Statistica Pieței Financiare

Capitolul 3: Distribuții cu cozi grele și teoria valorilor extreme

Daniel Traian PELE
Antoaneta Amza

Academia de Studii Economice din București
IDA Institute Digital Assets
Blockchain Research Center
AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance
Academia Română, Institutul de Prognoză Economică
MSCA Digital Finance

Obiective de învățare

La sfârșitul acestui curs, veți fi capabili să:

1. **Explicați** rolul distribuțiilor asimetrice (skew-t, GED) în modelarea financiară
2. **Interpretați** parametrii distribuțiilor α-stabile și implicațiile lor
3. **Aplicați** Teorema Limită Centrală Generalizată și distribuțiile stabile
4. **Utilizați** Teoria Valorilor Extreme (GEV, GPD, metoda POT)
5. **Calculați** VaR și ES bazate pe EVT

Cuprins

- Distribuții asimetrice
- Distribuții stabile (α-stabile)
- Teoria Valorilor Extreme (EVT)

De ce contează asimetria

- Asimetrie negativă în randamentele acțiunilor: riscul descendent este mai mare decât potențialul ascendent
- **Asimetria** măsoară lipsa de simetrie: $S = \mathbb{E}[(X-\mu)^3]/\sigma^3$
- Distribuțiile simetrice (normală, Student-t) atribuie probabilitate egală cozii stângi și drepte
- Dar empiric: coada stângă a randamentelor acțiunilor este **mai grea** decât cea dreaptă
- Avem nevoie de distribuții care pot distinge comportamentul cozii stângi de cel al cozii drepte

Implicație pentru risc

- Ignorarea asimetriei duce la subestimarea **riscului descendent**
- Un model simetric cu kurtosis corectă alocă totuși greșit probabilitatea între cele două cozi

Asimetria în randamentele financiare

Clasă de active	Asimetrie tipică	Implicație
Indici de acțiuni	$-0{,}1$ la $-0{,}5$	Coada stângă mai grea
Acțiuni individuale	$-0{,}3$ la $-1{,}0$	Risc mare de prăbușire
FX majore	≈ 0	Aproximativ simetrică
Mărfuri	Mixt	Depinde de șocurile de ofertă
Obligațiuni	Ușor pozitivă	Coada dreaptă (salturi de randament)

- Asimetria afectează VaR 1%: o distribuție asimetrică la stânga are o cuantilă stângă mai extremă decât o distribuție simetrică cu aceeași variență

Distribuția Student-t asimetrică (Hansen)

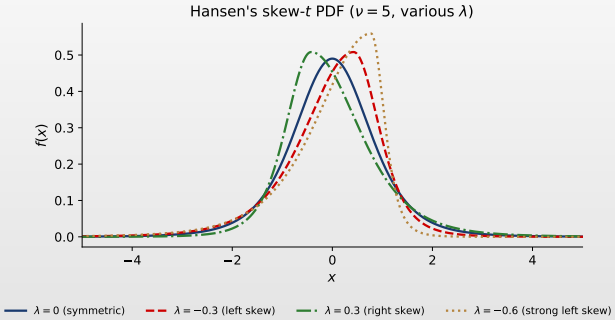
Definiție 1 (Student-t asimetrică Hansen (Hansen, 1994))

$$f(x;\nu,\lambda) = \begin{cases} bc\left(1+\frac{1}{\nu-2}\left(\frac{bx+a}{1-\lambda}\right)^2\right)^{-(\nu+1)/2} & x < -a/b \\ bc\left(1+\frac{1}{\nu-2}\left(\frac{bx+a}{1+\lambda}\right)^2\right)^{-(\nu+1)/2} & x \geq -a/b \end{cases}$$

unde $\lambda \in (-1,1)$ este parametrul de asimetrie, $a = 4\lambda c\frac{\nu-2}{\nu-1}$, $b^2 = 1+3\lambda^2-a^2$, $c = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{\pi(\nu-2)}\,\Gamma(\nu/2)}$.

- $\lambda = 0$: Student-t simetrică; $\lambda < 0$: coada stângă mai grea
- Comportament asimptotic: coada stângă $\sim |x|^{-\nu-1}(1-\lambda)^{\nu+1}$, coada dreaptă $\sim x^{-\nu-1}(1+\lambda)^{\nu+1}$
- $\lambda < 0 \Rightarrow$ coada stângă mai grea (risc de pierdere mai mare)
- Utilizată frecvent ca distribuție a inovațiilor GARCH

Densitățile skew-t — Efectul parametrului λ



- $\lambda < 0$: coada **stângă** mai grea (tipic pentru acțiuni)
- $\lambda > 0$: coada **dreaptă** mai grea
- Cu cât $|\lambda|$ este mai mare, cu atât asimetria este mai pronunțată

Distribuția erorilor generalizate (GED)

Definiție 2 (GED — forma standardizată)

$$f(x;\nu) = \frac{\nu}{2\lambda\,\Gamma(1/\nu)} \exp\left(-\left|\frac{x}{\lambda}\right|^{\nu}\right), \quad \nu > 0,$$

unde $\lambda = \sqrt{2^{-2/\nu}\,\Gamma(1/\nu)\,/\,\Gamma(3/\nu)}$ asigură $\mathrm{Var}(X) = 1$.

- $\nu = 2$: distribuția normală; $\nu = 1$: Laplace (exponențială dublă)
- $\nu < 2$: cozi mai groase decât distribuția normală; $\nu > 2$: cozi mai subțiri
- Controlează grosimea cozilor printr-un singur parametru
- Populară în modele GARCH: GARCH-GED

Estimare MLE

- Atât pentru Student-t asimetrică cât și pentru GED, parametrii se estimează prin verosimilitate maximă
- Se compară prin AIC/BIC

Compararea distribuțiilor asimetrice

Distribuție	Parametri	Asimetrie	Tip coadă
Normală	μ, σ	0	Exponențială
Student-t	μ, σ, ν	0	Lege putere
Student-t asim.	$\mu, \sigma, \nu, \lambda$	$\neq 0$	Lege putere (asim.)
GED	μ, σ, ν	0	Exponențială generalizată
NIG	$\alpha, \beta, \delta, \mu$	$\neq 0$	Semi-grea

- Mai mulți parametri $\Rightarrow$ ajustare mai bună dar risc de supraajustare
- AIC/BIC echilibrează calitatea ajustării cu complexitatea
- Pentru randamente zilnice de acțiuni: Student-t asimetrică domină adesea

Familia hiperbolică generalizată

- Distribuția **hiperbolică generalizată (GH)**: cinci parametri $(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)$
- PDF:

$$f(x) \propto \left(\delta^2 + (x-\mu)^2\right)^{(\lambda-1/2)/2} K_{\lambda-1/2}\left(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2}\right) e^{\beta(x-\mu)}$$

  unde K_ν este funcția Bessel modificată de speța a doua
- Cazuri speciale:
  - **Hiperbolică**: $\lambda = 1$
  - **NIG** (Normal Inverse Gaussiană): $\lambda = -1/2$
  - **VG** (Variance Gamma): $\delta \to 0$

Mixturi normale medie-varianță

- **GH ca mixtură normală medie-varianță**:

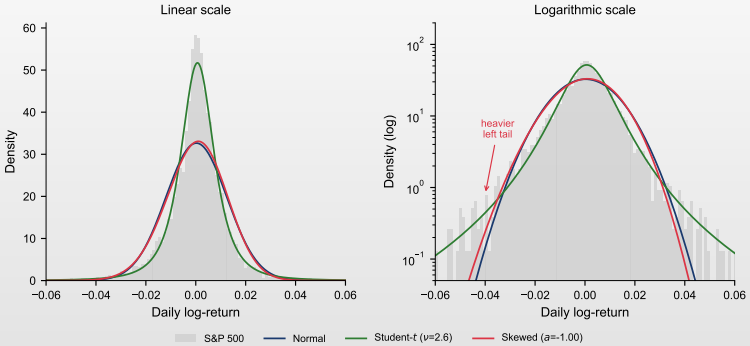
$$X \mid W \sim N(\mu + \beta W, W), \quad W \sim \mathrm{GIG}(\lambda, \delta, \gamma)$$

  unde GIG este distribuția Gaussiană Inversă Generalizată
- Barndorff-Nielsen (1977): ajustare empirică excelentă pe date financiare
- **Închidere afină**: distribuțiile GH sunt închise la transformări afine
- GH multivariată: tratabilă pentru probleme de portofoliu
- Conexiunea cu procesele Lévy: distribuțiile GH sunt infinit divizibile $\Rightarrow$ procese Lévy GH

Observație 1 (De ce contează?)

- Familia GH este utilizată pe scară largă în managementul riscului de portofoliu
- Deutsche Bank, JP Morgan și alte instituții o folosesc pentru modelarea multivariată a randamentelor
- Cazul special NIG oferă cel mai bun compromis precizie/tratabilitate

Vizualizarea asimetriei — Date reale S&P 500



- Pe **scală logaritmică**, diferențele în cozi devin vizibile
- Coada stângă: asimetrică > Student-t $\gg$ normală $\Rightarrow$ VaR subestimat fără asimetrie

SFM_ch2_skew_t

Exemplu: Impactul asimetriei asupra VaR

Exercițiu

Portofoliu \$1M, $\sigma = 1{,}5\%$, $\nu = 5$. VaR 1%: Student-t simetrică ($\lambda = 0$) vs. asim. ($\lambda = -0{,}3$).

Rezolvare

Model	$z_{0,01}$	VaR 1%	**\$ pierdere**
Normal	$-2{,}326$	3,49%	\$34.890
Student-t sim. ($\nu = 5$)	$-3{,}365$	5,05%	\$50.475
Student-t asim. ($\lambda = -0{,}3$)	$-3{,}87$	5,81%	\$58.050

- Trecerea de la simetrică la asimetrică crește VaR cu **15%**
- Asimetria negativă „deplasează” masă probabilistică spre pierderi mari
- **Capitalul necesar** crește cu \$7.575 doar din efectul asimetriei

Ce este o distribuție stabilă?

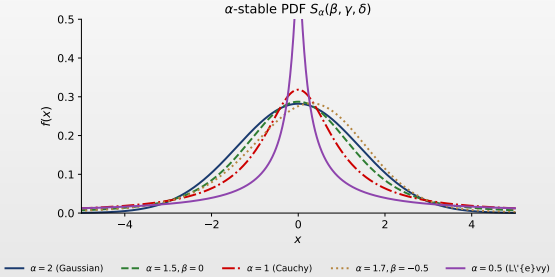
Definiție 3 (Distribuție stabilă — Intuitiv)

O distribuție este **stabilă** dacă suma de copii i.i.d. are aceeași formă (până la locație și scală). Formal, $X \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ dacă pentru copii i.i.d. X_1, X_2:

$$aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} cX + d, \quad c = (a^\alpha + b^\alpha)^{1/\alpha}.$$

- **Patru parametri**:
  - $\alpha \in (0, 2]$: **indicele de stabilitate** (grosimea cozilor) — α mai mic $\Rightarrow$ cozi mai groase
  - $\beta \in [-1, 1]$: **asimetrie**
  - $\gamma > 0$: **scală**
  - $\delta \in \mathbb{R}$: **locație**
- Cazuri speciale: $\alpha = 2$ (Gaussiană), $\alpha = 1, \beta = 0$ (Cauchy)

Densitățile α-stabile — Efectul lui α

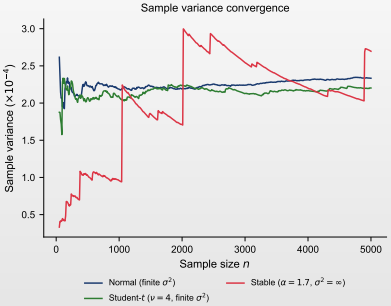


- $\alpha = 2$: **Gaussianā**; $\alpha < 2$: cozi **lege putere (*power law*)** $f(x) \sim |x|^{-(1+\alpha)}$
- $\alpha = 1$: **Cauchy** ($\mathbb{E}[|X|] = \infty$); $\beta \neq 0$: introduce **asimetrie**

De ce varianța poate să nu existe

- Pentru $\alpha < 2$: $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$ dacă și numai dacă $p < \alpha$
- În particular, $\mathbb{E}[X^2] = \infty$ când $\alpha < 2$ — **varianța nu există**
- Varianța eșantionului nu converge la o constantă; crește odată cu n
- **Mandelbrot (1963)**: variațiile prețului bumbacului urmează legi stabile cu $\alpha \approx 1{,}7$
- Estimări tipice pentru randamente financiare: $\hat{\alpha} \in [1{,}5;\ 1{,}9]$

Varianța eșantionului — convergență vs. divergență

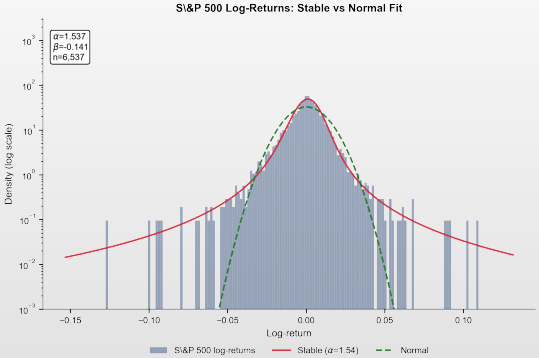


SFM_ch2_stable_var

Schimbare de paradigmă

- Dacă $\alpha < 2$, teoria medie-varianță (Markowitz) se prăbușește: varianța nu este o măsură semnificativă de risc

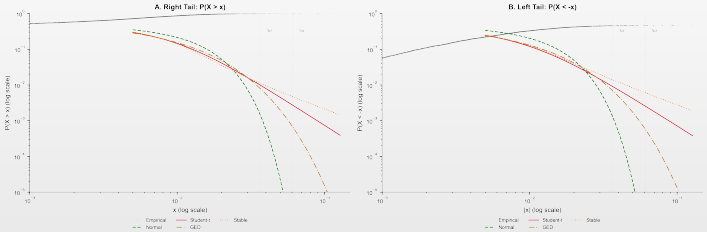
Ajustarea stabilă pe S&P 500



SFM_ch2_stable_fit

- Distribuția stabilă surprinde cozile groase mai bine decât distribuția normală
- $\hat{\alpha} \approx 1{,}7$ estimat pentru randamentele zilnice S&P 500

Stabilă vs. Normală vs. Student-t



SFM_ch2_dist_tails

	Normală	**Student-t**	**Stabilă**
Descreșterea cozii (PDF)	$e^{-x^2/2}$	$\lvert x\rvert^{-\nu-1}$	$\lvert x\rvert^{-\alpha-1}$
Varianța	Finită	Finită ($\nu > 2$)	Infinită ($\alpha < 2$)
Închisă la sumă	Da	Nu	Da
Limită TLC	TLC	—	TLCG

Funcția caracteristică

- Distribuția stabilă este definită prin **funcția caracteristică (*characteristic function*)** (parametrizarea Nolan S^1, $\alpha \neq 1$):

$$\phi(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \exp\left\{-\gamma^\alpha |t|^\alpha \left(1 - i\beta \,\mathrm{sign}(t) \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right) + i\delta t\right\}$$

- Cazul $\alpha = 1$:

$$\phi(t) = \exp\left\{-\gamma|t|\left(1 + i\beta \frac{2}{\pi} \,\mathrm{sign}(t) \ln|t|\right) + i\delta t\right\}$$

- **Fără PDF în formă închisă** în general (excepții: Gaussiană, Cauchy, Lévy)
- Densitatea prin transformata Fourier inversă: $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\, e^{-itx}\, dt$
- Evaluare numerică: algoritmul lui Nolan (1997)

Observație 2

- Utilizăm parametrizarea $S^1(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ a lui Nolan (1997) în tot capitolul
- `scipy.stats.levy_stable` folosește parametrizarea S^0 — atenție la conversie!

Teorema Limită Centrală Generalizată

Teoremă 1 (TLCG)

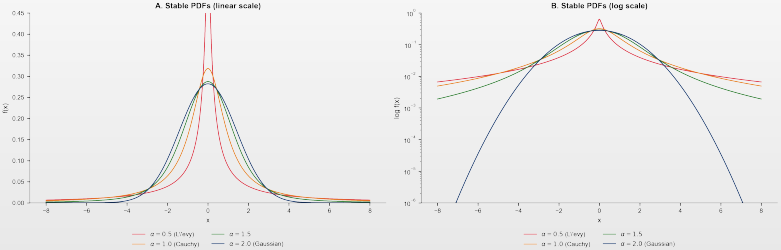
Distribuțiile stabile sunt singurele limite non-degenerate posibile ale sumelor normalizate:

$$\frac{S_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

unde $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pentru X_i i.i.d.

- TLC clasică: $\alpha = 2$ (necesită varianță finită)
- TLCG: $\alpha < 2$ (permite varianță infinită (*infinite variance*))
- **Proprietatea de stabilitate**: Sumele de v.a. stabile i.i.d. rămân stabile cu același α
- **Cozi tip lege putere**: $P(X > x) \sim C_\alpha(1+\beta)\,x^{-\alpha}$ când $x \to \infty$

PDF-uri stabile — Variind α



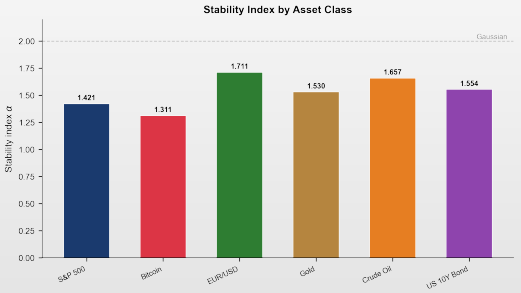
SFM_ch2_stable_pdfs

- α mai mic $\Rightarrow$ cozi mai groase, vârf mai ascuțit
- $\alpha = 2$: Gaussiană; $\alpha = 1$: Cauchy
- Randamente financiare: $\hat{\alpha} \in [1{,}5;\ 1{,}9]$

Estimare și analiză cross-asset

Metode de estimare

- Metoda cuantilelor McCulloch (rapidă, consistentă)
- MLE (Nolan, 1997) — cea mai eficientă
- Metode bazate pe funcția caracteristică (Kogon & Williams, 1998)



SFM_ch2_cross_asset

- $\hat{\alpha} \approx 1{,}7$ pentru S&P 500; $\hat{\alpha} \approx 1{,}5$ pentru Bitcoin; $\hat{\alpha} \approx 1{,}8$ pentru FX
- $\alpha < 2$ pentru toate clasele majore de active $\Rightarrow$ varianța infinită este ubicuă

α_{stabil} vs. α_{Hill} — Reconciliere

MLE pe toată distribuția

- $\hat{\alpha}_{\text{stabil}} \approx 1{,}7$ (S&P 500)
- Captează **comportamentul global**
- Include centrul + cozile
- Implică varianță infinită ($\alpha < 2$)

Estimatorul Hill (doar coada)

- $\hat{\alpha}_{\text{Hill}} \approx 3$–$4$ (S&P 500)
- Estimează doar **indexul de coadă**
- Folosește doar observațiile extreme
- Implică varianță finită ($\alpha > 2$)

Reconciliere: distribuții stabile temperate

- Conflictul $\hat{\alpha}_{\text{stabil}} \neq \hat{\alpha}_{\text{Hill}}$ este **aparent**: cele două estimează cantități diferite
- Distribuțiile **stabile temperate** (CGMY) rezolvă paradoxul: comportament stabil pentru x moderat, dar cozi cu decădere exponențial-multiplicată
- Referințe: McCulloch (1997), Grabchak & Samorodnitsky (2010)

Variație regulată și domeniu de atracție

Definiție 4 (Variație regulată)

$L : (0, \infty) \to (0, \infty)$ este **lent variabilă** la infinit dacă $\lim_{x\to\infty} L(tx)/L(x) = 1$ pentru orice $t > 0$. O funcție f este **regulat variabilă** cu indice ρ dacă $f(x) = x^\rho L(x)$.

Teoremă 2 (Domeniul de atracție)

F aparține domeniului de atracție al $S(\alpha, \beta, 1, 0)$ dacă și numai dacă:

1. $\bar{F}(x) = x^{-\alpha} L(x)$ (cozi regulat variabile)
2. Condiția de echilibru: $\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(x)+F(-x)} = \frac{1+\beta}{2}$

Variația regulată fundamentează teoria EVT și determină dacă estimatorul Hill este consistent.

Procese Lévy

- Un **proces Lévy** $\{L_t\}_{t\geq 0}$ are creșteri staționare independente
- $L_1 \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ definește un **proces Lévy stabil**
- **Descompunerea Lévy–Itô**:

$$L_t = bt + \sigma W_t + \int_{|x|\leq 1} x\, \tilde{N}(t, dx) + \int_{|x|>1} x\, N(t, dx)$$

- **Măsura Lévy** a unui proces stabil:

$$\nu(dx) = \begin{cases} c_+ x^{-\alpha-1} dx & x > 0 \\ c_- |x|^{-\alpha-1} dx & x < 0 \end{cases}$$

- Activitate infinită: infinit de multe salturi mici în orice interval finit

Observație 3 (De ce contează?)

- Procesele Lévy sunt fundamentul evaluării opțiunilor cu salturi; Black–Scholes $= \nu \equiv 0$
- Componenta de salt explică zâmbetul volatilității (*volatility smile*)

Distribuții stabile temperate

- **Problemă**: Distribuțiile stabile pure au varianță infinită — incomod pentru unele aplicații
- **Soluție**: Distribuții stabile temperate — modificăm măsura Lévy:

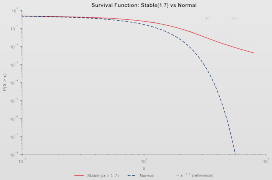
$$\nu(dx) = c\,|x|^{-\alpha-1} e^{-\lambda|x|} dx$$

- Păstrează comportamentul de coadă grea pentru x moderat dar garantează **momente finite**
- Temperarea exponențială elimină coada extremă $\Rightarrow$ toate momentele există

Stabilă vs. Student-t: Marea dezbatere

	Stabilă	**Student-t**
Indice de coadă	α	ν
Momente finite	$p < \alpha$	$p < \nu$
Închisă la sumă	Da	Nu
Limită TLCG	Da	Nu
Varianța	∞ ($\alpha < 2$)	Finită ($\nu > 2$)
Estimare	Mai dificilă (fără PDF)	MLE standard

- Dezbatere istorică: Mandelbrot–Fama (stabile) vs. Praetz–Blattberg–Gonedes (Student-t)
- Viziunea modernă: ambele surprind cozi tip lege putere; alegerea depinde de aplicație



SFM_ch2_tail_survival

Exemplu: Interpretarea parametrilor stabili

Exercițiu: MLE pe S&P 500 (2000–2023)

$\hat{\alpha} = 1{,}70$, $\hat{\beta} = -0{,}10$, $\hat{\gamma} = 0{,}0058$, $\hat{\delta} = 0{,}0003$. Interpretați parametrii.

Interpretare

- $\hat{\alpha} = 1{,}70 < 2$: **varianță infinită** — cozile descresc ca $|x|^{-1{,}70}$, mai lent decât $e^{-x^2/2}$
- $\hat{\beta} = -0{,}10 < 0$: ușoară **asimetrie la stânga** — coada pierdere mai grea
- $\hat{\gamma} = 0{,}0058$: parametru de **scală** (analog σ, dar $\sigma^2 = \infty$)
- $\hat{\delta} = 0{,}0003$: **locația** (randamentul mediu zilnic $\approx 0{,}03\%$)

Consecință

- Dacă $\alpha = 1{,}70$, $P(|r| > 5\hat{\gamma})$ este de $\sim 12\times$ mai mare decât sub distribuția normală
- Markowitz medie-varianță **nu este validă**

EVT — Motivație

- Avem nevoie de modele precise pentru **evenimente extreme** (crize financiare, prăbușiri)
- În loc să modelăm *întreaga* distribuție, EVT se concentrează doar pe **cozi**
- **Indicele de coadă** ξ: un singur număr care rezumă grosimea cozii
  - $\xi > 0$: cozi groase (*heavy tails*, descreștere tip lege putere) — tipic pentru date financiare
  - $\xi = 0$: cozi exponențiale (similar cu distribuția normală)
  - $\xi < 0$: cozi mărginite (maximum finit)
- Date financiare: $\hat{\xi} > 0$ confirmă că evenimentele extreme sunt mai frecvente decât prevede distribuția normală

Idee cheie

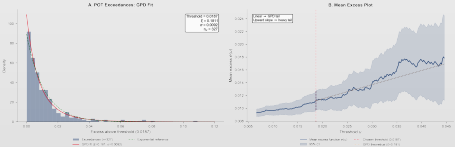
- EVT oferă **extrapolare riguroasă matematic** în cozi, chiar dincolo de datele observate

GPD — Introducere descriptivă

- **Depășirile** peste un prag ridicat u tind să urmeze o formă specifică:

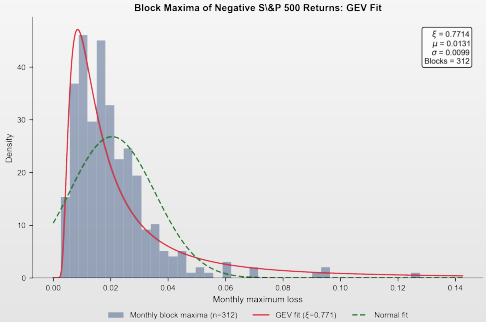
Distribuția Pareto Generalizată (GPD)

- Gândiți-vă astfel: „dat fiind că s-a întâmplat ceva extrem, cât de extrem a fost?”
- GPD are doi parametri: formă ξ și scală σ
- Pentru date financiare, de regulă $\hat{\xi} \in [0{,}1;\ 0{,}5]$



SFM_ch2_evt_gpd

EVT în practică — Evenimente extreme



SFM_ch2_evt_gev

- Maximele pe blocuri (ex.: cea mai mare pierdere lunară) urmează distribuția GEV
- Teoreme formale la nivel Master; VaR/ES bazate pe EVT în secțiunea de managementul riscului

Teorema Fisher–Tippett–Gnedenko

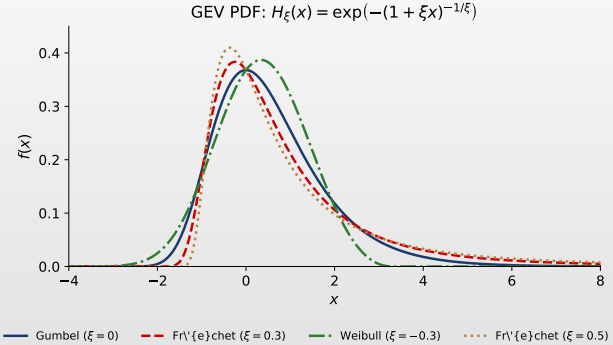
Teoremă 3 (Fisher–Tippett–Gnedenko)

Dacă $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ și $\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} H$, atunci H este **GEV**:

$$H(x; \xi, \mu, \sigma) = \exp\left\{ -\left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi} \right\}$$

- Trei tipuri în funcție de ξ:
  - $\xi > 0$: **Fréchet** — cozi groase (date financiare)
  - $\xi = 0$: **Gumbel** — cozi exponențiale
  - $\xi < 0$: **Weibull** — cozi mărginite
- Analog TLC dar pentru *maxime* în loc de sume

Densitățile GEV — Cele trei familii



- **Fréchet** ($\xi > 0$): coadă dreaptă grea — tipică pentru maxime financiare
- **Gumbel** ($\xi = 0$): coadă exponențială
- **Weibull** ($\xi < 0$): coadă mărginită (maximum finit)

Pickands–Balkema–de Haan și metoda POT

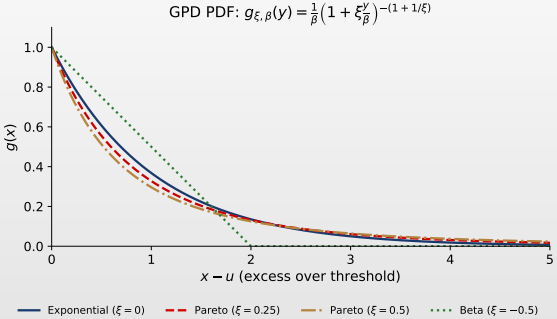
Teoremă 4 (Pickands–Balkema–de Haan)

Pentru un prag ridicat u, depășirile $Y = X - u \mid X > u$ urmează GPD:

$$G(y; \xi, \sigma) = 1 - \left(1 + \xi \frac{y}{\sigma}\right)^{-1/\xi}, \quad y > 0.$$

- **Metoda POT** (Peaks Over Threshold):
  1. Alegem pragul u (graficul excesului mediu, stabilitatea parametrilor)
  2. Ajustăm GPD pe depășiri prin MLE
  3. Raportăm $(\hat{\xi}, \hat{\sigma})$
- **Funcția excesului mediu**: $e(u) = \mathbb{E}[X - u \mid X > u] = \frac{\sigma + \xi u}{1 - \xi}$
- Liniară în u pentru GPD $\Rightarrow$ instrument diagnostic pentru selectarea pragului

Densitățile GPD — Forme în funcție de ξ



- $\xi > 0$ (**Pareto**): coadă grea — tipică pentru depășiri financiare
- $\xi = 0$ (**Exponențială**): referință; $\xi < 0$ (**Beta**): suport finit
- Cu cât ξ este mai mare, cu atât depășirile extreme sunt **mai probabile**

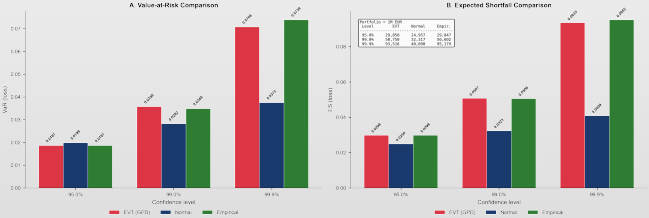
VaR și ES bazate pe EVT

- **VaR din GPD**:

$$\mathrm{VaR}_\alpha = u + \frac{\sigma}{\xi}\left[\left(\frac{n\alpha}{N_u}\right)^{-\xi} - 1\right]$$

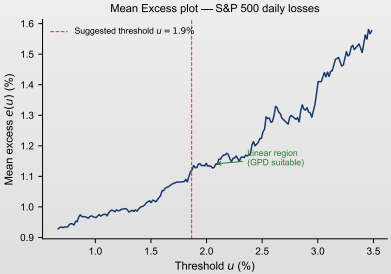
  unde N_u = numărul de depășiri, n = observații totale

- **ES din GPD**: $\mathrm{ES}_\alpha = \frac{\mathrm{VaR}_\alpha}{1-\xi} + \frac{\sigma - \xi u}{1-\xi}, \quad \xi < 1$



Selectarea pragului

- **Graficul excesului mediu**: $\hat{e}(u)$ vs. u; linearitatea sugerează că GPD este adecvată deasupra acelui u
- **Graficul stabilității parametrilor**: $\hat{\xi}(u)$ și $\hat{\sigma}^*(u)$ vs. u; regiunea stabilă = prag bun
- Compromis: u prea mic $\Rightarrow$ eroare sistematică (date non-extreme incluse); u prea mare $\Rightarrow$ varianță mare (puține depășiri)
- Regulă practică: se folosesc primele 5–10% din observații



SFM_ch2_mean_excess

Estimatorul Hill

Definiție 5 (Estimatorul Hill)

Pentru statisticile de ordine (*order statistics*) $X_{(1)} \geq X_{(2)} \geq \cdots \geq X_{(n)}$:

$$\hat{\xi}_{\text{Hill}}^{(k)} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \ln X_{(i)} - \ln X_{(k+1)}, \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

Indicele de coadă este $\alpha = 1/\hat{\xi}_{\text{Hill}}$.

- **Graficul Hill (*Hill plot*)**: $\hat{\xi}_{\text{Hill}}^{(k)}$ vs. k; regiunea stabilă indică k adecvat
- **Compromis bias-varianță**: k mic $\Rightarrow$ varianță mare; k mare $\Rightarrow$ eroare sistematică mare
- Valid doar pentru $\xi > 0$ (cozi groase)

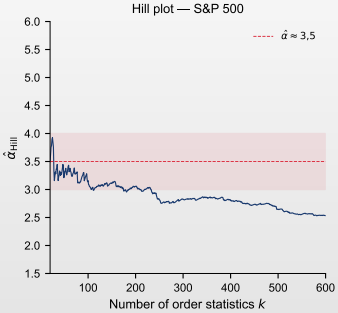
Estimatori alternativi ai indicelui de coadă

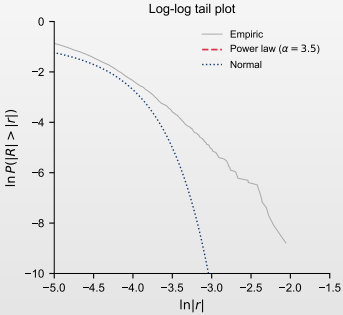
- **Estimatorul Pickands**:

$$\hat{\xi} = \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{X_{(k)} - X_{(2k)}}{X_{(2k)} - X_{(4k)}}$$

  Funcționează pentru orice $\xi \in \mathbb{R}$ (nu doar $\xi > 0$)
- **Estimatorul de momente** (Dekkers–Einmahl–de Haan): funcționează și el pentru orice ξ
- **Condiții de ordin secund**: Hall (1982) — parametrul de ordin secund ρ guvernează k optim în estimatorul Hill
- **Selectare adaptivă a pragului**: minimizarea MSE asimptotică (Danielsson et al., 2001)

Graficul Hill — S&P 500





- Stânga: $\hat{\alpha}^{(k)}_{\text{Hill}}$ vs. k — regiunea stabilă ($k \in [100, 300]$) sugerează $\hat{\alpha} \approx 3{,}5$
- Dreapta: log-log confirmă legea putere (*power law*); distribuția normală (punctată) curbează în jos

SFM_ch2_hill

Conexiunea cu distribuțiile stabile

- Dacă $X \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ cu $\alpha < 2$, atunci parametrul de formă EVT este:

$$\xi = 1/\alpha$$

- Distribuțiile stabile sunt în domeniul de atracție al GEV Fréchet ($\xi > 0$)
- Estimatorul Hill aplicat pe date stabile: $\hat{\alpha}_{\text{Hill}} = 1/\hat{\xi}_{\text{Hill}}$
- Compararea indicilor de coadă (*tail indices*):
  - Ajustare stabilă: $\hat{\alpha} \approx 1{,}7 \Rightarrow \hat{\xi} \approx 0{,}59$
  - Estimarea Hill: dă de regulă $\hat{\alpha} \in [3, 5]$ (pentru cozi moderate)
  - Discrepanța apare deoarece Hill măsoară descreșterea *locală* a cozii, iar α stabil guvernează forma *globală*

Exemplu POT — VaR și ES pas cu pas

Exercițiu

$n = 1.000$ randamente zilnice. Pragul $u = 2{,}5\%$ dă $N_u = 50$ depășiri. MLE pe depășiri: $\hat{\xi} = 0{,}3$, $\hat{\sigma} = 0{,}8\%$. Calculați $\mathrm{VaR}_{1\%}$ și $\mathrm{ES}_{1\%}$.

Rezolvare

1. Raportul: $\frac{n\alpha}{N_u} = \frac{1000 \times 0{,}01}{50} = 0{,}2; \quad 0{,}2^{-0{,}3} = 1{,}621$
2. $\mathrm{VaR}_{0{,}01} = u + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}}[0{,}2^{-\hat{\xi}} - 1] = 2{,}5\% + 2{,}667\% \times 0{,}621 = 4{,}16\%$
3. $\mathrm{ES}_{0{,}01} = \frac{\mathrm{VaR}}{1-\hat{\xi}} + \frac{\hat{\sigma} - \hat{\xi} u}{1-\hat{\xi}} = \frac{4{,}16\%}{0{,}7} + \frac{0{,}05\%}{0{,}7} = 6{,}01\%$

Observație 4

- Comparație: VaR normală $= 3{,}49\%$, VaR EVT $= 4{,}16\%$ (**+19%**); ES EVT $= 6{,}01\%$

Cuprins

- Introducere ✓
- De la prețuri la log-randamente ✓
- Distribuția normală ✓
- Fapte stilizate ✓
- Distribuția Student-t ✓
- Distribuții asimetrice ✓
- Distribuții stabile ✓
- Teoria valorilor extreme ✓
- **Comparația distribuțiilor**
- Copule și dependența de coadă (*tail dependence*)
- Managementul riscului
- Extensii moderne / Rezumat

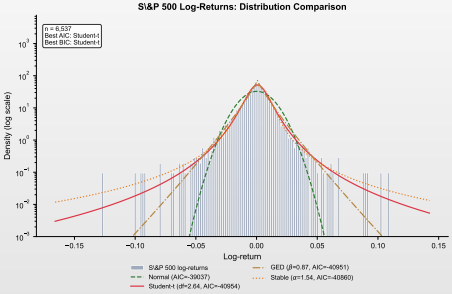
Studiu de caz: Ajustări avansate

SFM_ch2_case_study_2b

Skew-t, Student-t, GED, Stabilă pe 3 piețe

Overlay pe histogramă (log-scale):

- Student-t: captează bine cozile, $\hat{\nu} \approx 3$–5
- Skew-t (Hansen): $\hat{\lambda} < 0$ surprinde asimetria stângă
- GED: $\hat{\nu} < 2$ confirmă leptokurtosis
- Stabilă: $\hat{\alpha} < 2$ — cozi cu lege de putere



Studiu de caz: Parametrii estimați

Estimatori MLE pe cele 3 active (2015–2025)

Activ	Student-t $\hat{\nu}$	Skew-t $\hat{\lambda}$	GED $\hat{\nu}$	Stabil $\hat{\alpha}$	Stabil $\hat{\beta}$
S&P 500	4,5	−0,15	1,3	1,75	−0,15
BRD	3,8	−0,25	1,2	1,65	−0,20
Bitcoin	3,2	−0,05	1,1	1,55	−0,05

Observație 5

- $\hat{\nu}_t$ scăzut $\Rightarrow$ cozi groase; $\hat{\alpha} < 2 \Rightarrow$ varianță posibil infinită; $\hat{\nu}_{\text{GED}} < 2 \Rightarrow$ cozi mai groase ca distribuția normală
- $\hat{\lambda} < 0$ (skew-t) și $\hat{\beta} < 0$ (stabil) $\Rightarrow$ asimetrie negativă (risc mai mare pe scăderi)
- Parametrii se estimează prin MLE; notație: ν este parametrul de formă atât pentru Student-t cât și pentru GED

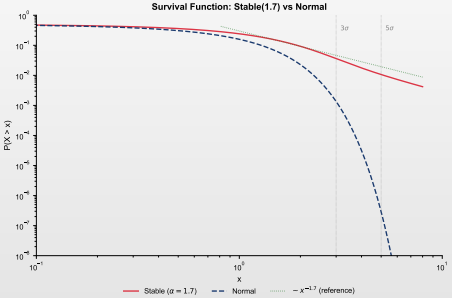
Studiu de caz: Comportamentul cozilor

SFM_ch2_case_study_2b

Grafic log-log survival

Funcția de supraviețuire $P(\text{Loss} > x)$ în coordonate log-log:

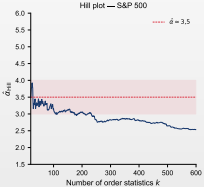
- Linie dreaptă $\Rightarrow$ **lege de putere**: $P(X > x) \sim x^{-\alpha}$
- Normal: cade prea rapid; Student-t: urmărește mai bine datele
- Bitcoin: cozile cele mai groase, panta cea mai mică

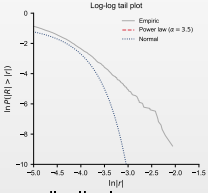


Studiu de caz: Estimatorul Hill

$\hat{\alpha}_{\text{Hill}}$ pe 3 piețe

- S&P 500: $\hat{\alpha} \approx 3$–4; BRD: $\approx 2{,}5$–$3{,}5$; Bitcoin: ≈ 2–3
- Stabilitatea pe un platou validează estimarea

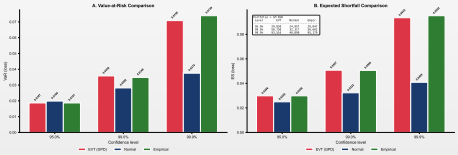




$\hat{\alpha}_{\text{Hill}} < 2 \Rightarrow$ **varianța nu converge.** $\hat{\alpha}_{\text{Hill}} \approx 3$–$4$ **vs.** $\hat{\alpha}_{\text{stabil}} \approx 1{,}7$: **Hill estimează** ***local*** **coada, stabilă pe** ***întreaga*** **distribuție.**

Studiu de caz: VaR/ES sub EVT

SFM_ch2_case_study_2b



VaR/ES 1%, 1M EUR, S&P 500

GPD: $u = 2{,}5\%$, $\hat{\xi} = 0{,}28$, $\hat{\sigma} = 0{,}8\%$, $N_u/n = 5\%$

- Normal: VaR 26 750; ES 30 500
- Student-t ($\hat{\nu} = 4{,}5$): VaR 30 400; ES 40 200
- Skew-t ($\hat{\lambda} = -0{,}15$): VaR 33 800
- EVT-GPD: VaR 35 200; ES 50 300

EVT: $\mathbf{VaR_{1\%}} = u + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}}\left[\left(\frac{n\alpha}{N_u}\right)^{-\hat{\xi}} - 1\right]$; **Skew-t**: **+15% VaR vs. simetrică**

Studiu de caz: Concluzii

Ierarhia modelelor (AIC $= -2\ell + 2k$; ΔAIC > 10 vs. Normal)

1. **Skew-t / GED / Student-t** — cel mai bun compromis, date zilnice
2. **Stabilă** — utilă teoretic, estimare lentă
3. **EVT-GPD** — cea mai bună pentru cuantile extreme ($< 1\%$)
4. **Normal** — inadecvată, rămâne referință

Lecția principală

Nu există model universal: alegerea depinde de cuantilă (5% vs 0.1%), activ (acțiuni vs cripto), orizont (zilnic vs lunar).

Observație 6

- **Capitolul 4** formalizează selecția modelului și backtesting-ul

Întrebarea 3

Întrebare

Care proprietate face distribuțiile α-stabile unice din punct de vedere teoretic?

Variante de răspuns

(A) Au cozi exponențiale (scad rapid)

(B) Sunt singurele limite posibile ale sumelor normalizate (TLCG)

(C) Au întotdeauna variență finită

(D) Sunt întotdeauna simetrice

Întrebarea 3: Răspuns

Răspuns: (B)

- Teorema Limită Centrală Generalizată (TLCG) arată că distribuțiile stabile sunt **singurele** limite posibile ale sumelor normalizate de v.a. i.i.d.
- (A) este invers: distribuțiile stabile cu $\alpha < 2$ au cozi **groase** (lege putere), nu exponențiale.
- (C) este greșit: pentru $\alpha < 2$, varianța este infinită.
- (D) este greșit: parametrul $\beta \in [-1, 1]$ controlează asimetria.

Întrebarea 5

Întrebare

⊡ În metoda Peaks-Over-Threshold (POT), ce distribuție se ajustează pe excesele peste prag (*threshold exceedances*)?

Variante de răspuns

(A) Distribuția normală

(B) Distribuția Pareto generalizată (GPD)

(C) Distribuția exponențială

(D) Distribuția GEV (Generalized Extreme Value)

Întrebarea 5: Răspuns

Răspuns: (B)

- Teorema Pickands–Balkema–de Haan arată că excesele peste un prag u suficient de mare converg la GPD.
- (A) este inadecvată: distribuția normală nu modelează cozile extreme.
- (C) este un caz particular: GPD cu $\xi = 0$ este exponențială, dar este prea restrictivă.
- (D) este pentru metoda Block Maxima, nu POT. GEV se ajustează pe maximele pe blocuri.

Exercițiul 4: Distribuții stabile

Enunț

Un cercetător ajustează o distribuție stabilă pe randamentele Bitcoin și obține $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}) = (1{,}72;\ -0{,}15;\ 0{,}008;\ 0{,}001)$.

1. Interpretați fiecare parametru economic: ce spun α, β, γ, δ?
2. Această distribuție are varianță finită? Justificați.
3. Cum se compară cozile cu cele ale distribuției normale?
4. Ce implică $\beta = -0{,}15$ pentru asimetria riscului?

De reținut

$\alpha \in (0, 2]$: indice de stabilitate (greutatea cozilor); $\beta \in [-1, 1]$: asimetrie; $\gamma > 0$: scală; δ: locație. Varianța finită doar dacă $\alpha = 2$.

Exercițiul 5: EVT — Metoda POT

Enunț

Dintr-un eșantion de 2000 de randamente zilnice, 80 depășesc pragul $u = 3\%$ în valoare absolută. GPD ajustată: $\hat{\xi} = 0{,}25$, $\hat{\sigma} = 1{,}0\%$.

1. Calculați VaR la nivelul 1% folosind formula POT:

$$\mathrm{VaR}_\alpha = u + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}}\left[\left(\frac{n}{N_u}\cdot\alpha\right)^{-\hat{\xi}} - 1\right]$$

2. Calculați Expected Shortfall: $\mathrm{ES}_\alpha = \frac{\mathrm{VaR}_\alpha}{1-\hat{\xi}} + \frac{\hat{\sigma}-\hat{\xi}\cdot u}{1-\hat{\xi}}$
3. Ce semnifică $\hat{\xi} > 0$? Ce clasă de distribuții implică?
4. Cum influențează alegerea pragului u calitatea estimării?

Laborator Python — Exerciții interactive

Lab 2: Distribuții stabile (MSc)

Rulați `SFM_ch2_stable_distributions.ipynb`:

1. Estimați $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta})$; grafic PDF stabilă vs. normală vs. Student-t
2. Calculați VaR 1% sub toate cele trei modele. Raportați diferențele

SFM_ch2_stable_distributions

Lab 3: EVT și backtesting (MSc)

Folosind `SFM_ch2_extreme_value.ipynb`:

1. Grafic Mean Excess; selectați prag u; ajustați GPD $\Rightarrow (\hat{\xi}, \hat{\sigma})$
2. Calculați VaR 1% și ES 1% bazate pe EVT
3. Backtest VaR cu fereastră mobilă (*rolling window*) de 250 zile; testul Kupiec

SFM_ch2_extreme_value

Exercițiul 4: Rezolvare

Rezolvare

Date: $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}) = (1{,}72,\ -0{,}15,\ 0{,}008,\ 0{,}001)$.

1. Interpretare:

- $\alpha = 1{,}72$: cozi groase (mai groase decât distribuția normală, $\alpha = 2$); mai aproape de Cauchy ($\alpha = 1$)
- $\beta = -0{,}15$: asimetrie negativă (*negative skewness*) (coada stângă mai grea $\Rightarrow$ pierderi extreme mai probabile)
- $\gamma = 0{,}008$: parametru de scală (similar deviației standard)
- $\delta = 0{,}001$: locație (aproape de zero, randament mediu zilnic)

2. $\alpha = 1{,}72 < 2 \Rightarrow$ varianță **infinită**. Doar momentele de ordin $p < 1{,}72$ sunt finite.

3. Cozile scad ca $|x|^{-1{,}72-1} = |x|^{-2{,}72}$ vs. $e^{-x^2/2}$ (normală). Mult mai lent $\Rightarrow$ evenimente extreme mult mai probabile.

4. $\beta < 0$: coada stângă este mai grea decât coada dreaptă $\Rightarrow$ riscul de pierdere este asimetric.

Exercițiul 5: Rezolvare

Rezolvare

Date: $n = 2000$, $N_u = 80$, $u = 0{,}03$, $\hat{\xi} = 0{,}25$, $\hat{\sigma} = 0{,}01$, $\alpha = 0{,}01$.

1. VaR POT:

$$\mathrm{VaR}_{0,01} = 0{,}03 + \frac{0{,}01}{0{,}25}\left[\left(\frac{2000}{80}\cdot 0{,}01\right)^{-0{,}25} - 1\right] = 0{,}03 + 0{,}04\left[0{,}25^{-0{,}25} - 1\right]$$

$0{,}25^{-0{,}25} = e^{0{,}25\times 1{,}3863} = e^{0{,}3466} = 1{,}4142$; $\mathrm{VaR} = 0{,}03 + 0{,}04 \times 0{,}4142 = 0{,}0466 = 4{,}66\%$

2. ES: $\mathrm{ES}_{0,01} = \frac{0{,}0466}{1-0{,}25} + \frac{0{,}01-0{,}25\times 0{,}03}{1-0{,}25} = 0{,}0621 + 0{,}0033 = 6{,}54\%$

3. $\hat{\xi} > 0 \Rightarrow$ domeniul Fréchet: cozi tip lege putere (cozi groase). Distribuția GPD are suport infinit.

4. Prag prea jos: bias (multe date non-extreme); prag prea sus: varianță mare (puține date). Se alege u prin graficul Mean Excess.

Anexă: Variație regulată de ordin secund

Definiție 6 (Variație regulată de ordin secund)

O funcție de supraviețuire (*survival function*) $\bar{F}$ satisface condiția de variație regulată (*regular variation*) de ordin secund dacă:

$$\bar{F}(x) = x^{-\alpha} L(x) \left(1 + \frac{b}{\rho} x^{\rho} + o(x^{\rho})\right), \quad x \to \infty$$

unde $\rho < 0$ este **parametrul de ordin secund** și $b \neq 0$.

- ρ controlează **rata de convergență** către comportamentul asimptotic tip lege putere
- $|\rho|$ mic $\Rightarrow$ convergență lentă $\Rightarrow$ bias mare al estimatorului Hill
- $|\rho|$ mare $\Rightarrow$ convergență rapidă $\Rightarrow$ estimatorul Hill este fiabil cu mai puține date extreme
- Bias-ul estimatorului Hill: $\text{Bias}(\hat{\alpha}_H) \approx \frac{b}{\rho(\alpha-\rho)} k^{-\rho/\alpha} n^{\rho/\alpha}$
- Alegerea optimală a k depinde de ρ — Referințe: Hall (1982), de Haan & Stadtmüller (1996)

Anexă: Modelul CGMY și evaluarea opțiunilor

Definiție 7 (Procesul CGMY (Carr, Geman, Madan, Yor, 2002))

Măsura Lévy:

$$\nu(dx) = C\frac{e^{-G|x|}}{|x|^{1+Y}}1_{x<0}\,dx + C\frac{e^{-Mx}}{x^{1+Y}}1_{x>0}\,dx$$

Funcția caracteristică:

$$\ln\phi(u) = C\,\Gamma(-Y)\Big[(M-iu)^Y - M^Y + (G+iu)^Y - G^Y\Big]$$

- $C > 0$: intensitatea salturilor; $G, M > 0$: tempering; $Y \in (-\infty, 2)$: activitatea salturilor
- $G \neq M \Rightarrow$ asimetrie; $Y > 0 \Rightarrow$ activitate infinită; momente finite + cozi groase
- Prețul opțiunii: $C(K) = \frac{e^{-rT}}{2\pi}\int e^{-iuK}\frac{\phi_T(u)}{u^2}\,du$ (Carr & Madan, 1999)
- CGMY explică zâmbetul volatilității fără a recurge la volatilitate stochastică

Bibliografie I

Manuale de referință

- McNeil, A., Frey, R. & Embrechts, P. (2015). *Quantitative Risk Management*. Princeton University Press.
- Nolan, J. P. (2020). *Stable Distributions — Models for Heavy Tailed Data*. Birkhäuser.
- Rachev, S. T. (2003). *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*. Elsevier.

Articole fundamentale

- Mandelbrot, B. (1963). The Variation of Certain Speculative Prices. *Journal of Business*, 36(4), 394–419.
- Fama, E. (1965). The Behavior of Stock-Market Prices. *Journal of Business*, 38(1), 34–105.
- Cont, R. (2001). Empirical Properties of Asset Returns. *Quantitative Finance*, 1(2), 223–236.

Bibliografie II

Distribuții și estimare

- Hansen, B. (1994). Autoregressive Conditional Density Estimation. *International Economic Review*, 35(3), 705–730.
- Nolan, J. P. (1997). Numerical Calculation of Stable Densities and Distribution Functions. *Stochastic Models*, 13(4), 759–774.
- Barndorff-Nielsen, O. (1977). Exponentially Decreasing Distributions for the Logarithm of Particle Size. *Proc. Royal Society A*, 353, 401–419.

Modele dinamice

- Hamilton, J. D. (1989). A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series. *Econometrica*, 57(2), 357–384.
- Merton, R. (1976). Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous. *J. of Financial Economics*, 3, 125–144.
- Barndorff-Nielsen, O. & Shephard, N. (2001). Non-Gaussian Ornstein–Uhlenbeck-Based Models. *JRSS B*, 63(2), 167–241.

Bibliografie III

Testare și selecție de modele

- Vuong, Q. H. (1989). Likelihood Ratio Tests for Model Selection and Non-Nested Hypotheses. *Econometrica*, 57(2), 307–333.
- Fissler, T. & Ziegel, J. F. (2016). Higher Order Elicitability and Osband's Principle. *Annals of Statistics*, 44(4), 1680–1707.

Resurse online și cod

- **Quantlet**: `https://quantlet.com` ≻ Platformă de cod pentru metode cantitative
- **Quantinar**: `https://quantinar.com` ≻ Platformă de învățare pentru metode cantitative
- **GitHub SFM**: `https://github.com/QuantLet/Stat_fin_markets/tree/master/Ch_02` ≻ Cod Python capitol 2

Bibliografie IV

Referințe recente (2020–2025)

- Kelly, B., Jiang, H. & Pruitt, S. (2022). Tail Risk and Asset Prices. *Review of Financial Studies*, 35(5), 2254–2295.
- Bollerslev, T. & Todorov, V. (2023). The Jump Tails of Asset Returns. *Econometrica* (forthcoming).
- Aas, K., Czado, C., Frigessi, A. & Bakken, H. (2009). Pair-Copula Constructions of Multiple Dependence. *Insurance: Mathematics and Economics*, 44(2), 182–198.

Evenimente recente relevante

- **Covid-19 (mar. 2020)**: S&P 500 -12% într-o zi; al 3-lea cel mai rău eveniment din istorie
- **FTX/crypto (nov. 2022)**: Prăbușire de -65% în 48h; cozi groase extreme
- **SVB (mar. 2023)**: Contagiune bancară; risc de coadă în sectorul financiar
- **Lecția**: Modelele cu cozi groase sunt **esențiale**, nu opționale

Vă Mulțumim!

Întrebări?

Materialele cursului sunt disponibile la: https://danpele.github.io/SFM/

Quantlet Quantinar