








Statistica piețelor financiare

Capitolul 10: VaR, ES și backtesting



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București
IDA Institute Digital Assets
Blockchain Research Center
AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance
Academia Română, Institutul de Prognoză Economică
MSCA Digital Finance

Acronime folosite în acest material (1/2)

- **AI**: Artificial Intelligence (inteligență artificială)
- **BCBS**: Basel Committee on Banking Supervision (Comitetul de la Basel pentru supraveghere bancară)
- **BET**: Bucharest Exchange Trading (index) — indicele de referință al Bursei de Valori București
- **BET-TR**: BET Total Return (index) — indicele BET cu dividendele reinvestite
- **BIS**: Bank for International Settlements (Banca Reglementelor Internaționale)
- **BVB**: Bursa de Valori București
- **CLT**: Central Limit Theorem (teorema limită centrală)
- **EODHD**: EOD Historical Data (market-data provider) — furnizor de date de piață
- **ES**: Expected Shortfall (pierderea așteptată în coadă)
- **EVT**: Extreme Value Theory (teoria valorilor extreme)
- **EWMA**: Exponentially Weighted Moving Average (medie mobilă ponderată exponențial)
- **FHS**: Filtered Historical Simulation (simularea istorică filtrată)
- **FRTB**: Fundamental Review of the Trading Book (revizuirea fundamentală a portofoliului de tranzacționare)

Acronime folosite în acest material (2/2)

- **GARCH**: Generalised AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity (heteroscedasticitate condiționată autoregresivă generalizată)
- **GPD**: Generalised Pareto Distribution (distribuția Pareto generalizată)
- **HS**: Historical Simulation (simularea istorică)
- **LR**: Likelihood Ratio (test) — testul raportului de verosimilitate
- **MAR32**: Market Risk standard, chapter 32 of the Basel Framework (backtesting) — standardul pentru riscul de piață, capitolul 32 din Cadrul Basel (backtesting)
- **MAR33**: Market Risk standard, chapter 33 of the Basel Framework (capital calculation) — standardul pentru riscul de piață, capitolul 33 din Cadrul Basel (calculul capitalului)
- **POF**: Proportion Of Failures (Kupiec test) — proporția depășirilor (testul Kupiec)
- **POT**: Peaks Over Threshold (metoda vîrfurilor peste prag)
- **SFE**: Statistics of Financial Markets, Exercises (Quantlet collection of the textbook) — colecția de Quantlet-uri a manualului Statistics of Financial Markets

Întrebarea de azi și traseul

- **Întrebarea**: cît poate pierde un portofoliu mîine și de unde știm că răspunsul a fost corect?
  - Capitolul 5 a descris cozile, Capitolul 9 volatilitatea de mîine; acest capitol le transformă în măsuri de risc și le testează
- **Traseul** capitolului
  - VaR (value at risk, valoarea expusă la risc) și ES: definiții, coerență, elicitabilitate
  - estimarea: simularea istorică, distribuția Normală, Student-t, Cornish–Fisher, EVT, GARCH și simularea istorică filtrată
  - portofolii: metoda variață–covariață, dependența în cozi, o primă privire asupra copulelor
  - backtesting: testele Kupiec și Christoffersen, semaforul Basel, backtesting pentru ES

Rezultatele învățării

- Definiți VaR și ES la o probabilitate a cozii α (VaR 1%, ES 2,5%) și calculați-le pentru distribuția Normală și pentru Student-t
- Enunțați axiomele unei măsuri de risc coerente și arătați printr-un contraexemplu că VaR nu este subaditiv
- Estimați VaR și ES prin simulare istorică, metode parametrice, Cornish–Fisher, EVT, GARCH și simulare istorică filtrată
- Calculați VaR-ul unui portofoliu și explicați de ce corelația nu măsoară riscul prăbușirilor simultane
- Testați un model VaR (backtesting) cu testele Kupiec și Christoffersen și cu semaforul Basel

Bibliografie și instrumente

- Manual: Franke, Härdle & Hafner (2019), cap. 16 (VaR și backtesting), cap. 17 (copule și VaR), secțiunile 18.1 și 18.4 (riscuri extreme)
  - exerciții rezolvate: Borak, Härdle & López-Cabrera (2013), cap. 16
  - măsuri de risc și copule: McNeil, Frey & Embrechts (2015), cap. 2 și 7
- Quantlet-urile Python ale capitolului: Quantlets/Ch_10
  - portate din Quantlet-urile SFE VaRest, SFEVaRbank, SFEVaRtimeplot, SFEVaRqqplot și SFEvar_pot_backtesting
- Notebook-ul cursului: deschideți în Google Colab
- Curs video: Measuring Statistical Risk

Raportul de la ora 16:15 și RiskMetrics

- În jurul anului 1990: președintele J.P. Morgan, Dennis Weatherstone, cere un singur număr, în fiecare zi la ora 16:15, care să rezume cît poate pierde banca a doua zi
  - răspunsul a devenit **valoarea expusă la risc** (VaR): o pierdere depășită doar cu o probabilitate mică
- Octombrie 1994: metodele și datele sînt publicate gratuit sub numele RiskMetrics J.P. Morgan/Reuters (1996)
  - randamente Normale, volatilitate EWMA (Capitolul 8), VaR la o probabilitate a cozii de 5% pe o zi
  - VaR a devenit limbajul comun al băncilor, al autorităților de reglementare și al administratorilor de fonduri



Clădirea J.P. Morgan de la 23 Wall Street, New York

Foto: Beyond My Ken (2012); CC BY-SA 4.0; Wikimedia Commons

RiskMetrics și reglementările Basel

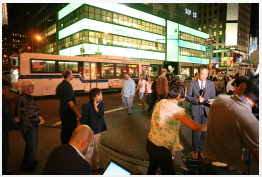
- **BCBS** (Basel Committee on Banking Supervision, Comitetul de la Basel pentru supraveghere bancară) are sediul la **BIS**, în Basel istoria Comitetului de la Basel
  - 1996: băncile pot calcula capitalul pentru riscul de piață cu propriile modele VaR BCBS (1996a)
  - regula: VaR 1% pe 10 zile, înmulțit cu un factor de cel puțin 3; factorul crește dacă modelul nu trece testul (backtesting) BCBS (1996b)
- 2019: **FRTB** (Fundamental Review of the Trading Book, revizuirea fundamentală a portofoliului de tranzacționare) BCBS (2019)
  - capitalul se calculează din ES 2,5% în loc de VaR 1% (MAR33, BCBS (2023b)); backtesting-ul numără în continuare depășirile VaR (MAR32, BCBS (2023a))



Turnul BIS din Basel, sediul Comitetului de la Basel

Foto: Taxiarchos228 (2014); CC BY-SA 4.0; Wikimedia Commons

Crizele din 2008 și 2020



Sediul Lehman Brothers, New York, 15 septembrie 2008

Foto: Robert Scoble (2008); CC BY 2.0; Wikimedia Commons



Districtul financiar din New York, 25 martie 2020

Foto: Billie Grace Ward (2020); CC BY 2.0; Wikimedia Commons

- Cea mai proastă zi a S&P 500 din 2000: $-12{,}8\%$ pe 16 martie 2020; un model Normal cu volatilitatea de selecție îi dă unei asemenea zile o probabilitate practic nulă
- O măsură de risc trebuie judecată în astfel de perioade: folosim 2008 și 2020 ca teste de stres în tot capitolul

Pierderi, orizont și nivel

- X: **P&L** (profit and loss, profitul sau pierderea) ori randamentul unei poziții pe un orizont h (aici o zi, în %)
  - pierderea este $L = -X$: un număr pozitiv cînd poziția pierde bani
- **Nivelul** α este probabilitatea cozii: $\alpha = 1\%$ sau $\alpha = 2{,}5\%$
  - scriem **VaR 1%** și **ES 2,5%**: numărul din denumire este întotdeauna probabilitatea cozii
- $q_\alpha(X) = \inf\{x : P(X \leq x) > \alpha\}$: **cuantila** de ordin α a lui X (Capitolul 2)
  - pentru o funcție de repartiție continuă F: $q_\alpha = F^{-1}(\alpha)$, un număr negativ pentru α mic

Valoarea expusă la risc (VaR)

- **Definiție**: $\mathrm{VaR}_\alpha(X) = -q_\alpha(X)$
  - pierderea depășită cu probabilitatea α: $P(L > \mathrm{VaR}_\alpha) \leq \alpha$
  - semnul minus face din VaR o pierdere pozitivă; un VaR de 3% înseamnă „o pierdere de peste 3% apare într-o zi din 100"
- Ce **nu** spune VaR
  - cît de mare este pierderea în zilele proaste: o pierdere de 4% și una de 40% dincolo de VaR dau același VaR
  - VaR nu este pierderea maximă: prin construcție este depășit în aproximativ α dintre zile
- În bani: o poziție cu valoarea W are $\mathrm{VaR} = W \times \mathrm{VaR}(\%)/100$

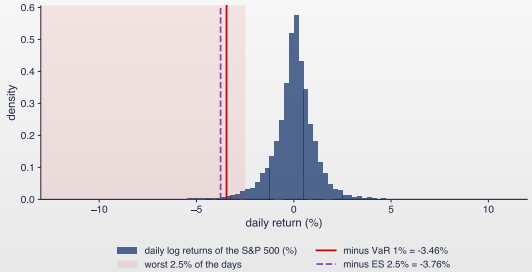
Expected shortfall (ES)

- **Definiție**: $\mathrm{ES}_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha q_u(X)\,du$: media valorilor VaR la toate nivelurile sub α
  - pentru o distribuție continuă: $\mathrm{ES}_\alpha = -E[X \mid X \leq q_\alpha(X)]$, pierderea medie din cele mai proaste α dintre zile
  - u: variabila de integrare, un nivel al cozii care parcurge valorile de la 0 la α
  - alte denumiri: CVaR (conditional VaR), TVaR (tail VaR), expected tail loss
- Proprietăți
  - $\mathrm{ES}_\alpha \geq \mathrm{VaR}_\alpha$ la același nivel α
  - ES privește în interiorul cozii: două distribuții cu același VaR, dar cu cozi diferite, au ES diferit

Exemplu rezolvat: VaR și ES din 100 de zile

- O poziție are 100 de randamente zilnice; cele mai proaste cinci sînt $-6{,}1$, $-4{,}8$, $-4{,}2$, $-3{,}9$, $-3{,}5$ (în %)
  - cuantila empirică de nivel α: al k-lea cel mai mic randament, $k = \lceil n\alpha \rceil$ ($\lceil\cdot\rceil$: rotunjire în sus)
- **VaR 1%**: $k = \lceil 100 \times 0{,}01 \rceil = 1$, deci $\mathrm{VaR}_{1\%} = 6{,}1\%$
  - o singură observație decide VaR 1%: cu 100 de zile, estimarea este foarte imprecisă
- **ES 2,5%**: $k = \lceil 2{,}5 \rceil = 3$; media celor mai mari trei pierderi
  - $\mathrm{ES}_{2{,}5\%} = (6{,}1 + 4{,}8 + 4{,}2)/3 = 5{,}03\%$; $\mathrm{VaR}_{2{,}5\%} = 4{,}2\%$
- O poziție de 1 milion de lei: VaR 1% = 61 000 de lei; într-o zi din o sută, pierderea este mai mare

VaR 1% și ES 2,5% pentru S&P 500



- Randamente logaritmice zilnice din 2000 (6 714 zile); estimări istorice: VaR 1% = 3,46%, VaR 2,5% = 2,51%, ES 2,5% = 3,76%
- Interpretare: ES 2,5% face media întregii cozi hașurate, inclusiv a zilelor extreme din 2008 și 2020; VaR 1% este un singur punct din această coadă
- Pentru o poziție de 1 milion de lei în indice: VaR 1% circa 34 552 de lei, ES 2,5% circa 37 613 lei

SFM_ch10_var_methods

Distribuția Normală: formule explicite

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$ (Φ, φ: funcția de repartiție și densitatea lui $N(0,1)$)
  - $\mathrm{VaR}_\alpha = -(\mu + \sigma z_\alpha), \quad \mathrm{ES}_\alpha = -\mu + \sigma \dfrac{\varphi(z_\alpha)}{\alpha}$
  - derivare: $E[Z \mid Z \le z] = -\varphi(z)/\Phi(z)$, deoarece $\varphi'(z) = -z\varphi(z)$
- Valori: $z_{0{,}01} = -2{,}326$; $z_{0{,}025} = -1{,}960$, $\varphi(z_{0{,}025}) = 0{,}0584$, $\varphi(z_{0{,}025})/0{,}025 = 2{,}338$
  - ES 2,5% / VaR 1% $= 2{,}338/2{,}326 = 1{,}005$ (cu $\mu = 0$): pentru randamente Normale, cele două măsuri sînt aproape egale
  - de aceea ES 2,5% a înlocuit VaR 1% în Basel: aproximativ aceeași mărime pentru date Normale, mai mare pentru cozi groase

Exemplu rezolvat: VaR și ES Normale pentru S&P 500

- Momentele de selecție ale randamentelor zilnice din 2000: $\hat{\mu} = 0{,}025$, $\hat{\sigma} = 1{,}21$ (în %)
  - VaR 1% $= -(0{,}025 - 2{,}326 \times 1{,}21) = -0{,}025 + 2{,}822 = 2{,}80\%$
  - ES 2,5% $= -0{,}025 + 2{,}338 \times 1{,}21 = -0{,}025 + 2{,}836 = 2{,}81\%$
- Comparăm cu datele (simulare istorică): VaR 1% $= 3{,}46\%$, ES 2,5% $= 3{,}76\%$
  - VaR 1% Normal este prea mic cu 19%: coada distribuției Normale este prea subțire (Capitolul 2)
  - ES 2,5% Normal este și mai departe de date: ignoră zilele extreme
- Interpretare: doi parametri nu pot descrie coada; metodele următoare schimbă fie distribuția, fie datele folosite

Distribuția Student-t: formule explicite

- $X = m + s\,T$, $T \sim t_\nu$ (poziția m, scala s, ν grade de libertate, Capitolul 2); $t_\alpha = t_\nu^{-1}(\alpha)$, f_ν densitatea lui t_ν
  - $\mathrm{VaR}_\alpha = -(m + s\,t_\alpha)$, $\quad \mathrm{ES}_\alpha = -m + s\,\dfrac{f_\nu(t_\alpha)}{\alpha}\,\dfrac{\nu + t_\alpha^2}{\nu - 1}$ (pentru $\nu > 1$)
  - varianța este $s^2\nu/(\nu-2)$: o t **standardizată** (varianță 1) are $s = \sqrt{(\nu-2)/\nu}$
- **Exemplu rezolvat**: S&P 500, verosimilitate maximă: $\hat{m} = 0{,}068$, $\hat{s} = 0{,}703$, $\hat{\nu} = 2{,}67$
  - $t_{0{,}01} = -5{,}023$: VaR 1% $= -(0{,}068 + 0{,}703 \times (-5{,}023)) = 3{,}46\%$
  - factorul ES 5,720: ES 2,5% $= -0{,}068 + 0{,}703 \times 5{,}720 = 3{,}95\%$
- Interpretare: cu $\nu < 3$, coada estimată este foarte groasă: VaR 1% se potrivește cu datele, ES 2,5% este peste valoarea istorică de 3,76%

Scalarea VaR de la o zi la zece zile

- **Regula rădăcinii pătrate a timpului**: $\mathrm{VaR}^{(h)} \approx \sqrt{h}\,\mathrm{VaR}^{(\mathbf{1})}$
  - exactă pentru randamente Normale i.i.d. cu media 0: randamentul pe h zile are abaterea standard $\sigma\sqrt{h}$
  - Basel 1996: VaR pe 10 zile, de obicei scalat de la o zi cu $\sqrt{10} = 3{,}162$
- S&P 500, simulare istorică
  - o zi: 3,46%; scalat: $3{,}162 \times 3{,}46 = 10{,}93\%$
  - VaR 1% al randamentelor pe 10 zile suprapuse: 10,37%
- De ce regula nu funcționează în general
  - cozi groase: suma a 10 randamente cu cozi groase este mai aproape de Normală (CLT, teorema limită centrală), deci raportul cuantilelor este sub $\sqrt{10}$
  - autocorelația: $\mathrm{Var}(r_{t+\mathbf{1}} + \cdots + r_{t+\mathbf{10}}) = \sigma^{\mathbf{2}}\big(10 + 2\sum_{k=\mathbf{1}}^{\mathbf{9}}(10-k)\rho_k\big)$; S&P 500: $\hat{\rho}_{\mathbf{1}} = -0{,}10$, raport 3,00; BET: $\hat{\rho}_{\mathbf{1}} = +0{,}11$, raport $3{,}86 > \sqrt{10}$
  - volatility clustering: după o zi liniștită, riscul pe 10 zile este mai mare decît $\sqrt{10}$ ori riscul de azi, după o perioadă turbulentă este mai mic (Capitolul 9)

1999: patru axiome pentru o măsură de risc

- Artzner et al. (1999): o măsură de risc ρ asociază unei pierderi L capitalul care o face acceptabilă; ρ este **coerentă** dacă
  - **monotonie**: $L_1 \leq L_2$ întotdeauna $\Rightarrow \rho(L_1) \leq \rho(L_2)$
  - **invarianță la translație**: $\rho(L + c) = \rho(L) + c$ pentru o sumă sigură c
  - **omogenitate pozitivă**: $\rho(\lambda L) = \lambda \rho(L)$, $\lambda > 0$
  - **subaditivitate**: $\rho(L_1 + L_2) \leq \rho(L_1) + \rho(L_2)$
- Subaditivitatea: diversificarea nu adaugă niciodată risc; o bancă poate aduna capitalul diviziilor ca margine superioară



Freddy Delbaen, coautor al axiomelor (1997)

Foto: ETH-Bibliothek Zürich, Bildarchiv (1997); CC BY-SA 4.0; Wikimedia Commons

Contraexemplu: două obligațiuni, pas cu pas

- Două obligațiuni independente; fiecare pierde 100 cu probabilitatea 4% (neplată) și 0 în rest; nivelul $\alpha = 5\%$
  - o obligațiune: $P(L > 0) = 4\% \leq 5\%$, deci $\mathrm{VaR}_{5\%} = 0$ pentru fiecare
- Ambele obligațiuni: $P(L = 200) = 0{,}16\%$, $P(L = 100) = 7{,}68\%$, deci $P(L > 0) = 7{,}84\% > 5\%$
  - $\mathrm{VaR}_{5\%}(L_1 + L_2) = 100 > 0 + 0$: VaR **penalizează** diversificarea
- ES 5% (media celor mai proaste 5% dintre rezultate)
  - o obligațiune: $(4\% \times 100 + 1\% \times 0)/5\% = 80$
  - ambele: $(0{,}16\% \times 200 + (5 - 0{,}16)\% \times 100)/5\% = 103{,}2 \leq 80 + 80$: subaditiv

Coerența măsurilor ES și VaR

- **ES** satisface toate cele patru axiome Acerbi & Tasche (2002)
  - motivul: ES este o medie a cuantilelor pe coadă, iar media respectă sumele
- **VaR** le satisface pe primele trei; subaditivitatea poate să nu fie îndeplinită
  - nu este îndeplinită pentru pierderi discrete (credit, obligațiunile de mai sus) și pentru cozi extrem de groase (tail index-ul sub 1, Capitolul 5)
  - este îndeplinită pentru distribuțiile eliptice (Normală, Student-t) și, în practică, pentru majoritatea randamentelor de acțiuni Daníelsson et al. (2013)
- ES are nevoie de o medie finită a pierderilor; VaR există întotdeauna

Elicitabilitatea: evaluarea prognozelor

- O statistică este **elicitabilă** dacă o funcție de pierdere (de scor) este minimizată, în medie, de valoarea ei adevărată Gneiting (2011)
  - media: eroarea pătratică; mediana: eroarea absolută
- **VaR este elicitabil**: pierderea cuantilă (pinball) $S(v, x) = (\alpha - 1\{x < -v\})(x + v)$
  - v: prognoza VaR; x: randamentul realizat; $1\{\cdot\}$: 1 dacă evenimentul are loc, altfel 0
  - două modele VaR pot fi comparate prin media pierderii cuantile
- **ES singur nu este elicitabil** Gneiting (2011); perechea (VaR, ES) este elicitabilă Fissler & Ziegel (2016)
  - consecința: prognozele ES se testează împreună cu prognozele VaR (secțiunea 7)

Sinteza celor cinci metode necondiționate

Metoda	Ipoteza	Punctul slab
simulare istorică (HS)	fereastra trecută este un eșantion din ziua de mîine	puține puncte în coadă; nimic dincolo de cea mai proastă zi
Normală	randamentele sînt Normale	cozi mult prea subțiri
Student-t	randamentele urmează o distribuție Student-t	o singură formă pentru ambele cozi
Cornish–Fisher	cuantila Normală corectată prin asimetrie și boltire	nu mai funcționează pentru boltire mare
EVT (POT)	distribuția GPD peste un prag ridicat (Capitolul 5)	alegerea pragului

- „Necondiționat": același VaR în fiecare zi a ferestrei; metodele condiționate (secțiunea 5) folosesc volatilitatea de azi
- Toate metodele: randamente logaritmice zilnice în % (Capitolul 1), VaR și ES ca pierderi pozitive

Simularea istorică

- **Algoritmul**: luăm ultimele n randamente $r_{t-n+\mathbf{1}}, \ldots, r_t$ și le ordonăm: $r_{(\mathbf{1})} \leq \cdots \leq r_{(n)}$
  - $\widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha = -r_{(k)}$, $k = \lceil n\alpha \rceil$; $\quad \widehat{\mathrm{ES}}_\alpha = -\frac{\mathbf{1}}{k} \sum_{i=\mathbf{1}}^{k} r_{(i)}$
  - nu presupunem nicio distribuție: distribuția empirică a ferestrei este prognoza
- **Exemplu rezolvat**: S&P 500 din 2000, $n = 6\,714$
  - VaR 1%: $k = \lceil 67{,}14 \rceil = 68$, a 68-a cea mai proastă zi: 3,46%
  - ES 2,5%: media celor mai proaste $\lceil 167{,}85 \rceil = 168$ de zile: 3,76%
- Fereastra n este un compromis
  - scurtă (250 de zile): reacționează, dar VaR 1% se bazează pe 3 observații; lungă (toate datele): stabilă, dar insensibilă la volatilitatea de azi
  - **ghost effect**: o zi de crah schimbă VaR cînd intră în fereastră și din nou, brusc, după n zile, cînd iese din ea

Precizia unui VaR istoric

- O estimare VaR este o statistică: are o eroare de eșantionare; o măsurăm prin bootstrap (Capitolul 2)
  - reeșantionăm cele n randamente cu întoarcere de 2000 de ori, recalculăm VaR și ES și citim cuantilele de 2,5% și 97,5%
- S&P 500, toate cele 6 714 zile: VaR 1% = 3,46%, intervalul de 95% [3,18; 3,66]; ES 2,5% = 3,76%, [3,46; 4,07]
  - ultimele 500 de zile: VaR 1% = 2,75%, [1,99; 4,96]; ES 2,5% = 2,94%, [2,14; 3,82]
- Cu doi ani de date, intervalul pentru VaR 1% are o lățime de peste 2 puncte procentuale: VaR 1% se bazează pe 5 observații
- Interpretare: diferențele dintre metode mai mici decît intervalul bootstrap nu dovedesc că o metodă este mai bună

SFM_ch10_var_methods

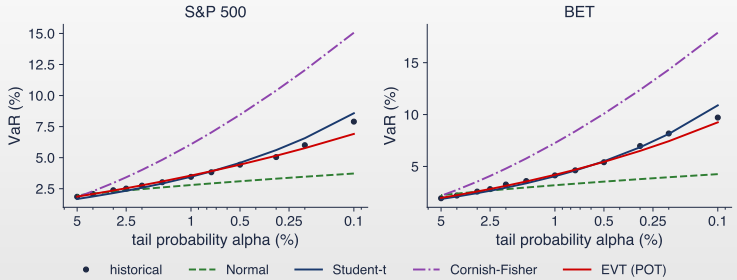
Dezvoltarea Cornish–Fisher

- Cornish & Fisher (1938): corectăm cuantila Normală $z = z_\alpha$ cu asimetria S și excesul de boltire K (coeficientul de boltire minus 3)
  - $z_{CF} = z + \frac{(z^2-1)S}{6} + \frac{(z^3-3z)K}{24} - \frac{(2z^3-5z)S^2}{36}$, $\quad \mathrm{VaR}_\alpha = -(\mu + \sigma z_{CF})$
  - S negativ și K pozitiv împing cuantila mai departe în coada stîngă
- S&P 500: $S = -0{,}35$, $K = 10{,}7$, $z_{0{,}01} = -2{,}326$
  - $z_{CF} = -5{,}03$, deci VaR 1% = 6,08%, față de valoarea istorică de 3,46%
- Interpretare: dezvoltarea este o corecție mică în jurul distribuției Normale; cu un exces de boltire de peste 10, ea depășește mult valoarea corectă
  - o folosim doar cînd $|S|$ și K sînt moderate (de exemplu, pentru randamente lunare sau portofolii diversificate)

EVT: peaks over threshold (Capitolul 5)

- Pierderile $L = -r$; pragul u = cuantila de 90% a pierderilor McNeil & Frey (2000); excesele $L - u$ peste u urmează o distribuție GPD (Pareto generalizată) cu forma ξ și scala β
  - $\mathrm{VaR}_\alpha = u + \frac{\beta}{\xi}\left[\left(\frac{n\alpha}{N_u}\right)^{-\xi} - 1\right]$, $\mathrm{ES}_\alpha = \frac{\mathrm{VaR}_\alpha + \beta - \xi u}{1-\xi}$ (N_u: numărul de excese)
  - n: numărul de zile; $n\alpha/N_u$: probabilitatea cozii raportată la ponderea excesele; $\xi > 0$: o coadă groasă
- S&P 500: $u = 1{,}26\%$, $N_u = 672$ (10,0% dintre zile), $\hat{\xi} = 0{,}164$, $\hat{\beta} = 0{,}820$
  - VaR 1%: $n\alpha/N_u = 0{,}0999$, $0{,}0999^{-\hat{\xi}} = 1{,}461$; $\hat{\beta}/\hat{\xi} = 4{,}988$; $1{,}26 + 4{,}988 \times (1{,}461 - 1) = 3{,}56\%$
  - ES 2,5% = 3,77%; $\hat{\xi} > 0$: o coadă groasă (de tip Pareto)
- EVT netezește coada și extrapolează dincolo de cea mai proastă zi observată: util pentru VaR 0,1% și pentru testele de stres

VaR pentru diferite probabilități ale cozii



- Fiecare linie: VaR_α al unei metode pentru α de la 5% la 0,1%; punctele: simularea istorică
- Interpretare: la 5% toate metodele sînt de acord; la 1% distribuția Normală dă valori prea mici; la 0,1% Student-t și EVT rămîn aproape de date, iar Cornish–Fisher crește exploziv

SFM_ch10_var_methods

VaR 1% pe metode, pentru șase serii

	HS	Normală	Student-t	Cornish–Fisher	EVT	K	$\hat{\xi}$
S&P 500	3,46	2,80	3,46	6,08	3,56	10,7	0,16
DAX	4,20	3,26	3,96	5,42	4,05	6,1	0,12
BET	4,14	3,19	4,06	7,25	4,19	11,1	0,23
Bitcoin	10,54	7,99	11,06	18,89	10,38	12,0	0,12
TLV	5,11	4,01	4,63	10,19	4,90	13,5	0,26
SNP	4,29	3,70	4,26	7,55	4,38	8,9	0,22

- Eșantioanele complete (S&P 500, DAX, BET din 2000; Bitcoin din 2014; TLV și SNP din 2010), în %; K: excesul de boltire
- HS, Student-t și EVT diferă cu cel mult 0,7 puncte procentuale; VaR-ul Normal este peste tot prea mic cu 14–24%
- Cornish–Fisher dă de 1,3 pînă la 2,0 ori VaR-ul istoric: cu K între 6 și 14, dezvoltarea este în afara domeniului ei de valabilitate

SFM_ch10_var_methods

ES 2,5% pe metode, pentru șase serii

	HS	Normală	Student-t	Cornish–Fisher	EVT	K	$\hat{\xi}$
S&P 500	3,76	2,81	3,95	6,65	3,77	10,7	0,16
DAX	4,26	3,27	4,37	5,81	4,24	6,1	0,12
BET	4,57	3,21	4,76	7,93	4,57	11,1	0,23
Bitcoin	10,84	8,03	13,37	20,69	10,90	12,0	0,12
TLV	5,37	4,03	5,03	11,20	5,35	13,5	0,26
SNP	4,70	3,72	4,57	8,18	4,71	8,9	0,22

- Distribuția Normală: ES 2,5% este aproape egal cu VaR 1% (raportul 1,005); datele: ES 2,5% istoric este cu 1,5–10,5% peste VaR 1% istoric (din valorile nerotunjite)
- Pentru S&P 500, DAX, BET și Bitcoin, Student-t dă cel mai mare ES dintre metodele rezonabile (Bitcoin: 13,37% față de 10,84%): cu $\hat{\nu} < 3$, coada ei este mai groasă decît cea a datelor de dincolo de prag
- Interpretare: EVT și HS sînt de acord la 2,5%; metoda contează mai mult pentru ES decît pentru VaR, deoarece ES depinde de întreaga coadă

SFM_ch10_var_methods

Condiționarea pe volatilitatea curentă

- Volatility clustering (Capitolele 8 și 9): după o zi liniștită urmează zile liniștite, după o zi agitată urmează zile agitate
  - un VaR necondiționat este prea mare în anii liniștiți și prea mic la începutul unei crize
- Modelul condiționat: $r_{t+\mathbf{1}} = \mu + \sigma_{t+\mathbf{1}} z_{t+\mathbf{1}}$, z i.i.d. cu media 0 și varianța 1
  - $\mathrm{VaR}_{t+\mathbf{1}} = -(\mu + \sigma_{t+\mathbf{1}}\, q_\alpha(z))$, $\quad \mathrm{ES}_{t+\mathbf{1}} = -\mu + \sigma_{t+\mathbf{1}}\, \mathrm{ES}_\alpha(z)$
  - $q_\alpha(z)$, $\mathrm{ES}_\alpha(z)$: cuantila și ES ale inovației standardizate z
  - două ingrediente: prognoza volatilității $\sigma_{t+\mathbf{1}}$ și distribuția lui z
- Două variante pentru distribuția lui z
  - **GARCH-t**: Student-t standardizată, cu ν estimat împreună cu GARCH(1,1) Bollerslev (1986)
  - **FHS** (filtered historical simulation, simularea istorică filtrată): distribuția empirică a reziduurilor standardizate $\hat{z}_t = (r_t - \hat{\mu})/\hat{\sigma}_t$ Hull & White (1998); Barone-Adesi, Giannopoulos & Vosper (1999)

Exemplu rezolvat: S&P 500 la 18 septembrie 2026

- GARCH(1,1)-t pe toate datele: $\hat{\mu} = 0{,}079$, $\hat{\alpha} = 0{,}123$, $\hat{\beta} = 0{,}872$, $\hat{\nu} = 6{,}26$; prognoza pentru ziua următoare $\sigma_{t+\mathbf{1}} = 0{,}714\%$
- **GARCH-t**: $q_{\mathbf{0{,}01}}(z) = t_{\nu}^{-\mathbf{1}}(0{,}01)\sqrt{(\nu-2)/\nu} = -2{,}557$; $\mathrm{ES}_{\mathbf{2{,}5\%}}(z) = 2{,}644$
  - VaR 1% $= -(0{,}079 + 0{,}714 \times (-2{,}557)) = 1{,}75\%$; ES 2,5% $= -0{,}079 + 0{,}714 \times 2{,}644 = 1{,}81\%$
- **FHS**: cuantila de 1% a celor 6 714 reziduuri standardizate este $-2{,}787$; ES 2,5% al lor este 2,952
  - VaR 1% $= -(0{,}079 + 0{,}714 \times (-2{,}787)) = 1{,}91\%$; ES 2,5% $= 2{,}03\%$
- Interpretare: o piață liniștită: VaR 1% condiționat este cam jumătate din valoarea necondiționată de 3,46%; reziduurile standardizate au o coadă stîngă mai groasă decît t estimată

SFM_ch10_conditional_var

VaR și ES pentru ziua următoare, pe șase serii

	VaR 1%			ES 2,5%			
	HS (tot)	GARCH-t	FHS	HS (tot)	GARCH-t	FHS	σ_{t+1}
S&P 500	3,46	1,75	1,91	3,76	1,81	2,03	0,714
DAX	4,20	2,31	2,48	4,26	2,38	2,55	0,945
BET	4,14	4,51	4,81	4,57	4,72	5,04	1,763
Bitcoin	10,54	7,37	7,99	10,84	8,11	8,57	2,829
TLV	5,11	7,18	7,33	5,37	7,53	8,00	2,791
SNP	4,29	5,06	5,39	4,70	5,31	5,65	1,966

- Prognoze pentru ziua de după 18 septembrie 2026, în %; HS (tot): valorile istorice necondiționate din secțiunea precedentă
- S&P 500, DAX, Bitcoin: perioadă liniștită, valorile condiționate sînt sub cele necondiționate
- Interpretare: BET, TLV și SNP: volatilitatea curentă este mare, deci VaR condiționat este peste VaR istoric pe termen lung; aceeași metodă transmite mesaje opuse pe piețe diferite

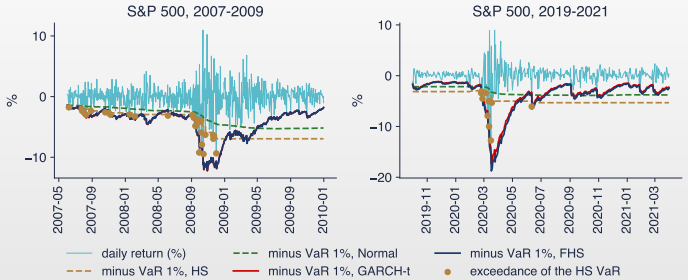
SFM_ch10_conditional_var

Prognoze pe fereastră mobilă: schema de evaluare

- **În afara eșantionului**: prognoza pentru ziua t folosește doar date pînă în ziua $t-1$
  - S&P 500, DAX, BET: fiecare zi din ianuarie 2005 (inclusiv 2008); Bitcoin: din ianuarie 2017
- Patru metode
  - **HS** și **Normală**: ultimele 500 de zile (circa doi ani)
  - **GARCH-t** și **FHS**: GARCH(1,1)-t reestimat la fiecare 250 de zile pe toate datele trecute; σ_t actualizat zilnic
- În fiecare zi: VaR 1% (pentru backtesting), VaR 2,5% și ES 2,5% (pentru backtesting-ul ES)

SFM_ch10_conditional_var

VaR 1% în 2008 și în 2020



- S&P 500: randamentele zilnice și minus prognozele VaR 1% ale celor patru metode; punctele: depășirile VaR HS
- HS și metoda Normală reacționează cu luni de întîrziere: fereastra de 500 de zile se schimbă încet; GARCH-t și FHS cresc brusc în cîteva zile
- Interpretare: după criză, HS rămîne ridicat timp de doi ani (ghost effect), în timp ce GARCH-t revine la niveluri normale

SFM_ch10_conditional_var

Perioade de stres: depășiri în 2008 și 2020

	sep. 2008 – mar. 2009					feb. – mai 2020				
	HS	Normală	GARCH-t	FHS	așteptat.	HS	Normală	GARCH-t	FHS	așteptat.
S&P 500	15	21	5	5	1,5	9	12	3	3	0,7
DAX	6	18	3	3	1,5	8	13	3	3	0,7
BET	8	14	4	4	1,4	5	10	4	4	0,7

- Depășiri ale VaR 1%: zile cu $r_t < -\mathrm{VaR}_t$; așteptat.: 1% din zilele perioadei
- În 2008, VaR Normal pentru S&P 500 a fost depășit în 21 din 146 de zile, HS în 15; GARCH-t și FHS în 5
- Interpretare: nicio metodă nu este perfectă într-o criză, dar cele condiționate greșesc mult mai rar: prognoza volatilității contează mai mult decît forma cozii

SFM_ch10_backtesting

Alegerea metodei

Situația	Metoda	Motivul
VaR zilnic pentru o poziție lichidă	GARCH-t, FHS	urmăresc volatilitatea; FHS păstrează coada empirică
istoric lung, verificare rapidă	HS	fără model, ușor de explicat
α foarte mic (0,1%), teste de stres	EVT	extrapolează dincolo de cea mai proastă zi
portofoliu cu multe active	varianță–covarianță, copulă	dependența; copula t pentru prăbușirile simultane
asimetrie și boltire moderate	Cornish–Fisher	o corecție rapidă a distribuției Normale

- Niciodată doar distribuția Normală pentru date zilnice; raportăm întotdeauna metoda, fereastra și nivelul
- Indiferent de metodă: o testăm prin backtesting (secțiunea 7)

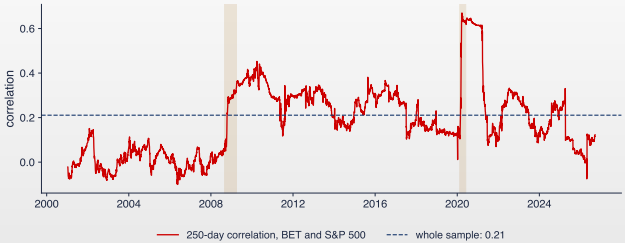
Un portofoliu BET și S&P 500

- Ponderile $w = (0{,}5;\ 0{,}5)$; randamente simple R_t în %, astfel încît $R_{p,t} = w_1 R_{1,t} + w_2 R_{2,t}$ exact
  - prețurile se aliniază pe cele 6 466 de zile comune de tranzacționare din 2000, apoi se calculează randamentele
  - fiecare indice în moneda lui: riscul valutar al unui investitor în lei este ignorat
- Date zilnice: BET $\hat{\mu} = 0{,}076$, $\hat{\sigma} = 1{,}42$; S&P 500 $\hat{\mu} = 0{,}034$, $\hat{\sigma} = 1{,}23$; corelația $\hat{\rho} = 0{,}21$
  - BVB tranzacționează pînă la 17:45, ora României, iar bursa din New York se deschide la 16:30: cea mai mare parte a ședinței de la New York ajunge la București abia a doua zi, deci corelația din aceeași zi subestimează legătura
- Întrebarea: este VaR-ul portofoliului mai mic decît media celor două VaR și cu cît?

Metoda varianță–covarianță

- Portofoliul: $\mu_p = w^\top \mu$, $\sigma_p^2 = w^\top \Sigma w = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \rho \sigma_1 \sigma_2$ (Σ: matricea de covarianță)
  - w: vectorul ponderilor; μ: vectorul randamentelor medii; ρ: corelația celor două active
  - dacă randamentele sînt Normale în ansamblu: $\mathrm{VaR}_p = -(\mu_p + z_\alpha \sigma_p)$ (metoda RiskMetrics J.P. Morgan/Reuters (1996))
- **Pas cu pas**: $\sigma_p^2 = 0{,}712^2 + 0{,}614^2 + 2 \times 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}369 = 1{,}068$, $\sigma_p = 1{,}033$
  - VaR 1% $= -(0{,}055 - 2{,}326 \times 1{,}033) = 2{,}35\%$; suma ponderată a celor două VaR Normale: $0{,}5 \times 3{,}23 + 0{,}5 \times 2{,}82 = 3{,}03\%$
  - **beneficiul diversificării**: 22% din risc dispare; cu $\rho = 1$ ar fi zero
- Contribuțiile Euler $w_i(\Sigma w)_i/\sigma_p$ ($(\Sigma w)_i$: componenta i a vectorului Σw) au suma σ_p: BET 56%, S&P 500 44% din riscul portofoliului

Corelația în perioadele de criză



- Corelația pe 250 de zile a randamentelor zilnice BET și S&P 500; hașurat: perioadele de stres 2008 și 2020
- Corelația în fiecare perioadă: 2017 (an liniștit) 0,20; sep. 2008 – mar. 2009 0,37; feb. – mai 2020 0,71
- Maximul corelației pe 250 de zile: 0,67 la 25 martie 2020
- Interpretare: diversificarea este cea mai slabă exact cînd este nevoie de ea: un VaR construit pe corelația medie este prea optimist într-o criză

SFM_ch10_portfolio_copula

Corelația și dependența în cozi

- Corelația Pearson măsoară co-mișcarea liniară pe toate zilele; este dominată de zilele obișnuite Embrechts, McNeil & Straumann (2002)
  - corelațiile de rang (Spearman, τ al lui Kendall) folosesc doar ordinea randamentelor: Kendall $\hat{\tau} = 0{,}100$, Spearman 0,15
- **Dependența în lower tail**: $\lambda_L = \lim_{q \to 0} P(U_1 \leq q \mid U_2 \leq q)$, $U_i = F_i(X_i)$ (randamentele pe o scală uniformă)
  - q: o probabilitate mică; F_i: funcția de repartiție a activului i; $\lambda_L \in [0, 1]$
  - șansa ca BET să aibă una dintre cele mai proaste zile ale lui, dat fiind că S&P 500 are una dintre cele mai proaste zile ale lui
  - datele: $q = 5\%$: 0,22; $q = 1\%$: 0,19; la independență, ambele ar fi egale cu q
- Prăbușire simultană (ambele sub propria cuantilă de 1%): 0,19% dintre zile, față de 0,01% la independență

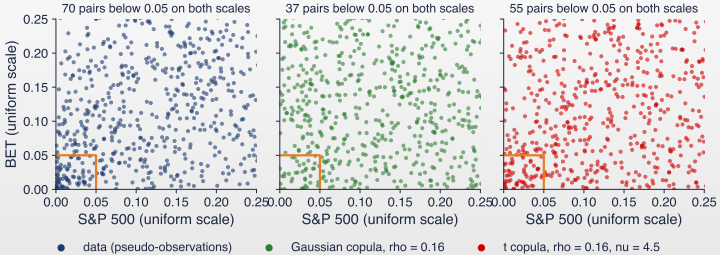
Copule: o introducere

- **Teorema lui Sklar**: orice funcție de repartiție comună se poate scrie $F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2))$ McNeil, Frey & Embrechts (2015)
  - F_1, F_2: distribuțiile marginale (fiecare activ separat); C: **copula**, o distribuție comună a unor variabile uniforme pe $[0,1]^2$
  - copula conține toată dependența, iar marginalele toate cozile individuale
- Rețeta practică
  - marginalele: empirice sau estimate (Student-t, EVT); dependența: o copulă estimată pe **pseudo-observațiile** $\hat{U}_{i,t} = \text{rang}(X_{i,t})/(n+1)$
  - simulăm (U_1, U_2) din copulă, revenim la randamente cu F_i^{-1}, calculăm randamentul portofoliului și citim VaR și ES
- Manual: Franke, Härdle & Hafner (2019), cap. 17

Copula Gaussiană și copula t

- **Copula Gaussiană**: dependența unei distribuții Normale bivariate cu corelația ρ; $\lambda_L = 0$ pentru $\rho < 1$
  - zilele extreme devin independente la limită: prăbușirile simultane sînt rare
- **Copula t**: dependența unei distribuții Student-t bivariate cu ρ și ν Demarta & McNeil (2005)
  - $\lambda_L = 2\, t_{\nu+1}\Big(-\sqrt{(\nu+1)(1-\rho)/(1+\rho)}\Big) > 0$: prăbușirile apar împreună pe mai multe active
  - $t_{\nu+1}(\cdot)$: funcția de repartiție Student-t cu $\nu+1$ grade de libertate; un ν mai mic sau un ρ mai mare dau un λ_L mai mare
- Estimarea pe BET și S&P 500: $\rho = \sin(\pi\hat{\tau}/2) = 0{,}157$ (valabil pentru ambele copule); $\hat{\nu} = 4{,}50$ prin verosimilitate maximă
  - log-verosimilitatea: Gaussiană 92,1, t 219,5; LR $= 254{,}9$, mult peste $\chi^2_{0{,}95}(1) = 3{,}84$: copula t este mai bună
  - dependența în coadă implicată $\lambda_L = 0{,}096$, față de 0 pentru copula Gaussiană

Pierderi mari simultane: datele și două copule



- Colțul din stînga jos al scalei uniforme: pseudo-observațiile și eșantioane de aceeași mărime (6 466) din copulele estimate
- Zile în care ambii indici sînt printre cele mai proaste 5% ale lor: datele 70, copula Gaussiană 37, copula t 55; independența: circa 16
- Interpretare: copula Gaussiană înjumătățește numărul zilelor proaste comune; copula t este mult mai aproape de date

SFM_ch10_portfolio_copula

VaR prin copule: simularea pas cu pas

- **1.** Extragem (Z_1, Z_2) dintr-o distribuție Normală bivariată cu corelația ρ
  - copula Gaussiană: $U_i = \Phi(Z_i)$
  - copula t: extragem $W \sim \chi^2_\nu$ și luăm $U_i = t_\nu(Z_i\sqrt{\nu/W})$: factorul comun $\sqrt{\nu/W}$ face ca extremele să apară împreună
- **2.** Revenim la randamente cu funcțiile cuantilă empirice: $R_i = \hat{F}_i^{-1}(U_i)$
- **3.** Randamentul portofoliului $R_p = 0{,}5R_1 + 0{,}5R_2$; repetăm de 200 000 de ori
- **4.** VaR 1% și ES 2,5% prin simulare istorică pe valorile simulate ale lui R_p
- Aceleași marginale în ambele copule: orice diferență de VaR vine numai din dependență

SFM_ch10_portfolio_copula

VaR 1% și ES 2,5% ale portofoliului, pe metode

Metoda	VaR 1%	ES 2,5%	P(prăbușire simultană la 1%)
varianță–covarianță (Normală)	2,35	2,36	–
copula Gaussiană, marginale empirice	2,75	2,93	0,03%
copula t, marginale empirice	2,81	3,03	0,13%
simulare istorică (datele)	3,08	3,30	0,19%

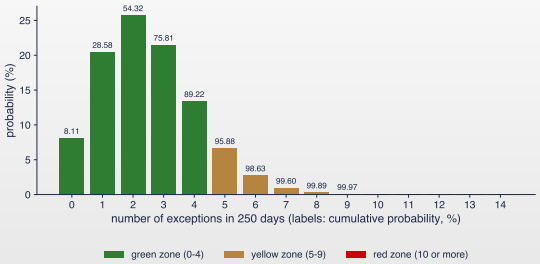
- În %, portofoliul 50/50, 6 466 de zile comune; copule: 200 000 de zile simulate
- Metoda Normală ignoră atît marginalele cu cozi groase, cît și dependența în cozi; copulele corectează marginalele, iar copula t și prăbușirile simultane
- Interpretare: copula t subestimează în continuare VaR istoric: legătura BET–S&P 500 este mai puternică în crize decît poate descrie o copulă constantă

SFM_ch10_portfolio_copula

Secvența depășirilor

- **Depășire** (excepție): o zi cu $r_t < -\mathrm{VaR}_t$; $I_t = 1\{r_t < -\mathrm{VaR}_t\}$
  - VaR trebuie să fie prognoza făcută cu o zi înainte: fără informații din viitor
- Un VaR corect la nivelul α: I_t sînt i.i.d. Bernoulli(α) Christoffersen (1998)
  - **acoperire necondiționată**: $P(I_t = 1) = \alpha$: numărul corect de depășiri
  - **independență**: o depășire azi nu face mai probabilă o depășire mîine
- Numărul de depășiri în n zile: $x = \sum_t I_t \sim \mathrm{Binomial}(n, \alpha)$, media $n\alpha$, varianța $n\alpha(1-\alpha)$

Depășiri în 250 de zile pentru un VaR 1% corect



- $\mathrm{Binomial}(250; 0{,}01)$: 2,5 depășiri așteptate; 0 depășiri cu probabilitatea 8,11%, 5 sau mai multe cu probabilitatea 100% − 89,22%, adică circa 11%
- Interpretare: un an de date separă doar aproximativ un model bun de unul prost: un model corect ajunge în zona galbenă cam un an din nouă

SFM_ch10_backtesting

Testul POF al lui Kupiec

- **POF** (proportion of failures, proporția depășirilor) Kupiec (1995): H_0: $P(I_t = 1) = \alpha$; $\hat{\pi} = x/n$
  - $LR_{uc} = -2\left[(n-x)\ln(1-\alpha) + x\ln\alpha - (n-x)\ln(1-\hat{\pi}) - x\ln\hat{\pi}\right] \sim \chi^2(1)$ în ipoteza H_0
  - x: depășirile în n zile; $\hat{\pi}$: rata observată; LR_{uc} compară verosimilitatea cu rata α cu cea cu rata $\hat{\pi}$
  - $LR_{uc} \geq 0$; un test al raportului de verosimilitate (Capitolul 6); respingem la 5% dacă $LR_{uc} > 3{,}84$
- **Pas cu pas**: $n = 250$, $x = 7$, $\hat{\pi} = 0{,}028$
  - $\ln L_0 = 243\ln 0{,}99 + 7\ln 0{,}01 = -34{,}68$; $\ln L_1 = 243\ln 0{,}972 + 7\ln 0{,}028 = -31{,}93$
  - $LR_{uc} = -2(-34{,}68 - (-31{,}93)) = 5{,}50$, p $= 0{,}019$: respins la 5%
- Putere mică cu un an de date
  - în 250 de zile, orice număr între 1 și 6 este acceptat la 5%: un model cu o rată reală de 2% trece testul cu probabilitatea 76%
  - și prea puține depășiri duc la respingere: un VaR exagerat de prudent irosește capital

Testul Kupiec pe 21 de ani de prognoze pentru S&P 500

- VaR 1% GARCH-t, 3 ianuarie 2005 – 18 septembrie 2026: $n = 5\,460$ de zile, $x = 95$ de depășiri, $\hat{\pi} = 0{,}0174$
  - așteptat $n\alpha = 55$; un interval binomial de 95% pentru rată sub H_0: 0,75–1,26%
- **Pas cu pas**
  - $\ln L_0 = 5365 \ln 0{,}99 + 95 \ln 0{,}01 = -491{,}4$
  - $\ln L_1 = 5365 \ln(1 - 0{,}0174) + 95 \ln 0{,}0174 = -479{,}0$
  - $LR_{uc} = -2(\ln L_0 - \ln L_1) = 24{,}73$, $p < 0{,}001$
- Interpretare: cu 21 de ani de date, chiar și o rată de 1,74% în loc de 1% este respinsă clar; o cauză probabilă este lipsa efectului de levier (Capitolul 9)

SFM_ch10_backtesting

Testul de independență al lui Christoffersen

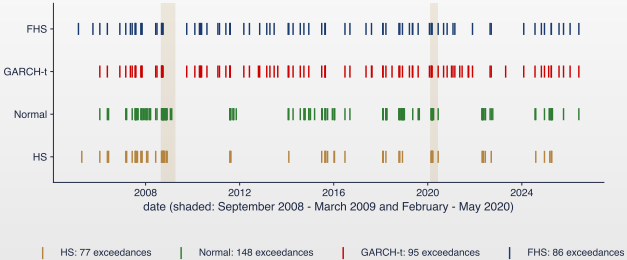
- Numărăm tranzițiile: n_{ij} = numărul zilelor cu $I_{t-1} = i$ și $I_t = j$; $\hat{\pi}_{01} = \dfrac{n_{01}}{n_{00} + n_{01}}$, $\hat{\pi}_{11} = \dfrac{n_{11}}{n_{10} + n_{11}}$
  - $\hat{\pi}_{01}$: rata depășirilor după o zi fără depășire; $\hat{\pi}_{11}$: după o zi cu depășire
  - H_0: $\pi_{01} = \pi_{11}$ (o depășire azi nu schimbă șansa unei depășiri mîine) Christoffersen (1998)
  - $LR_{ind} = -2 \ln \dfrac{(1-\hat{\pi})^{n_{00}+n_{10}} \hat{\pi}^{n_{01}+n_{11}}}{(1-\hat{\pi}_{01})^{n_{00}} \hat{\pi}_{01}^{n_{01}} (1-\hat{\pi}_{11})^{n_{10}} \hat{\pi}_{11}^{n_{11}}} \sim \chi^2(1)$
- **Acoperire condiționată**: $LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind} \sim \chi^2(2)$; respingem la 5% dacă $LR_{cc} > 5{,}99$
- **Exemplu**: S&P 500, VaR 1% HS, 5 460 de zile: $n_{00} = 5313$, $n_{01} = 69$, $n_{10} = 69$, $n_{11} = 8$
  - $\hat{\pi}_{01} = 1{,}28\%$, $\hat{\pi}_{11} = 10{,}4\%$: după o depășire, următoarea este de 8 ori mai probabilă
  - $LR_{ind} = 19{,}43$ ($p < 0{,}001$): depășirile apar grupat

Semaforul Basel

x	Zona	Cumul. (%)	Adaos	Factor
0	verde	8,11	0,00	3,00
1	verde	28,58	0,00	3,00
2	verde	54,32	0,00	3,00
3	verde	75,81	0,00	3,00
4	verde	89,22	0,00	3,00
5	galbenă	95,88	0,40	3,40
6	galbenă	98,63	0,50	3,50
7	galbenă	99,60	0,65	3,65
8	galbenă	99,89	0,75	3,75
9	galbenă	99,97	0,85	3,85
≥ 10	roșie	99,99	1,00	4,00

- BCBS (1996b): se numără depășirile VaR 1% pe o zi în ultimele 250 de zile
  - verde: nicio măsură; galbenă: factorul crește cu adaosul; roșie: modelul este considerat greșit
- Capitalul $= \max\{\mathrm{VaR}_{t-\mathbf{1}},\ (3 + \text{adaos}) \times \overline{\mathrm{VaR}}_{\mathbf{60}}\}$: maximul dintre VaR 1% pe 10 zile de ieri și factorul înmulțit cu media lui pe 60 de zile
  - zonele vin din distribuția binomială: zona galbenă începe unde probabilitatea cumulată trece de 95%, zona roșie unde atinge 99,99%
- x: depășiri în 250 de zile; Cumul.: $P(X \leq x)$ pentru $\mathrm{Binomial}(250; 0{,}01)$
- FRTB păstrează numărarea depășirilor VaR 1% la nivelul băncii și al diviziilor (MAR32, BCBS (2023a))

Depășirile în timp



- S&P 500, 2005–2026: fiecare marcaj este o zi în care VaR 1% al metodei a fost depășit; aproximativ 55 așteptate pentru fiecare metodă
- Interpretare: depășirile HS și Normale apar grupat (2007–2008, 2011, 2022); depășirile GARCH-t și FHS sînt răspîndite în timp, dar sînt mai multe în anii liniștiți

SFM_ch10_backtesting

Rezultatele backtesting-ului: S&P 500 și DAX

	Metoda	x	rata (%)	p POF	p ind.	p ac.c.	max. 250 z.	Z_2 (p)
S&P 500	HS	77	1,41	0,004	$<0,001$	$<0,001$	18	$-0,39$ ($<0,001$)
	Normal	148	2,71	$<0,001$	$<0,001$	$<0,001$	29	$-1,15$ ($<0,001$)
	GARCH-t	95	1,74	$<0,001$	0,114	$<0,001$	10	$-0,54$ ($<0,001$)
	FHS	86	1,58	$<0,001$	0,060	$<0,001$	10	$-0,20$ (0,013)
DAX	HS	67	1,21	0,121	$<0,001$	$<0,001$	12	$-0,26$ (0,002)
	Normal	133	2,41	$<0,001$	$<0,001$	$<0,001$	19	$-0,87$ ($<0,001$)
	GARCH-t	84	1,52	$<0,001$	0,549	0,001	9	$-0,49$ ($<0,001$)
	FHS	77	1,40	0,005	0,418	0,015	9	$-0,18$ (0,014)

- VaR 1% din 3 ianuarie 2005 (circa 5 500 de zile); x: depășirile; p ind.: independența Christoffersen; p ac.c.: acoperirea condiționată; max. 250 z.: cel mai mare număr pe 250 de zile; Z_2: backtesting-ul ES de la sfîrșitul acestei secțiuni
- Distribuția Normală: respinsă peste tot; HS: depășirile apar grupat; GARCH-t și FHS: depășiri independente, dar o rată de 1,4–1,7%

SFM_ch10_backtesting

Rezultatele backtesting-ului: BET și Bitcoin

	Metoda	x	rata (%)	p POF	p ind.	p ac.c.	max. 250 z.	Z_2 (p)
BET	HS	66	1,22	0,123	0,001	0,002	14	−0,27 (0,001)
	Normal	122	2,25	< 0,001	< 0,001	< 0,001	21	−0,83 (< 0,001)
	GARCH-t	65	1,20	0,158	0,807	0,358	9	−0,22 (0,007)
	FHS	65	1,20	0,158	0,240	0,185	7	−0,18 (0,021)
Bitcoin	HS	33	0,93	0,672	0,316	0,553	6	−0,07 (0,224)
	Normal	69	1,94	< 0,001	0,057	< 0,001	16	−0,56 (< 0,001)
	GARCH-t	48	1,35	0,045	0,683	0,123	8	−0,41 (< 0,001)
	FHS	24	0,68	0,040	0,155	0,044	6	0,12 (0,834)

- VaR 1% din 3 ianuarie 2005 (Bitcoin din 1 ianuarie 2017); coloanele ca pe slide-ul precedent
- BET: GARCH-t și FHS trec toate cele trei teste; Bitcoin: HS trece testele, FHS este prea prudent (0,68%)

SFM_ch10_backtesting

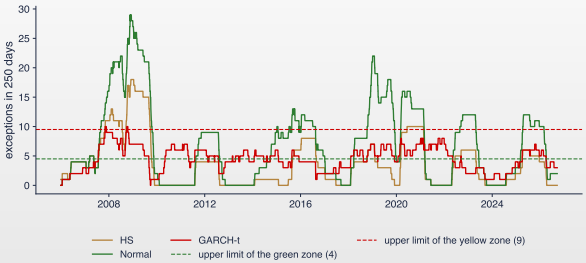
Clasamentul prognozelor și zona actuală a semaforului Basel

	pierderea cuantilă medie $\times 100$				depășiri, ultimele 250 de zile			
	HS	Normală	GARCH-t	FHS	HS	Normală	GARCH-t	FHS
S&P 500	5,17	5,80	3,71	3,68	0	2	3	3
DAX	5,15	5,52	4,08	4,05	1	3	3	3
BET	6,04	6,26	4,59	4,62	4	6	3	2
Bitcoin	13,57	14,52	13,53	13,75	3	4	2	2

- Testele spun dacă un model este acceptabil; o **funcție de scor** spune care dintre două modele este mai bun
  - VaR este elicitabil: media pierderii cuantile $\frac{1}{n}\sum_t(\alpha - I_t)(r_t + \mathrm{VaR}_t)$ ordonează prognozele Gneiting (2011)
- Indicii de acțiuni: GARCH-t și FHS au pierderea cea mai mică, metoda Normală cea mai mare; Bitcoin: cele patru metode sînt apropiate
- Interpretare: în ultimele 250 de zile, toate modelele sînt în zona verde, cu excepția VaR Normal pentru BET (6, zona galbenă): o fereastră recentă spune puțin despre un model

SFM_ch10_backtesting

Semaforul Basel în timp



- S&P 500: numărul depășirilor VaR 1% în ultimele 250 de zile, pentru fiecare zi de la 28 decembrie 2005 (sfîrșitul primei ferestre de 250 de zile); linii întrerupte: limitele zonelor
- Ponderea zilelor în zona roșie: Normală 33,3%, HS 11,8%, GARCH-t 0,5%; cel mai mare număr: 29, 18 și 10
- Interpretare: o bancă ce ar fi folosit VaR Normal sau HS ar fi plătit penalizarea zonei roșii în cea mai mare parte din 2008–2009; GARCH-t ajunge în ea doar în 0,5% din zile

SFM_ch10_backtesting

Backtesting pentru ES: Acerbi și Székely

- ES nu este elicitabil singur, dar poate fi testat împreună cu VaR Acerbi & Székely (2014)
  - $Z_2 = \frac{1}{T\alpha} \sum_{t=1}^{T} \frac{r_t I_t}{\mathrm{ES}_t} + 1, \quad I_t = 1\{r_t < -\mathrm{VaR}_t\}$, $\alpha = 2{,}5\%$
  - T: numărul zilelor de test; VaR_t, ES_t: prognozele pentru ziua t; fiecare depășire adaugă r_t/ES_t
  - dacă VaR și ES sînt corecte, $E[Z_2] = 0$; $Z_2 < 0$: pierderile de dincolo de VaR sînt mai mari decît ES prognozat sau prea dese
- p-value-ul prin simulare: extragem randamente din distribuția prognozată a fiecărei zile și recalculăm Z_2 de 1000 de ori
  - valorile Z_2 și p-value-urile lor: ultima coloană din cele două tabele de backtesting
- Interpretare: toate cele patru prognoze ES 2,5% sînt prea mici pentru indicii de acțiuni; FHS este cel mai aproape, deoarece preia coada lui z din date

SFM_ch10_backtesting

Studiu de caz: modelele VaR ale băncilor comerciale

- Berkowitz & O'Brien (2002): primul studiu al prognozelor VaR raportate efectiv de mari bănci americane, comparate cu P&L-ul zilnic din tranzacționare
  - schema studiului: VaR 1% al băncilor față de P&L-ul realizat; un model GARCH simplu al P&L-ului fiecărei bănci ca reper
- Rezultatele
  - VaR-ul băncilor a fost în medie prudent, dar depășirile care au avut loc au apărut grupat
  - reperul GARCH a dat valori VaR mai mici, cu o acoperire comparabilă: a urmărit mai bine schimbările volatilității
- Același tipar ca în datele noastre: VaR-ul pe fereastră este fie prea mare în perioadele liniștite, fie prea lent în perioadele turbulente; VaR condiționat se adaptează
- Lectură suplimentară despre prognoza directă a cuantilei: CAViaR Engle & Manganelli (2004)

O întrebare de cercetare deschisă

- **Crește brusc dependența în cozi dintre BVB și piețele mondiale în crize și revine apoi la nivelul anterior?**
  - azi: corelația 0,20 într-un an liniștit, 0,71 în primăvara lui 2020; o copulă t constantă dă $\lambda_L = 0{,}096$
  - un VaR de portofoliu cu o copulă constantă rămîne sub cel istoric (secțiunea 6)
- Întrebarea rămîne deschisă: crizele sînt puține, BVB se tranzacționează la alte ore, iar estimările din coadă au nevoie de multe observații
- Lucrări înrudite despre entropie ca măsură de risc, ca lectură suplimentară: Pele, Lazar & Dufour (2017); Pele & Mazurencu-Marinescu-Pele (2019)
- Instrumentele AI pot accelera un astfel de studiu, dar rezultatele lui trebuie verificate Wang et al. (2023)

Utilizări posibile ale instrumentelor AI

- **Literatura**: o listă a studiilor despre copule variabile în timp și despre contagiunea dintre pieţele emergente și cele dezvoltate
- **Cod**: o primă versiune a estimărilor copulei t pe ferestre mobile (250 de zile) pentru BET și S&P 500, cu ρ, ν și λ_L în timp
- **Robustețe**: randamente pe două zile (ore de tranzacționare diferite), DAX în loc de S&P 500, alte ferestre
- Exemplu de prompt
  - `Write Python code that fits a bivariate t copula by maximum likelihood to the pseudo-observations of daily BET and S&P 500 returns on rolling windows of 250 days moved by 21 days, and plots rho, nu and the lower tail dependence over time.`

Verificări necesare

- Convenția VaR: „VaR 1%" este pierderea depășită cu probabilitatea 1%, un număr pozitiv; un răspuns care folosește probabilitatea complementară sau raportează un VaR negativ amestecă convențiile
- Prețurile se aliniază pe zilele comune înainte de calculul randamentelor; BVB și New York se tranzacționează la ore diferite
- Pseudo-observațiile: rangurile împărțite la $n + 1$, nu la n (altfel densitatea copulei este infinită în 1)
- Dependența în cozi din 250 de zile se bazează pe cîteva zile proaste comune: raportați incertitudinea ei (bootstrap, Capitolul 2)
- Ferestrele suprapuse: estimările consecutive nu sînt dovezi independente
- Referințele: fiecare lucrare citată trebuie să existe; verificați DOI-ul

Idee de proiect

- **Întrebarea**: dă o copulă variabilă în timp un VaR de portofoliu mai bun decît o copulă constantă, pentru un portofoliu BVB și acțiuni mondiale?
  - date: BET, BET-TR, S&P 500, DAX din 2005 (EODHD)
- Pași
  - marginale GARCH-t pentru fiecare indice (Capitolul 9); copulă t constantă și pe fereastră mobilă pentru dependență
  - VaR 1% și ES 2,5% pe o zi pentru un portofoliu 50/50, în afara eșantionului, din 2008
  - testele Kupiec, Christoffersen și Z_2 pentru ambele variante, cu atenție specială pentru 2008, 2020 și 2022
- Livrabil: un tabel, un grafic și un paragraf despre ce pot și ce nu pot arăta datele
- Declarați orice utilizare a instrumentelor AI și enumerați erorile acestora pe care le-ați corectat

Idei de reținut

- VaR $1\% = -q_{1\%}$: pierderea depășită într-o zi din o sută; ES 2,5%: pierderea medie din cele mai proaste 2,5% dintre zile
- ES este coerent; VaR poate penaliza diversificarea; VaR este elicitabil, ES doar împreună cu VaR
- VaR-ul Normal este prea mic cu 14–24% pe date zilnice; HS, Student-t și EVT sînt de acord la 1%; Cornish–Fisher nu funcționează pentru boltire mare
- VaR condiționat (GARCH-t, FHS) urmărește perioadele turbulente și trece testele pe care metodele pe fereastră nu le trec
- Riscul de portofoliu: corelația crește în crize; dependența în cozi (copula t) contează pentru prăbușirile simultane
- Backtesting cu Kupiec (rata), Christoffersen (gruparea), semaforul Basel (reglementarea) și Z_2 (ES)

Formule de reținut

Mărimea	**Formula**
VaR	$\mathrm{VaR}_\alpha = -q_\alpha(X)$; HS: $-r_{(\lceil n\alpha \rceil)}$
ES	$\mathrm{ES}_\alpha = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha q_u\,du$; HS: $-\frac{1}{k}\sum_{i\le k} r_{(i)}$
Normală	$-(\mu+\sigma z_\alpha)$, $-\mu+\sigma\varphi(z_\alpha)/\alpha$
EVT (POT)	$u+\frac{\beta}{\xi}[(n\alpha/N_u)^{-\xi}-1]$, $\mathrm{ES}=(\mathrm{VaR}+\beta-\xi u)/(1-\xi)$
Condiționat	$-(\mu+\sigma_{t+1}q_\alpha(z))$
Portofoliu	$\sigma_p^2 = w^\top \Sigma w$
copula t	$\lambda_L = 2t_{\nu+1}(-\sqrt{(\nu+1)(1-\rho)/(1+\rho)})$
Kupiec	$LR_{uc} = -2\ln[(1-\alpha)^{n-x}\alpha^x/((1-\hat\pi)^{n-x}\hat\pi^x)] \sim \chi^2(1)$
Christoffersen	$LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind} \sim \chi^2(2)$
Acerbi–Székely	$Z_2 = \frac{1}{T\alpha}\sum_t r_t I_t/\mathrm{ES}_t + 1$

Autoevaluare

- **Întrebare**: o divizie raportează „VaR 1% $= -2{,}4\%$". Ce este greșit?
  - **Răspuns**: semnul: $-2{,}4\%$ este cuantila $q_{0,01}$; VaR 1% $= -q_{0,01} = 2{,}4\%$, o pierdere
- **Întrebare**: un model are 3 depășiri în 250 de zile, toate în aceeași săptămînă. Ce test detectează problema?
  - **Răspuns**: nu testul Kupiec (3 este aproape de 2,5); testul de independență al lui Christoffersen o poate face dacă depășirile cad în zile consecutive (el privește doar trecerile de la o zi la alta), iar cu 3 depășiri puterea lui este mică
- **Întrebare**: două portofolii au același VaR 1%. Pot avea ES 2,5% diferit?
  - **Răspuns**: da: ES depinde de întreaga coadă de dincolo de cuantilă, VaR doar de un punct
- Urmează: Capitolul 11, ipoteza piețelor fractale și memoria lungă

Bibliografie (1/2)

- Acerbi, C., Székely, B. (2014). Backtesting expected shortfall. MSCI Research; published in *Risk*, December 2014.
- Acerbi, C., Tasche, D. (2002). On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking & Finance*, 26(7), 1487–1503.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9(3), 203–228.
- Barone-Adesi, G., Giannopoulos, K., Vosper, L. (1999). VaR without correlations for portfolios of derivative securities. *Journal of Futures Markets*, 19(5), 583–602.
- Basel Committee on Banking Supervision (1996a). Amendment to the capital accord to incorporate market risks. Bank for International Settlements.
- Basel Committee on Banking Supervision (1996b). Supervisory framework for the use of "backtesting" in conjunction with the internal models approach to market risk capital requirements. Bank for International Settlements.
- Basel Committee on Banking Supervision (2019). Minimum capital requirements for market risk. Bank for International Settlements.
- Basel Committee on Banking Supervision (2023a). MAR32: Internal models approach: backtesting and P&L attribution test requirements. Basel Framework, version effective 1 January 2023. Bank for International Settlements.
- Basel Committee on Banking Supervision (2023b). MAR33: Internal models approach: capital requirements calculation. Basel Framework, version effective 1 January 2023. Bank for International Settlements.
- Berkowitz, J., O'Brien, J. (2002). How accurate are value-at-risk models at commercial banks? *Journal of Finance*, 57(3), 1093–1111.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3), 307–327.
- Borak, S., Härdle, W.K., López-Cabrera, B. (2013). *Statistics of Financial Markets: Exercises and Solutions*, 2nd ed. Springer.
- Christoffersen, P.F. (1998). Evaluating interval forecasts. *International Economic Review*, 39(4), 841–862.
- Cornish, E.A., Fisher, R.A. (1938). Moments and cumulants in the specification of distributions. *Revue de l'Institut International de Statistique*, 5(4), 307–320.
- Daníelsson, J., Jorgensen, B.N., Samorodnitsky, G., Sarma, M., de Vries, C.G. (2013). Fat tails, VaR and subadditivity. *Journal of Econometrics*, 172(2), 283–291.

Bibliografie (2/2)

- Demarta, S., McNeil, A.J. (2005). The t copula and related copulas. *International Statistical Review*, 73(1), 111–129.
- Embrechts, P., McNeil, A.J., Straumann, D. (2002). Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls. In M. Dempster (ed.), *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, 176–223. Cambridge University Press.
- Engle, R.F., Manganelli, S. (2004). CAViaR: conditional autoregressive value at risk by regression quantiles. *Journal of Business & Economic Statistics*, 22(4), 367–381.
- Fissler, T., Ziegel, J.F. (2016). Higher order elicitability and Osband's principle. *Annals of Statistics*, 44(4), 1680–1707.
- Franke, J., Härdle, W.K., Hafner, C.M. (2019). *Statistics of Financial Markets: An Introduction*, 5th ed. Springer.
- Gneiting, T. (2011). Making and evaluating point forecasts. *Journal of the American Statistical Association*, 106(494), 746–762.
- Hull, J., White, A. (1998). Incorporating volatility updating into the historical simulation method for value-at-risk. *Journal of Risk*, 1(1), 5–19.
- J.P. Morgan/Reuters (1996). *RiskMetrics – Technical Document*, 4th ed. New York.
- Kupiec, P.H. (1995). Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. *Journal of Derivatives*, 3(2), 73–84.
- McNeil, A.J., Frey, R. (2000). Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach. *Journal of Empirical Finance*, 7(3–4), 271–300.
- McNeil, A.J., Frey, R., Embrechts, P. (2015). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*, revised ed. Princeton University Press.
- Pele, D.T., Lazar, E., Dufour, A. (2017). Information entropy and measures of market risk. *Entropy*, 19(5), 226.
- Pele, D.T., Mazurencu-Marinescu-Pele, M. (2019). Using high-frequency entropy to forecast Bitcoin's daily value at risk. *Entropy*, 21(2), 102.
- Wang, H., Fu, T., Du, Y., Gao, W., et al. (2023). Scientific discovery in the age of artificial intelligence. *Nature*, 620, 47–60.