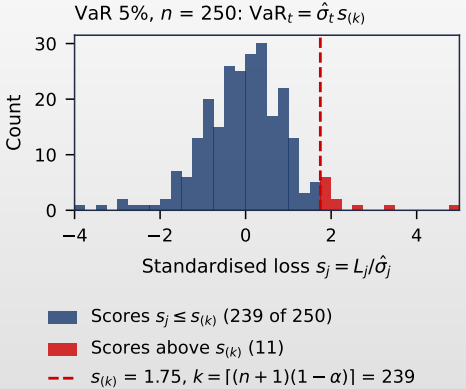
$$e_t = \frac{L_t - \mathrm{ES}_t}{\sigma_t}, \qquad t = \frac{\bar{e}}{s_e/\sqrt{n}}$$

  - ES corect: $E[e_t] = 0$; H_1: $E[e_t] > 0$ (ES prea mic); $\bar{e}$, s_e: media și abaterea standard a reziduurilor e_t
- Valoarea p bootstrap: distribuția lui t sub H_0 obținută din date, fără aproximarea Normală sau t
  - centrăm reziduurile, $\tilde{e}_t = e_t - \bar{e}$, astfel încît H_0 să fie adevărată; extragem cu revenire n dintre ele, de B ori
  - $p = \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B} 1\{t_b^* \geq t\}$, t_b^*: statistica extragerii b
  - cu B extrageri, eroarea standard Monte Carlo a lui p este $\sqrt{p(1-p)/B}$

Ce calibrează predicția conformală?

- Predicția conformală split (cu un eșantion de calibrare separat) alege un rang al scorurilor de calibrare. Garanția depinde de schimbabilitate: observațiile pot fi reordonate fără schimbarea distribuției comune.
- Observațiile independente și identic distribuite (i.i.d.) au această proprietate. Seriile financiare nu o satisfac obligatoriu; acoperirea marginală nu garantează acoperirea în fiecare zi.
- Inferența conformală adaptivă (Adaptive Conformal Inference, ACI), folosită în A10, actualizează probabilitatea de lucru a cozii după fiecare depășire. Este un pas distinct de adaptare, nu alt nume pentru cuantila conformală split fixă.

Instrumente pentru B4: VaR conformal split



- Predicția conformală split Lei et al. (2018): o cuantilă a pierderilor standardizate trecute, rescalată cu volatilitatea de azi
  - scorurile de calibrare $s_j = L_j/\hat{\sigma}_j$ pe ultimele n zile; $\hat{\sigma}_j$: o estimare a volatilității cunoscută în $j-1$
- $s_{(k)}$: al k-lea cel mai mic scor

$$k = \lceil (n+1)(1-\alpha) \rceil, \qquad \mathrm{VaR}_t = \hat{\sigma}_t \, s_{(k)}$$

  - $\lceil \cdot \rceil$: rotunjirea în sus; graficul: $n = 250$, $\alpha = 5\%$, $k = 239$, 11 scoruri peste $s_{(k)}$
- Garanția: $P(L_t > \mathrm{VaR}_t) \le \alpha$ dacă cele $n+1$ scoruri sînt schimbabile
  - schimbabile: distribuția lor comună nu se schimbă la permutarea ordinii (de ex. i.i.d.)
  - garanția este marginală, o medie pe toate zilele, nu zi de zi

Datele folosite și panelul de prognoze

Piața	Seria	Calendar	Zile de evaluare
S&P 500	indicele S&P 500, prețul de închidere zilnic	zile de tranzacționare SUA	03.01.2007–18.09.2026, 4 959
BET	indicele BET, prețul de închidere zilnic	zile de tranzacționare BVB	03.01.2007–18.09.2026, 4 937
Bitcoin	Bitcoin în USD, prețul de închidere zilnic	în fiecare zi, 24:00 UTC	14.06.2017–18.09.2026, 3 384
EUR/RON	cursul de referință BNR	zile lucrătoare în România	11.06.2009–18.09.2026, 4 352

- Prețurile zilnice de închidere din datele cursului, cîte o serie pe piață, încărcate automat de notebook; pierderi $L_t = -\ln(P_t/P_{t-\mathbf{1}})$ în **zecimale** (0,01 = 1%), fiecare serie pe calendarul ei, fără completarea zilelor lipsă
- Panelul de prognoze: pentru fiecare piață și model, un rînd pe zi de evaluare, cu pierderea L_t, VaR 1%, 2,5% și 5%, ES 2,5%, volatilitatea prognozată σ_t, media μ_t și PIT u_t; cele șase modele din Capitolul 8, fereastră mobilă de 1 000 de zile, reestimare la 20 de zile, doar date pînă la $t-1$
- Primul apel calculează și salvează temporar panelul de prognoze; apelurile următoare îl reutilizează

Pregătire: rulați și verificați

```
F, tails = fc('sp500')
g = F['GARCH-t']
print(len(g), g.index[0], g.index[-1])
# loss, VaR 1%, VaR 2.5%, ES 2.5%, scale
print(g.iloc[:3, [-1, 0, 1, 3, 6]])
```

- „Stil" definește `fc` și `hits`; „Funcții comune" definește `kupiec`, `christoffersen`, `duration_test`, `dq_test`, `fz0`
- Rezultatul așteptat: 4 959 rînduri, 03.01.2007 – 18.09.2026
- Un `L` negativ este un cîștig; VaR și ES sînt praguri de pierdere pozitive
- Dacă numărul de rînduri sau primul rînd diferă, opriți-vă și verificați piața, data de început și numele modelului

date	L	VaR1	VaR2.5	ES2.5	scale
2007-01-03	0,001199	0,012031	0,009944	0,012132	0,005298
2007-01-04	−0,001228	0,011894	0,009830	0,011995	0,005241
2007-01-05	0,006103	0,011745	0,009706	0,011844	0,005178

Harta exercițiilor

Exercițiu	Întrebare	Tip	Exemplu de urmat
A1	sînt 7 depășiri în 250 de zile o dovadă împotriva unui VaR 1%?	Rezolvat	–
A2	se grupează depășirile BET din 2007–2010?	Rezolvat	–
A3, A4	semafoare pentru numărul depășirilor VaR și pentru ES (Z_2)	Rezolvat	–
B1	care dintre cele șase modele VaR trec testele pe S&P 500?	Rezolvat	–
B2	este FHS semnificativ mai bun?	Rezolvat	–
Verificări	verificări Kupiec și ES pe date noi, după A4	Propus	A1, A4
C1	ce este greșit în răspunsul unui asistent de inteligență artificială (AI)?	Propus	A2, A3
B5	L-ar fi penalizat supraveghetorul pe modelul GARCH-t pe BET? (după curs)	Propus	A3, B1
B3	este ES subestimat? (după curs)	Rezolvat	–
B4	își păstrează VaR conformal acoperirea în crize? (după curs)	Rezolvat	–
Extinderi	A1 extins, A5–A10, B6–B9, C2, C3 (opționale, după seminar)	Rezolvate și propuse	indicat la fiecare

- **[Rezolvat]**: rezolvare completă în slide-uri și în notebook, un exemplu de urmat; **[Propus]**: îl rezolvați individual, iar rezolvarea se discută la seminar
- Partea A: derivări pe hîrtie; Partea B: verificare și inferență pe prognoze reale, fiecare încheiată cu o întrebare de interpretare; Partea C: întrebări deschise și critica unui răspuns AI (*Artificial Intelligence*, inteligență artificială)

A1 [Rezolvat]: testul Kupiec dintr-un număr de depășiri — Cerință

- **Întrebarea**: sînt $x = 7$ depășiri în $T = 250$ de zile o dovadă împotriva unui model VaR 1%?
- **Date de intrare**: $T = 250$, $x = 7$, $\alpha = 0{,}01$; depășirile sînt Bernoulli(π) i.i.d.; fără fișier de date
- **Cerințe**
  1. Calculați $\hat{\pi} = x/T$ și log-verosimilitățile $\ell(\alpha)$ (restricționată) și $\ell(\hat{\pi})$ (nerestricționată) din secțiunea „Testul Kupiec".
  2. Calculați $\mathrm{LR}_{uc} = 2[\ell(\hat{\pi}) - \ell(\alpha)]$, valoarea p din χ^2_1 și probabilitatea exactă unilaterală $P(X \geq 7)$ sub distribuția Binomială(250; 0,01).
  3. Enumerați întregii x cu $\mathrm{LR}_{uc}(x) \leq 3{,}84$: regiunea de acceptare a regulii „respingem dacă $\mathrm{LR}_{uc} > 3{,}84$".
  4. Însumați probabilitățile Binomiale din afara regiunii pentru mărimea efectivă ($\pi = 1\%$) și puterea față de $\pi = 2\%$; comparați cu puterea locală $P(\chi^2_1(\lambda) > 3{,}84)$ din secțiunea „Mărimea și puterea unui backtest".
- **Raportați**: $\hat{\pi}$, cele două log-verosimilități, LR_{uc} cu ambele valori p, regiunea de acceptare, mărimea nominală, mărimea efectivă și cele două puteri
- **Interpretare**: poate un an de date VaR 1% să detecteze un model care dublează rata de depășire?
- Secțiunea din notebook: A1

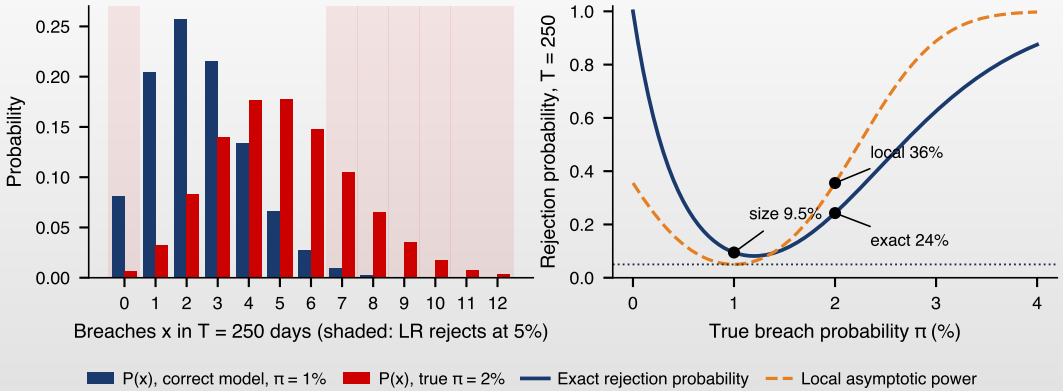
◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

A1 [Rezolvat]: Rezolvare (1/3) — testul pas cu pas

1. $\hat{\pi} = 7/250 = 0{,}028$; $\ell(\alpha) = 243 \ln 0{,}99 + 7 \ln 0{,}01 = -34{,}678$; $\ell(\hat{\pi}) = 243 \ln 0{,}972 + 7 \ln 0{,}028 = -31{,}930$.
2. $\mathrm{LR}_{uc} = 2\,(-31{,}930 - (-34{,}678)) = 5{,}50$; p din $\chi^2_1 = 0{,}019$ (alternativă bilaterală); exact unilateral $P(X \geq 7) = 0{,}014$: ambele resping la 5%, dar alternativele diferă.
3. Evaluînd $\mathrm{LR}_{uc}(x)$ pentru $x = 0, 1, 2, \ldots$: $\mathrm{LR}_{uc}(0) = -500 \ln 0{,}99 = 5{,}03 > 3{,}84$, $\mathrm{LR}_{uc}(6) = 3{,}56$, $\mathrm{LR}_{uc}(7) = 5{,}50$: regiunea de acceptare este $\{1, \ldots, 6\}$.
4. Trei cantități diferite: **mărimea nominală** 5% (valoarea critică χ^2_1), **mărimea efectivă** a acestei reguli și **puterea** față de $\pi = 2\%$ (slide-urile următoare).

⊡ Interpretare: 7 depășiri înseamnă de 2,8 ori cele 2,5 așteptate; un VaR 1% corect produce 7 sau mai multe depășiri doar într-o proporție de 0,014 dintre ani

A1 [Rezolvat]: Rezolvare (2/3) — mărime și putere



MFM_ch8_sem_partA

A1 [Rezolvat]: Rezolvare (3/3) — mărime și putere

- Mărimea efectivă: $P(X = 0) + P(X \geq 7) = 8{,}11\% + 1{,}37\% = 9{,}5\%$ sub $\pi = 1\%$, nu 5%
- Puterea exactă la $\pi = 2\%$: $1 - P(1 \leq X \leq 6) = 1 - 75{,}7\% = 24\%$
- Local: $\lambda = 250 \cdot 0{,}01^2/0{,}0099 = 2{,}53$, $P(\chi^2_1(\lambda) > 3{,}84) = 36\%$: asimptotica supraestimează puterea
- Interpretare: cu 2,5 depășiri așteptate domină caracterul discret al lui x; un model care dublează rata de depășire nu este respins într-un an de testare în circa trei cazuri din patru

MFM_ch8_sem_partA

A2 [Rezolvat]: de la șirul depășirilor la tranziții — Cerință

- **Întrebările**
  - se grupează depășirile simulării istorice pe BET în 2007–2010?
  - este numărul lor prea mare?
- **Date de intrare**
  - Un al doilea șir de 12 zile (comparați tranzițiile cu exemplul introductiv): $I_t = 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0$
  - BET, închideri zilnice, VaR 1% HS (fereastră de 1 000 de zile), 2007–2010: $T = 1005$ zile, deci $n = T - 1 = 1004$ tranziții (se condiționează pe prima zi)
  - Numărul tranzițiilor: $n_{\mathbf{00}} = 958$, $n_{\mathbf{01}} = 22$, $n_{\mathbf{10}} = 22$, $n_{\mathbf{11}} = 2$
- **Cerințe**
  1. Numărați cele 11 tranziții ale șirului de 12 zile într-un tabel 2×2 ($n_{\mathbf{00}}, n_{\mathbf{01}}, n_{\mathbf{10}}, n_{\mathbf{11}}$).
  2. Pentru BET, calculați $\hat{\pi}_{\mathbf{01}}$, $\hat{\pi}_{\mathbf{11}}$ și $\hat{\pi}$ (estimatorii: „Independența: testul Christoffersen").
  3. Scrieți log-verosimilitatea restricționată ln $L(\hat{\pi}, \hat{\pi})$ și pe cea nerestricționată ln $L(\hat{\pi}_{\mathbf{01}}, \hat{\pi}_{\mathbf{11}})$; calculați LR_{ind} și valoarea p din $\chi^2_{\mathbf{1}}$.
  4. Calculați LR_{uc} pe aceleași n tranziții ($x = 24$), apoi $\mathrm{LR}_{cc} = \mathrm{LR}_{uc} + \mathrm{LR}_{ind}$ și valoarea p din $\chi^2_{\mathbf{2}}$.
- **Raportați**: tabelul de exercițiu, trei probabilități, LR_{ind}, LR_{uc}, LR_{cc} cu valorile p
- **Interpretare**: este HS respins din cauza numărului prea mare de depășiri sau din cauza grupării lor?
- Secțiunea din notebook: A2

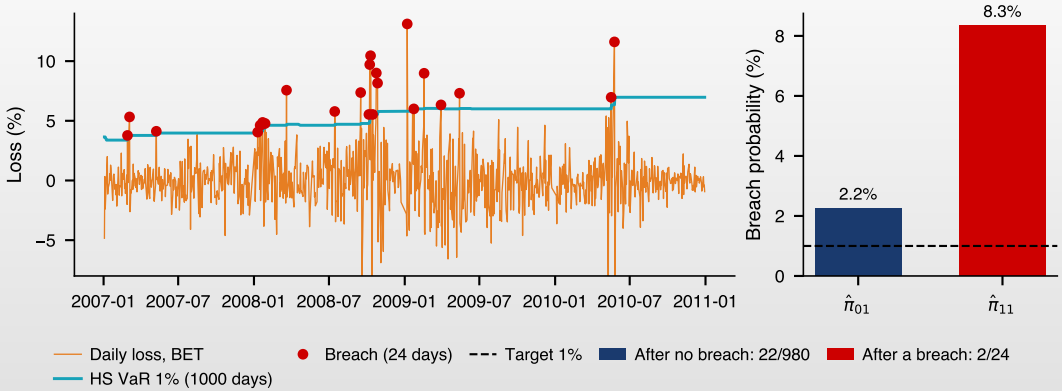
◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

A2 [Rezolvat]: Rezolvare (1/3) — numărări și verosimilități

1. Șirul de exercițiu: perechile (I_{t-1}, I_t) dau $n_{00} = 6$, $n_{01} = 2$, $n_{10} = 2$, $n_{11} = 1$ (în total 11): același tabel ca în exemplul introductiv, deoarece LR_{ind} depinde doar de numărările n_{ij}.
2. BET: $\hat{\pi}_{01} = 22/(958 + 22) = 0{,}0224$; $\hat{\pi}_{11} = 2/(22 + 2) = 0{,}0833$; $\hat{\pi} = (22 + 2)/1\,004 = 0{,}0239$.
3. $\ln L(\pi_{01}, \pi_{11}) = n_{00} \ln(1 - \pi_{01}) + n_{01} \ln \pi_{01} + n_{10} \ln(1 - \pi_{11}) + n_{11} \ln \pi_{11}$; fiecare parte este o verosimilitate Bernoulli, deci estimatorii de verosimilitate maximă sînt rapoartele de la pasul 2; $\mathrm{LR}_{ind} = 2{,}32$, $p = 0{,}128$: independența nu este respinsă.
4. $\mathrm{LR}_{uc} = 14{,}11$ pe cele 1 004 tranziții; $\mathrm{LR}_{cc} = 14{,}11 + 2{,}32 = 16{,}43$, $p = 0{,}0003$ (χ^2_2: atît π_{01}, cît și π_{11} fixate la α): respins.

⊡ Pe aceleași tranziții descompunerea $\mathrm{LR}_{cc} = \mathrm{LR}_{uc} + \mathrm{LR}_{ind}$ este exactă; cu LR_{uc} pe toate cele T zile ea este doar asimptotică

A2 [Rezolvat]: Rezolvare (2/3) — depășirile BET și tranzițiile



MFM_ch8_sem_partA

A2 [Rezolvat]: Rezolvare (3/3) — numărul și gruparea depășirilor

- VaR HS variază în trepte și rămîne constant în timp ce pierderile se grupează la sfîrșitul lui 2008: 24 de depășiri, față de 10 așteptate
- După o depășire probabilitatea de depășire este de aproape patru ori mai mare (0,0833 față de 0,0224), dar se sprijină pe doar 2 perechi consecutive
- Interpretare: HS este respins mai ales din cauza numărului prea mare de depășiri ($\hat{\pi} \approx 2{,}4\%$); gruparea se vede, dar patru ani de date nu o pot confirma cu un test de ordinul întîi

MFM_ch8_sem_partA

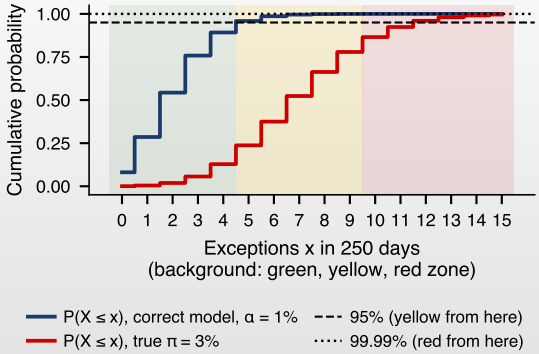
A3 [Rezolvat]: semaforul din distribuția Binomială — Cerință

- **Întrebările**: o bancă raportează 6 excepții ale VaR 1% în 250 de zile
  - în ce zonă se află?
  - ce consecință are asupra capitalului?
  - cît de neobișnuit este?
- **Date de intrare**
  - Model corect: $X \sim$ Binomială$(250; 0{,}01)$; zonele definite prin $P(X \leq x)$ ca în „Semaforul Basel" (BCBS (1996))
  - Tabelul: suplimentul din 1996 (adăugat la multiplicatorul 3) și multiplicatorul FRTB (BCBS (2019))
- **Cerințe**
  1. Calculați $P(X \leq x)$ pentru $x = 4, 5, 9, 10$ și găsiți unde încep zonele.
  2. Pentru $x = 6$: zona, multiplicatorii 1996 și FRTB, $P(X \geq 6)$.
  3. Calculați $P(X \leq 4)$ cînd probabilitatea reală de depășire este 3%.
  4. Comparați $P(X \geq 5)$ (un model corect iese din verde) cu șansa de a ajunge în roșu.
- **Raportați**: patru probabilități, zonele, răspunsurile 2–4
- **Interpretare**: ce eroare controlează semaforul și ce eroare rămîne mare?
- Secțiunea din notebook: A3

Excepții	Supliment 1996	Multiplicator FRTB
0–4	0	1,50
5	0,40	1,70
6	0,50	1,76
7	0,65	1,83
8	0,75	1,88
9	0,85	1,92
≥ 10	1,00	2,00

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

A3 [Rezolvat]: Rezolvare — semaforul din distribuția Binomială



- Zonele: verde 0–4, galben 5–9, roșu 10 sau mai multe
  - $P(X \leq 4) = 89{,}22\%$, $P(X \leq 5) = 95{,}88\%$
  - $P(X \leq 9) = 99{,}97\%$, $P(X \leq 10) = 99{,}99\%$
- $x = 6$: galben
  - multiplicator 1996: $3 + 0{,}50 = 3{,}50$; FRTB: 1,76
  - $P(X \geq 6) = 100\% - 95{,}88\% = 4{,}12\%$
- Rata reală 3%: $P(X \leq 4) = 12{,}8\%$
  - un model care triplează rata de depășire rămîne verde aproximativ un an din opt
- Un model corect iese din verde: $P(X \geq 5) = 10{,}78\%$
  - dar aproape niciodată nu ajunge în roșu: zonele controlează alarmele roșii false
  - zona este o regulă de încadrare, nu un test de semnificație de 5%

MFM_ch8_sem_partA

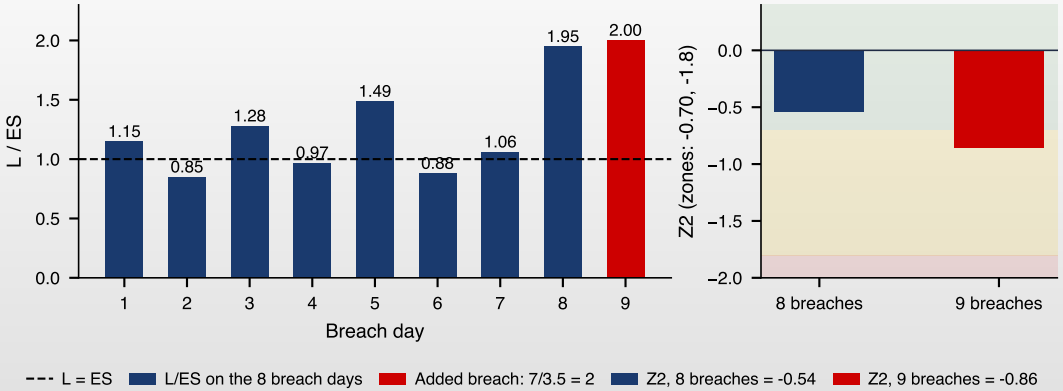
A4 [Rezolvat]: Z_1 și Z_2 pe un an — Cerință

- **Întrebarea**: arată opt zile cu depășiri într-un an că ES 2,5% este subestimat?
- **Date de intrare**
  - $T = 250$ de zile, $\alpha = 0{,}025$, deci $T\alpha = 6{,}25$; tabelul conține cele opt zile deja **identificate** ca depășiri ale VaR 2,5%
  - Statisticile Z_1 și Z_2 (Acerbi & Szekely (2014)) din secțiunea „Backtesting pentru ES: Z_1 și Z_2"
- **Cerințe**
  1. Completați coloana L_t/ES_t și calculați contribuția fiecărei zile $L_t/(\mathrm{ES}_t\, T\alpha)$ la suma din Z_2.
  2. Calculați Z_1 și Z_2; încadrați Z_2 ca verde peste $-0{,}70$ și roșu sub $-1{,}8$ (praguri ilustrative; B3 le calibrează pentru un model).
  3. Înlocuiți o zi fără depășire din aceeași fereastră cu o depășire cu $L = 7\%$, $\mathrm{ES} = 3{,}5\%$ (T rămîne 250) și recalculați Z_2.
  4. Arătați $E[L_t I_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] = \alpha\,\mathrm{ES}_t$ pentru o prognoză continuă corectă și deduceți $E[Z_2] = 0$.
- **Raportați**: rapoartele, Z_1, Z_2 înainte și după, zona, demonstrația
- **Interpretare**: ce zile determină Z_2?
- Secțiunea din notebook: A4

Ziua	L_t (%)	ES_t (%)	L_t/ES_t
1	3,9	3,4	...
2	2,8	3,3	...
3	4,6	3,6	...
4	3,1	3,2	...
5	5,2	3,5	...
6	2,9	3,3	...
7	3,6	3,4	...
8	7,4	3,8	...

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

A4 [Rezolvat]: Rezolvare (1/2) — Z_1 și Z_2 pe un an



MFM_ch8_sem_partA

A4 [Rezolvat]: Rezolvare (2/2) — Z_1 și Z_2 pe un an

- Rapoarte: 1,147; 0,848; 1,278; 0,969; 1,486; 0,879; 1,059; 1,947; suma 9,613; contribuții = raport/6,25, de la 0,136 (ziua 2) la 0,312 (ziua 8)
- $Z_1 = 1 - 9{,}613/8 = -0{,}202$: pierderile din coadă sînt în medie cu 20% peste ES;
  $Z_2 = 1 - 9{,}613/6{,}25 = -0{,}538 > -0{,}70$: verde
- Depășirea adăugată, raport 2: $Z_2 = -0{,}86 < -0{,}70$: galben
- Demonstrație: $E[L_t I_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] = P(L_t > \mathrm{VaR}_t \mid \mathcal{F}_{t-1})\, E[L_t \mid L_t > \mathrm{VaR}_t, \mathcal{F}_{t-1}] = \alpha\, \mathrm{ES}_t$; $T\alpha$ este constant, deci $E[Z_2] = 0$ (Z_1 împarte la N_T aleator)
- Interpretare: Z_2 reacționează atît la numărul, cît și la mărimea depășirilor; o singură pierdere mare poate schimba zona

MFM_ch8_sem_partA

Kupiec și ES: verificări independente [Propus]

- **Context**: două cazuri distincte
  - cazul 1: un VaR 1% are 9 excepții în 500 de zile
  - cazul 2: prognoze VaR și ES 2,5% pe 250 de zile, deci $T\alpha = 6{,}25$, cu 6 depășiri ale VaR; rapoartele pierdere/ES sînt 1,10; 0,90; 1,25; 1,05; 0,80; 1,20
- **Cerințe**
  1. Cazul 1: calculați numărul așteptat de excepții, statistica Kupiec și decizia asimptotică la 5%.
  2. Cazul 1: calculați valoarea p exactă unilaterală $P(X \geq 9)$ pentru $X \sim \text{Binomial}(500;\, 0{,}01)$ (prea multe excepții).
  3. Cazul 2: calculați $Z_2 = 1 - \sum_t (I_t L_t / \text{ES}_t)/(T\alpha)$ și comparați-l cu valoarea critică de referință de 5%, $-0{,}70$ pentru $T = 250$ (Acerbi & Szekely (2014)).
  4. Pentru fiecare test, scrieți ipoteza nulă și semnul abaterii.
- **Raportați**: numărul așteptat, LR_{uc}, cele două valori p, suma rapoartelor și Z_2

Înapoi Lista exercițiilor

B1 [Rezolvat]: șase modele VaR pe S&P 500 — Cerință

- **Întrebările**
  - care dintre cele șase proceduri trec testele VaR 1%?
  - care test este decisiv?
- **Date de intrare**
  - Notebook: B1; prognozele S&P 500 (*Standard & Poor's*): L_t și VaR 1% (șase modele); $T = 4\,959$; tabelul: zece zile GARCH-t, septembrie 2008
  - Durate: capetele sînt cenzurate; DQ: constanta, 4 depășiri decalate, VaR_t
- **Cerințe**
  1. Completați coloana I_t din tabel și numărați depășirile.
  2. GARCH-t în 2008 ($T = 253$): x, LR_{uc}, p din χ^2_1 și p Binomial exact bilateral; decizia la 5%.
  3. Pentru cele șase modele, pe întreg eșantionul, calculați x, rata, Kupiec (asimptotic, exact), independența, CC, Weibull b și p de durată, p DQ.
  4. Reprezentați zilele cu depășiri și curbele de supraviețuire ale duratelor.
  5. Interpretați un $p = 0{,}03$ DQ la $T = 250$ prin mărimea simulată a testelor.
- **Raportați**: un rînd de tabel pe model (statisticile cerinței 3), două figuri
- **Interpretare**
  - ce modele trec toate testele?
  - de ce poate fi respins un model cu numărul corect de depășiri?

Data	L_t (%)	VaR_t (%)	I_t
04.09.2008	3,04	2,98	?
05.09.2008	−0,44	3,45	?
08.09.2008	−2,03	3,35	?
09.09.2008	3,47	3,46	?
10.09.2008	−0,61	3,99	?
11.09.2008	−1,37	3,88	?
12.09.2008	−0,21	3,84	?
15.09.2008	4,83	3,72	?
16.09.2008	−1,74	4,68	?
17.09.2008	4,83	4,64	?

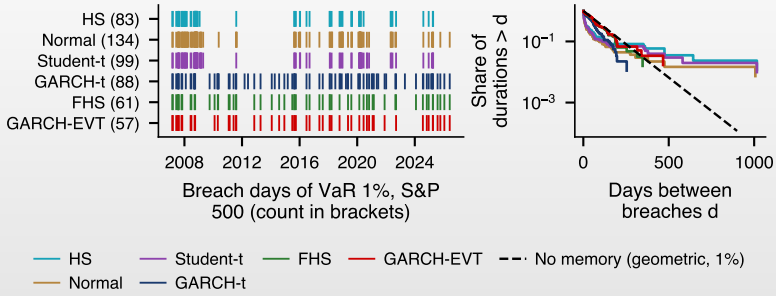
înapoi Lista exercițiilor

B1 [Rezolvat]: Rezolvare (1/4) — un model pas cu pas

Data	L_t	VaR_t	I_t
04.09.2008	3,04	2,98	1
05.09.2008	−0,44	3,45	0
08.09.2008	−2,03	3,35	0
09.09.2008	3,47	3,46	1
10.09.2008	−0,61	3,99	0
11.09.2008	−1,37	3,88	0
12.09.2008	−0,21	3,84	0
15.09.2008	4,83	3,72	1
16.09.2008	−1,74	4,68	0
17.09.2008	4,83	4,64	1

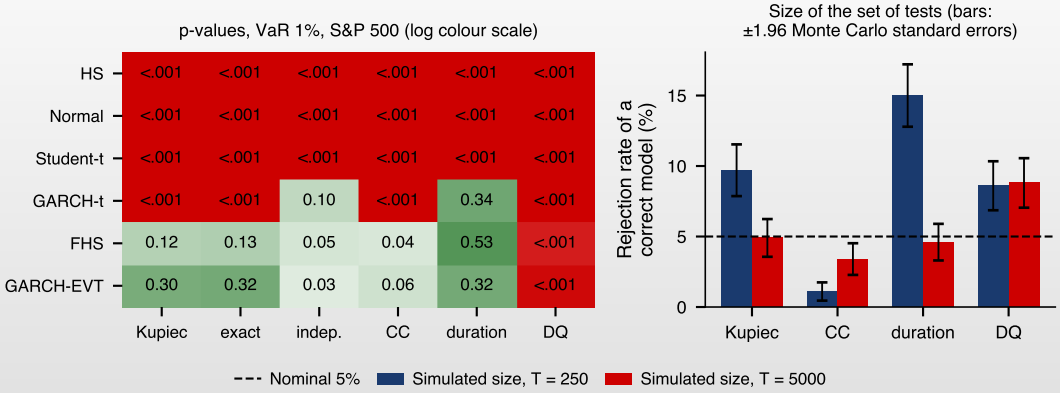
1. $I_t = 1$ cînd $L_t > \mathrm{VaR}_t$: 4 depășiri în 10 zile, față de 0,1 așteptate: o rafală, în timp ce VaR crește doar după fiecare pierdere.
2. 2008: $x = 8$ în $T = 253$, $\hat{\pi} = 3{,}16\%$; $\mathrm{LR}_{uc} = 7{,}60$, $p = 0{,}0058$; p exact bilateral ($2P(X \geq 8)$) $= 0{,}0086$: respins la 5%.
3. Întreg eșantionul: același șir de depășiri intră în toate cele cinci teste; numărul dă ratele, tranzițiile dau independența, distanțele dintre depășiri dau duratele.
4. Cu 4 959 de zile, valorile p Kupiec asimptotice și exacte coincid; într-un an diferă (0,0058 față de 0,0086).

B1 [Rezolvat]: Rezolvare (2/4) — momentul depășirilor



- Graficele sînt în notebook, B1
- Modelele necondiționate (HS, Normal, Student-t): rafale în 2008–2009, 2020 și 2022, apoi ani fără depășiri; Weibull b: HS 0,52, Normal 0,56, Student-t 0,53 (p durată $<$0,001)
- Modelele filtrate: curbe de supraviețuire apropiate de dreapta geometrică; GARCH-t 0,92 ($p = 0{,}344$), GARCH-EVT 0,90 ($p = 0{,}317$)

B1 [Rezolvat]: Rezolvare (3/4) — toate testele și mărimea lor



MFM_ch8_size_power

B1 [Rezolvat]: Rezolvare (4/4) — toate testele și mărimea lor

- Doar GARCH-EVT nu este respins de testele Kupiec, CC și de durată; FHS este respins la limită de CC ($p = 0{,}040$); DQ le respinge pe toate șase (GARCH-EVT $p < 0{,}001$): depășirile sînt previzibile din depășirile trecute și din nivelul VaR
- Mărimea la $T = 250$: POF 9,7%, CC 1,1%, durate 15,0%, DQ 8,6% (eroare standard Monte Carlo circa 0,9 puncte procentuale): un $p = 0{,}03$ DQ într-un an este o dovadă slabă; simulăm valoarea critică
- Interpretare: un model cu numărul corect de depășiri (FHS: 1,23%) poate fi totuși respins din cauza momentului lor; doar modelele filtrate cu o coadă flexibilă trec majoritatea testelor

MFM_ch8_size_power

B2 [Rezolvat]: semnificația superiorității FHS — Cerință

- **Întrebarea**: este FHS semnificativ mai bun decît GARCH-t, HS și GARCH-EVT după scorul FZ0 pe S&P 500?
- **Date de intrare**
  - Scorurile FZ0 zilnice pentru (VaR 2,5%, ES 2,5%) ale celor șase modele pe S&P 500, aliniate pe aceleași 4 959 de zile (Patton, Ziegel & Chen (2019))
  - Diferența de scor $d_t = S_{A,t} - S_{\mathrm{FHS},t}$ (diferență de scoruri, nu de pierderi); Newey–West cu $q = \lfloor 4(T/100)^{2/9} \rfloor = 9$ laguri, $\lfloor \cdot \rfloor$: partea întreagă (Newey & West (1987))
- **Cerințe**
  1. Calculați FZ0 mediu al fiecărui model.
  2. Pentru A = GARCH-t, calculați $\bar{d}$, autocovariațele $\gamma_0, \ldots, \gamma_9$, LRV cu $q = 9$ („Compararea a două prognoze: testul Diebold–Mariano"), $\mathrm{se} = \sqrt{\mathrm{LRV}/T}$, $\mathrm{DM} = \bar{d}/\mathrm{se}$ și p-value-ul (Diebold & Mariano (1995)).
  3. Repetați pentru HS și GARCH-EVT; calculați t naiv (eroarea standard obișnuită) și raportul LRV/γ_0.
  4. Reprezentați d_t cumulat, ACF pentru d_t și intervalele de 95% ale lui $\bar{d}$, naive și HAC.
  5. Opțional: testul Giacomini–White cu $h_{t-1} = (1, d_{t-1})$ (Giacomini & White (2006)).
- **Raportați**: scorurile medii, un calcul DM complet, un tabel DM și o figură
- **Interpretare**
  - ce diferențe sînt semnificative?
  - în ce situații ignorarea autocorelației exagerează semnificația?
- Secțiunea din notebook: B2

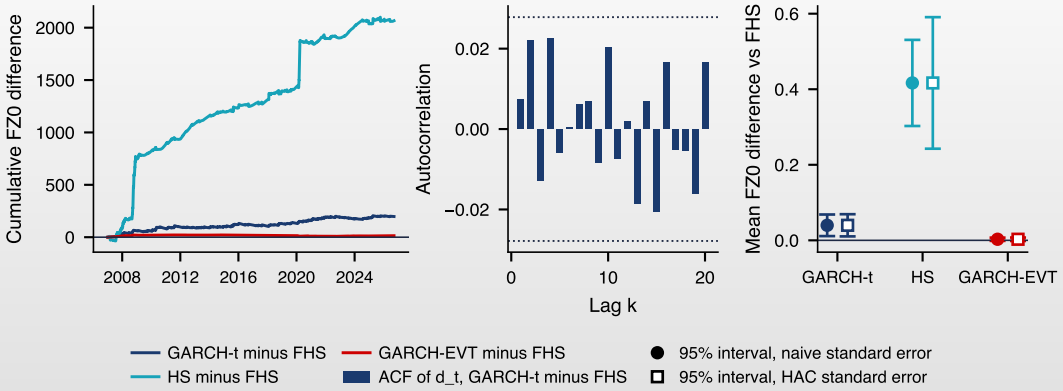
◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

B2 [Rezolvat]: Rezolvare (1/3) — o statistică DM pas cu pas

1. FZ0 mediu: FHS $-3{,}551$, GARCH-EVT $-3{,}548$, GARCH-t $-3{,}511$, HS $-3{,}134$, Student-t $-3{,}036$, Normal $-2{,}958$.
2. GARCH-t minus FHS: $\bar{d} = 0{,}0398$; $\gamma_0 = 1{,}0537$; $\gamma_1, \ldots, \gamma_9$: 0,0077; 0,0231; $-0{,}0135$; 0,0237; $-0{,}0062$; 0,0003; 0,0064; 0,0073; $-0{,}0088$.
3. $2\sum_k (1 - k/10)\gamma_k = 0{,}0595$, deci $\mathrm{LRV} = 1{,}1132$; $\mathrm{se} = \sqrt{1{,}1132/4\,959} = 0{,}0150$ (naiv 0,0146).
4. $\mathrm{DM} = 0{,}0398/0{,}0150 = 2{,}66$, $p = 0{,}008$: GARCH-t este semnificativ mai slab la 5%.

A minus FHS	$\bar{d}$	DM	p	t naiv	LRV/γ_0
GARCH-t	0,0398	2,66	0,008	2,73	1,06
HS	0,4167	4,69	$<$0,001	7,16	2,33
GARCH-EVT	0,0029	1,24	0,214	1,32	1,12

B2 [Rezolvat]: Rezolvare (2/3) — diferențe, ACF și intervale



MFM_ch8_sem_compare

B2 [Rezolvat]: Rezolvare (3/3) — diferențe, ACF și intervale

- Diferențele de scor ale HS cresc constant și în salturi (2008, 2020); LRV-ul lui este de 2,33 ori γ_0, deci t naiv (7,16) exagerează DM HAC (4,69); pentru GARCH-t ACF este mic (lag 1: 0,007) și cele două intervale aproape coincid
- Clasament provizoriu: FHS și GARCH-EVT la egalitate ($p = 0{,}214$); GARCH-t și HS sînt semnificativ mai slabe
- GW (opțional), GARCH-EVT față de FHS: 6,70 ($p = 0{,}035$); egalitatea condiționată este respinsă, dar sursa respingerii cere un test separat

MFM_ch8_sem_compare

O serie reproductibilă pentru verificarea codului

- Generați randamentele cu `rng = np.random.default_rng(8)`, apoi `r = 0.01*rng.standard_t(4,400)/np.sqrt(2)`.
- Setați `r[320] = -0.08`; construiți `P = 100*np.exp(np.r_[0,np.cumsum(r)])`. Cele 400 de randamente dau 401 prețuri; randamentul 320 leagă prețurile cu indicii 320 și 321.
- Pentru date reale folosiți `load_returns("sp500")` din secțiunea de date a notebookului: citește închiderile din 1990 și dă randamente log zecimale. Păstrați aceeași fereastră de 250 de observații în ambele implementări.
- Comparați ambele coduri pe ambele serii. Salvați prognoza și indicatorul excepției pe date; identificați prima prognoză diferită înainte de interpretarea statisticilor.

C1 [Propus]: critica unui răspuns AI — Cerință

- **Întrebările**
  - este corect răspunsul AI de pe slide-ul următor?
  - rămîne valabilă concluzia după corectarea codului?
- **Exemplu de urmat**: A2, A3
- **Date de intrare**
  - Promptul, răspunsul și codul lui, cu linii numerotate (slide-ul următor); `lr_ind(I)` este `christoffersen(I, 0.01)['LR_ind']` din funcțiile notebook-ului
  - Setul de test: 401 prețuri pornind de la 100, randamente logaritmice zilnice $0{,}01 \times t_4/\sqrt{2}$ (seed 8), cu $r = -8\%$ la indicele 320 al vectorului de randamente (numărare de la zero); date reale: S&P 500, închideri zilnice din 1990
- **Cerințe**
  1. Găsiți cele trei erori de fond: în fereastra de prognoză, în distribuția testului, în interpretarea regulilor de reglementare.
  2. Pentru fiecare eroare, precizați cum ați detecta-o: printr-o verificare numerică, prin formulele din Capitolul 8 sau printr-un tabel publicat (BCBS).
  3. Rulați codul din răspuns și codul corectat pe setul de test și pe S&P 500; raportați VaR pentru randamentul cu indicele 320 (de la zero, VaR[70] cînd W=250) și numărul excepțiilor.
  4. Precizați zona, suplimentul și multiplicatorul corecte pentru 7 excepții (A3).
  5. Verificări opționale: fereastra de evaluare a semaforului; $x = 0$ în formula Kupiec.
- **Raportați**: cele trei erori cu detectare și corecție, codul corectat, patru numere de excepții (două coduri pe două serii)
- **Interpretare**: rămîne valabilă concluzia „modelul trebuie retras”?
- Secțiunea din notebook: C1

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

C1 [Propus]: critica unui răspuns AI — răspunsul

- **Promptul**: „Am închiderile zilnice S&P 500 într-o serie pandas `P`. Scrie cod Python pentru un VaR 1% prin simulare istorică pe 250 de zile, numără excepțiile și aplică testele Kupiec și Christoffersen. Ultimele mele 250 de zile au 7 excepții: ce înseamnă?"

```
import numpy as np, scipy.stats as stats
r = np.log(P).diff().dropna().values
W, p = 250, 0.01
VaR = np.array([-np.quantile(r[t-W:t+1], p) for t in range(W, len(r))])
I = (-r[W:] > VaR).astype(int)
T, x = len(I), I.sum(); ph = x / T
LR_uc = -2*((T-x)*np.log(1-p) + x*np.log(p) - (T-x)*np.log(1-ph) - x*np.log(ph))
LR_cc = LR_uc + lr_ind(I)
p_uc, p_cc = stats.chi2.sf(LR_uc, df=1), stats.chi2.sf(LR_cc, df=1)
```

- **Răspunsul**: „Ultimele 250 de zile: $x = 7$, $\mathrm{LR}_{uc} = 5{,}50$, $p = 0{,}019$: acoperirea este respinsă la 5%. În semaforul Basel, 7 excepții înseamnă zona roșie, deci modelul trebuie retras."
- Codul AI rulează de obicei fără mesaj de eroare: greșelile sînt de finanțe și statistică, nu de sintaxă

Ce conține panelul de prognoze

- Apelați `panels, tails = fc(market)`. Pentru fiecare model, `panels[model]` conține coloanele datate `mu`, `scale` și `nu` pentru modelele Student; GARCH-EVT păstrează și `u`, `xi`, `beta`, `pu`.
- `tails["HS"]` și `tails["FHS"]` conțin 25 de pierderi ordonate pe zi prognozată, în unitățile pierderii din acea zi. Parametrii modelelor sînt coloane în panel, nu în acest tablou al cozilor.
- Estimați parametrii Student și GARCH la fiecare 20 de observații pe cele 1 000 precedente; folosiți o medie constantă și limitați inferior gradele de libertate estimate la 2,2. Pragul GPD este percentila 90 a pierderilor standardizate.
- În B7, u este pragul GPD, nu extragerea uniformă U. Generatorul de coadă este valid aici deoarece $U > 0{,}975 > 0{,}90$; același protocol de estimare și coadă se aplică portofoliului C2.

B3 [Rezolvat]: testarea subestimării ES — Cerință (1/2)

- **Întrebarea**: subestimează prognozele ES 2,5% ale GARCH-t, FHS și HS coada S&P 500?
- **Date de intrare**
  - Panelul de prognoze S&P 500: pierderea L_t, VaR 2,5%, ES 2,5%, volatilitatea prognozată σ_t (pentru HS abaterea standard din fereastră) și, pentru HS și FHS, cele mai mari 25 de pierderi din fereastra fiecărei zile; $T = 4\,959$
  - O zi calculată pas cu pas, GARCH-t, 12.03.2020: $L = 9{,}99\%$, $\mathrm{VaR} = 9{,}40\%$, $\mathrm{ES} = 13{,}43\%$, $\sigma = 4{,}81\%$
- **Cerințe**
  1. Pentru ziua dată calculați reziduul de depășire $e_t = (L_t - \mathrm{ES}_t)/\sigma_t$ și contribuția $L_t/(\mathrm{ES}_t\, T\alpha)$ la suma din Z_2.
  2. Rulați Algoritmul 1 (slide-ul următor) pentru cele trei modele: n, $\bar{e}$, t, p bootstrap și p Student-t.
  3. Rulați Algoritmul 2 pentru cele trei modele pe întreg eșantionul și pe ultimele 250 de zile: Z_2, p, valoarea critică simulată de 5%.
  4. Reprezentați cele două distribuții sub H_0 ale lui Z_2 (GARCH-t) și distribuția bootstrap a lui t.
- **Raportați**: un tabel (model, n, $\bar{e}$, t, două valori p, Z_2, p, valoarea critică, ambele eșantioane) și o figură
- **Interpretare**: ce spune o respingere despre procedura comună de prognoză?
- Secțiunea din notebook: B3

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

B3 [Rezolvat]: doi algoritmi — Cerință (2/2)

Algoritmul 1: bootstrap pe reziduuri McNeil–Frey

1. Păstrăm zilele cu $L_t > \mathrm{VaR}_t$; $e_t = (L_t - \mathrm{ES}_t)/\sigma_t$, n reziduuri.
2. $t = \bar{e}/(s_e/\sqrt{n})$ ($\bar{e}$, s_e: media și abaterea standard a reziduurilor), H_1: $E[e_t] > 0$.
3. Centrăm: $\tilde{e}_t = e_t - \bar{e}$ (impunem H_0).
4. De 5 000 de ori: extragem n valori din $\tilde{e}$ cu revenire (seed 0), calculăm t^*.
5. $p =$ ponderea $t^* \geq t$; presupune reziduuri independente.

Algoritmul 2: Z_2 sub prognozele modelului

1. Ținem fixe toate VaR_t, ES_t; Z_2 din date.
2. De 5 000 de ori (seed 11), în fiecare zi: $U_t \sim U(0,1)$; dacă $U_t > 1-\alpha$, $L_t^* = F_t^{-1}(U_t)$, altfel nicio depășire.
3. F_t^{-1}: funcția cuantilă prognozată a lui L_t; GARCH-t $-\mu_t + \sigma_t t_\nu^{-1}(U)\sqrt{(\nu-2)/\nu}$ (t_ν^{-1}: cuantila Student-t, rescalată la dispersia 1); HS, FHS: pierderile din coadă păstrate.
4. $Z_2^* = 1 - \sum_t L_t^* 1\{U_t > 1-\alpha\}/(\mathrm{ES}_t T\alpha)$.
5. $p =$ ponderea $Z_2^* \leq Z_2$; valoarea critică: cuantila de 5% a lui Z_2^*.
6. Presupune U_t independente și distribuțiile prognozate fixate: riscul de estimare și reestimarea GARCH sînt ignorate.

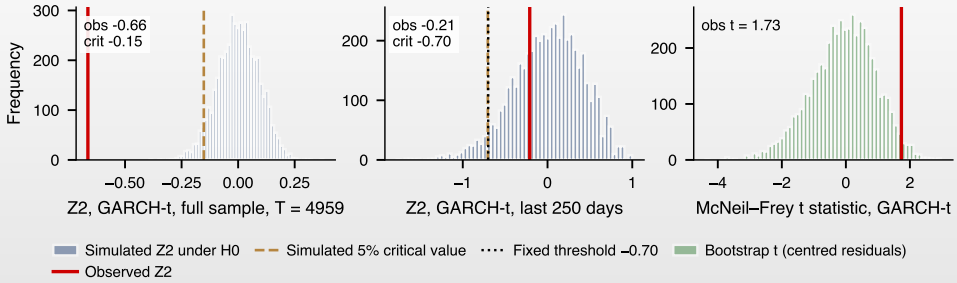
B3 [Rezolvat]: Rezolvare (1/2) — pas cu pas și complet

1. 12.03.2020: $e_t = (9{,}99 - 13{,}43)/4{,}81 = -0{,}71$ (pierderea a fost sub ES prognozat); contribuția $0{,}744/123{,}98 = 0{,}0060$, din 198 de zile cu depășire.

Model	n	$\bar{e}$ / t	p_{boot} / p_t	Z_2 ($T = 4\,959$)	p / crit.	Z_2, p (250 z)
GARCH-t	198	0,100 / 1,73	0,025 / 0,042	−0,664	<0,001 / −0,152	−0,210, 0,289
FHS	128	0,104 / 1,34	0,072 / 0,091	−0,079	0,191 / −0,150	0,142, 0,602
HS	156	0,363 / 2,88	<0,001 / 0,002	−0,405	<0,001 / −0,154	0,723, 0,975

- GARCH-t: $t = 1{,}73$, p bootstrap $= 0{,}025$ față de p Student-$t = 0{,}042$: din cauza asimetriei reziduurilor, aproximarea t este imprecisă
- Întreg eșantionul: GARCH-t ($Z_2 = -0{,}664$) și HS respinse, FHS nu; ultimele 250 de zile: niciun model nu este respins, GARCH-t are doar 6 depășiri
- FHS: $p = 0{,}191$, valoarea critică $-0{,}150$ cu 5 000 de extrageri (seed 11); cu 2 000 de extrageri, $p = 0{,}209$: aceeași decizie

B3 [Rezolvat]: Rezolvare (2/2) — distribuții sub H_0 și limite



- Distribuția lui Z_2 sub H_0 se strînge ca $1/\sqrt{T\alpha}$: valoarea critică de 5% este $-0{,}152$ pe 4 959 de zile și $-0{,}705$ pe 250 de zile (aproape de valoarea de referință $-0{,}70$)
- Interpretare: respingerea GARCH-t este o dovadă împotriva întregii proceduri (filtru de volatilitate, coadă t, estimare); FHS, cu același filtru, nu este respins, ceea ce indică coada drept sursă probabilă, dar nu o dovedește; 5 000 de extrageri dau o eroare standard Monte Carlo de circa 0,3 puncte procentuale la $p = 5\%$

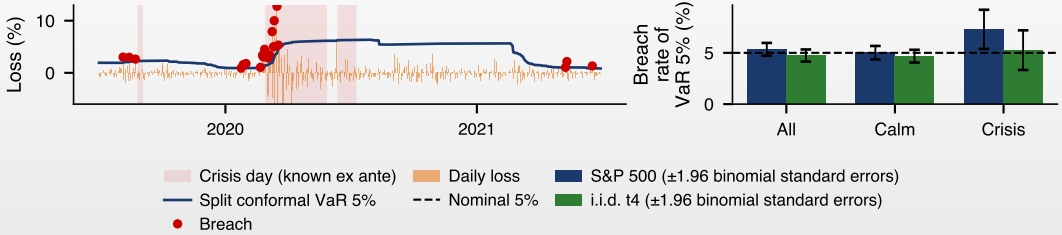
MFM_ch8_sem_es

B4 [Rezolvat]: VaR conformal în perioade calme și de criză — Cerință

- **Întrebarea**: își păstrează VaR conformal split acoperirea în zilele de criză ale S&P 500?
- **Date de intrare**
  - Cronologia pentru ziua de prognoză t (toate ferestrele se încheie la $t-1$): scala $\hat{\sigma}_t$ = abaterea standard a $r_{t-250}, \ldots, r_{t-1}$; scorurile de calibrare $s_{t-250}, \ldots, s_{t-1}$, $s_j = L_j/\hat{\sigma}_j$; indicatorul de criză: abaterea standard a $r_{t-20}, \ldots, r_{t-1}$ peste percentila 90 a valorilor ei din cele 1 000 de zile anterioare
  - VaR conformal split din secțiunea „Instrumente pentru B4: VaR conformal split" cu $n = 250$; evaluare 03.01.2007–18.09.2026 (4 959 de zile); reper: randamente Student-t_4 i.i.d. $\times 1\%$, seed 5, aceeași lungime
- **Cerințe**
  1. Construiți VaR 5% și VaR 1% și șirul depășirilor pe S&P 500.
  2. Completați grila (sursa $\times$ nivel $\times$ toate/calme/criză) cu rate și numere; adăugați p Kupiec (toate zilele) și p de independență Christoffersen.
  3. Repetați pe seria de referință i.i.d.: randamentele sînt schimbabile, dar scorurile standardizate pe fereastră mobilă sînt doar aproximativ schimbabile.
  4. Reprezentați o traiectorie VaR cu zilele de criză marcate și ratele cu intervalele lor binomiale Wald de 95%.
- **Raportați**: grila, două valori p pentru fiecare serie, o figură
- **Interpretare**
  - este respectată garanția marginală pe date reale?
  - ce se schimbă între datele reale și cele schimbabile: acoperirea sau independența?
- Secțiunea din notebook: B4

Înapoi Lista exercițiilor

B4 [Rezolvat]: Rezolvare — VaR conformal în perioade calme și de criză



- S&P 500, VaR 5%: toate 265/4 959 = 5,34% (p Kupiec = 0,272), calme 213/4 246 = 5,02%, criză 52/713 = 7,29%; independența respinsă (p <0,001); VaR 1%: 1,29% în total (p = 0,049), 2,10% în criză
- Reperul i.i.d.: 4,74%, calme 4,68%, criză 5,26% (27/513), independența nerespinsă (p = 0,965); intervalele binomiale ignoră dependența, deci cele pe date reale sînt prea înguste
- Interpretare: media este aproape de 5%, dar gruparea volatilității (*volatility clustering*) încalcă schimbabilitatea, deci depășirile se grupează și acoperirea în criză nu este asigurată

MFM_ch8_sem_conformal

B5 [Propus]: semaforul pentru GARCH-t pe BET — Cerință

- **Întrebarea**: L-ar fi penalizat supraveghetorul pe modelul GARCH-t (VaR 1%) pe BET din 2007?
- **Exemplu de urmat**: A3, B1
- **Date de intrare**
  - Prognozele GARCH-t pentru VaR 1% și VaR 2,5% pe BET; 03.01.2007–18.09.2026 ($T = 4\,937$); prima fereastră completă de 250 de zile se încheie la 21.12.2007: 4 688 de ferestre; zonele: A3
- **Cerințe**
  1. Numărați excepțiile VaR 1% din ultimele 250 de zile; dați zona, $P(X \leq x)$ și multiplicatorul FRTB.
  2. Pentru fiecare fereastră, determinați numărul excepțiilor și zona; raportați ponderea fiecărei zone și fereastra cea mai nefavorabilă, cu data ei.
  3. Numărați excepțiile VaR 2,5% din ultimele 250 de zile și comparați cu limita FRTB de 30 de excepții a unui birou de tranzacționare.
  4. Calculați rata de depășire și p Kupiec pe întreg eșantionul.
- **Raportați**: un tabel cu numerele excepțiilor, zonele, ponderile lor și valorile p ale testelor, plus data ferestrei celei mai nefavorabile; reproduceți comparația FRTB indicată mai jos
- **Interpretare**: este timpul petrecut în zona galbenă o dovadă împotriva modelului? (ferestre suprapuse: ponderi descriptive, nu un test)
- Reper public de replicat: comparația FRTB
- Secțiunea din notebook: B5

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

Verificarea finală și proiectul de echipă

Verificare finală

- Ce model ați alege provizoriu pentru S&P 500?
- Pe baza căror dovezi?
- Care este principala limită a acestor dovezi?

Proiectul de echipă evaluat (unul)

- C2: o recomandare provizorie VaR/ES pentru un portofoliu de tranzacționare românesc (pachetul de extindere 6), ca folder Quantlet în depozitul (*repository*) echipei
- Criterii de evaluare: date și momente corecte (fără informație din viitor), setul minim de teste, tabelul dovezilor, recomandarea cu limita ei
- Raportați utilizarea efectivă a AI în `AI_USE.md` și fiecare eroare găsită în `AI_ERRORS.md`: cerere, răspuns, eroare, cum a fost găsită, corecție; fără un număr minim de erori
- Alegeți un singur proiect evaluat: C2 sau C3. Celelalte exerciții de extindere sînt opționale.

Pachete de extindere: conținut și cerințe prealabile

Pachet	Exerciții	Cerințe prealabile
1. Teoria testelor	A1 extins [Rezolvat], A5, A6	A1, A2
2. Scoruri și teoria ES	A7 [Rezolvat], A8, A9	A4, B2
3. VaR conformal	A10 [Rezolvat], B6	B4
4. Alte piețe	B7, B8	B2, B3
5. Riscul de estimare	B9	B1; Capitolul 8, slide-ul „Backtesting sub riscul de estimare”
6. Proiecte	C2 sau C3 (alegeți unul)	B1–B3, B5, B7; C3 cere și R

- Fiecare exercițiu are secțiunea lui în notebook (C3 se rezolvă în R; secțiunea lui din notebook dă doar cadrul); rezolvați-le în ordine în cadrul pachetului
- C2 și C3 pot fi puncte de plecare pentru proiectul de echipă

A1 extins [Rezolvat]: distribuția asimptotică χ^2_1 a lui LR_{uc} — Cerință

- **Întrebarea**: cum se obține limita χ^2_1 și necentralitatea λ din A1?
- **Date de intrare**: depășiri Bernoulli(π) i.i.d., $\ell(\pi) = x \ln \pi + (T - x) \ln(1 - \pi)$, $\mathrm{LR}_{uc} = 2[\ell(\hat{\pi}) - \ell(\alpha)]$; alternative locale $\pi_T = \alpha + h/\sqrt{T}$ cu h fix
- **Cerințe**
  1. Dezvoltați $\ell(\alpha)$ până la ordinul doi în jurul lui $\hat{\pi}$ și arătați $\mathrm{LR}_{uc} = T(\hat{\pi} - \alpha)^2/(\alpha(1 - \alpha)) + o_p(1)$ sub H_0.
  2. Folosiți teorema limită centrală (CLT: $\sqrt{T}(\hat{\pi} - \alpha)$ este aproximativ Normal) pentru a conclude $\mathrm{LR}_{uc} \xrightarrow{d} \chi^2_1$.
  3. Sub π_T, deduceți limita $\chi^2_1(\lambda)$ și dați λ.
- **Raportați**: cei trei pași
- **Interpretare**: de ce este aproximarea locală imprecisă la $\alpha T = 2{,}5$?
- Secțiunea din notebook: A1

Înapoi Lista exercițiilor

A1 extins [Rezolvat]: Rezolvare — distribuția asimptotică χ^2_1 a lui LR_{uc}

1. $\ell'(\hat\pi)=0$ în estimatorul de verosimilitate maximă; $\ell(\alpha)=\ell(\hat\pi)+\frac{1}{2}\ell''(\bar\pi)(\alpha-\hat\pi)^2$ cu $\bar\pi$ între α și $\hat\pi$, iar $-\ell''(\bar\pi)/T=\frac{\hat\pi}{\bar\pi^2}+\frac{1-\hat\pi}{(1-\bar\pi)^2}\xrightarrow{p}\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}$.
2. Deci $\mathrm{LR}_{uc}=Z_T^2+o_p(1)$, $Z_T=\sqrt{T}(\hat\pi-\alpha)/\sqrt{\alpha(1-\alpha)}\xrightarrow{d}N(0,1)$ din CLT: χ^2_1, valoarea critică 3,84.
3. Sub π_T: $\sqrt{T}(\hat\pi-\alpha)=\sqrt{T}(\hat\pi-\pi_T)+h$, deci $Z_T\xrightarrow{d}N(h/\sqrt{\alpha(1-\alpha)},1)$ și $\mathrm{LR}_{uc}\xrightarrow{d}\chi^2_1(\lambda)$, $\lambda=h^2/(\alpha(1-\alpha))=T(\pi-\alpha)^2/(\alpha(1-\alpha))$.

⊡ Interpretare: dezvoltarea cere multe depășiri; cu 2,5 așteptate, x ia puține valori întregi, deci distribuția sa este puternic discretă, de aici diferența dintre 36% (local) și 24% (exact) din A1

Cum căutăm lungimea necesară a eșantionului?

- Separăm trei probabilități: nivelul cozii prognozate α, frecvența adevărată a depășirilor π și nivelul nominal de semnificație al testului. Pragul 3,84 privește ultima probabilitate.
- Pentru fiecare T candidat, parcurgem $x = 0, \ldots, T$, calculăm statistica raportului de verosimilitate și păstrăm numerele de depășiri care produc respingerea. La capete folosim convenția prin limită $0 \log 0 = 0$, nu o valoare lipsă.
- Folosim aceleași numere de respingere de două ori: însumăm probabilitățile lor sub frecvența nulă pentru mărime și sub frecvența alternativă pentru putere. Nu schimbăm regula între cele două sume.
- Frontiera exprimată în numere de depășiri se schimbă în pași întregi. După primul eșantion care atinge puterea cerută, continuăm pe intervalul solicitat; prima trecere poate să nu fie definitivă.

A5 [Propus]: numărul de zile necesar pentru detectarea unei rate duble — Cerință

- **Întrebarea**: cîte zile sînt necesare pentru a detecta, cu putere de 80%, un VaR 2,5% a cărui rată reală de depășire este 5%?
- **Exemplu de urmat**: A1
- **Date de intrare**: $\alpha = 0{,}025$, $\pi = 0{,}05$, regula „respingem dacă $\mathrm{LR}_{uc} > 3{,}84$"; limita FRTB de 30 de excepții ale VaR 2,5% pentru un birou de tranzacționare este o regulă de reglementare separată
- **Cerințe**
  1. La $T = 250$, calculați λ, puterea locală, regiunea exactă de acceptare, puterea exactă și mărimea efectivă.
  2. Găsiți λ^* cu $P(\chi^2_1(\lambda^*) > 3{,}84) = 0{,}80$ prin căutarea rădăcinii și rezolvați pentru T asimptotic.
  3. Pentru $T = 100, 101, \ldots, 700$ (pasul 1), determinați mulțimea de acceptare $\{x : \mathrm{LR}_{uc}(x) \leq 3{,}84\}$, puterea $= 1 - P(X \in \text{mulțime} \mid \pi)$; reprezentați puterea în funcție de T și găsiți primul T cu putere $\geq 80\%$.
  4. Verificați fiecare T întreg pînă la 1 500; explicați eventualele oscilații în dinți de fierăstrău ale puterii exacte.
  5. Calculați $P(X > 30)$ pentru $X \sim \text{Binomială}(250; 0{,}05)$.
- **Raportați**: λ, puterile, mărimea, λ^*, cele două valori ale lui T, $P(X > 30)$, o figură
- **Interpretare**: ce detectează limita biroului de tranzacționare?
- Secțiunea din notebook: A5

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

A6 [Propus]: LR față de DQ la $x = 7$ — Cerință

- **Întrebarea**: de ce dau LR_{uc} și statistica DQ doar cu constantă cifre diferite pentru aceleași depășiri?
- **Exemplu de urmat**: A2
- **Date de intrare**
  - Hit: vectorul $T \times 1$ cu $I_t - \alpha$; X: regresorii $T \times k$ cunoscuți la $t-1$, de rang complet; $\mathrm{Hit} = X\beta + u$; $Q = \operatorname{plim} X'X/T$ (plim: limita în probabilitate cînd $T \to \infty$) pozitiv definită (Engle & Manganelli (2004))
  - Exemplu cu un lag: rîndurile $X_t = (1, \mathrm{Hit}_{t-\mathbf{1}})$, deci $k = 2$
- **Cerințe**
  1. Arătați $E[\mathrm{Hit}_t \mid \mathcal{F}_{t-\mathbf{1}}] = 0$ și $\mathrm{Var}(\mathrm{Hit}_t \mid \mathcal{F}_{t-\mathbf{1}}) = \alpha(1-\alpha)$ sub H_0.
  2. Cu $X_t = 1$ arătați $\mathrm{DQ} = T(\hat{\pi} - \alpha)^{\mathbf{2}}/(\alpha(1-\alpha))$; calculați-l pentru $T = 250$, $x = 7$ și comparați cu $\mathrm{LR}_{uc} = 5{,}50$ ($p = 0{,}019$).
  3. Calculați ambele statistici pentru $x = 0, \ldots, 15$ și mulțimile lor de acceptare la 3,84.
  4. Avansat: deduceți $\mathrm{DQ} \xrightarrow{d} \chi^{\mathbf{2}}_k$ din teorema limită centrală pentru diferențe de martingal aplicată lui $T^{-\mathbf{1}/\mathbf{2}} X' \mathrm{Hit}$.
- **Raportați**: cele două statistici și valorile p, mulțimile de acceptare, derivarea
- **Interpretare**: diferă cele două teste în decizie sau doar în cifre?
- Secțiunea din notebook: A6

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

A7 [Rezolvat]: consistența pierderilor pinball și FZ0 — Cerință

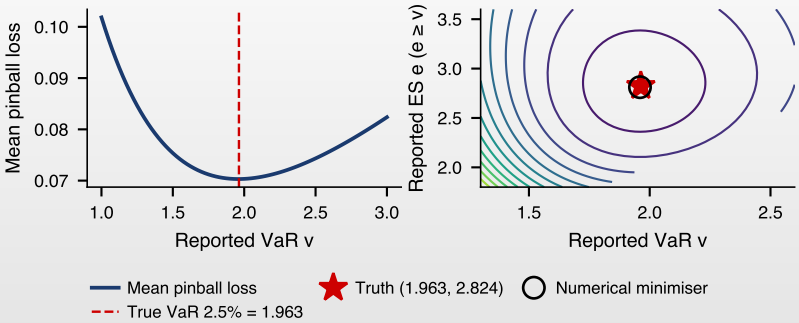
- **Întrebările**
  - de ce minimizează valorile adevărate scorurile pinball și FZ0 așteptate?
  - confirmă o simulare acest lucru?
- **Date de intrare**
  - L cu $E|L| < \infty$, densitate $f > 0$ lîngă VaR_α, $\mathrm{ES}_\alpha > 0$; prognoze $e \geq v > 0$; $\alpha = 2{,}5\%$
  - Simulare: $L = \sqrt{(4-2)/4}\, Z$, $Z \sim t_4$, 10^6 extrageri, seed 5; valorile adevărate $\mathrm{VaR} = 1{,}963$, $\mathrm{ES} = 2{,}824$ (formulele t_4 cu dispersie unitară)
- **Cerințe**
  1. Derivați $E[(1\{L > v\} - \alpha)(L - v)]$ în raport cu v, găsiți zeroul și arătați că este un minim.
  2. Pentru $\mathrm{FZ0}(v, e; L) = \frac{\mathbf{1}\{L>v\}(L-v)}{\alpha e} + \frac{v}{e} + \ln e - 1$ calculați ∂_v și ∂_e ale mediei și arătați că perechea adevărată este unicul punct de minim.
  3. Minimizați pierderile medii pinball și FZ0 pe extragerile simulate și reprezentați curba scorului și contururile FZ0.
- **Raportați**: derivatele, argumentul pentru minim, punctele de minim numerice, o figură
- **Interpretare**: de ce face consistența ca ordonarea după scorul mediu să aibă sens?
- Secțiunea din notebook: A7

înapoi Lista exercițiilor

A7 [Rezolvat]: Rezolvare (1/2) — derivări

1. $\frac{d}{dv} E[(1\{L > v\} - \alpha)(L - v)] = F(v) - (1 - \alpha)$: negativă sub și pozitivă peste VaR_α, zero la $F(v) = 1 - \alpha$; derivata a doua $f(v) > 0$: un minim unic.
2. $\partial_v E[\mathrm{FZ0}] = \frac{1}{e}\left(1 - \frac{P(L>v)}{\alpha}\right)$: același tipar al semnului, zero doar la $v = \mathrm{VaR}_\alpha$, pentru orice e.
3. În acel v, $\partial_e E[\mathrm{FZ0}] = \frac{1}{e^2}\left(e - v - E[(L - v)1\{L > v\}]/\alpha\right) = \frac{1}{e^2}(e - \mathrm{ES}_\alpha)$: negativă pentru $e < \mathrm{ES}_\alpha$, pozitivă peste: funcția obiectiv profilată în e are minimul unic în ES_α.
4. Funcțiile de identificare: $V_1 = \alpha - 1\{L > v\}$, $V_2 = e - v - \frac{1}{\alpha}1\{L > v\}(L - v)$; mediile lor se anulează doar în perechea adevărată (Fissler & Ziegel (2016)).

A7 [Rezolvat]: Rezolvare (2/2) — verificare numerică



- Puncte de minim: pinball $v = 1{,}960$; FZ0 $(v, e) = (1{,}960;\ 2{,}812)$; valorile adevărate (1,963; 2,824): egale în limita erorii de simulare
- Interpretare: un prognozator care cunoaște F minimizează scorul așteptat raportînd valorile adevărate, deci un scor mediu mai mic este o dovadă a unei prognoze mai bune

MFM_ch8_sem_partA

A8 [Propus]: ES singur nu este elicitabil — Cerință

- **Întrebarea**: de ce nu există un scor care depinde doar de ES și recompensează prognozele sincere?
- **Exemplu de urmat**: A7
- **Date de intrare**
  - $T(F)$ este elicitabilă dacă $T(F) = \arg\min_x E_F[S(x, L)]$ cu un punct de minim unic (Gneiting (2011)); δ_c: masa punctuală în c (pierdere c sigură)
  - ES pentru orice distribuție, inclusiv cu atomi: $\mathrm{ES}_\alpha = \frac{1}{\alpha} \int_{1-\alpha}^{1} q_u \, du$, media cuantilelor din coada dreaptă de probabilitate α a pierderii (un atom poate fi împărțit)
- **Cerințe**
  1. Arătați că, dacă T este elicitabilă, orice mulțime de nivel $\{F : T(F) = t\}$ este închisă la mixturi $(1 - \lambda)F_0 + \lambda F_1$.
  2. $F_0 = \delta_1$; F_1: $P(L = 2) = \alpha/2$, $P(L = 0) = 1 - \alpha/2$: calculați ES_α pentru F_0, F_1 și $\frac{1}{2}F_0 + \frac{1}{2}F_1$ din graficul cuantilelor din coadă.
  3. Explicați, conceptual, de ce aceasta nu contrazice elicitabilitatea comună a (VaR, ES).
- **Raportați**: argumentul, trei valori ES, o propoziție
- **Interpretare**: ce implică aceasta pentru ierarhizarea prognozelor ES?
- Secțiunea din notebook: A8

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

A9 [Propus]: momentele depășirii cumulate — Cerință

- **Întrebările**
  - care sînt momentele lui H_t sub H_0?
  - este adecvată valoarea critică Normală la $T = 250$?
- **Exemplu de urmat**: A4
- **Date de intrare**: PIT-urile u_t sînt $U(0,1)$ i.i.d. pentru o prognoză corectă; $H_t = \frac{1}{\alpha}(u_t - (1-\alpha))1\{u_t > 1-\alpha\}$ (Du & Escanciano (2017)): zero în 97,5% dintre zile, crescînd liniar pînă la 1 în coadă; $\alpha = 2{,}5\%$
- **Cerințe**
  1. Reprezentați $H(u)$ pentru $u \in (0{,}9;\ 1)$.
  2. Calculați $E[H]$ și $E[H^2]$ integrînd pe $(1-\alpha, 1)$; deduceți $\mathrm{Var}(H) = \alpha(1/3 - \alpha/4)$.
  3. Verificați ambele momente pe $4 \cdot 10^6$ extrageri uniforme (seed 6).
  4. Calculați pragul Normal unilateral de 5% pentru $\bar{H}$ la $T = 250$; simulați 20 000 de eșantioane de 250 de PIT-uri (seed 12) și comparați cu percentila lor 95.
- **Raportați**: momentele, verificarea, ambele praguri și mărimea efectivă a pragului Normal
- **Interpretare**: de ce conține H_t mai multă informație decît I_t?
- Secțiunea din notebook: A9

Înapoi Lista exercițiilor

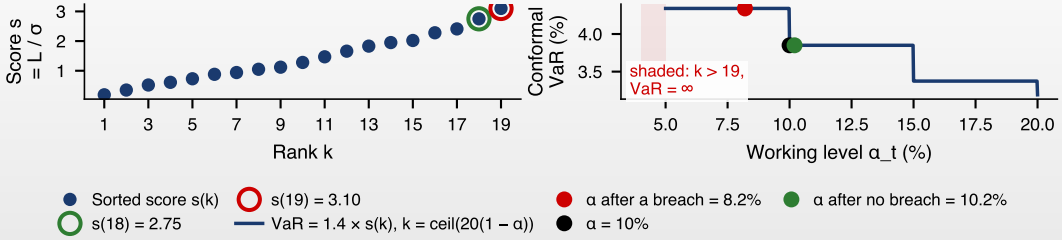
A10 [Rezolvat]: cuantila conformală și un pas ACI — Cerință

- **Întrebarea**: cum reacționează VaR conformal split de 10% la o depășire, sub ACI?
- **Date de intrare**
  - $n = 19$ scoruri de calibrare (ordonate, tabel); $\hat{\sigma} = 1{,}4\%$ pentru mîine; ținta $\alpha = 0{,}10$ (fixă); pasul ACI $\gamma = 0{,}02$, $\alpha_{\mathbf{1}} = 0{,}10$ (Gibbs & Candès (2021))
  - Pentru această ilustrare cu un singur pas, scorurile și $\hat{\sigma}$ sînt ținute fixe; dacă $k > n$, cuantila este $+\infty$
- **Cerințe**
  1. Calculați $k = \lceil (n+1)(1-\alpha) \rceil$ ($\lceil \cdot \rceil$: rotunjire în sus), $s_{(k)}$ (al k-lea cel mai mic scor) și $\mathrm{VaR} = \hat{\sigma} s_{(k)}$.
  2. Calculați $\alpha_{\mathbf{2}} = \alpha_{\mathbf{1}} + \gamma(\alpha - \mathrm{err}_{\mathbf{1}})$ după o depășire și după nicio depășire ($\mathrm{err}_{\mathbf{1}} = 1$ dacă ziua 1 are o depășire, altfel 0).
  3. Recalculați k și VaR pentru ambele valori ale lui $\alpha_{\mathbf{2}}$; sub ce α_t devine VaR infinit?
- **Raportați**: k, trei valori VaR, pragul pentru VaR infinit
- **Interpretare**: cît de gradual modifică ACI VaR-ul?
- Secțiunea din notebook: A10

k	$s_{(k)}$	k	$s_{(k)}$	k	$s_{(k)}$
1	0,19	8	1,05	15	2,02
2	0,35	9	1,12	16	2,28
3	0,52	10	1,28	17	2,41
4	0,61	11	1,47	18	2,75
5	0,73	12	1,66	19	3,10
6	0,88	13	1,83		
7	0,94	14	1,95		

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

A10 [Rezolvat]: Rezolvare — cuantila conformală și un pas ACI



- $k = \lceil 20 \cdot 0{,}9 \rceil = 18$; $s_{(18)} = 2{,}75$; VaR $= 1{,}4 \cdot 2{,}75 = 3{,}85\%$
- După o depășire: $\alpha_2 = 0{,}10 + 0{,}02(0{,}10 - 1) = 0{,}082$, $k = \lceil 18{,}36 \rceil = 19$, VaR $= 1{,}4 \cdot 3{,}10 = 4{,}34\%$
- Nicio depășire: $\alpha_2 = 0{,}102$, $k = \lceil 17{,}96 \rceil = 18$: VaR rămîne neschimbat; pentru $\alpha_t < 1/(n+1) = 5\%$, $k = 20 > n$: VaR $= \infty$
- Interpretare: cu n mic, VaR ACI se modifică în salturi de cîte o statistică de ordine; schimbările mici ale lui α_t sînt invizibile pînă cînd trec de un punct al grilei $j/(n+1)$

MFM_ch8_sem_conformal

B6 [Propus]: VaR conformal pe BET și Bitcoin — Cerință

- **Întrebarea**: corectează ACI acoperirea în criză pe BET și pe Bitcoin sau doar media pe termen lung?
- **Exemplu de urmat**: B4
- **Date de intrare**
  - BET, închideri zilnice din 03.01.2007, și Bitcoin, închideri zilnice (24:00 UTC) din 14.06.2017, pînă la 18.09.2026; VaR 5%: conformal split și ACI pe ambele piețe, GARCH-t doar pe BET (pe Bitcoin prognozele GARCH sînt reținute, Capitolul 8); scorurile, ferestrele și indicatorul de criză ca în B4
  - ACI: $\alpha_1 = 0{,}05$, $\gamma = 0{,}005$, pornit în prima zi de evaluare; un VaR infinit se consideră nedepășit și se raportează separat
- **Cerințe**
  1. Pentru fiecare piață și metodă, raportați numărul și rata depășirilor în toate zilele, în cele calme și în cele de criză.
  2. Raportați numărul zilelor cu VaR ACI infinit.
  3. Calculați pentru fiecare rată din criză intervalul Wald binomial de 95% din B4 (care ignoră dependența) și precizați ce diferențe față de 5% sînt semnificative.
- **Raportați**: un tabel cu rate și numere, numărul VaR infinite, o figură
- **Interpretare**: o comparație a celor trei metode, cu limitele dovezilor, nu un singur cîștigător
- Reper public de replicat: acoperirea în perioade calme și de criză
- Secțiunea din notebook: B6

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

B7 [Propus]: Z_2 prin simulare pe BET și S&P 500 — Cerință

- **Întrebarea**: sînt calibrate prognozele ES 2,5% ale GARCH-t și GARCH-EVT pe BET și pe S&P 500?
- **Exemplu de urmat**: B3
- **Date de intrare**
  - Panelurile de prognoze BET și S&P 500 (ambele din 2007); Algoritmul 2 din B3 cu 5 000 de extrageri, seed 11, prognozele ținute fixe
  - Generatoarele: GARCH-t ca în B3; GARCH-EVT $L^* = -\mu_t + \sigma_t\big(u + \frac{\beta}{\xi}\big[\big(\frac{\mathbf{1}-U}{p_u}\big)^{-\xi} - 1\big]\big)$ cu pragul GPD u, forma ξ, scala β și proporția p_u a pierderilor standardizate peste u, păstrate
- **Cerințe**
  1. Pe întreg eșantionul, construiți un tabel cu un rînd pentru fiecare piață și model (BET și S&P 500 $\times$ GARCH-t și GARCH-EVT): Z_2, p, valoarea critică de 5%, zilele cu depășire.
  2. Repetați pe ultimele 250 de zile.
  3. Reprezentați cele patru distribuții sub H_0 cu Z_2 observat.
- **Raportați**: tabelul cu opt rînduri și o figură
- **Interpretare**: o comparație provizorie, cu limitele ei: de ce se schimbă verdictul între întreg eșantionul și ultimul an?
- Reper public de replicat: tabloul rezultatelor
- Secțiunea din notebook: B7

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

B8 [Propus]: compararea modelelor pe BET și S&P 500 — Cerință

- **Întrebarea**: pot datele separa cele șase modele pe BET și pe S&P 500?
- **Exemplu de urmat**: B2
- **Date de intrare**
  - Scorurile FZ0 zilnice ale celor șase modele pe BET și pe S&P 500; DM cu laguri Newey–West $\lfloor 4(T/100)^{2/9} \rfloor$
  - MCS (Hansen, Lunde & Nason (2011)): statistica T_{max} (cea mai mare diferență medie standardizată de pierdere dintre modelele rămase), bootstrap circular pe blocuri, blocuri de 10 zile, 1 000 de replicări, seed 2, mulțimea de 90%
  - Diagrama Murphy (Ehm, Gneiting, Jordan & Krüger (2016)), scorul elementar mediu pe o grilă de praguri: BET VaR 2,5%, HS față de GARCH-EVT, 240 de praguri de la 1,0% la 7,3%, benzi HAC punctuale cu aceeași regulă automată de laguri ca la DM
- **Cerințe**
  1. Găsiți cel mai mic FZ0 mediu pe fiecare piață și aplicați teste DM exploratorii ale celorlalte modele față de el.
  2. Aplicați MCS; arătați primul pas de eliminare (statistica, valoarea p, modelul eliminat) și enumerați mulțimea de 90%.
  3. Reprezentați diferența Murphy cu benzile ei și precizați dacă curbele se intersectează.
- **Raportați**: un tabel DM/MCS, pașii de eliminare, o figură
- **Interpretare**
  - ce modele rămîn în MCS pe fiecare piață?
  - ce limitează separarea?
- Reper public de replicat: modelele păstrate în MCS
- Secțiunea din notebook: B8

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

Modelul complet din care simulăm

- Randamentele log zilnice sînt zecimale. Parametrii (precizie completă): $\mu = 0{,}0007491951$, $\omega = 1{,}2150511 \times 10^{-6}$, $a = 0{,}10233295$, $b = 0{,}89211334$, $\nu = 6{,}14504545$.
- Inițializăm varianța generatoare la $\omega/(1-a-b)$. Înmulțim inovațiile Student-t cu $\sqrt{(\nu-2)/\nu}$ pentru variață unitară și eliminăm primele 500 de randamente.
- Generăm 400 de traiectorii cu NumPy `default_rng(9)`. Fiecare păstrează 1000 de randamente pentru estimare, apoi 5000 pentru evaluare. Comparăm metodele de prognoză pe aceeași traiectorie.
- După reestimare, inițializăm filtrul variației cu varianța primelor 50 de randamente din eșantionul de estimare (numitor 50). Actualizăm filtrul zilnic, dar păstrăm parametrii estimați în evaluare.

B9 [Propus]: mărimea testului Kupiec sub riscul de estimare — Cerință

- **Întrebarea**: cît de des respinge Kupiec un model GARCH-t corect cînd parametrii lui sînt estimați?
- **Exemplu de urmat**: B1
- **Date de intrare**
  - Procesul generator fixat: GARCH(1,1)-t estimat pe S&P 500 1990–2026 ($a = 0{,}102$, $b = 0{,}892$, $\nu = 6{,}1$); 400 de traiectorii de $R + 5\,000$ de zile, după eliminarea primelor 500 de observații (burn-in), seed 9
  - Schema fixă: o singură estimare pe primele $R = 1000$ de zile (ν cel puțin 2,2), apoi VaR 1% pentru $P = 250$, 1 000, 5 000 de zile; pe aceeași traiectorie și VaR cu parametrii adevărați
  - O traiectorie cu $\hat{a} + \hat{b}$ la cel mult 10^{-8} de 1 sau cu estimare eșuată nu are prognoză estimată și este exclusă
- **Cerințe**
  1. Numărați traiectoriile cu estimat admisibil; pe ele, înregistrați respingerea Kupiec la 5% pentru prognozele estimate și adevărate, pereche pe fiecare traiectorie.
  2. Raportați și rata cu parametrii adevărați pe toate traiectoriile: o schimbă selecția?
  3. Dați fiecărei rate $\hat{p}$ eroarea standard Monte Carlo $\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}$, n: traiectoriile folosite.
  4. Comparați abaterea standard a ratei de depășire între traiectorii cu $\sqrt{\alpha(1-\alpha)/P}$; reprezentați ratele în funcție de P/R.
  5. Extindere: calibrare bootstrap: simulăm sub nula estimată, reestimăm pe fiecare replicare, folosim percentila 95 a lui LR_{uc} ca valoare critică.
- **Raportați**: un tabel (P, două rate cu erori standard, două abateri standard) și o figură
- **Interpretare**: cum crește distorsiunea cu P/R (Escanciano & Olmo (2010))?
- Reper public de replicat: riscul estimării cu fereastră fixă
- Secțiunea din notebook: B9

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

C2 [Propus]: un model provizoriu pentru un portofoliu românesc — Cerință (1/2)

- **Întrebarea**: ce model VaR/ES ați recomanda provizoriu pentru un portofoliu în lei, jumătate în BET și jumătate în euro?
- **Date de intrare**
  - Închiderile zilnice BET și cursul de referință BNR EUR/RON; aliniem **prețurile** pe zilele comune de tranzacționare, apoi randamente simple, apoi randamentul log al portofoliului $r_t^p = \ln(1 + \frac{1}{2} R_t^{BET} + \frac{1}{2} R_t^{EUR})$ (R: randamente simple), reechilibrare zilnică, fără costuri
  - Cele șase modele din Capitolul 8, fereastră de 1 000 de zile; evaluare din 09.07.2009 (după 2008: criza din 2008 intră în ferestrele de estimare, dar este în afara eșantionului de evaluare) pînă la 18.09.2026
- **Cerințe**
  1. Construiți portofoliul și reprezentați pierderile lui cu VaR 1% al HS, FHS și GARCH-EVT.
  2. Aplicați setul minim de teste (slide-ul următor) pentru toate cele șase modele.
- Secțiunea din notebook: C2

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

C2 [Propus]: dovezi și recomandare — Cerință (2/2)

- **Întrebările**
  - ce susțin dovezile?
  - ce nu susțin?
- **Exemplu de urmat**: B1–B3, B5, B7
- **Date de intrare**: setul minim de teste: frecvența (Kupiec, CC), momentul (durate sau DQ), ES (Z_2 prin simulare), comparația (FZ0, DM, MCS de 90%), reglementarea (fereastra cea mai nefavorabilă și ultima fereastră de 250 de zile, limitele birourilor)
- **Cerințe**
  1. Completați tabelul dovezilor: model × rată, p_{cc}, p_{dur}, Z_2 / p, fereastra cea mai nefavorabilă, ultima fereastră (VaR 1% / VaR 2,5%), FZ0 / p MCS.
  2. Pentru fiecare test raportați mărimea simulată la $T = 250$ (B1); pentru testul frecvenței calculați puterea la rata 2α, ca în A1. Discutați rata alarmelor false a ansamblului; nivelurile individuale de 5% nu dau un nivel global de 5%.
  3. Scrieți o recomandare provizorie cu un model alternativ și enumerați ce ar mai cere aprobarea FRTB (backtesting pe profitul și pierderea birourilor, P&L; atribuirea P&L).
- **Raportați**: un folder Quantlet și un slide: figura, tabelul dovezilor, recomandarea, principala limită
- **Interpretare**: ar rămîne valabilă alegerea într-un an ca 2008 sau 2020?
- Secțiunea din notebook: C2

C3: modelul simulat EGARCH

- Folosim modelul GARCH exponențial (EGARCH) cu parametrii din Bayer–Dimitriadis, Ec. (2.1): $Y_t = \sigma_t z_t$, cu media condiționată zero.
- $\log \sigma_t^2 = -0{,}0012 - 0{,}161 z_{t-1} + 0{,}136(|z_{t-1}| - \mathbb{E}|z|) + 0{,}978 \log \sigma_{t-1}^2$.
- Distribuția `std` din `rugarch` este Student-t cu 7,39 grade de libertate, scalată la variață unitară: $z = \sqrt{(7{,}39-2)/7{,}39}\, t_{7{,}39}$.
- Urmați funcțiile de simulare ale autorilor: `ugarchpath`, cu `n.start=100` și inițializarea implicită; păstrați coeficienții dați, fără reestimare.
- Setați `n.sim=750`, separat de `n.start=100`; eliminați primele 500 de observații returnate și evaluați cele $n = 250$ rămase. Folosiți seed-urile $1, \ldots, 1000$ pentru cele 1000 de traiectorii cerute aici.
- Pentru mărimea testului, calculați VaR și ES din distribuția condiționată adevărată la fiecare dată. Raportați versiunea pachetului și numărul de estimări eșuate; un eșec de estimare nu este o nerespingere.

C3 [Propus]: testarea ES doar din prognozele ES — Cerință (1/2)

- **Întrebarea**: coincid testele ES prin regresie din Bayer & Dimitriadis (2022) cu Z_2 și McNeil–Frey pe prognozele din Capitolul 8?
- **Date de intrare**
  - Prognozele ES 2,5% disponibile: șase modele pe S&P 500 și BET; HS, Normal și Student-t pe Bitcoin și EUR/RON (18 serii; prognozele GARCH pe Bitcoin și EUR/RON sînt reținute); convenția randamentelor din lucrare: $r_t = -L_t$, $\hat{e}_t = -\widehat{\mathrm{ES}}_t < 0$
  - R (4.x) cu pachetul autorilor: `esback::esr_backtest(r, e, alpha = 0.025, version = v)`; $v = 1$: testul ES prin regresie (Expected Shortfall Regression, ESR) strict (bilateral), $v = 3$: ESR cu termen liber (unilateral, H_0: $\gamma_1 \geq 0$, γ_1: termenul liber al lui $r_t - \hat{e}_t$, negativ cînd ES este subestimat); covarianța robustă la specificarea greșită (implicită)
- **Cerințe**
  1. Rezolvați întîi un caz: S&P 500, GARCH-t: afișați coeficienții, erorile lor standard, statistica și valoarea p pentru ambele versiuni.
  2. Aplicați ambele versiuni celor 18 serii și desenați o hartă termică piață × model a valorilor p.
  3. Comparați deciziile la 5% cu Z_2 și McNeil–Frey (Capitolul 8, secțiunea „Backtesting pentru Expected Shortfall").
- Secțiunea din notebook: C3

◂ Înapoi ▸ Lista exercițiilor

C3 [Propus]: blocuri și mărime — Cerință (2/2)

- **Întrebările**
  - cum se comportă testele pe blocuri de un an?
  - care este mărimea lor la $T = 250$?
- **Exemplu de urmat**: B3
- **Date de intrare**: blocuri S&P 500 de 250 de zile, fără suprapunere, de la prima zi de evaluare (se renunță la ultimul bloc incomplet); procesul EGARCH(1,1)-t din Ec. 2.1 a lucrării, 1 000 de traiectorii, seed-urile 1–1 000
- **Cerințe**
  1. Raportați ponderea blocurilor în care este respins fiecare model și numărul estimărilor eșuate (excluse din pondere).
  2. Simulați 1 000 de traiectorii de 250 de zile, testați ES 2,5% adevărat cu ESR cu termen liber, bilateral și unilateral, și raportați ratele de respingere cu erorile lor standard Monte Carlo.
  3. Comparați rata bilaterală cu 0,04 din Tabelul 1 (covarianța robustă) și rata unilaterală cu 5% nominal (Tabelul 2 o raportează doar la $T = 2\,500$).
- **Raportați**: un folder Quantlet și două slide-uri: harta deciziilor cu Z_2 și McNeil–Frey și ponderile pe blocuri cu verificarea mărimii
- **Interpretare**
  - cînd ESR și Z_2 nu concordă, căruia i-ați da crezare ca supraveghetor care primește doar prognoze ES?
  - de ce i-ați da crezare?

Acronime folosite în acest material (1/2)

- **ACF**: AutoCorrelation Function — *funcția de autocorelație*
- **ACI**: Adaptive Conformal Inference — *inferență conformală adaptivă*
- **AI**: Artificial Intelligence — *inteligență artificială*
- **AR**: AutoRegressive (model) — *model autoregresiv*
- **BCBS**: Basel Committee on Banking Supervision — *Comitetul de la Basel pentru Supraveghere Bancară*
- **BET**: Bucharest Exchange Trading (index) — *indicele de referință al Bursei de Valori București*
- **BNR**: Banca Națională a României
- **BVB**: Bursa de Valori București
- **CLT**: Central Limit Theorem — *teorema limită centrală*
- **DM**: Diebold–Mariano (test) — *testul Diebold–Mariano de comparare a prognozelor*
- **DQ**: Dynamic Quantile (test) — *testul cuantilei dinamice*
- **EGARCH**: Exponential GARCH — *GARCH exponențial*
- **ES**: Expected Shortfall — *pierderea așteptată în coadă*
- **ESR**: Expected Shortfall Regression (backtest) — *testul ES prin regresie*
- **EVT**: Extreme Value Theory — *teoria valorilor extreme*
- **FHS**: Filtered Historical Simulation — *simulare istorică filtrată*
- **FRTB**: Fundamental Review of the Trading Book — *revizuirea fundamentală a portofoliului de tranzacționare*
- **FZ0**: Fissler–Ziegel loss with zero-homogeneous score differences — *funcția de pierdere Fissler–Ziegel cu diferențe de scor omogene de grad zero*

Acronime folosite în acest material (2/2)

- **GARCH**: Generalised AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity — *heteroscedasticitate condiționată autoregresivă generalizată*
- **GARCH-EVT**: GARCH filter combined with Extreme Value Theory for the tail — *filtru GARCH combinat cu teoria valorilor extreme pentru coadă*
- **GJR**: Glosten–Jagannathan–Runkle (asymmetric GARCH) — *GARCH asimetric Glosten–Jagannathan–Runkle*
- **GPD**: Generalised Pareto Distribution — *distribuția Pareto generalizată*
- **GW**: Giacomini–White (test) — *testul Giacomini–White*
- **HAC**: Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent (standard errors) — *erori standard robuste la heteroscedasticitate și autocorelație*
- **HS**: Historical Simulation — *simulare istorică*
- **LR**: Likelihood Ratio (test) — *testul raportului de verosimilitate*
- **LRV**: Long-Run Variance — *dispersia pe termen lung*
- **MCS**: Model Confidence Set — *mulțimea de încredere a modelelor*
- **MLE**: Maximum Likelihood Estimation — *estimarea prin metoda verosimilității maxime*
- **OLS**: Ordinary Least Squares — *metoda celor mai mici pătrate*
- **PIT**: Probability Integral Transform — *transformarea integrală de probabilitate*
- **POF**: Proportion Of Failures (test) — *testul proporției de depășiri*
- **SUA**: Statele Unite ale Americii
- **US**: United States — *Statele Unite ale Americii*
- **UTC**: Coordinated Universal Time — *timpul universal coordonat*

Bibliografie (1/4)

- Acerbi, C., Szekely, B. (2014). Backtesting expected shortfall. MSCI Inc., December 2014.
- Basel Committee on Banking Supervision (1996). Supervisory framework for the use of "backtesting" in conjunction with the internal models approach to market risk capital requirements. Bank for International Settlements.
- Basel Committee on Banking Supervision (2019). Minimum capital requirements for market risk (rev. February 2019). Bank for International Settlements.
- Bayer, S., Dimitriadis, T. (2022). Regression-based expected shortfall backtesting. *Journal of Financial Econometrics*, 20(3), 437–471.
- Christoffersen, P.F. (1998). Evaluating interval forecasts. *International Economic Review*, 39(4), 841–862.
- Christoffersen, P., Pelletier, D. (2004). Backtesting value-at-risk: a duration-based approach. *Journal of Financial Econometrics*, 2(1), 84–108.

Bibliografie (2/4)

- Diebold, F.X., Mariano, R.S. (1995). Comparing predictive accuracy. *Journal of Business & Economic Statistics*, 13(3), 253–263.
- Du, Z., Escanciano, J.C. (2017). Backtesting expected shortfall: accounting for tail risk. *Management Science*, 63(4), 940–958.
- Ehm, W., Gneiting, T., Jordan, A., Krüger, F. (2016). Of quantiles and expectiles: consistent scoring functions, Choquet representations and forecast rankings. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 78(3), 505–562.
- Engle, R.F., Manganelli, S. (2004). CAViaR: conditional autoregressive value at risk by regression quantiles. *Journal of Business & Economic Statistics*, 22(4), 367–381.
- Escanciano, J.C., Olmo, J. (2010). Backtesting parametric value-at-risk with estimation risk. *Journal of Business & Economic Statistics*, 28(1), 36–51.
- Fissler, T., Ziegel, J.F. (2016). Higher order elicitability and Osband's principle. *Annals of Statistics*, 44(4).

Bibliografie (3/4)

- Franke, J., Härdle, W.K., Hafner, C.M. (2019). Statistics of Financial Markets: An Introduction, 5th ed. Springer.
- Giacomini, R., White, H. (2006). Tests of conditional predictive ability. *Econometrica*, 74(6), 1545–1578.
- Gibbs, I., Candès, E. (2021). Adaptive conformal inference under distribution shift. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 34; arXiv:2106.00170.
- Gneiting, T. (2011). Making and evaluating point forecasts. *Journal of the American Statistical Association*, 106(494), 746–762.
- Hansen, P.R., Lunde, A., Nason, J.M. (2011). The model confidence set. *Econometrica*, 79(2), 453–497.
- Kupiec, P.H. (1995). Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. *Journal of Derivatives*, 3(2), 73–84.

Bibliografie (4/4)

- McNeil, A.J., Frey, R. (2000). Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach. *Journal of Empirical Finance*, 7(3–4), 271–300.
- Newey, W.K., West, K.D. (1987). A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix. *Econometrica*, 55(3), 703–708.
- Patton, A.J., Ziegel, J.F., Chen, R. (2019). Dynamic semiparametric models for expected shortfall (and value-at-risk). *Journal of Econometrics*, 211(2), 388–413.
- Pele, D.T., Mazurencu-Marinescu-Pele, M. (2026). Finite-sample precision limits for expected shortfall forecast comparisons. *Mathematics*, 14(13), 2316.