









Statistica piețelor financiare

Capitolul 11: Ipoteza piețelor fractale și memoria lungă



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București
IDA Institute Digital Assets
Blockchain Research Center
AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance
Academia Română, Institutul de Prognoză Economică
MSCA Digital Finance

Acronime folosite în acest material (1/2)

- **ACF**: Autocorrelation Function (funcția de autocorelație)
- **AI**: Artificial Intelligence (inteligență artificială)
- **AMH**: Adaptive Markets Hypothesis (ipoteza piețelor adaptive)
- **AR**: AutoRegressive (model); Abnormal Return (model autoregresiv; randament anormal, în studiile de eveniment)
- **ARFIMA**: AutoRegressive Fractionally Integrated Moving Average (model autoregresiv fracționar integrat cu medie mobilă)
- **ARMA**: AutoRegressive Moving Average (model) — model autoregresiv cu medie mobilă
- **BET**: Bucharest Exchange Trading (index) — indicele de referință al Bursei de Valori București
- **BET-TR**: BET Total Return (index) — indicele BET cu dividendele reinvestite
- **BVB**: Bursa de Valori București
- **DFA**: Detrended Fluctuation Analysis (analiza fluctuațiilor fără tendință)
- **EMH**: Efficient Market Hypothesis (ipoteza pieței eficiente)

Acronime folosite în acest material (2/2)

- **EODHD**: EOD Historical Data (market-data provider) — furnizor de date de piață
- **FIGARCH**: Fractionally Integrated GARCH (GARCH fracționar integrat)
- **FMH**: Fractal Market Hypothesis (ipoteza pieței fractale)
- **GARCH**: Generalised AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity (heteroscedasticitate condiționată autoregresivă generalizată)
- **GPH**: Geweke–Porter-Hudak (log-periodogram estimator) — estimatorul Geweke–Porter-Hudak pe log-periodogramă
- **HAR**: Heterogeneous AutoRegressive (model) — model autoregresiv heterogen
- **IGARCH**: Integrated GARCH (GARCH integrat)
- **MA**: Moving Average (medie mobilă)
- **OLS**: Ordinary Least Squares (metoda celor mai mici pătrate)
- **SE**: Standard Error (eroare standard)
- **SFE**: Statistics of Financial Markets, Exercises (Quantlet collection of the textbook) — colecția de Quantlet-uri a manualului Statistics of Financial Markets
- **SUA**: Statele Unite ale Americii

Întrebarea de azi și traseul

- **Întrebarea**: își amintesc randamentele de azi ce s-a întîmplat acum cîteva luni?
  - ipoteza pieței fractale adaugă o a doua temă: cine tranzacționează și pe ce orizont
  - Capitolul 7: randamentele zilnice sînt aproape necorelate la laguri mici; Capitolele 8 și 9: volatilitatea este persistentă
  - acest capitol se ocupă de dependența la laguri **mari** și pe **multe** scale de timp
- **Traseul** capitolului
  - ipoteza pieței fractale a lui Peters; autosimilaritate și fractali
  - Hurst și Nilul; statistica R/S; memoria lungă, mișcarea browniană fracționară, ARFIMA
  - estimatori (R/S, Lo, DFA, GPH), benzi Monte Carlo, memorie lungă aparentă
  - memoria lungă a volatilității; exponenți Hurst pe ferestre mobile pentru șase piețe; consecințe pentru risc

Rezultatele învățării

- Enunțați ipoteza pieței fractale și comparați-o cu ipoteza pieței eficiente și cu ipoteza piețelor adaptive
- Definiți autosimilaritatea, exponentul Hurst, mișcarea browniană fracționară, zgomotul gaussian fracționar și ARFIMA(0,d,0)
- Calculați statistica R/S pas cu pas și estimați H cu R/S, DFA și regresia GPH; aplicați testul R/S modificat al lui Lo
- Evaluați o estimare față de benzile Monte Carlo și recunoașteți memoria lungă aparentă (rupturi structurale, volatility clustering)
- Deosebiți memoria lungă a randamentelor de memoria lungă a volatilității pe date reale, cu estimări pe ferestre mobile
- Explicați cum schimbă H scalarea riscului cu orizontul

Bibliografie și instrumente

- Manual: Franke, Härdle & Hafner (2019), cap. 14 (14.1–14.5 definiție, integrare fracționară, autosimilaritate, teste și estimatori ai memoriei lungi; 14.6 modele cu memorie lungă)
  - ipoteza pieței fractale: Peters (1994); o sinteză despre memoria lungă: Baillie (1996)
- Quantlet-urile Python ale capitolului: Quantlets/Ch_11
  - portate din Quantlet-urile SFE SFEfbmplot, SFEfgnacf și SFEarfima
- Notebook-ul cursului: deschideți în Google Colab
- Cursuri video: Efficiency of cryptocurrency markets; Applied Time Series Analysis with Python
- Lecturi suplimentare despre crahuri și legi de putere pe piața românească și pe piața cripto: Pele & Mazurencu-Marinescu (2012); Pele & Mazurencu-Marinescu-Pele (2019)

Limitele EMH

- EMH (efficient market hypothesis, ipoteza pieței eficiente, Fama (1970); Capitolul 7): prețurile reflectă informația disponibilă, deci randamentele nu pot fi anticipate din randamentele trecute
  - mersul aleator al prețurilor implică creșteri independente: în acest capitol, $H = 0{,}5$
- Fapte pe care mersul aleator cu creșteri Normale nu le explică
  - cozi groase (Capitolele 2, 3, 5); volatility clustering (Capitolele 8, 9)
  - crahuri precum cel din 19 octombrie 1987 (cîteva slide-uri mai departe)
- EMH nu spune nimic despre **cine** tranzacționează și pe ce **orizont**: toți investitorii sînt tratați ca un singur investitor reprezentativ

Edgar Peters și ipoteza pieței fractale

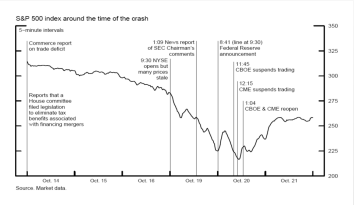
- **FMH** (fractal market hypothesis, ipoteza pieței fractale) Peters (1994): piața este formată din investitori cu **multe orizonturi investiționale**, de la minute la decenii
- Cele cinci afirmații ale lui Peters
  - piața este stabilă cînd conține investitori cu orizonturi foarte diferite: astfel se asigură lichiditatea
  - orizonturile scurte reacționează la sentiment și la informația tehnică; orizonturile lungi reacționează la informația fundamentală
  - dacă informația fundamentală devine îndoielnică, investitorii pe termen lung se retrag sau încep să tranzacționeze pe termen scurt: orizonturile devin uniforme, iar piața devine instabilă
  - prețurile combină tranzacționarea tehnică pe termen scurt și evaluarea fundamentală pe termen lung
  - un activ fără legătură cu ciclul economic nu are tendință pe termen lung: domină tranzacționarea pe termen scurt și lichiditatea

Orizonturi investiționale și lichiditate: un exemplu

- O acțiune scade cu 3% într-o dimineață
  - un day trader (orizont: ore) vede o mișcare mare și vinde
  - un fond de pensii (orizont: zece ani) vede o mișcare mică în raport cu orizontul lui și cumpără la un preț mai mic
- Investitorul cu orizont lung oferă lichiditatea cerută de investitorul cu orizont scurt: prețul evoluează ordonat
- Dacă și fondul de pensii începe să se teamă de orele următoare, nu mai cumpără nimeni: nu mai există lichiditate, iar scăderea se accelerează
- **Fractal**: același tipar de comportament se repetă pe fiecare orizont, cu randamente asemănătoare statistic la scale diferite

Crahul din 1987 în ipoteza piețelor fractale

- 19 octombrie 1987: S&P 500 a scăzut cu circa 20% într-o singură zi Carlson (2007)
- Interpretarea FMH
  - asigurarea de portofoliu și tranzacționarea automată au făcut ca portofoliile pe termen lung să vândă ca traderii pe termen scurt
  - toate orizonturile s-au redus la unul singur: cumpărătorii au dispărut
- Consecință testabilă: în crize domină orizonturile scurte, iar structura statistică pe scale diferite se schimbă



S&P 500 în jurul crahului din octombrie 1987

Grafic: Mark Carlson, Federal Reserve Board (2006); domeniu public; Wikimedia Commons

Testarea FMH: scalare, orizonturi și lichiditate

- FMH este o teorie formulată verbal; consecințele ei statistice pot fi testate
  - **autosimilaritate**: distribuția randamentelor pe h zile arată la fel după rescalarea cu h^H (secțiunea 2)
  - **memorie**: exponentul Hurst H măsoară dependența pe orizonturi lungi (secțiunile 3–5)
  - **schimbare**: în crize, H și ponderea orizonturilor scurte ar trebui să se schimbe (secțiunea 8)
- Studii de referință: Kristoufek (2012) și Kristoufek (2013) despre criza din 2008
  - exponenți Hurst locali și puterea wavelet a indicilor din SUA și Europa
  - perioadele cele mai turbulente coincid cu dominația orizonturilor investiționale scurte, așa cum prezice FMH

EMH, FMH și AMH

	EMH	FMH	AMH
Sursa	Fama (1970)	Peters (1994)	Lo (2004)
Investitorii	un investitor reprezentativ	multe orizonturi	specii care concurează și se adaptează
Stabilitatea	prețuri mereu corecte	diversitatea orizonturilor aduce lichiditate	se schimbă odată cu mediul
Memoria	$H = 0{,}5$	H poate fi diferit de 0,5	H variază în timp
Crizele	în afara teoriei	prăbușirea orizonturilor	dispariția în masă a strategiilor

- Cele trei nu sînt teste rivale: FMH și AMH explică unde și de ce aproximarea EMH nu mai funcționează

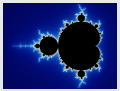
Benoît Mandelbrot și măsurarea neregularității

- Mandelbrot (1963): prețurile bumbacului au cozi groase și arată asemănător la scară zilnică, lunară și anuală
  - distribuțiile α-stabile din Capitolul 3
- Mandelbrot (1967): lungimea măsurată a unei coaste crește cînd rigla devine mai mică; rata de creștere definește o **dimensiune fractală**
- Mandelbrot & Van Ness (1968): mișcarea browniană fracționară, modelul acestui capitol
- **Fractal**: un obiect ale cărui părți seamănă cu întregul, exact sau în distribuție



Benoît Mandelbrot (1924–2010), Paris, 2006

Foto: David Monniaux (2006); CC BY-SA 3.0; Wikimedia Commons



Mulțimea Mandelbrot

Imagine: Wolfgang Beyer; CC BY-SA 3.0; Wikimedia Commons

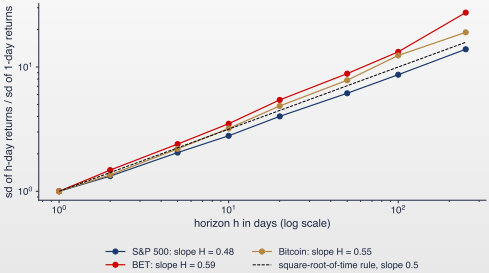
Dimensiunea fractală

- **Dimensiunea de similaritate**: un obiect format din N copii ale lui însuși, fiecare scalată cu $1/s$, are $D = \ln N / \ln s$
  - un segment: 2 jumătăți, $D = \ln 2 / \ln 2 = 1$; un pătrat: 4 sferturi cu latura $1/2$, $D = \ln 4 / \ln 2 = 2$
  - curba Koch: 4 copii scalate cu $1/3$, $D = \ln 4 / \ln 3 = 1{,}262$
  - triunghiul Sierpinski: 3 copii scalate cu $1/2$, $D = \ln 3 / \ln 2 = 1{,}585$
- Coasta de vest a Marii Britanii: $D \approx 1{,}25$ Mandelbrot (1967)
- Graficul unei traiectorii de preț: $D = 2 - H$
  - mișcarea browniană: $D = 1{,}5$; o traiectorie mai netedă, cu tendințe ($H > 0{,}5$), are $D < 1{,}5$

Procese autosimilare

- **Proces autosimilar** Franke, Härdle & Hafner (2019), Def. 14.1: $X_{ct} \stackrel{d}{=} c^H X_t$ pentru orice $c > 0$; H este **exponentul Hurst**
  - $\stackrel{d}{=}$: egalitate în distribuție; dilatarea timpului cu c echivalează cu dilatarea valorilor cu c^H
- Mișcarea browniană (Capitolul 4) este autosimilară cu $H = 1/2$: $W_{ct} \stackrel{d}{=} \sqrt{c}\, W_t$
- Consecință pentru prețurile logaritmice cu creșteri autosimilare
  - $\mathrm{sd}(r_t^{(h)}) = h^H \mathrm{sd}(r_t)$, unde $r_t^{(h)}$ este randamentul pe h zile, iar sd abaterea standard
  - regula rădăcinii pătrate a timpului, $\sqrt{h}$, este cazul particular $H = 1/2$
- Un prim estimator al lui H: panta dreptei lui $\ln \mathrm{sd}(r^{(h)})$ în funcție de $\ln h$

Scalarea randamentelor pe h zile



- Abaterea standard a randamentelor pe h zile, fără suprapunere, împărțită la cea zilnică, $h = 1, \ldots, 250$, scale logaritmice; date pînă la 18 septembrie 2026
- Pante: S&P 500 0,48, BET 0,59, Bitcoin 0,55; regula rădăcinii pătrate are panta 0,5

SFM_ch11_self_similarity

Interpretarea exponenților de scalare

- S&P 500: riscul pe 10 zile este de 2,80 ori riscul zilnic, sub $\sqrt{10} = 3{,}16$
  - ușoară revenire la medie: randamentele zilnice au autocorelația de ordinul întîi negativă, $-0{,}099$
- BET: de 3,50 ori, peste $\sqrt{10}$: autocorelație pozitivă
  - tranzacționarea redusă din primii ani face ca indicele să se ajusteze lent (Capitolul 7)
- Bitcoin: de 3,20 ori, aproape de $\sqrt{10}$
- Atenție: există doar cîteva zeci de blocuri de 250 de zile fără suprapunere; panta este imprecisă, deci avem nevoie de un estimator adecvat și de o bandă de încredere

Harold Edwin Hurst și Nilul

- Hurst (1880–1978), hidrolog britanic care a lucrat în Egipt din 1906, a proiectat rezervoare pe Nil
  - capacitatea necesară pentru a livra în fiecare an debitul mediu este egală cu amplitudinea abaterilor cumulate ale debitelor de la medie
- Hurst (1951): pentru debite independente, această amplitudine crește ca $n^{\mathbf{0,5}}$; în seriile de debite ale rîurilor, de precipitații și de inele ale copacilor crește ca n^K, cu K în medie de circa 0,73
  - anii cu debit mare urmează după ani cu debit mare: **memorie lungă**



H.E. Hurst (1953)

Foto: Elliott & Fry (1953); domeniu public; Wikimedia Commons



Nilometrul de pe insula Roda, Cairo, construit în 861

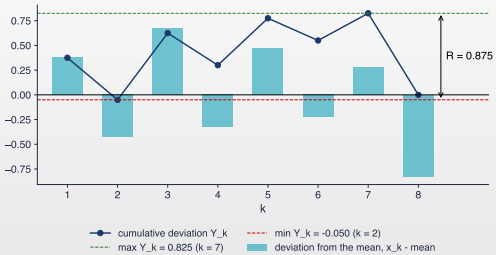
Foto: David Stanley (2013); CC BY 2.0; Wikimedia Commons

Statistica R/S

- Blocul $x_1, \ldots, x_n$, cu media $\bar{x}$; **abaterile cumulate** $Y_k = \sum_{j=1}^{k}(x_j - \bar{x})$, $k = 1, \ldots, n$
  - $Y_n = 0$ prin construcție
- **Amplitudinea**: $R_n = \max_k Y_k - \min_k Y_k$; **abaterea standard**: $S_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_j (x_j - \bar{x})^2}$
- **Statistica R/S** (rescaled range, amplitudinea rescalată) Franke, Härdle & Hafner (2019), 14.4.1: $(R/S)_n = R_n/S_n$
  - împărțirea la S_n elimină unitatea de măsură: $(R/S)_n$ este comparabilă între active
  - pentru date i.i.d. cu varianță finită, $(R/S)_n$ crește ca $n^{1/2}$; în cazul memoriei lungi crește ca n^H, $H > 1/2$
- Robustă la cozi groase: R și S sînt mărite de aceleași valori extreme Mandelbrot & Wallis (1969)

Exemplu rezolvat: R/S pentru opt randamente

- **Randamente (%)**: 0,5; −0,3; 0,8; −0,2; 0,6; −0,1; 0,4; −0,7
- **Media** $\bar{x} = 1{,}0/8 = 0{,}125$
- **Abateri**: +0,375; −0,425; +0,675; −0,325; +0,475; −0,225; +0,275; −0,825
- Y_k: 0,375; −0,050; 0,625; 0,300; 0,775; 0,550; 0,825; 0,000
- $R = 0{,}825 - (-0{,}050) = 0{,}875$; $S = \sqrt{1{,}915/8} = 0{,}489$
- $(R/S)_{\mathbf{8}} = 0{,}875/0{,}489 = 1{,}788$; **un bloc dă un singur punct, iar H are nevoie de multe mărimi de bloc**



SFM_ch11_rs_estimators

De la R/S la exponentul Hurst

- Pașii Mandelbrot & Wallis (1969)
  - alegem mărimi de bloc n între 10 și $N/4$, la distanțe egale pe scară logaritmică
  - împărțim cele N randamente în $\lfloor N/n \rfloor$ blocuri fără suprapunere; calculăm R/S în fiecare bloc și facem media: $(R/S)_n$
  - estimăm prin OLS (ordinary least squares, metoda celor mai mici pătrate) $\ln(R/S)_n = \ln c + H \ln n + e_n$: panta $\hat{H}$ estimează H
  - N: numărul de randamente; n: mărimea blocului; c: o constantă; e_n: eroarea regresiei
- Graficul log-log este principalul instrument de diagnostic: o dreaptă susține existența unui singur exponent de scalare
- Se aplică randamentelor (staționare), nu prețurilor: pentru prețuri, $(R/S)_n$ crește ca n

Interpretarea exponentului H

H	creșteri	memorie	traiectorie ($D = 2 - H$)
$0 < H < 0{,}5$	corelate negativ	antipersistentă: inversări	neregulată, $D > 1{,}5$
$H = 0{,}5$	necorelate	fără memorie (mers aleator)	$D = 1{,}5$
$0{,}5 < H < 1$	corelate pozitiv	persistentă: tendințe	mai netedă, $D < 1{,}5$

- H nu este o probabilitate: $H = 0{,}7$ nu înseamnă „70% șanse ca semnul să se repete"
- Două efecte numite de Mandelbrot & Wallis (1968)
  - **efectul Noe**: valori extreme (cozi groase, potopul); **efectul Iosif**: serii lungi de valori mari sau mici („șapte ani de belșug, șapte ani de foamete")
  - H măsoară efectul Iosif; tail index-ul din Capitolul 5 măsoară efectul Noe

Eșantioane mici: deplasarea estimatorului R/S

- Pentru date i.i.d., $(R/S)_n$ se apropie de $c\, n^{1/2}$ doar pentru n mare; pentru n mic crește mai repede Anis & Lloyd (1976)
  - panta estimată pe $n = 10, \ldots, N/4$ este peste 0,5 chiar fără nicio memorie
- Monte Carlo, 500 de serii i.i.d. Normale
  - $\hat{H}_{R/S}$ mediu: 0,588 pentru $N = 250$, 0,562 pentru $N = 1000$, 0,547 pentru $N = 5000$
  - banda de 95% pentru $N = 1000$: $[0{,}50; 0{,}63]$
- Regulă: comparăm $\hat{H}$ cu distribuția lui $\hat{H}$ în ipoteza nulă, pentru același N, nu cu 0,5 (secțiunea 5)

Memorie scurtă și memorie lungă

- X_t staționar, cu autocorelațiile $\rho(k)$ (ACF, autocorrelation function, funcția de autocorelație); **memorie lungă** Franke, Härdle & Hafner (2019), 14.1:
  - $\sum_k |\rho(k)| = \infty$: autocorelațiile nu sînt sumabile
  - forma uzuală: scădere hiperbolică $\rho(k) \sim C\, k^{2d-1}$ cînd $k \to \infty$, cu **parametrul de memorie** $0 < d < 0{,}5$; ea implică nesumabilitatea, reciproca nu este adevărată în general
  - în frecvență: densitatea spectrală are un pol în zero, $f(\lambda) \sim C\, \lambda^{-2d}$ cînd $\lambda \to 0$
  - $C > 0$: o constantă; $\sim$: raportul celor doi membri tinde la 1; $f(\lambda)$: partea din varianță la frecvența λ (ciclurile lungi: λ aproape de 0)
- **Memorie scurtă**: modelele ARMA (autoregressive moving average, autoregresive cu medie mobilă), de exemplu AR(1) cu $\rho(k) = \phi^k$
  - scădere exponențială: $\sum_k |\phi|^k = 1/(1 - |\phi|) < \infty$
- Legătura cu exponentul Hurst: $d = H - 1/2$

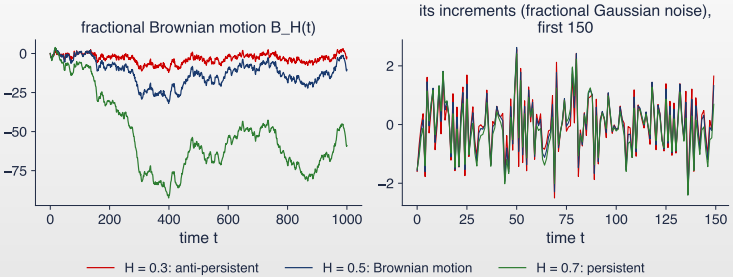
Exemplu rezolvat: descreșterea autocorelației la memoria lungă și la memoria scurtă

- Memorie lungă: zgomot gaussian fracționar (slide-urile următoare) cu $H = 0{,}8$
  - $\rho(1) = 2^{2H-1} - 1 = 2^{0{,}6} - 1 = 0{,}516$
  - $\rho(10) = 0{,}191$, $\rho(50) = 0{,}100$, $\rho(100) = 0{,}076$
- Memorie scurtă: AR(1) cu aceeași autocorelație de ordinul întîi, $\phi = 0{,}516$
  - $\rho(10) = \phi^{10} = 0{,}0013$; $\rho(100) = \phi^{100}$, practic zero
- Același comportament pe termen scurt, dar un termen lung foarte diferit: după 100 de zile, un șoc mai contează doar în cazul memoriei lungi

Mișcarea browniană fracționară

- **Mișcarea browniană fracționară** (fBm, fractional Brownian motion) $B_H(t)$, $0 < H < 1$ Mandelbrot & Van Ness (1968); Franke, Härdle & Hafner (2019), Def. 14.2: proces gaussian cu traiectorii continue, autosimilar cu exponentul H și cu creșteri staționare
- Proprietăți (Franke, Härdle & Hafner (2019), Teorema 14.1)
  - $B_H(0) = 0$, $E[B_H(t)] = 0$, $E[B_H(t)^2] = \sigma^2 |t|^{2H}$ (σ^2: varianța la $t = 1$)
  - $\mathrm{Cov}(B_H(t), B_H(s)) = \frac{\sigma^2}{2} \left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H} \right)$
- $H = 1/2$: mișcarea browniană, creșteri independente; $H \neq 1/2$: creșterile sînt corelate la toate lagurile
- Simulare: exactă, din matricea de covarianță a creșterilor (scufundare circulantă, ca în notebook)

Traiectorii fBm pentru trei exponenți Hurst



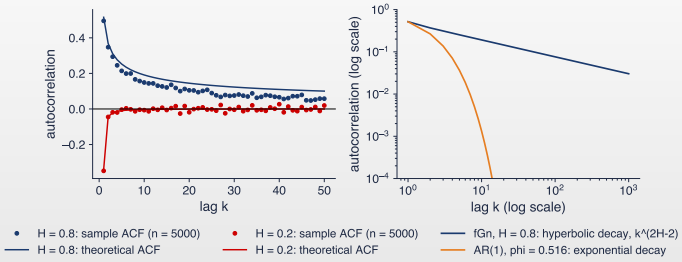
- Aceleași numere aleatoare, $H = 0{,}3,\ 0{,}5,\ 0{,}7$ (ca în SFEfbmplot); dreapta: primele 150 de creșteri
- $H = 0{,}7$: excursii lungi și amplitudine mare; $H = 0{,}3$: inversări frecvente, amplitudine mică; autocorelația de ordinul 1 a creșterilor $0{,}32$ și $-0{,}23$ (teoretic $0{,}32$ și $-0{,}24$)

SFM_ch11_fbm_fgn

Zgomotul gaussian fracționar

- **Zgomotul gaussian fracționar** (fGn, fractional Gaussian noise): creșterile $Y_k = B_H(k+1) - B_H(k)$, o serie staționară Franke, Härdle & Hafner (2019), 14.3
  - $\rho(k) = \frac{1}{2}\left(|k+1|^{2H} - 2|k|^{2H} + |k-1|^{2H}\right)$
  - pentru k mare: $\rho(k) \approx H(2H-1)\,k^{2H-2}$
- Trei regimuri
  - $1/2 < H < 1$: $\rho(k) > 0$ și nesumabile: memorie lungă cu $d = H - 1/2 \in (0, 1/2)$
  - $H = 1/2$: zgomot alb
  - $0 < H < 1/2$: $\rho(k) < 0$, sumabile: antipersistență
- fGn este modelul din spatele R/S și DFA: pentru date fGn, ambele estimează H

ACF a zgomotului gaussian fracționar



- Stînga: ACF de selecție și teoretică pentru $H = 0{,}8$ și $H = 0{,}2$ (ca în SFEfgnacf); $\rho(1) = 0{,}516$ și $-0{,}340$
- Dreapta, scale logaritmice: scădere hiperbolică (o dreaptă) față de scăderea exponențială a unui AR(1) cu același $\rho(1)$
- ACF de selecție a unei serii cu memorie lungă este sub cea teoretică: estimarea mediei elimină o parte din componenta lentă

SFM_ch11_fbm_fgn

ARFIMA(0,d,0): diferențierea fracționară

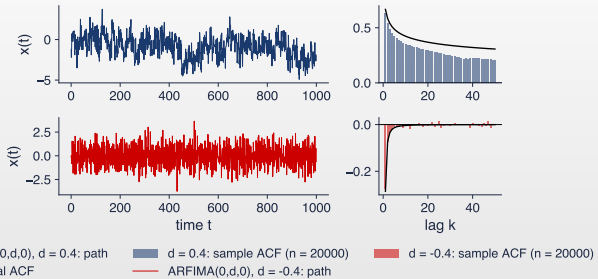
- **ARFIMA**(0,d,0) Granger & Joyeux (1980); Hosking (1981): $(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$, ε_t i.i.d. $(0, \sigma^{\mathbf{2}})$, L operatorul lag ($LX_t = X_{t-\mathbf{1}}$)
  - ARFIMA: autoregressive fractionally integrated moving average, model autoregresiv fracționar integrat cu medie mobilă; $d = 0$: zgomot alb, $d = 1$: mers aleator (Capitolul 7)
- Dezvoltarea binomială Franke, Härdle & Hafner (2019), 14.2: $(1-L)^d = \sum_{j \geq \mathbf{0}} \pi_j L^j$, $\pi_{\mathbf{0}} = 1$, $\pi_j = \pi_{j-\mathbf{1}} (j - 1 - d)/j$
  - $X_t = \varepsilon_t - \sum_{j \geq \mathbf{1}} \pi_j X_{t-j}$: contează tot trecutul, cu ponderi care scad lent
  - forma MA(∞): $X_t = \sum_{j \geq \mathbf{0}} \psi_j \varepsilon_{t-j}$, $\psi_{\mathbf{0}} = 1$, $\psi_j = \psi_{j-\mathbf{1}} (j - 1 + d)/j$
- Autocorelațiile: $\rho(k) = \dfrac{\Gamma(1-d)\,\Gamma(k+d)}{\Gamma(d)\,\Gamma(k+1-d)}$, adică $\rho(k) = \rho(k-1)\,\dfrac{k-1+d}{k-d}$
  - $\Gamma(\cdot)$: funcția gamma, $\Gamma(n) = (n-1)!$ pentru numere întregi; $\rho(1) = d/(1-d)$
  - pentru k mare, $\rho(k) \sim C k^{\mathbf{2}d-\mathbf{1}}$: memorie lungă pentru $0 < d < 1/2$

Parametrul de memorie d

d	memorie	revenire la medie	varianță	ACF
$(-0{,}5; 0)$	antipersistentă	da	finită	hiperbolică, negativă
0	scurtă	da	finită	exponențială (ARMA)
$(0; 0{,}5)$	lungă, staționară	da	finită	hiperbolică
$[0{,}5; 1)$	lungă, nestaționară	da	infinită	hiperbolică
1	rădăcină unitară	nu	infinită	nu scade

- Sursa: Franke, Härdle & Hafner (2019), tabelul 14.1; $H = d + 1/2$ pe domeniul staționar
- ARFIMA(p,d,q): dinamica ARMA(p,q) pentru termen scurt, d pentru termen lung Franke, Härdle & Hafner (2019), 14.6.1
- Integrarea fracționară acoperă spațiul dintre cazul staționar $d = 0$ și rădăcina unitară $d = 1$ din Capitolul 7

ARFIMA(0,d,0) cu $d = 0{,}4$ și $d = -0{,}4$



- Stînga: 1000 de valori simulate (ca în SFEarfima); dreapta: ACF de selecție (20000 de valori) și ACF teoretică
- $d = 0{,}4$: $\rho(1) = 0{,}667$, $\rho(10) = 0{,}424$, $\rho(50) = 0{,}307$: valuri lente în jurul mediei; $d = -0{,}4$: $\rho(1) = -0{,}286$, apoi aproape zero

SFM_ch11_arfima

Exemplu rezolvat: ARFIMA(0; 0,3; 0)

- Ponderile lui $(1-L)^{0,3}$: $\pi_1 = -d = -0{,}300$, $\pi_2 = \pi_1(1-d)/2 = -0{,}105$
  - ponderile MA: $\psi_1 = d = 0{,}300$, $\psi_2 = \psi_1(1+d)/2 = 0{,}195$
- Autocorelațiile
  - $\rho(1) = 0{,}3/0{,}7 = 0{,}429$; $\rho(2) = \rho(1) \times 1{,}3/1{,}7 = 0{,}328$
  - $\rho(10) = 0{,}173$, $\rho(100) = 0{,}069$
- AR(1) cu $\phi = 0{,}429$: $\rho(10) = 0{,}0002$
- Autocorelația scade sub 0,05 după 4 laguri pentru AR(1) și după 222 de laguri pentru ARFIMA; $H = d + 0{,}5 = 0{,}8$

Sinteza metodelor pentru memoria lungă

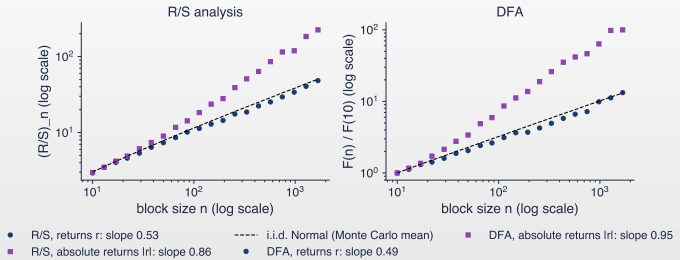
Instrument	Domeniu	Rezultat	Punct slab
R/S	timp	$\hat{H}$, panta unui grafic log-log	deplasat în sus în eșantioane mici; sensibil la memoria scurtă
R/S modificat (Lo)	timp	un test al memoriei scurte	putere mică față de memoria lungă
DFA	timp	$\hat{H}$ (exponentul α)	necesită mărimi de bloc; afectat de rupturi
GPH	frecvență	$\hat{d}$ cu eroare standard	variață mare; alegerea lățimii de bandă m

- Alți estimatori: estimatorul Whittle local (gaussian semiparametric) Robinson (1995), wavelets, verosimilitatea maximă exactă pentru ARFIMA (Franke, Härdle & Hafner (2019), 14.5)
- Bună practică: raportăm mai mulți estimatori, fiecare cu incertitudinea lui

Analiza fluctuațiilor fără tendință (DFA)

- **DFA** Peng et al. (1994): concepută pentru semnale cu tendințe care se schimbă lent
  - 1. profilul $Y_k = \sum_{j \le k}(x_j - \bar{x})$
  - 2. împărțim Y în blocuri de mărime n; în fiecare bloc estimăm o dreaptă prin OLS (eliminarea tendinței liniare)
  - 3. $F(n)$ = rădăcina mediei pătratelor abaterilor de la drepte, pe toate blocurile
  - 4. $F(n) \propto n^{\alpha}$: panta lui $\ln F(n)$ în funcție de $\ln n$ este $\hat{\alpha}$
- Interpretare
  - pentru fGn, $\alpha = H$: $\alpha = 0{,}5$ zgomot alb, $0{,}5 < \alpha < 1$ memorie lungă; pentru fBm, $\alpha = H + 1$
  - dreapta locală elimină tendințele liniare din fiecare bloc; $F(n)$ nu este de încredere pentru n sub circa 10 Kantelhardt et al. (2001)

R/S și DFA: S&P 500 din 2000



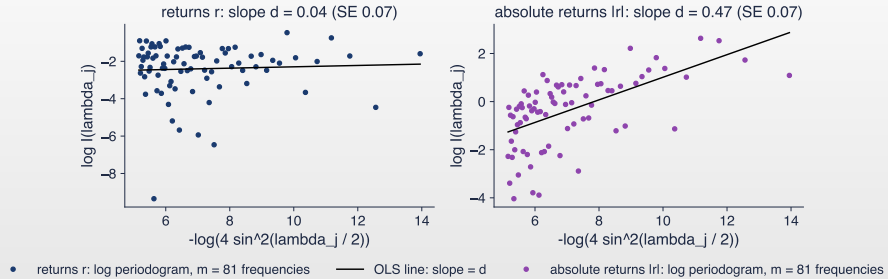
- 20 de mărimi de bloc, de la 10 la 1678 de zile; linia întreruptă: curba medie a seriilor i.i.d. Normale de aceeași lungime
- Randamente: panta R/S 0,53 (serii i.i.d.: 0,55), DFA 0,49 (i.i.d.: 0,50): fără memorie lungă
- Randamente absolute: R/S 0,86, DFA 0,95: memorie lungă puternică a volatilității (secțiunea 7)

SFM_ch11_rs_estimators

Regresia GPH pe log-periodogramă

- **Periodograma** la frecvențele Fourier $\lambda_j = 2\pi j/T$: $I(\lambda_j) = \frac{1}{2\pi T}\left|\sum_{t=1}^{T} x_t e^{-i\lambda_j t}\right|^2$
  - T: numărul de observații; i: unitatea imaginară; $|\cdot|^2$: pătratul modulului
  - estimează densitatea spectrală, care se comportă ca $C\lambda^{-2d}$ lîngă zero
- **GPH** Geweke & Porter-Hudak (1983); Franke, Härdle & Hafner (2019), 14.5.2:
  $\ln I(\lambda_j) = c - d\,\ln\!\left(4\sin^2(\lambda_j/2)\right) + e_j$, $j = 1, \ldots, m$
  - m: numărul de frecvențe joase folosite; c: o constantă; e_j: eroarea
  - $\hat{d}$ = panta OLS în funcție de $-\ln(4\sin^2(\lambda_j/2))$; $\hat{H} = \hat{d} + 0{,}5$
  - eroarea standard asimptotică $\pi/\sqrt{24m}$; lățimea de bandă $m = \lfloor T^{0{,}5} \rfloor$
- Compromis: un m mic păstrează doar frecvențele de termen lung (deplasare mică, variață mare); un m mare lasă să intre dinamica de termen scurt (deplasare)

GPH: randamentele și randamentele absolute S&P 500



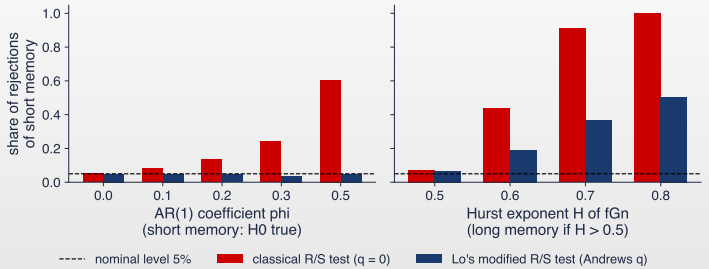
- Se folosesc cele mai joase $m = 81$ frecvențe; fiecare punct este o frecvență
- Randamente: $\hat{d} = 0{,}036$ (SE 0,071): nu diferă de 0; randamente absolute: $\hat{d} = 0{,}470$ (SE 0,071), $\hat{H} = 0{,}97$

SFM_ch11_rs_estimators

Testul R/S modificat al lui Lo

- Problema: și memoria scurtă (de exemplu un AR(1)) mărește R/S, deci R/S clasic confundă memoria scurtă cu memoria lungă
- Lo (1991): $V_N(q) = \frac{R_N}{\sqrt{N}\,\hat{\sigma}_N(q)}$, $\hat{\sigma}^{\mathbf{2}}_N(q) = \hat{\gamma}_{\mathbf{0}} + 2\sum_{j=\mathbf{1}}^{q}\left(1 - \frac{j}{q+\mathbf{1}}\right)\hat{\gamma}_j$
  - N: numărul de randamente; R_N: amplitudinea abaterilor cumulate pe întregul eșantion
  - $\hat{\gamma}_j$: autocovariațele de selecție; $\hat{\sigma}^{\mathbf{2}}_N(q)$: varianța pe termen lung Newey–West Newey & West (1987); $q = 0$: R/S clasic
  - $q = \lfloor (3N/2)^{\mathbf{1/3}}\,(2\hat{\rho}_{\mathbf{1}}/(1-\hat{\rho}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{1}}))^{\mathbf{2/3}} \rfloor$ ($\hat{\rho}_{\mathbf{1}}$: autocorelația de ordinul 1), dependent de date (regula lui Andrews, folosită de Lo)
- $H_{\mathbf{0}}$: memorie scurtă; la 5% respingem dacă $V_N(q) \notin [0{,}809; 1{,}862]$
  - Concluzia lui Lo: nu există memorie lungă în randamentele indicilor bursieri din SUA, odată ce se ține cont de memoria scurtă

R/S clasic față de R/S modificat: mărimea și puterea testului



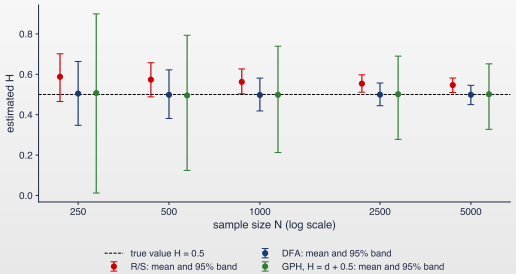
- 500 de serii de 1000 de valori. Stînga, AR(1) (memorie scurtă, H_0 adevărată): pentru $\phi = 0{,}5$, testul clasic respinge în 60% din cazuri, testul modificat în 5%
- Dreapta, fGn (memorie lungă dacă $H > 0{,}5$): pentru $H = 0{,}7$, ratele de respingere sînt 91% și 36%: corecția costă putere Teverovsky, Taqqu & Willinger (1999)

SFM_ch11_monte_carlo

Eșantioane mici și benzi Monte Carlo

- Rezultatele asimptotice nu sînt de încredere pentru R/S și DFA la mărimile de eșantion din finanțe; folosim simularea Weron (2002)
  - 1. simulăm multe serii i.i.d. Normale, de aceeași lungime N ca datele
  - 2. aplicăm exact același estimator (aceleași mărimi de bloc, aceeași lățime de bandă)
  - 3. cuantilele de 2,5% și 97,5% ale lui $\hat{H}$ formează banda de 95% în ipoteza $H = 0{,}5$
- Respingem $H = 0{,}5$ doar dacă $\hat{H}$ se află în afara benzii
- Seria i.i.d. Normală este cea mai simplă ipoteză nulă; un model estimat cu memorie scurtă (AR, GARCH) dă o ipoteză nulă mai exigentă (secțiunea 6)

Monte Carlo: deplasarea și dispersia estimatorilor



- 500 de serii i.i.d. Normale pentru fiecare N; valoarea adevărată este $H = 0{,}5$
- R/S: media 0,562 la $N = 1000$ (deplasată în sus); DFA: 0,497; GPH: 0,498, nedeplasat, dar cu dispersie mare
- Lățimea benzii de 95% la $N = 1000$: R/S 0,12, DFA 0,16, GPH 0,53; la $N = 250$: DFA 0,32

SFM_ch11_monte_carlo

S&P 500: toți estimatorii

	R/S	DFA	GPH $\hat{d}$ (SE)	Lo $V_N(q)$	q
randamente r_t	0,53	0,49	0,04 (0,07)	1,56	7
randamente absolute $\lvert r_t \rvert$	0,86	0,95	0,47 (0,07)	2,66	15
banda de 95%, i.i.d.	[0,51; 0,57]	[0,46; 0,54]	[0,36; 0,65]	[0,809; 1,862]	

- $N = 6\,714$ randamente zilnice, din 2000 pînă la 18 septembrie 2026; banda GPH este dată pentru $\hat{H} = \hat{d} + 0{,}5$
- Randamente: fiecare estimare se află în banda ei, $V_N(q)$ se află în [0,809; 1,862]
- Randamente absolute: fiecare estimare este mult peste banda ei, iar testul lui Lo respinge memoria scurtă

Interpretarea rezultatelor: S&P 500

- Direcția randamentelor nu are memorie lungă din 2000 încoace
  - în acord cu forma slabă a EMH (Capitolul 7) și cu Lo (1991)
  - doar R/S (0,53) ar părea să indice „$H > 0{,}5$"; banda lui începe de la 0,51
- Mărimea randamentelor are memorie lungă: $\hat{d} = 0{,}47$ pentru $|r_t|$
  - riscul unei perioade liniștite sau agitate persistă luni de zile: versiunea pe termen lung a volatility clustering
- Înainte de a concluziona că există memorie lungă, eliminăm memoria lungă aparentă: secțiunea următoare

Rupturile structurale și memoria lungă aparentă

- O serie cu cîteva schimbări ale mediei are o ACF de selecție care scade lent, ca la memoria lungă
  - două regimuri cu mediile $\mu_1 \neq \mu_2$: orice pereche de observații din același regim are în comun abaterea $\mu_i - \bar{x}$
- Rezultate de referință
  - Diebold & Inoue (2001): schimbările rare de regim produc estimări ale lui d care nu se pot deosebi de memoria lungă reală
  - Granger & Hyung (2004): o parte din memoria lungă a randamentelor absolute S&P 500 provine din rupturi ocazionale
  - Lobato & Savin (1998): memoria lungă a pătratelor randamentelor S&P 500 rezistă verificărilor; în randamente nu apare
- Teste ale memoriei lungi reale față de cea aparentă: Franke, Härdle & Hafner (2019), 14.4.3

Seria Nilului: ruptura structurală din 1898

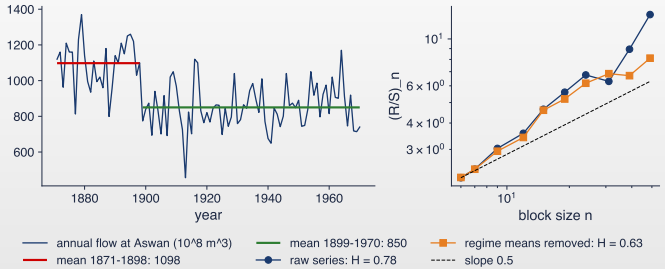
- Cobb (1978): debitul anual al Nilului la Aswan, 1871–1970, își schimbă media după 1898
- Debitul mediu: 1098 înainte, 850 după (în 10^8 m^3), o scădere de 23%
- Schimbarea coincide cu construcția barajului Aswan Low Dam (1898–1902)
- O serie hidrologică cu o ruptură ridică aceeași problemă ca o piață care își schimbă regimul



Barajul Aswan Low Dam de pe Nil

Foto: Karelj (2010); domeniu public; Wikimedia Commons

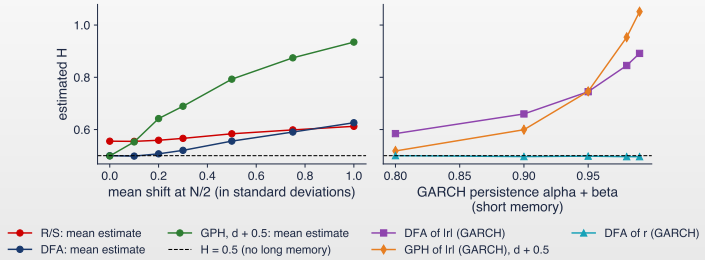
Nilul: R/S înainte și după eliminarea rupturii



- Seria brută: $\hat{H}_{R/S} = 0{,}78$, DFA 0,84; după eliminarea celor două medii de regim: 0,63 și 0,50
- Cu $N = 100$, banda i.i.d. pentru R/S este largă, $[0{,}45; 0{,}75]$, centrată în 0,60: cea mai mare parte a memoriei aparente era ruptura

SFM_ch11_spurious

Memorie lungă aparentă în simulări



- 300 de serii de 2000 de valori. Stînga: i.i.d. $N(0,1)$ cu o schimbare a mediei la mijloc; o schimbare de 0,5 abateri standard dă GPH $\hat{H} = 0{,}79$, DFA 0,56
- Dreapta: GARCH(1,1), un model cu memorie scurtă (Capitolul 9); pentru $|r_t|$, DFA dă 0,74 la $\alpha + \beta = 0{,}95$ și 0,89 la 0,99; randamentele rămîn la 0,50

SFM_ch11_spurious

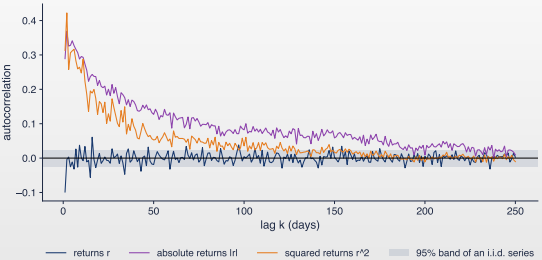
Volatility clustering și memoria lungă aparentă

- În GARCH(1,1), ACF a lui r_t^2 scade ca $(\alpha+\beta)^k$: memorie scurtă
  - cu $\alpha+\beta$ apropiat de 1, scăderea este atît de lentă încît un eșantion de cîteva mii de zile nu o poate deosebi de k^{2d-1}
- Consecință: un $\hat{H}$ mare pentru $|r_t|$ este compatibil cu un GARCH persistent; nu este, singur, o dovadă de dinamică fracționară
- Pentru randamente, GARCH nu creează memorie: estimările rămîn la 0,5 (panoul din dreapta)
- O ipoteză nulă mai bună: simulăm GARCH-ul estimat și comparăm $\hat{H}$ al datelor cu banda GARCH

Verificări împotriva memoriei lungi aparente

- **Testul permutării**: permutăm aleator seria; distribuția rămîne, ordinea dispare; $\hat{H}$ ar trebui să scadă la 0,5
- **Subeșantioane**: estimăm înainte și după rupturile cunoscute (2008, 2020); memoria lungă reală apare în fiecare subeșantion
- **Mai mulți estimatori și lățimi de bandă**: R/S, DFA, GPH cu $m = T^{0,5}$ și $T^{0,6}$ ar trebui să concorde
- **R/S modificat al lui Lo**: elimină efectul memoriei scurte
- **Ipoteză nulă pe baza unui model**: benzi Monte Carlo dintr-un AR sau GARCH estimat, în locul zgomotului i.i.d.

S&P 500: ACF pentru r_t, $|r_t|$ și r_t^2



- $|r_t|$: $\rho(1) = 0{,}289$, $\rho(50) = 0{,}127$, $\rho(100) = 0{,}082$; 227 dintre primele 250 de laguri sînt peste banda 0,024
- r_t^2: $\rho(1) = 0{,}313$, $\rho(50) = 0{,}053$; r_t: $\rho(1) = -0{,}099$, apoi mici ($|\rho(k)| \leq 0{,}061$), dar 31 dintre lagurile 2–250 sînt în afara benzii (circa 12 așteptate din întîmplare; cele mai mari la lagurile 15, 16 și 34)
- Ding, Granger & Engle (1993): $|r_t|$ este mai persistent decît r_t^2, care este mai afectat de zilele extreme izolate

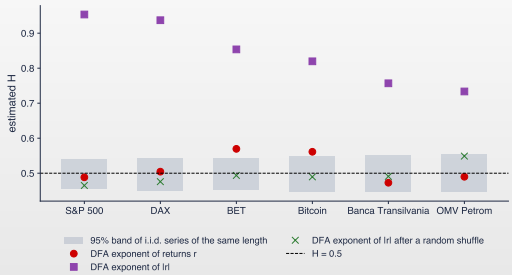
SFM_ch11_volatility_memory

Șase piețe: randamente și randamente absolute

	N	randamente r_t			randamente absolute $\lvert r_t \rvert$			banda DFA
		R/S	DFA	GPH $\hat{d}$	DFA	GPH $\hat{d}$	Lo V	
S&P 500	6 714	0,53	0,49	0,04	0,95	0,47	2,66	[0,46; 0,54]
DAX	6 786	0,55	0,50	−0,06	0,94	0,48	3,43	[0,45; 0,54]
BET	6 670	0,58	0,57	0,17	0,85	0,47	4,47	[0,45; 0,54]
Bitcoin	4 384	0,59	0,56	0,05	0,82	0,33	3,94	[0,45; 0,55]
TLV	3 788	0,54	0,47	−0,06	0,76	0,25	2,47	[0,45; 0,55]
SNP	3 815	0,55	0,49	−0,02	0,73	0,21	2,39	[0,45; 0,55]

- Date zilnice pînă la 18 septembrie 2026: S&P 500, DAX, BET din 2000, Bitcoin din 2014, TLV și SNP din 2010; eroarea standard GPH este de circa 0,07–0,08
- Randamentele BET: DFA 0,57 peste banda sa, GPH $\hat{d} = 0{,}17$, testul lui Lo ($V = 1{,}96$) respinge memoria scurtă
- Randamente absolute: $\hat{d}$ între 0,21 și 0,48; testul lui Lo respinge pentru toate cele șase serii

Șase piețe: exponenții DFA și testul permutării



- Zona colorată: banda de 95% a seriilor i.i.d. de aceeași lungime; cercuri: randamente; pătrate: $|r_t|$; cruciulițe: $|r_t|$ după o permutare aleatoare
- $|r_t|$: DFA între 0,73 și 0,95; după permutare: între 0,46 și 0,55, în interiorul benzilor: memoria se află în ordinea zilelor

SFM_ch11_volatility_memory

Interpretarea rezultatelor: previzibilitatea randamentelor și a volatilității

- **Randamentele**: fără memorie lungă la S&P 500, DAX, TLV și SNP; Bitcoin la limita benzii
  - BET: persistență, ca în testele raportului variațelor din Capitolul 7; în parte, efectul tranzacționării reduse din primii ani (secțiunea 8)
- **Volatilitatea**: memorie lungă peste tot, cea mai puternică la marii indici de acțiuni
  - regimul de risc de azi este informativ luni de zile: util pentru VaR (value at risk, valoarea expusă la risc) și pentru evaluarea opțiunilor
- Eficiența în formă slabă (direcție imprevizibilă) și riscul previzibil coexistă: FMH adaugă o explicație, investitorii cu orizonturi diferite reacționează la volatilitate pe scale de timp diferite

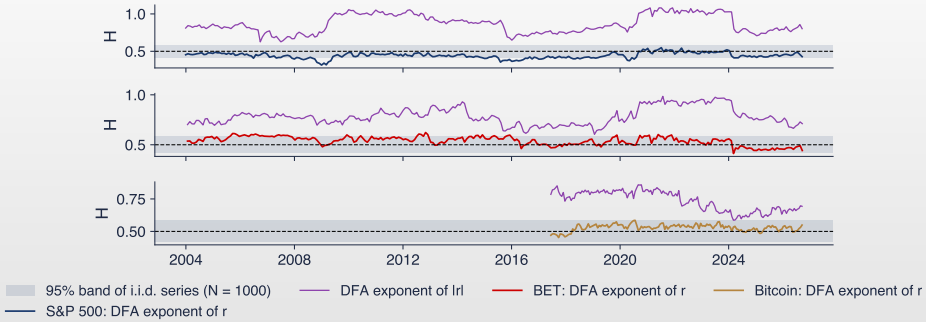
Modele pentru memoria lungă a volatilității

- **FIGARCH** (fractionally integrated GARCH, GARCH fracționar integrat) Baillie, Bollerslev & Mikkelsen (1996); Franke, Härdle & Hafner (2019), 14.6.2: $(1-L)^d$ aplicat lui ε_t^2
  - șocurile de volatilitate scad hiperbolic; $d=0$ dă GARCH, $d=1$ dă IGARCH (integrated GARCH, GARCH integrat, Capitolul 9)
- **Orizonturi eterogene**, ideea FMH în modelele de volatilitate
  - Müller et al. (1997): componente ale pieței cu rezoluții de timp diferite (de la traderii intraday la investitorii pe termen lung)
  - Andersen & Bollerslev (1997): multe componente de volatilitate cu persistențe diferite se însumează și dau memorie lungă
  - Corsi (2009): modelul HAR (heterogeneous autoregressive, autoregresiv heterogen), volatilitatea de mîine în funcție de volatilitatea zilnică, săptămînală și lunară: trei orizonturi, memorie lungă aproximativă

Variația în timp a eficienței pieței

- AMH și FMH prezic, amîndouă, că memoria pieței se schimbă în timp
  - Cajueiro & Tabak (2004): exponenți Hurst pe ferestre mobile pentru piețe emergente, pentru a testa dacă devin mai eficiente
  - Bariviera (2017): DFA pe ferestre mobile pentru randamentele și volatilitatea Bitcoin
- Abordarea folosită aici
  - ferestre de 1000 de observații (circa patru ani de zile de tranzacționare), mutate cu 21 de observații (circa o lună)
  - DFA pe r_t și pe $|r_t|$; fiecare estimare este datată la ultima zi a ferestrei, deci folosește doar date trecute
  - banda Monte Carlo de 95% pentru $N = 1000$: $[0{,}42; 0{,}58]$

Exponenți DFA pe ferestre mobile: S&P 500, BET, Bitcoin



- De sus în jos: S&P 500, BET, Bitcoin; linia colorată: r_t; linia mov: $|r_t|$; zona colorată: banda i.i.d.
- $|r_t|$ mereu mult peste bandă; exponentul lui crește în timpul și după crize (2008–2009, 2020)

SFM_ch11_rolling_hurst

Interpretarea exponenților pe ferestre mobile

- S&P 500: 273 de ferestre; $\hat{H}$ al randamentelor între 0,32 și 0,55; 24% dintre ferestre sub bandă, niciuna peste
  - minimul, la 31 decembrie 2008, vine după crahul din 2008: inversări zilnice (antipersistență) în panică
- BET: 20% dintre ferestre peste bandă; $\hat{H}$ mediu 0,56 în prima treime a ferestrelor, 0,52 în ultima treime
  - maximul este atins la 31 octombrie 2012; apoi piața devine mai eficientă, pe măsură ce lichiditatea crește
- Bitcoin: ferestre din 13 iunie 2017; $\hat{H}$ între 0,45 și 0,59, 1% dintre ferestre peste bandă

Studiu de caz: eficiența pieței Bitcoin

- Urquhart (2016): mai multe teste, printre care R/S, pe Bitcoin, 2010–2016
  - ineficient pe întregul eșantion, cu o evoluție spre eficiență în ultimii ani
- Nadarajah & Chu (2017): aceleași date după o transformare de tip putere a randamentelor: în acord cu eficiența în formă slabă
- Bariviera (2017): DFA pe ferestre mobile: randamente persistente pînă în 2014, apropiate de $H = 0{,}5$ după aceea; memorie lungă a volatilității pe toată perioada
- Ferestrele noastre încep în 2017 și confirmă: randamente lîngă bandă, $|r_t|$ mult peste ea



Un bancomat Bitcoin la Praga (2016)

Foto: Perituss (2016); CC0; Wikimedia Commons

Limitele estimărilor pe ferestre mobile

- **Testarea multiplă**: 273 de ferestre, fiecare la 5%, dau din întîmplare circa 14 ferestre în afara benzii
  - căutăm perioade lungi în afara benzii, nu ferestre izolate
- **Suprapunerea**: ferestrele consecutive au în comun 979 dintre cele 1000 de observații; traiectoria este netedă prin construcție
- **Lungimea ferestrei**: ferestrele mai scurte reacționează mai repede, dar au benzi mai largi (DFA, $N = 250$: lățimea 0,32)
- **Regimurile de volatilitate**: o criză din interiorul unei ferestre deplasează estimarea timp de patru ani
- **Datarea**: datăm fiecare estimare la sfîrșitul ferestrei, niciodată la mijloc (fără informație din viitor)

Scalarea riscului cu h^H

- Dacă randamentele sînt autosimilare: VaR 1% pe h zile $= -z_{0,01}\,\sigma\,h^H$, cu $z_{0,01} = -2{,}326$ (cazul Normal, media 0)
  - $z_{0,01}$: cuantila de 1% a lui $N(0,1)$; σ: volatilitatea zilnică; h^H înlocuiește factorul $\sqrt{h}$
  - volatilitatea zilnică $\sigma = 1{,}2\%$: VaR 1% pe o zi $= 2{,}79\%$
- Zece zile
  - $H = 0{,}45$: factorul 2,82, VaR 7,87%; $H = 0{,}5$: 3,16, 8,83%; $H = 0{,}55$: 3,55, 9,91%
  - $H = 0{,}55$ în loc de 0,5: cu 12% mai mult risc la 10 zile și cu 32% mai mult la 250 de zile
- Datele: raportul pe 10 zile este 2,80 pentru S&P 500 și 3,50 pentru BET, față de $\sqrt{10} = 3{,}16$: regula $\sqrt{h}$ supraestimează riscul S&P 500 și subestimează riscul BET (Capitolul 10)
- Evaluarea: cu prețuri fBm și $H \neq 1/2$, o piață fără costuri de tranzacționare admite arbitraj Rogers (1997); de aceea memoria lungă intră în modelele de opțiuni prin volatilitate

O întrebare de cercetare deschisă

- **Apare schimbarea exponentului Hurst înaintea unei crize sau doar după ea?**
  - FMH prezice o prăbușire a orizonturilor; în datele noastre, $\hat{H}$ al lui $|r_t|$ crește în timpul și după 2008 și 2020
  - o fereastră mobilă conține criza doar după ce aceasta începe: există vreun semnal înainte?
- Dovezi anterioare: Kristoufek (2013) (orizonturile în 2008); Cajueiro & Tabak (2004) (piețe emergente)
- Întrebarea rămîne deschisă: puține crize, ferestre suprapuse, regimuri de volatilitate, mulți estimatori posibili
- Instrumentele AI pot accelera un astfel de studiu, dar rezultatele lui trebuie verificate Wang et al. (2023)

Utilizări posibile ale instrumentelor AI

- **Literatura**: o listă a studiilor despre exponenții Hurst ca indicatori de avertizare timpurie, cu datele și estimatorii folosiți
- **Cod**: o primă versiune pentru R/S, DFA și GPH pe ferestre mobile, cu benzi Monte Carlo
- **Robustețe**: alte lungimi ale ferestrei, estimatori wavelet, o ipoteză nulă pe baza unui GARCH, alte crize (2011, 2022)
- Exemplu de prompt
  - `Write Python code that computes the DFA exponent of daily S&P 500 absolute log returns on rolling windows of 500 and 1000 days, dated at the window end, adds a 95% band from 500 simulated GARCH(1,1) paths, and marks the start of the 2008 and 2020 crises.`

Verificări necesare

- Datarea: o estimare datată la mijlocul ferestrei folosește date din viitor
- Conversiile: $d = H - 0{,}5$, nu $H + 0{,}5$; DFA aplicat prețurilor dă $H + 1$, nu H
- Benzile: fiecare $\hat{H}$ are nevoie de o bandă pentru propriul N; R/S este deplasat în sus
- Randamente sau volatilitate: memoria lui $|r_t|$ nu face previzibilă direcția randamentelor
- Lățimea de bandă GPH: $m = T/2$ (toate frecvențele) nu este „mai precis"; raportăm $T^{0,5}$ și $T^{0,6}$
- Referințele: fiecare lucrare citată trebuie să existe; verificați DOI-ul

Idee de proiect

- **Întrebarea**: crește exponentul Hurst al volatilității, pe ferestre mobile, înaintea crizelor de pe BVB și din piața Bitcoin?
  - date: BET, BET-TR, TLV, SNP și Bitcoin (EODHD), zilnice
- Pași
  - DFA și GPH pe ferestre mobile pentru r_t și $|r_t|$, ferestre de 500 și 1000 de zile, datate la sfîrșit
  - benzi din simulări i.i.d. și din simulări ale GARCH(1,1) estimat
  - ferestre de eveniment în jurul anilor 2008, 2020 și 2022: exponentul în cele 60 de zile dinainte și de după
- Livrabil: un tabel, un grafic și un paragraf despre ce pot și ce nu pot arăta datele
- Declarați orice utilizare a instrumentelor AI și enumerați erorile acestora pe care le-ați corectat

Idei de reținut

- FMH: stabilitatea are nevoie de investitori cu multe orizonturi; crizele sînt prăbușiri ale orizonturilor
- H măsoară memoria și scalarea: $H = 0{,}5$ fără memorie, $H > 0{,}5$ persistență, $H < 0{,}5$ antipersistență; $d = H - 0{,}5$
- R/S, DFA, GPH și testul lui Lo, mereu cu o bandă Monte Carlo pentru același N
- Rupturile și volatilitatea GARCH persistentă creează memorie lungă aparentă: permutăm, împărțim eșantionul, comparăm
- Randamentele: fără memorie lungă pe piețele mari (BET: persistență); volatilitatea: memorie lungă peste tot
- Riscul pe mai multe zile se scalează ca h^H

Formule de reținut

Mărimea	**Formula**
Autosimilaritate	$X_{ct} \stackrel{d}{=} c^H X_t; \quad \mathrm{sd}(r^{(h)}) = h^H \mathrm{sd}(r)$
R/S	$(R/S)_n = [\max_k Y_k - \min_k Y_k]/S_n, \quad Y_k = \sum_{j\le k}(x_j - \bar{x}); \quad (R/S)_n \propto n^H$
fGn	$\rho(k) = \frac{1}{2}(\lvert k+1\rvert^{2H} - 2\lvert k\rvert^{2H} + \lvert k-1\rvert^{2H}) \approx H(2H-1)k^{2H-2}$
ARFIMA(0,d,0)	$(1-L)^d X_t = \varepsilon_t, \quad \rho(k) = \rho(k-1)\frac{k-1+d}{k-d}, \quad d = H - 0{,}5$
DFA	$F(n) \propto n^\alpha, \quad \alpha = H$ pentru fGn
GPH	$\ln I(\lambda_j) = c - d\ln(4\sin^2(\lambda_j/2)) + e_j, \quad j \le m = T^{0{,}5}, \quad \mathrm{SE} = \pi/\sqrt{24m}$
Lo	$V_N(q) = R_N/(\sqrt{N}\hat{\sigma}_N(q))$; respingem la 5% în afara [0,809; 1,862]
VaR 1%	$-z_{0,01}\,\sigma\,h^H$

Autoevaluare

- **Întrebare**: o estimare R/S pe 1000 de randamente i.i.d. este $\hat{H} = 0{,}56$. Este o dovadă de memorie lungă?
  - **Răspuns**: nu: banda i.i.d. pentru $N = 1000$ este $[0{,}50; 0{,}63]$, centrată în jur de 0,562
- **Întrebare**: GPH dă $\hat{d} = 0{,}35$ pentru $|r_t|$. Cît este $\hat{H}$?
  - **Răspuns**: $\hat{H} = \hat{d} + 0{,}5 = 0{,}85$: memorie lungă a volatilității, nu a randamentelor
- **Întrebare**: după o permutare aleatoare a lui $|r_t|$, DFA scade de la 0,9 la 0,5. Ce arată acest lucru?
  - **Răspuns**: memoria provine din ordinea zilelor, nu din distribuție (cozi groase)
- Urmează: Capitolul 12, modele de scoring

Bibliografie (1/3)

- Andersen, T.G., Bollerslev, T. (1997). Heterogeneous information arrivals and return volatility dynamics: uncovering the long-run in high frequency returns. *Journal of Finance*, 52(3), 975–1005.
- Anis, A.A., Lloyd, E.H. (1976). The expected value of the adjusted rescaled Hurst range of independent normal summands. *Biometrika*, 63(1), 111–116.
- Baillie, R.T. (1996). Long memory processes and fractional integration in econometrics. *Journal of Econometrics*, 73(1), 5–59.
- Baillie, R.T., Bollerslev, T., Mikkelsen, H.O. (1996). Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 74(1), 3–30.
- Bariviera, A.F. (2017). The inefficiency of Bitcoin revisited: a dynamic approach. *Economics Letters*, 161, 1–4.
- Cajueiro, D.O., Tabak, B.M. (2004). The Hurst exponent over time: testing the assertion that emerging markets are becoming more efficient. *Physica A*, 336(3–4), 521–537.
- Carlson, M. (2007). A brief history of the 1987 stock market crash with a discussion of the Federal Reserve response. Finance and Economics Discussion Series 2007-13, Federal Reserve Board.
- Cobb, G.W. (1978). The problem of the Nile: conditional solution to a changepoint problem. *Biometrika*, 65(2), 243–251.
- Corsi, F. (2009). A simple approximate long-memory model of realized volatility. *Journal of Financial Econometrics*, 7(2), 174–196.
- Diebold, F.X., Inoue, A. (2001). Long memory and regime switching. *Journal of Econometrics*, 105(1), 131–159.
- Ding, Z., Granger, C.W.J., Engle, R.F. (1993). A long memory property of stock market returns and a new model. *Journal of Empirical Finance*, 1(1), 83–106.
- Fama, E.F. (1970). Efficient capital markets: a review of theory and empirical work. *Journal of Finance*, 25(2), 383–417.
- Franke, J., Härdle, W.K., Hafner, C.M. (2019). *Statistics of Financial Markets: An Introduction*, 5th ed. Springer.
- Geweke, J., Porter-Hudak, S. (1983). The estimation and application of long memory time series models. *Journal of Time Series Analysis*, 4(4), 221–238.

Bibliografie (2/3)

- Granger, C.W.J., Hyung, N. (2004). Occasional structural breaks and long memory with an application to the S&P 500 absolute stock returns. *Journal of Empirical Finance*, 11(3), 399–421.
- Granger, C.W.J., Joyeux, R. (1980). An introduction to long-memory time series models and fractional differencing. *Journal of Time Series Analysis*, 1(1), 15–29.
- Hosking, J.R.M. (1981). Fractional differencing. *Biometrika*, 68(1), 165–176.
- Hurst, H.E. (1951). Long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 116(1), 770–799.
- Kantelhardt, J.W., Koscielny-Bunde, E., Rego, H.H.A., Havlin, S., Bunde, A. (2001). Detecting long-range correlations with detrended fluctuation analysis. *Physica A*, 295(3–4), 441–454.
- Kristoufek, L. (2012). Fractal markets hypothesis and the global financial crisis: scaling, investment horizons and liquidity. *Advances in Complex Systems*, 15(6), 1250065.
- Kristoufek, L. (2013). Fractal markets hypothesis and the global financial crisis: wavelet power evidence. *Scientific Reports*, 3, 2857.
- Lo, A.W. (1991). Long-term memory in stock market prices. *Econometrica*, 59(5), 1279–1313.
- Lo, A.W. (2004). The adaptive markets hypothesis. *Journal of Portfolio Management*, 30(5), 15–29.
- Lobato, I.N., Savin, N.E. (1998). Real and spurious long-memory properties of stock-market data. *Journal of Business & Economic Statistics*, 16(3), 261–268.
- Mandelbrot, B. (1963). The variation of certain speculative prices. *Journal of Business*, 36(4), 394–419.
- Mandelbrot, B. (1967). How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension. *Science*, 156(3775), 636–638.
- Mandelbrot, B.B., Van Ness, J.W. (1968). Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Review*, 10(4), 422–437.
- Mandelbrot, B.B., Wallis, J.R. (1968). Noah, Joseph, and operational hydrology. *Water Resources Research*, 4(5), 909–918.

Bibliografie (3/3)

- Mandelbrot, B.B., Wallis, J.R. (1969). Robustness of the rescaled range R/S in the measurement of noncyclic long run statistical dependence. *Water Resources Research*, 5(5), 967–988.
- Müller, U.A., Dacorogna, M.M., Davé, R.D., Olsen, R.B., Pictet, O.V., von Weizsäcker, J.E. (1997). Volatilities of different time resolutions: analyzing the dynamics of market components. *Journal of Empirical Finance*, 4(2–3), 213–239.
- Nadarajah, S., Chu, J. (2017). On the inefficiency of Bitcoin. *Economics Letters*, 150, 6–9.
- Newey, W.K., West, K.D. (1987). A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix. *Econometrica*, 55(3), 703–708.
- Pele, D.T., Mazurencu-Marinescu, M. (2012). Modelling stock market crashes: the case of Bucharest Stock Exchange. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 58, 533–542.
- Pele, D.T., Mazurencu-Marinescu-Pele, M. (2019). Metcalfe's law and log-period power laws in the cryptocurrencies market. *Economics*, 13(1), 20190029.
- Peng, C.-K., Buldyrev, S.V., Havlin, S., Simons, M., Stanley, H.E., Goldberger, A.L. (1994). Mosaic organization of DNA nucleotides. *Physical Review E*, 49(2), 1685–1689.
- Peters, E.E. (1994). *Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics*. Wiley.
- Robinson, P.M. (1995). Gaussian semiparametric estimation of long range dependence. *Annals of Statistics*, 23(5), 1630–1661.
- Rogers, L.C.G. (1997). Arbitrage with fractional Brownian motion. *Mathematical Finance*, 7(1), 95–105.
- Teverovsky, V., Taqqu, M.S., Willinger, W. (1999). A critical look at Lo's modified R/S statistic. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 80(1–2), 211–227.
- Urquhart, A. (2016). The inefficiency of Bitcoin. *Economics Letters*, 148, 80–82.
- Wang, H., Fu, T., Du, Y., Gao, W., et al. (2023). Scientific discovery in the age of artificial intelligence. *Nature*, 620, 47–60.
- Weron, R. (2002). Estimating long-range dependence: finite sample properties and confidence intervals. *Physica A*, 312(1–2), 285–299.