



Statistică pe Piețe Financiare

Estimatori de Volatilitate



Daniel Traian PELE

Antoaneta Amza

Academia de Studii Economice din București

IDA Institute Digital Assets

Blockchain Research Center

AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance

Academia Română, Institutul de Prognoză Economică

MSCA Digital Finance

Volatilitatea

- Volatilitatea este o măsură statistică a **dispersiei randamentelor** pentru un activ financiar sau indice de piață dat.
- Reprezintă gradul de variație a prețului unui activ în timp.
- Estimatori dezvoltați pentru piețele financiare:
 - ▶ Volatilitatea istorică, Parkinson, Garman-Klass
 - ▶ Rogers-Satchell, Yang-Zhang
 - ▶ Volatilitatea realizată, modele GARCH / HEAVY
 - ▶ Volatilitate stocastică cu salturi, volatilitate implicită

[Cutremurul și tsunamiul din 2011, Tōhoku, Japonia]

Cuprins

- ▣ Motivație ✓
- ▣ Estimatori de volatilitate
- ▣ Concluzii și teme
- ▣ Bibliografie

Volatilitatea istorică

- ▣ Măsoară **dispersia sau variabilitatea** randamentelor pe o perioadă specificată din trecut.
- ▣ Volatilitatea istorică se calculează ca **abaterea standard** a randamentelor anterioare:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (r_t - \bar{r})^2}$$

- ▣ **Anualizarea volatilității:** Deoarece volatilitatea este adesea exprimată pe bază anuală, volatilitatea zilnică poate fi anualizată folosind:

$$\sigma_{\text{annual}} = \sigma_{\text{daily}} \times \sqrt{T}$$

- ▶ T este numărul de perioade de tranzacționare dintr-un an (de obicei 252 de zile de tranzacționare).
- ▶ σ_{daily} este abaterea standard a randamentelor zilnice.
- ▣ **Limitările volatilității istorice:**
 - ▶ Performanța trecută poate să nu prezică volatilitatea viitoare.
 - ▶ Nu ia în considerare șocurile sau schimbările de regim ale pieței.

Volatilitatea istorică

[Două grafice: (1) Prețul de închidere AAPL și Volatilitatea pe 30 de zile (linie albastră preț, linie roșie volatilitate, 2022-01 până la 2023-09); (2) Randamentele logaritmice AAPL și Volatilitatea pe 30 de zile (randamente verzi, volatilitate roșie)]

Regula rădăcinii pătrate a timpului

- ▣ Concept fundamental în managementul riscului financiar și în finanțele cantitative.
- ▣ Oferă o metodă de **scalare a volatilității** pe diferite orizonturi de timp, presupunând randamente IID care urmează o distribuție normală.
- ▣ Presupunem randamente $r_t \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ i.i.d.
- ▣ Randamentul total pe n perioade: $R_n = r_1 + r_2 + \dots + r_n$
- ▣ Deoarece randamentele sunt IID: $\mathbb{E}[R_n] = n\mu$, $\text{Var}(R_n) = n\sigma^2$
- ▣ Abaterea standard pe n perioade: $\sigma_n = \sqrt{\text{Var}(R_n)} = \sqrt{n}\sigma$
- ▣ Volatilitatea se scalează cu **rădăcina pătrată a timpului**.
- ▣ În practică: $\sigma_{\text{annual}} = \sigma_{\text{daily}} \times \sqrt{N}$, unde N este numărul de zile de tranzacționare (de obicei 252).

[Portretul lui Louis Bachelier]

Estimatorul Parkinson

- Estimatorii tradiționali se bazează adesea exclusiv pe prețurile de închidere, omițând potențial informații valoroase conținute în cadrul perioadei de tranzacționare.
- Parkinson (1980) a introdus un estimator care utilizează **prețurile maxime și minime** dintr-o perioadă.
- **Ipoteze:** tranzacționare continuă, drift zero în procesul de preț.
- Prin utilizarea intervalului—diferența dintre prețul maxim și cel minim—surprinde variabilitatea intra-perioadă a prețului mai eficient decât estimatorii bazați exclusiv pe prețuri de închidere.

$$\sigma_P = \frac{1}{\sqrt{4 \ln 2}} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(\ln \left(\frac{H_t}{L_t} \right) \right)^2}$$

- ▶ H_t este prețul maxim din ziua t .
- ▶ L_t este prețul minim din ziua t .
- ▶ n este numărul de perioade.

Aplicații

- ▣ **Estimarea volatilității pe piețele financiare:** utilizat pe scară largă atunci când prețurile de închidere nu surprind pe deplin mișcările de preț; oferă estimări mai precise (Fiszeder & Perczak, 2013; Jacob & Vipul, 2008).
- ▣ **Analiza comparativă a estimatorilor de volatilitate:** adesea inclus alături de estimatorii Garman-Klass și Rogers-Satchell (Lapinova & Saichev, 2017; Vasileiou, 2023).
- ▣ **Managementul riscului și evaluarea instrumentelor derivate:** utilizat pentru evaluarea instrumentelor derivate (Jacob & Vipul, 2008; Vasileiou, 2023).
- ▣ **Strategii de previziune și tranzacționare:** integrat în modele de previziune (Fiszeder & Perczak, 2013; Jacob & Vipul, 2008).
- ▣ **Aplicații pe piețele emergente:** deosebit de util acolo unde datele pot fi mai puțin fiabile (Jacob & Vipul, 2008; Yang & Zhang, 2000).

Estimatorul Garman-Klass

- ▣ Încorporează **prețurile OHLC** (Open, High, Low, Close) pentru a oferi o estimare mai precisă a volatilității sub ipoteza de drift zero (Garman & Klass, 1980):

$$\sigma_{GK} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left[0.5 \left(\ln \left(\frac{H_t}{L_t} \right) \right)^2 - (2 \ln 2 - 1) \left(\ln \left(\frac{C_t}{O_t} \right) \right)^2 \right]}$$

- ▣ **Derivare:** Modelul Mișcării Browniene Geometrice (GBM) cu drift zero ($\mu = 0$) și tranzacționare continuă.
- ▣ Ideea cheie: descompunerea varianței totale în componente care surprind diferite aspecte ale mișcărilor de preț.
- ▣ Sub GBM, modificările logaritmice ale prețului sunt distribuite normal.
- ▣ Varianța totală:

$$\sigma^2 = \text{Var} \left(\ln \frac{C_t}{O_t} \right) + \text{Var} \left(\ln \frac{H_t}{L_t} \right) - 2 \text{Cov} \left(\ln \frac{C_t}{O_t}, \ln \frac{H_t}{L_t} \right)$$

- ▣ Garman și Klass au derivat valorile așteptate ale acestor componente și le-au combinat pentru a minimiza varianța.

Avantaje și limitări

Eficiență și avantaje

- Mai eficient decât estimatorii bazați doar pe prețuri de închidere sau pe intervale maxim-minim.
- Încorporează prețurile de deschidere și de închidere.
- Reduce varianța estimatorului.
- Aproximativ **de 7,4 ori mai eficient** decât estimatorul închidere-la închidere și mai eficient decât Parkinson.
- Ia în considerare atât intervalul intra-zilnic, cât și mișcările deschidere-închidere.

Ipoteze și limitări

- GK presupune **randament așteptat zero**.
- Tranzacționare continuă.
- Fără salturi de preț.
- Fără distorsiuni ale prețului de deschidere.
- Încălcările (gap-uri overnight, salturi) pot introduce distorsiuni.

Estimatorul Rogers-Satchell

- Estimatorul Rogers-Satchell:

$$\sigma_{RS} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left[\ln\left(\frac{H_t}{C_t}\right) \ln\left(\frac{H_t}{O_t}\right) + \ln\left(\frac{L_t}{C_t}\right) \ln\left(\frac{L_t}{O_t}\right) \right]}$$

- Aplicații:**

- Managementul riscului: evaluarea riscului de deținere/tranzacționare.
- Evaluarea opțiunilor: volatilitate precisă pentru evaluarea instrumentelor derivate.
- Optimizarea portofoliului: informarea alocării activelor.

- Avantaje:**

- Ajustarea pentru drift: ia în considerare drift-ul în procesul de preț.
- Încorporează mai multe puncte de preț (OHLC).

- Limitări:**

- Cerințe de date: necesită date OHLC detaliate.

- Ipoteze:** prețul activului urmează o Mișcare Browniană Geometrică cu drift.

Aplicații

- ▣ **Estimarea volatilității pe piețele emergente:** utilizat frecvent (Öztürk et al., 2016).
- ▣ **Analiză comparativă:** estimări robuste în cazul mișcărilor extreme de preț (Lapinova & Saichev, 2017).
- ▣ **Aplicații pe piețele de criptomonede:** surprinde caracteristicile unice ale volatilității (Cadenas-Morales, 2022).
- ▣ **Managementul riscului și evaluarea instrumentelor derivate:** precis pe piețele de acțiuni și opțiuni (Fałdziński & Osińska, 2016).
- ▣ **Strategii de previziune și tranzacționare:** performanță îmbunătățită (Banerjee, 2023).

Estimatorul Yang-Zhang

- Estimatorul Yang-Zhang (Yang & Zhang, 2000) combină volatilitatea **overnight** (închidere-deschidere) cu o medie ponderată a volatilității Rogers-Satchell și a volatilității deschidere-închidere.
- De 14 ori mai eficient** decât estimatorul închidere-la-închidere:

$$\sigma_{YZ} = \sqrt{\sigma_O^2 + k \sigma_C^2 + (1 - k) \sigma_{RS}^2}$$

- σ_{YZ} : volatilitatea estimată Yang-Zhang.
- Varianța overnight:** $\sigma_O^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T \left(\ln \frac{O_t}{C_{t-1}} - \overline{\ln \frac{O_t}{C_{t-1}}} \right)^2$
- Varianța deschidere-închidere:** $\sigma_C^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T \left(\ln \frac{C_t}{O_t} - \overline{\ln \frac{C_t}{O_t}} \right)^2$
- Varianța Rogers-Satchell:** $\sigma_{RS}^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left[\ln \frac{H_t}{C_t} \ln \frac{H_t}{O_t} + \ln \frac{L_t}{C_t} \ln \frac{L_t}{O_t} \right]$
- $k = \frac{\alpha-1}{\alpha + \frac{T+1}{T-1}}$: Factor de ponderare, de obicei $k = 0.34$.

Estimatori de volatilitate: Exemplu

[Grafic cu estimatori de volatilitate rulantă pentru AAPL. Linii: Historical_Vol (albastru), Parkinson_Vol (portocaliu), Garman_Klass_Vol (verde), Rogers_Satchell_Vol (roșu), Yang_Zhang_Vol (violet). Interval de date 2019-01 până la 2022-07. Logo Q în colțul din dreapta jos.]

Indicatorul Sharpe

- Indicatorul Sharpe măsoară **randamentul excesiv** al unui activ față de rata fără risc, ajustat pentru risc (volatilitate).
- Este o măsură larg utilizată a **performanței ajustate la risc**.

$$SR_t = \frac{\bar{R}_t - R_f}{\sigma_t}$$

- ▶ $\bar{R}_t$ este randamentul mediu al activului pe perioada t .
 - ▶ R_f este rata fără risc, de obicei bazată pe obligațiuni de stat.
 - ▶ σ_t este volatilitatea randamentelor pe perioada t .
- Un **indicator Sharpe mai mare** indică o performanță ajustată la risc mai bună (Sharpe, 1966).

Interpretarea indicatorului Sharpe

- ▣ Valori mai mari indică randamente ajustate la risc mai bune.
- ▣ Permite compararea investițiilor cu niveluri diferite de risc.

Indicatorul Sharpe		Interpretare
	$SR < 0$	Mai rău decât rata fără risc
	$0 - 0.5$	Slab
	$0.5 - 1$	Acceptabil
	$1 - 2$	Bun
	> 2	Excelent

Cadru matematic

- **Randamentul așteptat al unui portofoliu:**

$$\mathbb{E}[R_p] = \sum_{i=1}^n w_i \cdot \mathbb{E}[R_i]$$

- ▶ w_i : Ponderea activului i .
- ▶ $\mathbb{E}[R_i]$: Randamentul așteptat al activului i .
- ▶ n : Numărul de active.

- În practică, se folosesc adesea mediile randamentelor istorice:

$$\mathbb{E}[R_i] \approx \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{i,t}$$

- Anualizat din randamente zilnice:

$$\mathbb{E}[R_i]_{\text{annual}} = \mathbb{E}[R_i]_{\text{daily}} \times 252$$

Volatilitatea portofoliului

- Volatilitatea portofoliului ține cont de **corelațiile dintre active**:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}}$$

- În notație matriceală:

$$\sigma_p = \sqrt{\mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}}$$

- ▶ $\mathbf{w}$: Vectorul ponderilor activelor.
- ▶ Σ : Matricea de covarianță a randamentelor.

- Anualizat din volatilitatea zilnică:

$$\sigma_{\text{annual}} = \sigma_{\text{daily}} \times \sqrt{252}$$

Optimizarea portofoliului

□ **Frontiera eficientă** — Portofolii care:

- ▶ Maximizează randamentul așteptat pentru un nivel dat de risc.
- ▶ Minimizează riscul pentru un nivel dat de randament așteptat.
- ▶ Fiecare punct de pe frontieră este o alocare unică de portofoliu.
- ▶ Portofoliile sub frontieră sunt suboptimale.

Frontiera eficientă

▣ Analizând aceste active:

- ▶ **SPY**: S&P 500 (acțiuni americane de mare capitalizare)
- ▶ **QQQ**: Nasdaq 100 (tehnologie)
- ▶ **GLD**: Aur
- ▶ **TLT**: Obligațiuni de stat pe termen lung
- ▶ **VNQ**: Imobiliare

Activ	Randament (%)	Volatilitate (%)	Indicatorul Sharpe
SPY	14.33	19.35	0.637
QQQ	19.57	24.04	0.7309
GLD	11.62	14.31	0.6725
TLT	-0.37	16.16	-0.1469
VNQ	8.23	22.75	0.2738

Descărcarea datelor de preț de la 2018-01-01 la 2025-03-04. S-au descărcat 1801 zile de date. Generarea a 10000 de portofolii aleatorii.

Frontiera eficientă

*[Grafic de tip scatter cu Frontiera Eficientă a Portofoliilor. Axa X: Volatilitate anualizată (Abatere standard), Axa Y: Randament așteptat anualizat. Codificat prin culoare după Indicatorul Sharpe (bară de culoare de la 0 la 0,8+).
Stea roșie: Portofoliul Optim (Sharpe: 0,9070)]*

Portofoliul optim

[Grafic cu bare pentru Alocarea Activelor din Portofoliul Optim. SPY: 47,7%, QQQ: 33,4%, GLD: 17,4%, TLT: 0,9%, VNQ: 0,6%. Randament: 14,62%, Volatilitate: 13,91%, Indicatorul Sharpe: 0,9070]

Concluzii

- ▣ **Randamentele** reprezintă metrica fundamentală pentru evaluarea performanței activelor.
- ▣ **Estimatorii de volatilitate** măsoară amplitudinea fluctuațiilor prețurilor activelor, ajutând la cuantificarea nivelului de risc de piață.
- ▣ Volatilitatea este esențială pentru înțelegerea **incertitudinii de piață** și constituie piatra de temelie a strategiilor de management al riscului.
- ▣ Estimarea precisă a volatilității susține o mai bună **evaluare a instrumentelor derivate**, gestionarea portofoliului și luarea deciziilor strategice pe piețe turbulente.
- ▣ Traderii și analiștii se bazează pe previziunile de volatilitate pentru a **stabili limite de risc** și a ajusta dinamic strategiile.
- ▣ Randamentele și estimatorii de volatilitate sunt date de intrare fundamentale pentru algoritmi din **tranzacționarea de înaltă frecvență** și sisteme automate, ghidând deciziile de cumpărare/vânzare și optimizând portofoliile.

Teme

[Imaginea timbrului Petrache Poenaru]

Calculul randamentelor — Diavolul se ascunde în detalii

- ▣ Prețul unei acțiuni la momentul t este $P_t = \$100$. Pe parcursul următoarelor trei perioade, randamentele compuse continuu sunt $r_{t+1} = 0.1$, $r_{t+2} = -0.05$ și $r_{t+3} = 0.02$.
- ▣ Calculați prețul acțiunii la momentele $t + 1$, $t + 2$, $t + 3$. Arătați calculele.
- ▣ Acum, presupuneți că randamentele simple pe aceleași perioade sunt $R_{t+1} = 0.1$, $R_{t+2} = -0.05$ și $R_{t+3} = 0.02$. Calculați prețurile.
- ▣ Comparați rezultatele — Sunt identice? De ce sau de ce nu?
- ▣ Explicați implicațiile practice pentru orizonturi de timp mai lungi.

Calculul randamentelor — Diavolul se ascunde în detalii

- ▣ Vi se dă o serie temporală de prețuri ale acțiunilor $P_0, P_1, \dots, P_n$.
- ▣ Derivați o formulă generală pentru calculul randamentului total compus continuu de la momentul 0 la momentul n .
- ▣ Cum se raportează aceasta la randamentele individuale pe perioade?
- ▣ Explicați cum se aplică conceptul de **aditivitate temporală** la randamentele compuse continuu.
- ▣ De ce este această proprietate dezirabilă în modelarea financiară?

Volatilitate și risc — Dincolo de elementele de bază

- ▣ Definiți volatilitatea în contextul piețelor financiare. Raportați la discuția despre risc.
- ▣ De ce este volatilitatea considerată o măsură a riscului? Ce tip de risc surprinde?
- ▣ Discutați diferite moduri de a estima volatilitatea.
- ▣ Avantaje și dezavantaje ale utilizării datelor istorice?
- ▣ Care sunt alte abordări (menționați cel puțin două)?

Volatilitate și risc — Dincolo de elementele de bază

- Două active A și B. Activul A are un randament așteptat mai mare și o volatilitate mai mare. Cum decideți în care să investiți? Explicați aversiunea la risc.
- Un portofoliu din X și Y cu ponderi w_X și w_Y ($w_X + w_Y = 1$). Volatilități σ_X și σ_Y , corelație ρ_{XY} .
- Derivați formula pentru volatilitatea portofoliului σ_P .
- Explicați cum poate diversificarea să reducă volatilitatea portofoliului.

Regula rădăcinii pătrate a timpului — Când da și când nu

- Explicați regula rădăcinii pătrate a timpului pentru scalarea volatilității. Scrieți formula. Definiți toate variabilele.
- Care sunt ipotezele principale?
- O acțiune are o volatilitate zilnică de 1,2%. Estimați volatilitățile săptămânală, lunară și anuală (5, 22, 252 de zile de tranzacționare). Arătați calculele.
- Acum imaginați-vă că randamentele sunt autocorelate pozitiv. Volatilitatea anuală reală ar fi mai mare sau mai mică decât estimarea?
- Cum afectează autocorelația scalarea volatilității?

Bibliografie



Jiang, Z., Xu, Y., & Zhang, Y. (2013). Volatility forecasts using range-based estimators. *Journal of Futures Markets*, 33(3), 231–252.



Molnár, P. (2012). Properties of range-based volatility estimators. *International Review of Financial Analysis*, 25, 1–12.



Sheraz, M. et al. (2022). Volatility dynamics of non-linear volatile time series and application to financial markets. *Entropy*, 24(10), 1410.



Miralles-Quirós, M.M. et al. (2018). Diversification and benefits of using exchange-traded funds. *International Journal of Financial Engineering*, 23(2), 153–166.



Fałdziński, M. & Osińska, A. (2016). Volatility estimators in econometric analysis of risk on financial markets. *Dynamic Econometric Models*, 16, 1–20.



Changchien, S.Y. et al. (2011). Improving Hull and White's method for estimating implied volatility. *Journal of Futures Markets*, 30(6), 635–646.



Vasileiou, E. (2023). Are the intraday volatility estimations more representative of financial market risk? *3rd Oxford Symposium*, Istanbul.

Bibliografie (cont.)



Lapinova, I. & Saichev, A. (2017). Comparative statistics of Garman-Klass, Parkinson, and Rogers-Satchell volatility estimators. *Cogent Physics*, 4(1).



Meilijson, I. (2008). The Garman-Klass volatility estimator revisited. *arXiv preprint*.



Banerjee, A. (2023). Does public sentiment impact stock price forecasting and trading strategies? *Journal of Economics, Management and Finance*, 23(1), 108–134.



Cadenas-Morales, E. (2022). Bitcoin volatility estimate applying Rogers-Satchell range model. *International Journal of Financial Innovation and Risk Management*, 12(1), 49–79.



Öztürk, H. et al. (2016). Extreme value volatility estimators and their empirical performance. *International Journal of Economics and Finance*, 8(8), 73.



Yang, D. & Zhang, Q. (2000). Drift-independent volatility estimation based on high, low, open, and close prices. *Journal of Business*, 73(3), 477–492.