



Statistica Piețelor Financiare

Capitolul 4: Selecția modelului și managementul riscului



Daniel Traian PELE

Antoaneta Amza

Academia de Studii Economice din București

IDA Institute Digital Assets

Blockchain Research Center

AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance

Academia Română, Institutul de Prognoză Economică

MSCA Digital Finance

Obiective de învățare

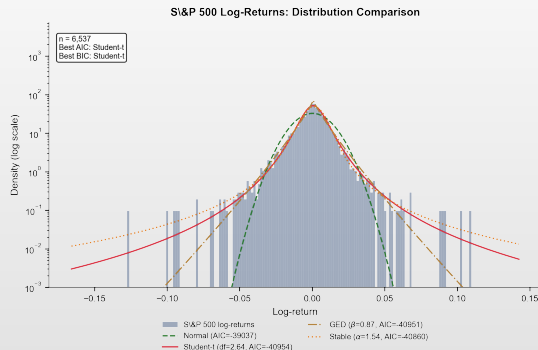
La sfârșitul acestui curs, veți fi capabili să:

1. **Comparați** distribuțiile folosind criterii AIC, BIC, QQ și teste formale
2. **Explicați** rolul copulelor în modelarea dependenței de coadă (*tail dependence*)
3. **Calculați** VaR și Expected Shortfall sub diferite ipoteze distribuționale
4. **Efectuați** backtesting VaR (Kupiec, Christoffersen)
5. **Evaluați** modele GARCH cu inovații non-Gaussiene

Cuprins

- ▣ Compararea distribuțiilor și selecția modelului
- ▣ Copule și dependența de coadă (*tail dependence*)
- ▣ Implicații pentru managementul riscului
- ▣ Extensii moderne
- ▣ Rezumat

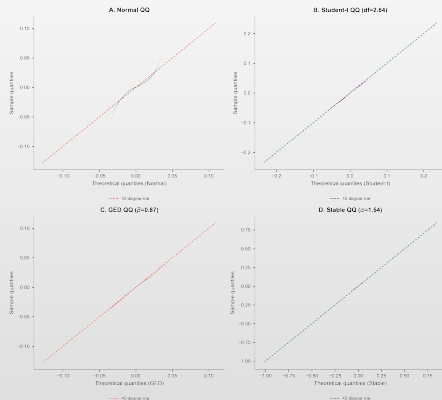
Comparație vizuală a distribuțiilor



SFM_ch2_dist_comparison

- Histogramă cu suprapuneri ajustate: Normală, Student- t , Stabilă
- Care distribuție surprinde cel mai bine centrul, umerii și cozile?

Grafice QQ



SFM_ch2_qq

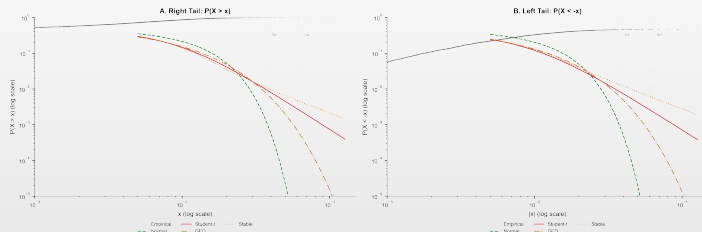
- ▣ **Grafic QQ**: cuantile date vs. distribuție teoretică
- ▣ Ajustare perfectă $\Rightarrow$ pe linia de 45° ; **formă de S**: cozi mai groase
- ▣ QQ sub distribuția normală: abateri sistematice; Student- t : mai aproape de 45°

Checklist: Fapt stilizat → Distribuție

Fapt stilizat	Normal	Student- t	Skew- t	Stabilă	EVT
Cozi groase	✗	✓	✓	✓	✓
Asimetrie	✗	✗	✓	✓	✗
Clusterizare vol.	✗	✗	✗	✗	✗
Kurtosis > 3	✗	✓	✓	✓	—
Varianță infinită	✗	*	✗	✓	—

- * Student- t : varianță infinită (*infinite variance*) doar dacă $\nu \leq 2$ (rar în practică)
- **Nicio distribuție statică** nu captează clusterizarea volatilității (*volatility clustering*) $\Rightarrow$ necesită modele dinamice (GARCH)
- Tabelul ghidează selecția: dacă datele prezintă asimetrie, eliminăm distribuția normală și Student- t simetrică

Graficul log-log al cozilor



SFM_ch2_log_tails

- ▣ Reprezentăm $\ln P(|X| > x)$ vs. $\ln x$
- ▣ Coadă tip lege putere (*power law*): dreaptă cu panta $-\alpha$
- ▣ Normală: se curbează în jos (descreștere exponențială)
- ▣ Student- t și Stabilă: aproximativ liniare (descreștere tip lege putere)

Criterii informaționale

Formulele AIC și BIC

$$\text{AIC} = -2\ell(\hat{\theta}) + 2k, \quad \text{BIC} = -2\ell(\hat{\theta}) + k \ln n$$

$\ell(\hat{\theta})$ = log-verosimilitatea maximizată; k = nr. parametri; n = dimensiune eșantion

Distribuție	k	AIC	BIC
Normală	2	Cel mai mare	Cel mai mare
Student- t	3	Mai mic	Mai mic
Student- t asim.	4	Cel mai mic	Cel mai mic
Stabilă	4	Comparabil	Comparabil

Teste formale de adecvare și raportul de verosimilitate

Teste de adecvare (GoF)

- ▣ **KS**: $H_0: F = F_\theta$ vs. $H_1: F \neq F_\theta$; $D_n = \sup_x |F_n(x) - F_\theta(x)|$
- ▣ **AD**: aceeași ipoteză, dar ponderat pe cozi:
$$A^2 = -n - \frac{1}{n} \sum (2i-1) [\ln F_\theta(x_{(i)}) + \ln(1 - F_\theta(x_{(n+1-i)}))]$$

Test raport de verosimilitate (LR) — modele imbricate

H_0 : modelul restrâns (ex. Normală) vs. H_1 : modelul general (ex. Student- t)

$$LR = -2 [\ell(\hat{\theta}_0) - \ell(\hat{\theta}_1)] \sim \chi^2(k_1 - k_0)$$

Respingem H_0 dacă $LR > \chi^2_{k_1 - k_0; 1-\alpha}$. Ex.: Normal ($k_0=2$) vs. t ($k_1=3$): $\chi^2(1)$.

Comparație cuprinzătoare a modelelor

Risk Measures Comparison (\$1M Portfolio)
VaR and Expected Shortfall under Different Distributions

Level	Normal VaR	Normal ES	Student-t VaR	Student-t ES	Empirical VaR	Empirical ES
95%	\$19,853	\$24,957	\$16,834	\$29,902	\$18,659	\$29,847
99%	\$28,178	\$32,317	\$35,036	\$58,092	\$34,839	\$50,602
99.9%	\$37,508	\$40,890	\$87,603	\$142,040	\$73,903	\$95,179

Data: S&P 500 log returns, 2000-2025 (n=6,537)
Student-t $d^2=2.64$ | ES values shown in red (ES $\geq$ VaR by construction)

 SFM_ch2_risk_comparison

- Nicio distribuție nu domină pe toate criteriile; Student- t : cel mai bun echilibru ajustare/parsimonie
- EVT: cea mai bună pentru cuantile extreme, dar agnostică față de centru

Testul Vuong și reguli de scor

- ▣ **Testul Vuong (1989):** compararea modelelor neimbricate (*non-nested* — modele care nu sunt subcazuri unul altuia)

$$V = \frac{\sum_{i=1}^n m_i}{\sqrt{n} \hat{\sigma}_m}, \quad m_i = \ln \frac{f_1(x_i; \hat{\theta}_1)}{f_2(x_i; \hat{\theta}_2)}$$

$V \sim N(0, 1)$ sub H_0 : modelele sunt echivalente

- ▣ **CRPS** (Continuous Ranked Probability Score):

$$\text{CRPS}(F, x) = \int_{-\infty}^{\infty} (F(y) - 1_{y \geq x})^2 dy$$

- ▣ Regulă de scor proprie: încurajează previziuni probabilistice oneste

Evaluarea densităților predictive

- ▣ **Testul Diebold–Mariano (1995):** H_0 : aceeași capacitate predictivă; H_1 : un model este superior

$$DM = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\bar{d})/n}} \xrightarrow{d} N(0, 1), \quad d_t = L(e_{1t}) - L(e_{2t})$$

$L(\cdot)$ = funcție de pierdere (ex. pătratică); e_{it} = eroarea de previziune a modelului i

- ▣ **Validare încrucișată:** evaluare k -fold a ajustării distribuționale
- ▣ **Transformata probabilității integrale (PIT):**
 - ▶ Dacă F este CDF-ul adevărat, atunci $U_i = F(X_i) \sim \text{Uniform}(0, 1)$
 - ▶ Testarea uniformității valorilor PIT $\Rightarrow$ testarea adecvării distribuționale
 - ▶ Transformata Rosenblatt (1952) pentru cazul multivariat
- ▣ Ajustarea in-sample $\neq$ capacitatea predictivă out-of-sample
- ▣ Risc de supraajustare: modelele complexe (GH, 5 parametri) pot supraajusta in-sample

Testul de echivalență a cozilor

Definiție 1 (Testul Jansen & de Vries (1991))

H_0 : indicele de coadă (*tail index*) este egal pentru două serii financiare: $\alpha_X = \alpha_Y$.
Statistica de test bazată pe estimatorul Hill:

$$T = \frac{\hat{\alpha}_{H,X} - \hat{\alpha}_{H,Y}}{\sqrt{\hat{\alpha}_{H,X}^2/k_X + \hat{\alpha}_{H,Y}^2/k_Y}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

unde k_X, k_Y sunt numerele de ordine statistice folosite.

Aplicație: S&P 500 vs. DAX

- ▣ $\hat{\alpha}_{H,SP} = 3,2$ ($k = 100$); $\hat{\alpha}_{H,DAX} = 2,9$ ($k = 100$)
- ▣ $T = \frac{3,2-2,9}{\sqrt{3,2^2/100+2,9^2/100}} = \frac{0,3}{0,432} = 0,69$; $|T| < 1,96 \Rightarrow$ **nu respingem H_0**
- ▣ Cozile S&P 500 și DAX au indiciile de coadă **statistic echivalent**

Intervale de încredere pentru estimatorii distribuționali

Observație 1 (Instabilitatea estimatorilor)

- Estimatorii $\hat{\alpha}_{\text{stabil}}$, $\hat{\nu}_t$, $\hat{\xi}_{\text{Hill}}$ sunt sensibili la dimensiunea eșantionului n
- Raportați întotdeauna erori standard, nu doar estimări punctuale!**

Estimator	$n = 500$	$n = 2.500$	$n = 10.000$
$\hat{\alpha}_{\text{stabil}}$	$1,70 \pm 0,12$	$1,70 \pm 0,05$	$1,70 \pm 0,03$
$\hat{\nu}_t$	$5,0 \pm 1,2$	$5,0 \pm 0,5$	$5,0 \pm 0,25$
$\hat{\xi}_{\text{Hill}}$	$0,30 \pm 0,08$	$0,30 \pm 0,04$	$0,30 \pm 0,02$

Implicație practică

- Cu $n = 500$, intervalul de încredere pentru $\hat{\nu}_t$ este $[3,8; 6,2]$ — diferență enormă în VaR!
- Estimările stabile necesită $n > 2.000$ pentru precizie rezonabilă

Exemplu AIC/BIC — Selecția modelului

Exercițiu

Ajustăm 4 distribuții pe $n = 2.500$ randamente zilnice S&P 500. Log-verosimilitatea maximă:

Model	k	$\hat{\ell}$	$AIC = -2\hat{\ell} + 2k$	$BIC = -2\hat{\ell} + k \ln n$	ΔAIC	ΔBIC
Normală	2	7.420	-14.836	-14.824	294	281
Student- t	3	7.555	-15.104	-15.086	26	19
Student- t asim.	4	7.569	-15.130	-15.105	0	0
Stabilă	4	7.563	-15.118	-15.093	12	12

Interpretare

- ▣ $\Delta AIC > 10$: dovadă puternică *contra* modelului (Burnham & Anderson)
- ▣ Normală: $\Delta = 294$ (respinsă masiv); Student- t sim.: $\Delta = 26$ (respinsă)
- ▣ **Student- t asimetrică câștigă** pe AIC și BIC; Stabilă aproape echivalentă ($\Delta = 12$)

De la marginale la dependență

- ▣ Până acum am modelat distribuția **unui singur activ** (marginală)
- ▣ Riscul de portofoliu depinde de **cum se mișcă activele împreună** — structura de dependență
- ▣ Corelația Pearson surprinde doar dependența **liniară**
- ▣ **Dependența de coadă**: activele tind să se prăbușească *simultan* în crize
 - ▶ În 2008: toate clasele de active au scăzut concomitent
 - ▶ Corelația crește exact când diversificarea este cea mai necesară

Marginale corecte + copulă greșită = portofoliu greșit

Două active cu aceleași marginale și aceeași corelație pot avea structuri de dependență extremală **complet diferite**. Alegerea copulei afectează decisiv estimarea riscului de portofoliu.

Capitolul 4 va trata copulele în detaliu: estimare, selecție, vine copulas și aplicații.

Teorema lui Sklar — Intuiție

Definiție 2 (Copulă — Intuitiv)

O **copulă** $C(u, v)$ este o funcție care leagă distribuțiile marginale de distribuția comună. Separă structura de dependență de comportamentul individual al fiecărui activ.

Teoremă 1 (Sklar, 1959)

Orice distribuție bivariată $F(x, y)$ poate fi scrisă ca:

$$F(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y))$$

unde F_X, F_Y sunt marginalele, iar C este copula (unică dacă marginalele sunt continue).

- ▣ **Pas 1:** Modelăm fiecare activ separat (marginalele — capitolul actual)
- ▣ **Pas 2:** Modelăm dependența prin copulă (**Capitolul 4**)
- ▣ Aceasta permite combinații flexibile: marginale Student- t + copulă Clayton

Familii de copule și dependența de coadă

Copulă	Param.	λ_L (coadă inf.)	λ_U (coadă sup.)	Utilizare
Gaussiană	ρ	0	0	Benchmark
Student- t	ρ, ν	> 0	> 0	Riscul de coadă simetric
Clayton	θ	> 0	0	Prăbușiri comune
Gumbel	θ	0	> 0	Co-mișcări pozitive
Frank	θ	0	0	Dependență simetrică

- ▣ **Coeficientul de dependență de coadă (*tail dependence*):** $\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0} P(U \leq u \mid V \leq u)$
- ▣ Copulă Gaussiană: $\lambda_L = \lambda_U = 0$ chiar dacă $\rho = 0,9$ — **subestimează** riscul de prăbușire comună
- ▣ Copulă Student- t : $\lambda_L = \lambda_U = 2 t_{\nu+1} \left(-\sqrt{(\nu+1)(1-\rho)/(1+\rho)} \right) > 0$
- ▣ **Lecție:** Corelația mare $\neq$ dependență de coadă puternică

Implicații pentru managementul riscului de portofoliu

- ▣ **VaR de portofoliu sub diferite copule:**
 - ▶ Copulă Gaussiană $\Rightarrow$ VaR de portofoliu mai mic (subestimează riscul comun)
 - ▶ Copulă Student- $t \Rightarrow$ VaR mai mare (captează prăbușiri simultane)
 - ▶ Diferența crește dramatic pentru cuantile extreme ($< 0,1\%$)
- ▣ **Basel III:** cere modele de dependență de coadă pentru portofolii de tranzacționare
- ▣ **Estimare:** pseudo-MLE (Joe, 1997); inversiunea rangurilor $\hat{u}_i = R_i/(n+1)$
- ▣ **Selecția copulei:** AIC/BIC pe funcția de verosimilitate a copulei
- ▣ **Vine copulae** (Aas et al., 2009): extensie la dimensiuni mari prin descompunere pair-copula

Observație 2

- ▣ Capitolul 4 va trata copulele în detaliu. Aici reținem: **marginale corecte + copulă greșită = risc de portofoliu greșit**

Întrebarea de risc

- ▣ O bancă deține un portofoliu în valoare de \$1.000.000
- ▣ Întrebarea fundamentală: „Care este pierderea maximă pe care o putem aștepta într-o zi dată, cu un nivel specificat de încredere?”
- ▣ **Intuiția cuantilei:** cuantila de ordin α q_α satisface:

$$P(r_t \leq q_\alpha) = \alpha$$

- ▣ Pentru $\alpha = 0,01$: $q_{0,01}$ este depășit (la scădere) doar 1% din timp
- ▣ În 100 de zile de tranzacționare, ne așteptăm să pierdem mai mult decât $q_{0,01}$ în ≈ 1 zi

Value-at-Risk — Convenții de semn și proprietăți

Definiția de lucru a fost introdusă în Secțiunea 4. Aici studiem convențiile și limitările.

- ▣ Cu probabilitatea $(1 - \alpha)$, pierderea zilnică **nu va depăși** $\text{VaR}_\alpha = -F^{-1}(\alpha)$
- ▣ **Convenție:** „VaR 1%” înseamnă $\alpha = 0,01$ (pierdere depășită cu probabilitate 1%)
- ▣ Semnul minus convertește cuantila negativă într-o sumă pozitivă de pierdere

Convenție de semn — atenție!

- ▣ **Secțiunile 2–8:** $\text{VaR}_\alpha = -F^{-1}(\alpha)$ — cuantila cu semn schimbat (rezultat pozitiv)
- ▣ **Secțiunea EVT:** u și VaR sunt magnitudini de pierdere (pozitive)
- ▣ Ambele convenții dau **aceeași valoare numerică**

VaR sub ipoteza normală

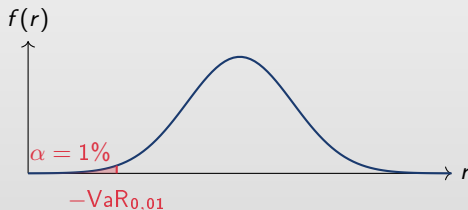
- Dacă $r_t \sim N(\mu, \sigma^2)$:

$$\text{VaR}_\alpha = -(\mu + \sigma \cdot z_\alpha), \quad z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$$

- **Exemplu:** $\mu = 0$, $\sigma = 0,015$, portofoliu = \$1M, $\alpha = 0,01$:

$$\text{VaR}_{0,01} = -0,015 \times (-2,326) \times 1.000.000 = \$34.890$$

- În 99 din 100 de zile de tranzacționare, pierderea nu va depăși \$34.890

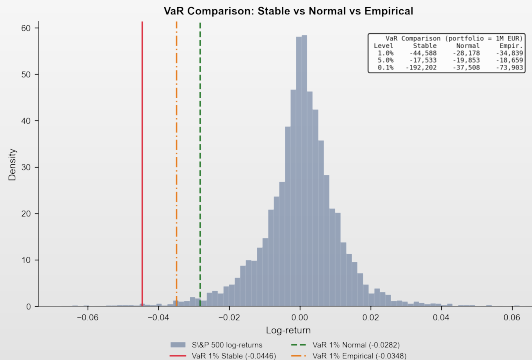


De ce contează distribuția pentru VaR

Model	VaR 1% (\$1M)	VaR 0,1% (\$1M)	Raport față de normală
Normală	\$27.000	\$35.900	1,0×
Student- t ($\nu = 5$)	\$33.700	\$58.400	1,6×
Stabilă ($\alpha = 1,7$)	\$41.000	\$90.200	2,5×

- La 1%: diferență moderată ($\sim 25\%$); la 0,1%: **dramatică** (1,6–2,5×
- **Concluzie:** Alegerea distribuției afectează direct capitalul necesar
- Distribuția stabilă necesită capital de 2,5× mai mare decât cea normală la cuantila 0,1%

VaR sub diferite distribuții — Vizualizare



- Divergența cozilor crește dramatic cu nivelul de încredere
- La 0,1%, distribuția normală subestimează riscul cu **peste 60%** (Student-*t*) și **150%** (stabilă)
- Cerințele de capital Basel depind critic de ipoteza distribuțională

 SFM_ch2_var_comparison

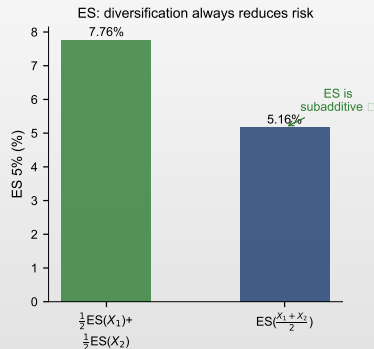
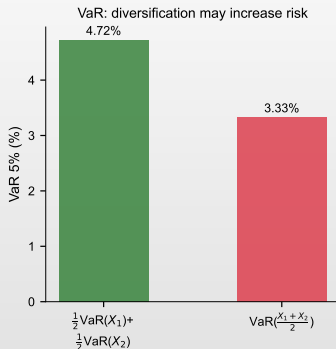
Limitările VaR

- ▣ VaR ne spune *pragul* celei mai rele fracțiuni α din zile
- ▣ Dar **nu** cât de rău devine lucrurile *dincolo* de acel prag
- ▣ VaR nu distinge între „pierderea de \$35k” și „pierderea de \$200k” — ambele sunt „depășiri VaR”
- ▣ O măsură mai bună (**Expected Shortfall**) rezolvă această limitare

VaR nu este subaditivă

- ▣ Diversificarea poate *crește* VaR: $\text{VaR}(X + Y) > \text{VaR}(X) + \text{VaR}(Y)$ este posibil
- ▣ Acest lucru contrazice principiul că diversificarea reduce riscul

VaR vs. ES — Subaditivitate vizuală



- Stânga: VaR a portofoliului poate depăși suma VaR-urilor individuale (non-subaditivă)
- Dreapta: ES a portofoliului este **întotdeauna** $\leq$ suma ES-urilor (subaditivă, coerentă)

SFM_ch2_var_subadditivity

Expected Shortfall

Definiție 3 (Expected Shortfall)

Expected Shortfall (CVaR) la nivelul α :

$$ES_{\alpha} = -\frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} F^{-1}(p) dp \stackrel{F \text{ cont.}}{=} \mathbb{E}[-X \mid X \leq -\text{VaR}_{\alpha}].$$

Egalitatea cu așteptarea condiționată vale pentru distribuții **continue**.

- **Interpretare:** pierderea medie dat fiind că suntem în cele mai rele $\alpha\%$ din zile
- Sub normalitate: $ES_{\alpha} = -\mu + \sigma \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{\alpha}$
- ES este o măsură **coerentă** de risc (subaditivă):

$$ES(X + Y) \leq ES(X) + ES(Y)$$

- Diversificarea reduce întotdeauna ES (spre deosebire de VaR)

Axiomele coerență — Artzner et al. (1999)

Definiție 4 (Măsură coerentă de risc)

O funcțională $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ este o **măsură coerentă de risc** (*coherent risk measure*) dacă satisface:

- A1. Monotonie:** $X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \geq \rho(Y)$
 - Pierderi mai mari $\Rightarrow$ risc mai mare
- A2. Subaditivitate:** $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$
 - Diversificarea nu crește riscul
- A3. Omogenitate pozitivă:** $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$, $\lambda > 0$
 - Dublarea poziției dublează riscul
- A4. Invariantă la translație:** $\rho(X + c) = \rho(X) - c$
 - Adăugarea de numerar reduce riscul cu aceeași sumă

Rezultat cheie

- **ES este coerentă** (satisface A1–A4); **VaR nu este** (eșuează la A2)

Backtesting VaR — Testele Kupiec și Christoffersen

Testul Kupiec (1995) — acoperire necondiționată

H_0 : rata depășirilor = α vs. H_1 : rata depășirilor $\neq \alpha$

$$LR_{uc} = -2 \ln \frac{\alpha^x (1 - \alpha)^{n-x}}{\hat{p}^x (1 - \hat{p})^{n-x}} \sim \chi^2(1), \quad \hat{p} = x/n$$

Testul Christoffersen (1998) — independența depășirilor

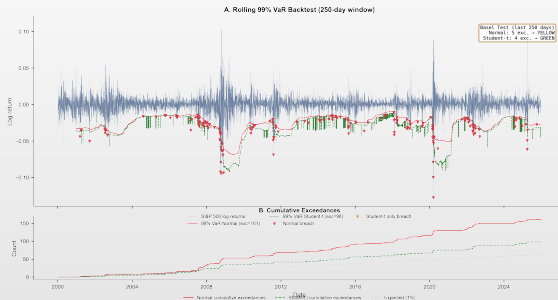
H_0 : depășirile sunt independente vs. H_1 : depășirile se clusterizează

$$LR_{ind} = -2 \ln \frac{\hat{p}^{n_{11}} (1 - \hat{p})^{n_{00}}}{\hat{p}_{01}^{n_{01}} (1 - \hat{p}_{01})^{n_{00}} \hat{p}_{11}^{n_{11}} (1 - \hat{p}_{11})^{n_{10}}} \sim \chi^2(1)$$

n_{ij} = tranzițiile de la starea i la j ; $\hat{p}_{ij} = n_{ij} / (n_{i0} + n_{i1})$

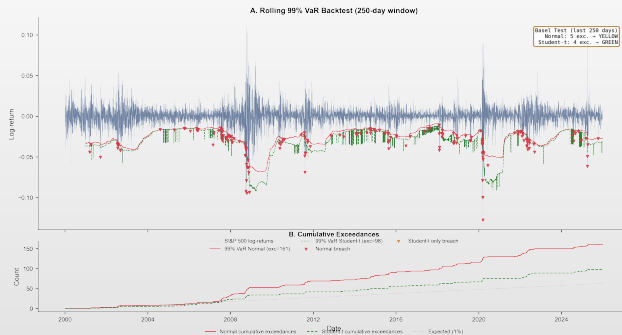
Test combinat: $LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind} \sim \chi^2(2)$. **Basel III/IV:** de la VaR 1% (10 zile) la ES 2,5%.

Backtesting — Vizualizare



- ▣ Semafor Basel: Verde (0–4 depășiri), Galben (5–9), Roșu (10+) per 250 zile
- ▣ Normală: prea multe depășiri ⇒ respinsă de Kupiec

Rezultate backtest VaR



 SFM_ch2_backtest_results

- Normală: prea multe depășiri VaR $\Rightarrow$ respinsă de Kupiec
- Student-t: depășiri aproape de rata așteptată; EVT: conservator dar robust
- **Riscul de model:** rezervele de capital depind de modelul ales

Măsurile spectrale de risc și elicitabilitate

■ Măsurile spectrale de risc:

$$\rho_{\phi}(X) = - \int_0^1 \phi(p) F^{-1}(p) dp$$

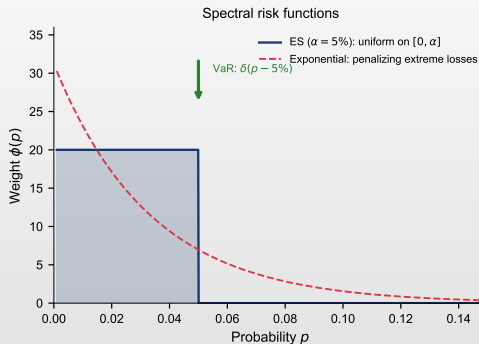
cu spectrul de risc $\phi(p) \geq 0$, $\int_0^1 \phi(p) dp = 1$, ϕ nedescrescătoare

■ VaR: $\phi(p) = \delta(p - \alpha)$; ES: $\phi(p) = \frac{1}{\alpha} 1_{p \leq \alpha}$

■ Elicitabilitate (Gneiting, 2011):

- ▶ VaR este elicibilă: optimală sub pierderea cuantică $\rho(x, q) = (\alpha - 1_{x < q})(x - q)$
- ▶ ES **nu** este elicibilă singură
- ▶ (VaR, ES) este elicibilă conjunct (Fissler & Ziegel, 2016)

Funcțiile spectrale de risc — Vizualizare



 SFM_ch2_spectral

- VaR: pondere concentrată într-un singur punct (δ la $p = \alpha$) — ignoră ce se întâmplă dincolo
- ES: pondere uniformă pe $[0, \alpha]$ — media tuturor pierderilor din coada de $\alpha\%$
- Spectrul exponențial: penalizează mai mult pierderile cele mai extreme

Alocarea capitalului și riscul de model

- ▣ **Alocarea Euler:** alocăm ES-ul portofoliului pe pozițiile individuale:

$$ES_i = \mathbb{E}[-X_i \mid X_{\text{total}} \leq -\text{VaR}_\alpha]$$

- ▣ Ipotezele distribuționale afectează direct capitalul alocat per departament
- ▣ **Distribuții stabile și riscul extrem:** ES sub distribuții stabile diverge pe măsură ce $\alpha \rightarrow 0$ mai rapid decât sub Student- t
- ▣ **Cuantificarea riscului de model:** calculăm VaR/ES sub mai multe modele; intervalul cuantifică incertitudinea modelului
- ▣ Răspunsul reglementator: VaR stresat, suplimente de risc de model

VaR cu fereastră mobilă (*rolling window*)

Definiție 5 (Rolling VaR)

La momentul t , estimăm parametrii $\hat{\theta}_t$ pe fereastră $\{r_{t-W+1}, \dots, r_t\}$ de lungime W (tipic $W = 250$ zile $\approx$ 1 an). VaR-ul *out-of-sample* pentru ziua $t + 1$:

$$\widehat{\text{VaR}}_{\alpha, t+1} = -F^{-1}(\alpha; \hat{\theta}_t)$$

- ▣ **Procedura:** La fiecare zi t , fereastră alunecă cu o observație; parametrii se re-estimează
- ▣ **VaR parametric** (Normal, Student- t): $\hat{\theta}_t = (\hat{\mu}_t, \hat{\sigma}_t, [\hat{\nu}_t])$
- ▣ **VaR istoric** (neparametric): $\widehat{\text{VaR}}_{\alpha, t+1} = -r_{(\lceil \alpha W \rceil)}$ — cuantila empirică a ferestrei
- ▣ **Backtest:** comparăm r_{t+1} cu $-\widehat{\text{VaR}}_{\alpha, t+1}$; dacă $r_{t+1} < -\widehat{\text{VaR}}$, avem o depășire (*exceedance*)
- ▣ Proporția depășirilor $\hat{p} = x/n$ ar trebui să fie $\approx \alpha$; testăm cu Kupiec/Christoffersen

Backtest out-of-sample — Compararea modelelor

Exercițiu: Fereastră mobilă 250 zile, VaR 1%, S&P 500 (2010–2025)

Model	Depășiri așteptate	Depășiri reale	p -value Kupiec
Normal	37	58	0,001
Student- t ($\nu = 5$)	37	41	0,42
Stabilă ($\alpha = 1,7$)	37	34	0,55
EVT-GPD	37	30	0,18

Interpretare

- ▣ Distribuția normală: respinsă ($p < 0,05$); Student- t și stabilă: acceptate
- ▣ EVT: conservator (mai puține depășiri) — **nu** neapărat cel mai bun
- ▣ Calibrare $\neq$ discriminare: modelul cu cele mai puține depășiri poate supraestima riscul

Exemplu ES — Calcul pas cu pas sub ipoteza normală

Exercițiu

Portofolii €500.000, randamente zilnice $r_t \sim N(0,0002, 0,02^2)$. Calculați $ES_{5\%}$.

Rezolvare

Formula: $ES_{\alpha} = -\mu + \sigma \phi(z_{\alpha})/\alpha$. $z_{0,05} = -1,645$, $\phi(-1,645) = 0,1031$

$$ES_{0,05} = -0,0002 + 0,02 \times \frac{0,1031}{0,05} = -0,0002 + 0,04124 = 4,10\% \Rightarrow €500K \times 4,1\% = €20.520$$

Comparație VaR vs. ES

- ▣ $VaR_{5\%} = 3,27\%$ (€16.350) vs. $ES_{5\%} = 4,10\%$ (€20.520) — cu **25,5%** mai mare
- ▣ ES ne spune cât de rău este *în medie* când depășim VaR

Studiu de caz: Crizele 2008 și 2020 — Ce spun modelele?

	15 sept. 2008 (Lehman)		16 mar. 2020 (Covid)	
	r_t	Echivalent σ	r_t	Echivalent σ
S&P 500	-4,71%	$4,7\sigma$	-11,98%	12σ

Model	$P(r < -4,71\%)$	$P(r < -11,98\%)$	Verdict
Normală ($\sigma = 1\%$)	$2,6 \times 10^{-6}$	≈ 0	Imposibil
Student- t ($\nu = 5$)	$6,8 \times 10^{-4}$	$4,1 \times 10^{-6}$	Rar, dar posibil
Stabilă ($\alpha = 1,7$)	$2,1 \times 10^{-3}$	$3,0 \times 10^{-4}$	Previzibil
EVT-GPD ($\xi = 0,3$)	$1,5 \times 10^{-3}$	$1,8 \times 10^{-4}$	Previzibil

Concluzia

- Doar modelele cu cozi groase (*heavy tails*) (Student- t , stabilă, EVT) atribuie probabilități rezonabile evenimentelor extreme observate

Studiu de caz: Backtest VaR în jurul crizelor

Lehman (sept.–oct. 2008)

- ▣ 23 zile de tranzacționare
- ▣ VaR 1% (normală) depășit: **9 zile** (39%!)
- ▣ VaR 1% (Student- t) depășit: **5 zile** (22%)
- ▣ VaR 1% (EVT) depășit: **3 zile** (13%)

Covid (mar. 2020)

- ▣ 22 zile de tranzacționare
- ▣ VaR 1% (normală) depășit: **11 zile** (50%!)
- ▣ VaR 1% (Student- t) depășit: **7 zile** (32%)
- ▣ VaR 1% (EVT) depășit: **4 zile** (18%)

Lecții pentru practică

- ▣ Niciun model static nu funcționează perfect în criză (clusterizarea volatilității!)
- ▣ Modelele cu cozi groase **eșuează mai puțin grav**
- ▣ Soluție: GARCH cu inovații Student- t + recalibrare frecventă (fereastră mobilă (*rolling window*))
- ▣ Basel III impune VaR **stresat** calibrat pe cea mai rea perioadă din ultimul an

Formularul VaR / ES — Toate distribuțiile

Model	VaR_α	ES_α
Normală (μ, σ)	$-\mu - \sigma \Phi^{-1}(\alpha)$	$-\mu + \sigma \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{\alpha}$
Student-t (μ, σ, ν)	$-\mu - \sigma \sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}} t_\nu^{-1}(\alpha)$	$-\mu + \sigma \sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}} \frac{f_\nu(t_\nu^{-1}(\alpha))}{\alpha} \frac{\nu + (t_\nu^{-1}(\alpha))^2}{\nu-1}$
Stabilă $(\alpha_s, \beta, \gamma, \delta)$	$-\delta - \gamma S_{\alpha_s, \beta}^{-1}(\alpha)$ (num.)	$-\delta + \gamma \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha S_{\alpha_s, \beta}^{-1}(p) dp$ (num.)
EVT-GPD (u, ξ, σ)	$u + \frac{\sigma}{\xi} \left[\left(\frac{n\alpha}{N_u} \right)^{-\xi} - 1 \right]$	$\frac{\text{VaR}_\alpha}{1-\xi} + \frac{\sigma - \xi u}{1-\xi}$

Notății: Φ, ϕ = CDF/PDF normală; t_ν^{-1}, f_ν = cuantila/PDF Student-t; S^{-1} = cuantila stabilă; N_u = nr. depășiri, n = obs. totale.

GARCH — Intuiție

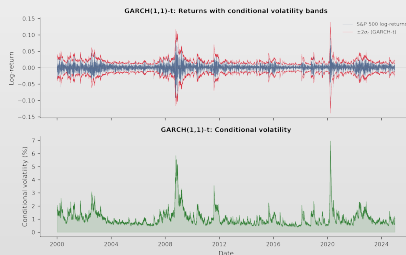
- ▣ Randamentele sunt necorelate dar **nu independente**: volatilitatea se schimbă în timp
- ▣ **GARCH(1,1)**: varianța depinde de șocurile trecute și varianța trecută:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

- ▣ α : reacția la șocuri; β : persistență; $\alpha + \beta < 1$: staționaritate
- ▣ După filtrarea GARCH, reziduurile standardizate (*standardized residuals*) $z_t = \epsilon_t / \sigma_t$ sunt aproximativ i.i.d.
- ▣ Dar z_t arată încă **exces de kurtosis** (*excess kurtosis*) $\Rightarrow$ se folosesc inovații Student- t sau Student- t asimetrică

GARCH cu inovații non-Gaussiene

- ▣ **GARCH-t:** $r_t = \mu + \sigma_t z_t$, $z_t \sim t_\nu$
- ▣ Surprinde simultan clusterizarea volatilității și cozile groase
- ▣ **GARCH asimetric:**
 - ▶ GJR-GARCH: $\sigma_t^2 = \omega + (\alpha + \gamma 1_{\epsilon_{t-1} < 0})\epsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$
 - ▶ EGARCH: $\ln \sigma_t^2 = \omega + \alpha|z_{t-1}| + \gamma z_{t-1} + \beta \ln \sigma_{t-1}^2$
- ▣ $\gamma > 0$ în GJR sau $\gamma < 0$ în EGARCH surprinde **efectul de levier (leverage effect)**



Mixturi Gaussiene și schimbarea de regim

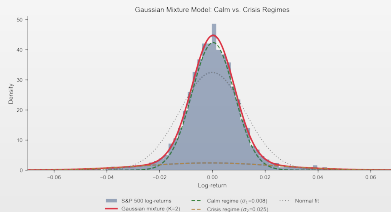
Mixturi Gaussiene

$$f(x) = \sum_{k=1}^K \pi_k \phi(x; \mu_k, \sigma_k^2)$$

- $K = 2$: regim calm (σ_1 mic) + criză (σ_2 mare); EM

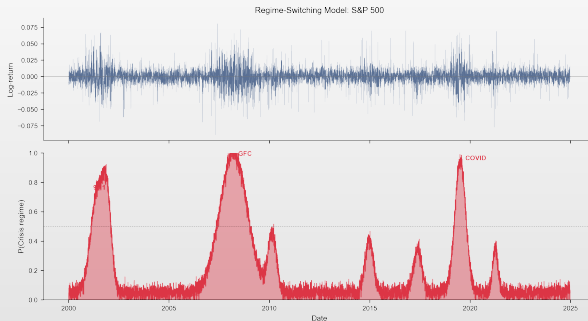
Schimbarea de regim Hamilton (1989)

- Lanț Markov latent $s_t \in \{1, 2\}$; $r_t | s_t \sim N(\mu_{s_t}, \sigma_{s_t}^2)$
- Probabilitățile de tranziție estimate prin MLE



SFM_ch2_mixture

Clasificarea regimurilor



 SFM_ch2_modern_extensions

- Probabilitatea netedă de a fi în regimul de „criză” (2001, 2008–2009, 2020)
- Schimbarea de regim surprinde riscul de coadă variabil în timp

Volatilitate stochastică și difuzii cu salturi

▣ Volatilitate stochastică:

$$d \ln \sigma_t^2 = \kappa(\theta - \ln \sigma_t^2) dt + \sigma_v dW_t^\nu$$

cu $\text{Corr}(dW_t, dW_t^\nu) = \rho$ (levier)

▣ Difuzie cu salturi (Merton, 1976):

$$dS/S = \mu dt + \sigma dW + J dN_t$$

unde N_t este un proces Poisson, $J \sim N(\mu_J, \sigma_J^2)$

- ▣ Kou (2002): salturi dublu-exponențiale pentru tratabilitate analitică
- ▣ Aceste modele generează simultan cozi groase și clusterizarea volatilității

Modele conduse de procese Lévy

- ▣ **Modelul BNS** (Barndorff-Nielsen & Shephard, 2001):

$$dX_t = (\mu + \beta\sigma_t^2) dt + \sigma_t dW_t, \quad d\sigma_t^2 = -\lambda\sigma_t^2 dt + dL_{\lambda t}$$

unde L_t este un subordonator (proces Lévy crescător)

- ▣ **GARCH cu inovații stabile:** Mittnik & Rachev (1993)
- ▣ **Volatilitate realizată:** $RV_t = \sum_{i=1}^M r_{t,i}^2$ (frecvență înaltă)
- ▣ GARCH integrat fracționar (FIGARCH) pentru memoria lungă în volatilitate

Măsuri realizate și microstructură

- ▣ **Varianța realizată:** $RV_t = \sum_{i=1}^M r_{t,i}^2 \xrightarrow{P} \int_0^1 \sigma_s^2 ds$ când $M \rightarrow \infty$
- ▣ **Zgomot de microstructură:** la frecvențe foarte înalte, săritura bid-ask distorsionează RV
- ▣ **Corecții:** subeșantionare, estimatori kernel (Barndorff-Nielsen et al., 2008)
- ▣ **Detectarea salturilor:** variația bipower separă componentele continuă și de salt
- ▣ Distribuția randamentelor *condiționată de volatilitatea realizată* este mai aproape de Gaussiană (deformarea timpului)

Exemplu GARCH(1,1) — Calcul pas cu pas

Exercițiu

Un model GARCH(1,1) estimat pe randamentele zilnice S&P 500 dă: $\omega = 0,00001$, $\alpha = 0,09$, $\beta = 0,90$.
Calculați varianța necondiționată, persistența și timpul de înjumătățire.

Rezolvare

1. **Persistență:** $\alpha + \beta = 0,99 < 1$ ✓ (staționaritate)
2. **Varianța necondiționată:** $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta} = \frac{0,00001}{0,01} = 0,001 \Rightarrow \bar{\sigma} = 3,16\%$
3. **Half-life:** $h = \frac{\ln 2}{\ln(1/0,99)} = \frac{0,693}{0,01005} \approx 69$ zile (≈ 3 luni)

Observație 3

- Un șoc de volatilitate se reduce la jumătate abia după ≈ 69 zile de tranzacționare

Studiu de caz: Distribuțiile candidate

Cele 6 distribuții testate (rezumat din Cap. 2a–2b)

1. **Normală** ($k=2$): $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ — cozi exponențiale
2. **Student- t** ($k=3$): cozi $\sim |x|^{-(\nu+1)}$; $\hat{\nu} \approx 3-5$ pentru acțiuni
3. **Cauchy**: Student- t cu $\nu = 1$ — $\mathbb{E}[X]$ nedefinit, cozi foarte groase
4. **Laplace** ($k=2$): GED cu $\nu = 1$, i.e. $f(x) \propto \exp(-|x|/b)$ — exponențială dublă
5. **GED** ($k=3$): $f(x; \nu) = \frac{\nu}{2\lambda \Gamma(1/\nu)} \exp(-|\frac{x}{\lambda}|^\nu)$; $\nu < 2 \Rightarrow$ cozi mai groase ca distribuția normală
6. **Historical VaR**: VaR = cuantila empirică a ferestrei de randamente — neparametric, fără ipoteză distribuțională

Observație 4

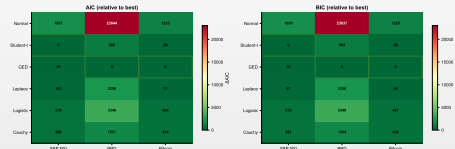
- ▣ Selecția se face prin $AIC = -2\ell + 2k$ și $BIC = -2\ell + k \ln n$ (cf. Secțiunea 8)

Studiu de caz: Selecția modelului

Heatmap AIC/BIC: 6 distribuții $\times$ 3 active

- Culorile indică ΔAIC relativ la cel mai bun model
- Chenarul verde = modelul optim per activ
- **Student-t** și **GED** domină pe S&P 500 și BRD
- Pentru Bitcoin: GED câștigă ușor (cozi mai flexibile)
- Normal și Cauchy sunt consistent cele mai slabe

SFM_ch2_case_study_2c



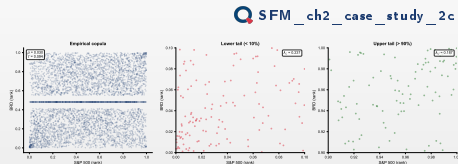
Studiu de caz: Dependența de coadă

Copula empirică: S&P 500 vs BRD

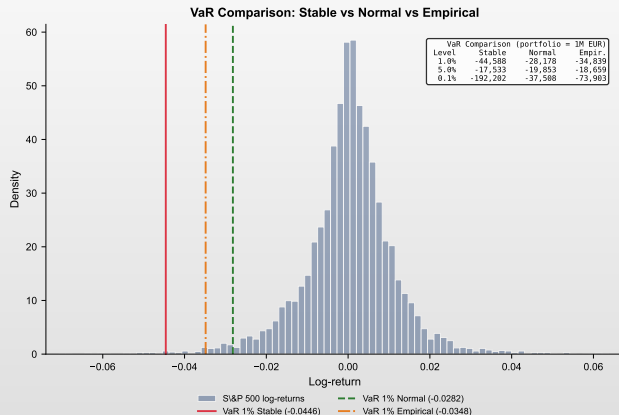
Transformare rang $\rightarrow$ uniform $[0, 1]$:

- ▣ **Panoul stâng:** copula completă — dependență vizibilă
- ▣ **Centru:** zoom coada inferioară ($< 10\%$) — $\hat{\lambda}_L > 0$
- ▣ **Dreapta:** zoom coada superioară ($> 90\%$) — $\hat{\lambda}_U$ mai mic
- ▣ **Asimetrie:** cozile stângi mai dependente decât cele drepte

$\Rightarrow$ *Diversificarea scade exact când avem nevoie de ea!*



Studiu de caz: VaR/ES pe toate modelele



VaR/ES 1% pe 6 distribuții $\times$ 3 active. Cauchy supraestimează; Student-t, GED: interval rezonabil. ES diferențiază mai bine (coerență).

Studiu de caz: Backtest VaR pe crize

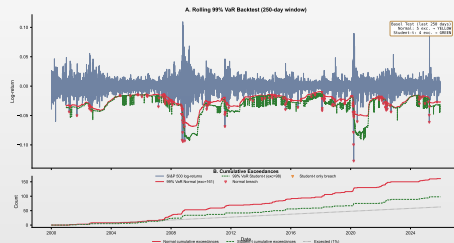
Rolling VaR 1%: GFC 2008 și COVID 2020

Fereastră rulantă de 250 zile:

- ▣ **Normal VaR** ($= 2,326 \hat{\sigma}$): cele mai multe depășiri
- ▣ **Student-t VaR**: mai puține depășiri
- ▣ **Historical VaR** (cuantila empirică a ferestrei): se adaptează cu întârziere

Test Kupiec: $LR_{uc} = -2 \ln \frac{\alpha^x (1-\alpha)^{n-x}}{\hat{p}^x (1-\hat{p})^{n-x}}$; $\hat{p} = x/n$

SFM_ch2_case_study_2c



Studiu de caz: Semaforul Basel

Traffic Light Test (250 zile, VaR 1%)

Clasificarea Basel:

- ▣ **Verde**: 0–4 exceedances (model acceptat)
- ▣ **Galben**: 5–9 exceedances (penalizare capital)
- ▣ **Roșu**: ≥ 10 exceedances (model respins)

Numerele din cercuri = exceedances observate
 Kupiec: Normal respins ($\hat{p} \gg 1\%$, LR_{uc} : $p < 0,001$); Student-t acceptat ($\hat{p} \approx 1\%$).

Risk Measures Comparison (\$1M Portfolio)
 VaR and Expected Shortfall under Different Distributions

Level	Normal VaR	Normal ES	Student-t VaR	Student-t ES	Empirical VaR	Empirical ES
95%	\$19,053	\$24,957	\$19,034	\$29,932	\$19,059	\$29,247
99%	\$28,178	\$32,317	\$28,036	\$58,092	\$34,839	\$50,802
99.9%	\$37,508	\$40,890	\$37,803	\$142,040	\$73,903	\$95,179

(Data: S&P 500 log returns, 2000–2008 (incl. 2007))
 Student-t (df=2.84) | ES values shown in red (ES or VaR by construction)

Studiu de caz: Lecția finală

Pipeline complet de măsurare a riscului

1. **Datele:** descarcă, curăță, calculează log-randamente
2. **Diagnostic:** kurtosis, QQ-plot, teste de normalitate
3. **Estimare index coadă:** Hill plot, $\hat{\alpha}_{\text{Hill}}$
4. **Selectează distribuția:** AIC/BIC pe set de candidați
5. **Calculează VaR/ES:** la cuantilele relevante (1%, 2.5%)
6. **Validează:** backtest + semaforul Basel

Reguli practice

- ▣ Nu folosi niciodată *doar* modelul Normal pentru managementul riscului
- ▣ Întotdeauna fă backtest *înainte* de a lua o decizie
- ▣ Diversificarea **scade** în perioade de criză — ia în calcul dependența de coadă

Concluzii cheie

Rezumat

- ▣ **Randamentele financiare nu sunt normale:** cozi groase (*heavy tails*), asimetrie, clusterizarea volatilității
- ▣ **Student-*t*:** cel mai simplu model cu cozi groase, surprinde excesul de kurtosis (*excess kurtosis*)
- ▣ **Distribuții stabile:** motivate teoretic (TLCG), varianță infinită posibilă
- ▣ **EVT:** cadru riguros pentru modelarea cozilor extreme
- ▣ **VaR și ES:** alegerea distribuției afectează direct măsurarea riscului
 - ▶ $\text{VaR } 1\% \text{ sub Normală} \ll \text{VaR } 1\% \text{ sub Student-}t \ll \text{VaR } 1\% \text{ sub Stabilă}$
- ▣ **Nu există un singur model cel mai bun:** alegerea depinde de aplicație

Formule importante

Distribuții cheie

- ▣ **Normală:** $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
- ▣ **Student-t:** $\kappa_e = 6/(\nu - 4)$ pentru $\nu > 4$
- ▣ **Stabilă:** $\varphi(t) = \exp\{i\delta t - \gamma|t|^\alpha[1 + i\beta\text{sgn}(t)\omega]\}$

Măsurile de risc

- ▣ **VaR:** $P(X \leq -\text{VaR}_\alpha) = \alpha$
- ▣ **ES:** $\mathbb{E}[-X \mid X \leq -\text{VaR}_\alpha]$
- ▣ **GPD:** $G_{\xi,\sigma}(y) = 1 - (1 + \xi y/\sigma)^{-1/\xi}$

Criterii de selecție

- ▣ **AIC:** $-2\ell + 2k$
- ▣ **BIC:** $-2\ell + k \ln n$
- ▣ **QQ:** grafic cuantilă-cuantilă

Fapte stilizate

- ▣ Exces de kurtosis > 0
- ▣ Asimetrie negativă
- ▣ Clusterizarea volatilității
- ▣ $|r_t|$ autocorelat

Teme pentru acasă

Anul 3

1. Descărcați 5 ani de prețuri zilnice pentru o acțiune. Calculați log-randamentele, momentele eșantionului și testați normalitatea (Jarque–Bera).
2. Ajustați distribuțiile normală și Student- t prin MLE. Comparați prin AIC/BIC și grafice QQ.
3. Calculați VaR 1% și VaR 0,1% sub ambele modele pentru un portofoliu de \$1M.

Master

4. Ajustați Student- t asimetrică Hansen și calculați ES la nivelul de 1%.
5. Efectuați un backtest VaR cu fereastră mobilă (250 zile) și aplicați testul Kupiec.

Teme avansate

6. Ajustați o distribuție stabilă pe datele voastre folosind MLE. Raportați $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta})$.
7. Aplicați metoda POT: selectați pragul, ajustați GPD, calculați VaR 1% și ES bazate pe EVT.
8. Comparați toate modelele (normală, Student- t , Student- t asim., stabilă, EVT) într-un tabel rezumativ.

Master:

9. Implementați estimatorul Hill. Creați un grafic Hill (*Hill plot*) și discutați compromisul bias-varianță.
10. Ajustați un model GARCH(1,1)- t . Comparați distribuția reziduurilor standardizate (*standardized residuals*) cu distribuția necondiționată a randamentelor.

Direcții de cercetare

▣ Întrebări deschise:

- ▶ Indicele real de coadă al randamentelor financiare este mai aproape de $\alpha \approx 3$ (varianță finită) sau $\alpha \approx 1,7$ (varianță infinită)?
- ▶ Cum ar trebui să agregăm riscul când distribuțiile au varianță infinită?
- ▶ Poate învățarea automată să îmbunătățească previziunea distribuțională?

▣ Lecturi recomandate:

- ▶ Cont (2001): „Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues”
- ▶ McNeil, Frey & Embrechts (2015): *Quantitative Risk Management*
- ▶ Nolan (2020): *Stable Distributions — Models for Heavy Tailed Data*
- ▶ Rachev (2003): *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*

Întrebarea 4

Întrebare

- Un portofoliu de \$10M are VaR zilnic la 1% de: \$230k (normală), \$380k (Student- t , $\nu = 5$), \$520k (stabilă, $\alpha = 1,7$). Ce concluzie trageți?

Variante de răspuns

- (A) Distribuția normală este cea mai conservatoare
- (B) Alegerea distribuției nu afectează semnificativ VaR
- (C) Subestimarea riscului de coadă sub ipoteza normală poate fi de $2\times$ sau mai mult
- (D) Distribuția stabilă subestimează întotdeauna riscul

Întrebarea 4: Răspuns

Răspuns: (C)

- ▣ VaR normală = \$230k, VaR stabilă = \$520k $\Rightarrow$ raportul este $520/230 \approx 2,3\times$.
- ▣ Distribuția normală **subestimează** riscul, nu este conservatoare (elimină A).
- ▣ Diferența de \$290k ($= 520 - 230$) este **foarte semnificativă** din perspectiva capitalului (elimină B).
- ▣ Aceasta demonstrează de ce Basel III impune modele cu cozi groase.

Întrebarea 6

Întrebare

- ☐ Modelul A are $AIC = 5200$ și modelul B are $AIC = 5180$ pe aceleași date. Ce concluzie este corectă?

Variante de răspuns

- (A) Modelul A este mai bun (AIC mai mare)
- (B) Modelul B este mai bun (AIC mai mic = mai bun)
- (C) Nu putem compara fără BIC
- (D) Diferența nu este semnificativă

Întrebarea 6: Răspuns

Răspuns: (B)

- ▣ $AIC = -2\ell + 2k$: valori mai mici indică un echilibru mai bun între ajustare și complexitate.
- ▣ $\Delta AIC = 5200 - 5180 = 20 > 10$, ceea ce indică o preferință **puternică** pentru modelul B.
- ▣ (A) confundă direcția: AIC mai mic este mai bun.
- ▣ (C) este greșit: AIC singur este suficient pentru comparare, BIC oferă o perspectivă complementară.

Exercițiul 6: Comparația distribuțiilor

Enunț

Se dau rezultatele ajustării pe randamente S&P 500 (10 ani, zilnice, $n = 2516$):

Model	k	ℓ	AIC	BIC
Normal	2	7890	-15,776	-15,764
Student- t	3	8120	-16,234	-16,216
Skew- t	4	8135	-16,262	-16,239
Stabilă	4	8095	-16,182	-16,159

1. Verificați formulele AIC și BIC pentru modelul normal.
2. Care model este preferat de AIC? Dar de BIC?
3. De ce Skew- t câștigă deși are mai mulți parametri?
4. Stabilă are AIC mai slab decât Student- t . Înseamnă că este un model inferior? Discutați.

Exercițiul 7: VaR sub diferite distribuții

Enunț

Un portofoliu de \$1M. Randamente zilnice cu $\hat{\mu} = 0,03\%$, $\hat{\sigma} = 1,5\%$.

1. Calculați VaR 1% sub ipoteza **normală**.
2. Sub Student- t ($\nu = 5$): $\text{VaR}_{1\%}^t = -\mu + \hat{\sigma} \sqrt{(\nu - 2)/\nu} \cdot t_{0,01;\nu}$.
► Folosiți $t_{0,01;5} = -3,365$.
3. Calculați raportul $\text{VaR}^t/\text{VaR}^N$. Interpretați.
4. Un backtest pe 1000 de zile arată 18 depășiri VaR sub distribuția normală. Este acceptabil la nivelul 1%? (Testul Kupiec: se așteaptă ~ 10 depășiri.)

Exercițiul 8: Expected Shortfall

Enunț

Continuare de la Exercițiul 7. Sub ipoteza normală cu $\mu = 0$ și $\sigma = 1,5\%$:

1. Calculați ES la nivelul 1%: $ES_{0,01} = \sigma \cdot \frac{\phi(z_{0,01})}{0,01}$ unde ϕ este densitatea normală standard și $z_{0,01} = -2,326$.
2. Calculați raportul ES/VaR. Interpretați.
3. De ce ES este considerată o măsură de risc **superioară** VaR? (Menționați subaditivitatea (*subadditivity*) și coerența.)
4. Sub ce cadru regulamentar (Basel II.5 sau Basel III) este ES măsura principală?

Exercițiul 9: Backtesting VaR

Enunț

Un model VaR 1% produce următoarele rezultate pe 500 de zile de tranzacționare:

Model	Depășiri observate	Depășiri așteptate
Normal	12	5
Student- t	6	5
EVT (POT)	4	5

1. Aplicați testul Kupiec (LR) pentru fiecare model: $LR = -2 \ln \frac{\alpha^x (1-\alpha)^{n-x}}{\hat{p}^x (1-\hat{p})^{n-x}}$ cu $\hat{p} = x/n$.
2. Care model(e) trec testul la nivelul de semnificație 5%? ($\chi^2_{1;0,05} = 3,84$)
3. Ce indică 12 depășiri sub modelul normal?

Exercițiul 10: Interpretare integrată

Enunț

Un activ financiar prezintă următorul profil distributional:

Indicator	Valoare
Asimetrie	-1,3
Exces de kurtosis	8,5
$\hat{\alpha}$ (stabilă)	1,75
$\hat{\nu}$ (Student- t)	4,2
Test JB (p -value)	$< 10^{-10}$

1. Descrieți profilul distributional al activului în 3–4 propoziții.
2. Ce implicații are $\hat{\alpha} = 1,75$ pentru existența varianței?
3. Ce model distributional ați recomanda pentru calculul VaR? Justificați.
4. Un regulator cere capital bazat pe VaR sub distribuția normală. De ce este aceasta o problemă?

Laborator Python — Exerciții avansate

Lab 4: GARCH cu inovații non-Gaussiene (MSc)

Folosind `SFM_ch2_modern_extensions.ipynb`:

1. GARCH(1,1) cu inovații normale și Student- t ; comparați AIC
2. Reziduuri standardizate (*standardized residuals*): sunt i.i.d.? VaR 1% condiționat pe 250 zile

 `SFM_ch2_modern_extensions`

Exercițiul 6: Rezolvare

Rezolvare

1. Distribuția normală: $AIC = -2(7890) + 2(2) = -15.776 \checkmark$; $BIC = -2(7890) + 2 \ln(2516) = -15.780 + 2(7,83) = -15.764 \checkmark$
2. AIC minim: Skew- t (-16.262). BIC minim: Skew- t (-16.239). Skew- t câștigă pe ambele.
3. Deși Skew- t are 4 parametri (vs. 3 pentru Student- t), $\Delta AIC = -16.262 - (-16.234) = 28$, dovadă puternică (> 10) că parametrul suplimentar de asimetrie îmbunătățește semnificativ ajustarea.
4. Stabilă ($\Delta AIC = 52$ față de Skew- t) este mai slabă pe AIC/BIC, dar aceasta nu o face inferioară per se:
 - ▣ Stabilă are fundament teoretic superior (închisă la sumă, TLC generalizat)
 - ▣ Poate fi superioară pentru cuantile extreme ($< 0,1\%$) unde AIC/BIC nu discriminează
 - ▣ AIC/BIC evaluează ajustarea globală, nu calitatea cozilor

Exercițiul 7: Rezolvare

Rezolvare

Date: $W = \$1M$, $\mu = 0,0003$, $\sigma = 0,015$.

1. VaR sub distribuția normală 1%: $-(\mu + z_{0,01}\sigma) = -(0,0003 + (-2,326)(0,015)) = 0,0346 \Rightarrow \34.590

2. VaR Student- t 1%: $-\mu + \sigma\sqrt{(\nu-2)/\nu} \cdot |t_{0,01;5}| = -0,0003 + 0,015\sqrt{3/5} \cdot 3,365$
 $= -0,0003 + 0,015 \times 0,7746 \times 3,365 = 0,0388 \Rightarrow \38.810

3. Raport: $38.810/34.590 = 1,12$ (Student- t produce VaR cu 12% mai mare).

4. 18 depășiri pe 1000 zile $\Rightarrow \hat{p} = 1,8\%$ vs. așteptat 1%. Testul Kupiec:

$LR = -2 \ln \frac{0,01^{18} \cdot 0,99^{982}}{0,018^{18} \cdot 0,982^{982}} = 7,35 > 3,84 \Rightarrow \text{respins: modelul normal subestimează riscul.}$

Exercițiul 8: Rezolvare

Rezolvare

Date: $\mu = 0$, $\sigma = 0,015$, $z_{0,01} = -2,326$, $\phi(-2,326) = 0,02665$.

1. $ES_{0,01} = 0,015 \times \frac{0,02665}{0,01} = 0,03998 \approx 4,00\% \Rightarrow \39.975

2. $VaR_{1\%} = 0,015 \times 2,326 = 0,03489 = 3,49\%$. Raport: $ES/VaR = 4,00/3,49 = 1,146$. ES este cu 14,6% mai mare decât VaR.

3. ES este **superioară** deoarece:

- ▣ Este **subaditivă**: $ES(X + Y) \leq ES(X) + ES(Y)$ (diversificarea reduce riscul)
- ▣ Este măsură **coerentă** de risc (Artzner et al., 1999)
- ▣ Informează despre gravitatea pierderilor dincolo de VaR

4. Basel III (FRTB, 2019) adoptă ES la 97,5% ca măsură principală, înlocuind VaR 99%.

Exercițiul 9: Rezolvare

Rezolvare

Date: VaR 1%, $n = 500$, depășiri așteptate: $500 \times 0,01 = 5$.

1. Testul Kupiec: $LR = -2 \ln \frac{0,01^x (0,99)^{500-x}}{(x/500)^x (1-x/500)^{500-x}}$

□ Distribuția normală ($x = 12$): $\hat{p} = 0,024$. $LR = -2 \ln \frac{0,01^{12} \cdot 0,99^{488}}{0,024^{12} \cdot 0,976^{488}} = 7,96$

□ Student- t ($x = 6$): $\hat{p} = 0,012$. $LR = -2 \ln \frac{0,01^6 \cdot 0,99^{494}}{0,012^6 \cdot 0,988^{494}} = 0,30$

□ EVT ($x = 4$): $\hat{p} = 0,008$. $LR = -2 \ln \frac{0,01^4 \cdot 0,99^{496}}{0,008^4 \cdot 0,992^{496}} = 0,23$

2. $\chi^2_{1;0,05} = 3,84$. Distribuția normală: $7,96 > 3,84 \Rightarrow$ **respins**. Student- t : $0,30 \checkmark$. EVT: $0,23 \checkmark$.

3. 12 depășiri (vs. 5 așteptate) = rata empirică de 2,4% (de $2,4 \times$ mai mare). Modelul normal subestimează sistematic riscul de coadă.

Exercițiul 10: Rezolvare

Rezolvare

1. Profilul distributional: Activul prezintă cozi groase ($kurtosis = 8,5 \gg 3$), asimetrie negativă (*negative skewness*) ($S = -1,3$, coada stângă mai grea), și deviație extremă de la normalitate ($JB \ p < 10^{-10}$). Randamentele nu pot fi modelate adecvat de distribuția normală.
2. $\hat{\alpha} = 1,75 < 2 \Rightarrow$ sub modelul stabil, varianța este **infinită**. Doar momentele de ordin $p < 1,75$ există. Volatilitatea eșantionului nu converge la o valoare fixă.
3. Recomandare: **Student-*t* asimetrică (Hansen)** deoarece:
 - ▣ Captează atât cozile groase ($\hat{\nu} = 4,2$) cât și asimetria ($S < 0$)
 - ▣ Varianță finită ($\nu > 2$) — permite calculul VaR/ES standard
 - ▣ Ușor de integrat cu modele GARCH
4. VaR sub distribuția normală subestimează drastic: la 1%, diferența poate fi de 25–40%, iar la 0,1% poate ajunge la 100–150%. Regulatorul impune capital insuficient $\Rightarrow$ risc sistemic.

Bibliografie I

Manuale de referință

- ▣ McNeil, A., Frey, R. & Embrechts, P. (2015). *Quantitative Risk Management*. Princeton University Press.
- ▣ Nolan, J. P. (2020). *Stable Distributions — Models for Heavy Tailed Data*. Birkhäuser.
- ▣ Rachev, S. T. (2003). *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*. Elsevier.

Articole fundamentale

- ▣ Mandelbrot, B. (1963). The Variation of Certain Speculative Prices. *Journal of Business*, 36(4), 394–419.
- ▣ Fama, E. (1965). The Behavior of Stock-Market Prices. *Journal of Business*, 38(1), 34–105.
- ▣ Cont, R. (2001). Empirical Properties of Asset Returns. *Quantitative Finance*, 1(2), 223–236.

Bibliografie II

Distribuții și estimare

- Hansen, B. (1994). Autoregressive Conditional Density Estimation. *International Economic Review*, 35(3), 705–730.
- Nolan, J. P. (1997). Numerical Calculation of Stable Densities and Distribution Functions. *Stochastic Models*, 13(4), 759–774.
- Barndorff-Nielsen, O. (1977). Exponentially Decreasing Distributions for the Logarithm of Particle Size. *Proc. Royal Society A*, 353, 401–419.

Modele dinamice

- Hamilton, J. D. (1989). A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series. *Econometrica*, 57(2), 357–384.
- Merton, R. (1976). Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous. *J. of Financial Economics*, 3, 125–144.
- Barndorff-Nielsen, O. & Shephard, N. (2001). Non-Gaussian Ornstein–Uhlenbeck-Based Models. *JRSS B*, 63(2), 167–241.

Bibliografie III

Testare și selecție de modele

- ▣ Vuong, Q. H. (1989). Likelihood Ratio Tests for Model Selection and Non-Nested Hypotheses. *Econometrica*, 57(2), 307–333.
- ▣ Fissler, T. & Ziegel, J. F. (2016). Higher Order Elicitability and Osband's Principle. *Annals of Statistics*, 44(4), 1680–1707.

Resurse online și cod

- ▣ **Quantlet:** <https://quantlet.com> > Platformă de cod pentru metode cantitative
- ▣ **Quantinar:** <https://quantinar.com> > Platformă de învățare pentru metode cantitative
- ▣ **GitHub SFM:** https://github.com/QuantLet/Stat_fin_markets/tree/master/Ch_02 > Cod Python capitol 2

Bibliografie IV

Referințe recente (2020–2025)

- Kelly, B., Jiang, H. & Pruitt, S. (2022). Tail Risk and Asset Prices. *Review of Financial Studies*, 35(5), 2254–2295.
- Bollerslev, T. & Todorov, V. (2023). The Jump Tails of Asset Returns. *Econometrica* (forthcoming).
- Aas, K., Czado, C., Frigessi, A. & Bakken, H. (2009). Pair-Copula Constructions of Multiple Dependence. *Insurance: Mathematics and Economics*, 44(2), 182–198.

Evenimente recente relevante

- **Covid-19 (mar. 2020)**: S&P 500 –12% într-o zi; al 3-lea cel mai rău eveniment din istorie
- **FTX/crypto (nov. 2022)**: Prăbușire de –65% în 48h; cozi groase extreme
- **SVB (mar. 2023)**: Contagiune bancară; risc de coadă în sectorul financiar
- **Lecția**: Modelele cu cozi groase sunt **esențiale**, nu opționale

Vă Mulțumim!

Întrebări?

Materialele cursului sunt disponibile la: <https://danpele.github.io/SFM/>



Quantlet



Quantinar