









Statistica piețelor financiare

Capitolul 16: Recapitulare



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București
IDA Institute Digital Assets
Blockchain Research Center
AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance
Academia Română, Institutul de Prognoză Economică
MSCA Digital Finance

Acronime folosite în acest material (1/3)

- **ACF**: Autocorrelation Function (funcția de autocorelație)
- **AD**: Anderson–Darling (test) — testul Anderson–Darling
- **AI**: Artificial Intelligence (inteligență artificială)
- **AIC**: Akaike Information Criterion (criteriul informațional Akaike)
- **ARCH**: AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity (heteroscedasticitate condiționată autoregresivă)
- **ARCH-LM**: ARCH Lagrange Multiplier (test) — testul multiplicatorului Lagrange pentru efecte ARCH
- **AUC**: Area Under the (ROC) Curve (aria de sub curba ROC)
- **BET**: Bucharest Exchange Trading (index) — indicele de referință al Bursei de Valori București
- **BIC**: Bayesian Information Criterion (criteriul informațional bayesian)
- **CAGR**: Compound Annual Growth Rate (rata anuală compusă de creștere)
- **CI**: Confidence Interval (interval de încredere)
- **DFA**: Detrended Fluctuation Analysis (analiza fluctuațiilor fără tendință)
- **EAD**: Exposure At Default (expunerea la momentul nerambursării)
- **EGARCH**: Exponential GARCH (GARCH exponențial)
- **EODHD**: EOD Historical Data (market-data provider) — furnizor de date de piață
- **ES**: Expected Shortfall (pierderea așteptată în coadă)

Acronime folosite în acest material (2/3)

- **EVT**: Extreme Value Theory (teoria valorilor extreme)
- **EWMA**: Exponentially Weighted Moving Average (medie mobilă ponderată exponențial)
- **FHS**: Filtered Historical Simulation (simularea istorică filtrată)
- **FPR**: False Positive Rate (rata fals pozitivelor)
- **GARCH**: Generalised AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity (heteroscedasticitate condiționată autoregresivă generalizată)
- **GBM**: Geometric Brownian Motion (mișcarea browniană geometrică)
- **GEV**: Generalised Extreme Value (distribution) — distribuția generalizată a valorilor extreme
- **GJR**: Glosten–Jagannathan–Runkle (asymmetric GARCH) — modelul GARCH asimetric Glosten–Jagannathan–Runkle
- **GPD**: Generalised Pareto Distribution (distribuția Pareto generalizată)
- **GPH**: Geweke–Porter-Hudak (log-periodogram estimator) — estimatorul Geweke–Porter-Hudak pe log-periodogramă
- **HAR**: Heterogeneous AutoRegressive (model) — model autoregresiv heterogen
- **HS**: Historical Simulation (simularea istorică)
- **IGARCH**: Integrated GARCH (GARCH integrat)
- **JB**: Jarque–Bera (test) — testul de normalitate Jarque–Bera

Acronime folosite în acest material (3/3)

- **KS**: Kolmogorov–Smirnov (test) — testul Kolmogorov–Smirnov
- **LDA**: Linear Discriminant Analysis (analiza discriminantă liniară)
- **LGD**: Loss Given Default (pierderea în caz de nerambursare)
- **LR**: Likelihood Ratio (raportul de verosimilitate)
- **MDD**: Maximum DrawDown (drawdown-ul maxim)
- **MES**: Marginal Expected Shortfall (pierderea marginală așteptată în coadă)
- **NIG**: Normal Inverse Gaussian (distribution) — distribuția Normală invers Gaussiană
- **PD**: Probability of Default (probabilitatea de nerambursare)
- **QLIKE**: Quasi-LIKElihood (loss function) — funcția de pierdere de tip cvasi-verosimilitate
- **QQ**: Quantile–Quantile (plot) — graficul cuantilă–cuantilă
- **SE**: Standard Error (eroare standard)
- **SR**: Sharpe Ratio (raportul Sharpe)
- **SRISK**: Systemic RISK (capital shortfall in a crisis) — deficitul de capital într-o criză
- **TPR**: True Positive Rate — rata adevărat pozitivelor (sensibilitatea)
- **VR**: Variance Ratio (raportul variațelor)

Întrebarea de azi și traseul

- **Întrebarea**: ce spune întregul curs despre randamentele BET, S&P 500 și Bitcoin și cum se evaluează aceste cunoștințe la examen?
  - un capitol care leagă Capitolele 0–15
- **Traseul**
  - Partea I: harta cursului, cîte două slide-uri de recapitulare pentru fiecare capitol, sinteza testelor și modelelor
  - Partea a II-a: examenul (format, criterii de notare, opt probleme rezolvate) și proiectul de echipă
  - Partea a III-a: contribuția posibilă a AI în propria cercetare



Palatul Bursei, București

Foto: Chainwit. (2023); CC BY 4.0; Wikimedia Commons

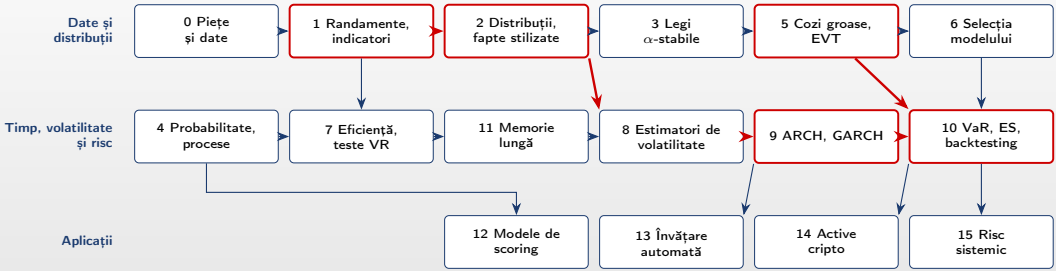
Rezultatele învățării

- Situați fiecare capitol pe drumul de la prețuri la măsurile de risc și numiți întrebarea la care răspunde
- Reamintiți formula-cheie, faptul empiric principal și greșeala cea mai frecventă din fiecare capitol
- Alegeți testul sau modelul potrivit pentru o întrebare dată despre o serie de randamente
- Rezolvați pas cu pas probleme de tip examen și interpretați rezultatul în trei pînă la cinci fraze
- Planificați proiectul de echipă, susținerea orală și declararea utilizării AI

Bibliografie și instrumente

- Manual: Franke, Härdle & Hafner (2019); exerciții rezolvate: Borak, Härdle & López-Cabrera (2013)
  - serii de timp și volatilitate: Tsay (2010); eficiența pieței: Campbell, Lo & MacKinlay (1997); măsuri de risc: McNeil, Frey & Embrechts (2015)
- Quantlet-urile Python ale capitolului: Quantlets/Ch_16
  - cursul într-un singur tabel: S&P 500, BET și Bitcoin pe aceeași fereastră de timp
- Notebook-ul cursului, cursul într-un singur notebook: deschideți în Google Colab
- Curs video: Statistics of Financial Markets
- Autoevaluare: quiz-ul acestui capitol, 20 de întrebări din toate capitolele

Harta cursului: Capitolele 0–15

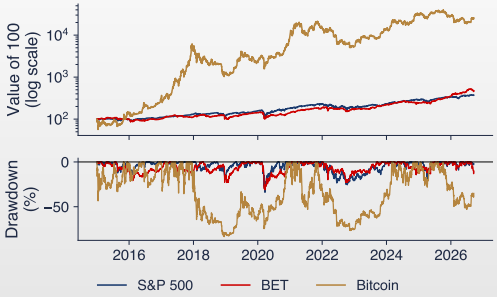


- Roșu: firul principal, de la randamente și distribuția lor la o măsură de risc pe care o putem testa (Capitolul 10)
- Rîndul 2: dependența în timp; semnul randamentelor este greu de anticipat (Capitolele 7, 11), mărimea lor este previzibilă (Capitolele 8–9)
- Rîndul 3: aceleași instrumente aplicate creditului, predicției, activelor cripto și sistemului bancar

Structura cursului

- **Datele** (Capitolele 0–1): prețuri dintr-o singură sursă, ajustate, pe calendarul corect
  - randamente: $r_t = \ln(P_t / P_{t-1})$, în % pe o zi
- **Distribuția** (Capitolele 2–6): cozi groase, nu distribuția Normală
  - Student-t, legi stabile, EVT; modelul se alege cu verosimilitatea, AIC și teste pentru cozi
- **Dependența în timp** (Capitolele 7–11): semnul este aproape imprevizibil, mărimea este previzibilă
  - raportul variațelor și exponentul Hurst pentru medie; EWMA și GARCH pentru variață
- **Riscul** (Capitolul 10): VaR 1% și ES 2,5%, cu backtesting
  - aplicațiile (Capitolele 12–15) refolosesc același lanț: date, distribuție, dependență, risc, evaluare

S&P 500, BET și Bitcoin în aceeași perioadă



- 100 investiți la 2 ianuarie 2015 (scală logaritmică) și drawdown-ul $P_t / \max_{s \le t} P_s - 1$
- Drawdown maxim: S&P 500 −33,9%, BET −31,1% (ambele în martie 2020), Bitcoin −83,4%

SFM_ch16_course_summary

Tabelul de sinteză al cursului

Randamente logaritmice zilnice	S&P 500	BET	Bitcoin
Observații (pe an)	2 943 (252)	2 925 (250)	4 278 (365)
Randament logaritmic mediu, % pe an	11,2	13,2	47,4
Volatilitate, % pe an	17,7	15,5	66,7
Raportul Sharpe ($r_f = 0$) $\pm$ SE	$0{,}72 \pm 0{,}33$	$0{,}93 \pm 0{,}35$	$1{,}04 \pm 0{,}36$
Asimetrie; excesul de boltire	$-0{,}64$; 15,8	$-1{,}41$; 17,8	$-0{,}73$; 12,2
Tail index-ul Hill al pierderilor ($k = 2{,}5\%\, n$)	2,75	2,19	2,67
Ljung–Box $Q(10)$: r_t; r_t^2	236; 3166	55; 701	21; 211
VR(5); $Z^*(5)$ robust	0,84; $-1{,}34$	1,17; 1,93	0,99; $-0{,}22$
GARCH(1,1)-t: $\alpha + \beta$	0,993	0,925	1,000
VaR 1%: istoric; Normal (%)	3,29; 2,55	2,72; 2,23	10,60; 7,99
ES 2,5%, istoric (%)	3,53	3,21	10,93
Hurst (R/S): r_t; $\lvert r_t \rvert$	0,53; 0,84	0,59; 0,75	0,59; 0,78

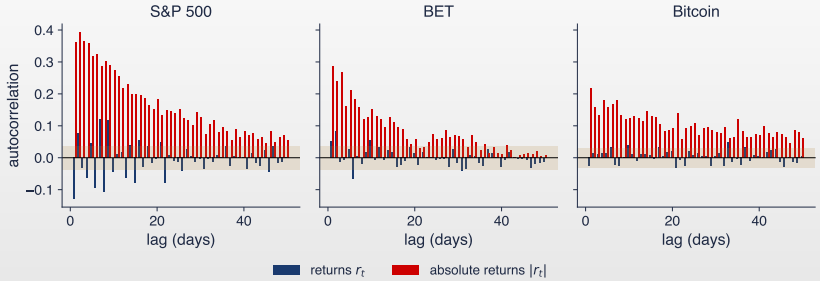
- Fereastra: primul randament la 5 ianuarie 2015 (S&P 500), 6 ianuarie 2015 (BET), 2 ianuarie 2015 (Bitcoin) – 18 septembrie 2026; fiecare serie pe calendarul ei (Bitcoin: 365 de zile pe an); valoarea critică $\chi^2(10)$ la 5%: 18,31

SFM_ch16_course_summary

Interpretarea tabelului

- **Randament și risc**: Bitcoin are o volatilitate de circa patru ori mai mare decît a celor doi indici
  - rapoartele Sharpe sînt apropiate, dacă ținem seama de erorile lor standard
- **Distribuția**: asimetrie negativă, exces de boltire peste 10, tail index-uri Hill între 2 și 3
  - VaR 1% Normal este prea mic cu 22% (S&P 500), 18% (BET) și 25% (Bitcoin)
- **Dependența**: statistica Ljung–Box pe r_t^2 este de multe ori mai mare decît pe r_t
  - testul VR robust nu respinge aici mersul aleator la 5%; H pentru $|r_t|$ este mult peste 0,5
  - volatilitatea este persistentă: $\alpha + \beta$ aproape de 1 (Bitcoin: un IGARCH, $\alpha + \beta = 1$)

Faptele stilizate: ACF a randamentelor și a randamentelor absolute



- Randamentele: autocorelații mici și în mare parte în interiorul benzii $\pm 1{,}96/\sqrt{T}$; randamentele absolute: pozitive la 50, 49 și 50 din cele 50 de laguri (BET, lagul 43: $-0{,}001$)
- Necorelat nu înseamnă independent: $\hat{\rho}_1(|r|) = 0{,}36$ (S&P 500), 0,29 (BET), 0,22 (Bitcoin)

SFM_ch16_course_summary

Capitolul 0: introducere (1/2)

- **Formule-cheie**
  - volatilitatea anualizată $\sigma_{\mathbf{an}} = \sqrt{A}\,\sigma$, A = observații pe an (252 la acțiuni, 365 la cripto)
  - drawdown $D_t = P_t / \max_{s \le t} P_s - 1$; drawdown maxim MDD $= \min_t D_t$
- **Notațiile**
  - σ: abaterea standard a randamentelor zilnice; A: numărul de observații pe an
  - P_t: prețul din ziua t; $\max_{s \le t} P_s$: cel mai mare preț pînă în ziua t; $D_t \le 0$

Capitolul 0: introducere (2/2)

- **Fapte empirice**
  - din 2015: volatilitate de 17,7% pe an pentru S&P 500 și de 66,7% pentru Bitcoin
  - BET: $-82{,}5\%$ între 24 iulie 2007 și 25 februarie 2009; revenire la vîrf abia la 16 martie 2021
- **Greșeli frecvente**
  - prețuri din mai multe surse amestecate sau prețuri neajustate pentru acțiuni cu dividende și split-uri
  - o cifră sau o lucrare de referință obținută cu AI și neverificată

Capitolul 1: date, randamente și indicatori (1/2)

- **Formule-cheie**
  - $R_t = P_t/P_{t-1} - 1$, $r_t = \ln(1 + R_t)$; randamentele logaritmice se adună în timp, cele simple între active
  - CAGR $= (P_T/P_0)^{1/Y} - 1$; Sharpe $= (\mu - r_f)/\sigma$, SE $\approx \sqrt{(1 + \mathrm{SR}^2/2)/Y}$; volatility drag $\approx \sigma^2/2$
- **Notațiile**
  - R_t: randamentul simplu, r_t: randamentul logaritmic al perioadei t; P_0, P_T: primul și ultimul preț; Y: numărul de ani
  - μ, σ: media și volatilitatea anuale; r_f: rata fără risc; SR: raportul Sharpe; SE: eroarea lui standard

Capitolul 1: date, randamente și indicatori (2/2)

- **Fapte empirice**
  - BET din 2015: CAGR 14,1%, volatilitate 15,5%, Sharpe 0,93, cu CI 95% [0,24; 1,61]
  - Bitcoin: media aritmetică 69,5% pe an, CAGR doar 60,6%: efectul volatility drag
- **Greșeli frecvente**
  - adunarea randamentelor simple în timp; media randamentelor în locul CAGR
  - anualizarea cu 252 pentru Bitcoin; raportarea raportului Sharpe fără eroarea lui standard

Capitolul 2: distribuții clasice și fapte stilizate (1/2)

- **Formule-cheie**
  - $S = m_3/m_2^{3/2}$, $K = m_4/m_2^2 - 3$; JB $= \frac{n}{6}(S^2 + K^2/4) \sim \chi^2(2)$ Jarque & Bera (1980)
  - Student-$t(\nu)$: excesul de boltire $6/(\nu - 4)$ pentru $\nu > 4$; Ljung–Box $Q(m) = n(n+2)\sum_h \hat{\rho}(h)^2/(n-h)$
- **Notațiile**
  - $m_k = \frac{1}{n}\sum_t (r_t - \bar{r})^k$: momentul centrat de ordin k; S: asimetria; K: excesul de boltire (0 pentru distribuția Normală)
  - JB: Jarque–Bera, $\chi^2(2)$ în ipoteza de normalitate; ν: gradele de libertate; $\hat{\rho}(h)$: autocorelația la lagul h; m: numărul de laguri

Capitolul 2: distribuții clasice și fapte stilizate (2/2)

- **Fapte empirice**
  - BET din 2010: $S = -0{,}98$, $K = 17{,}9$, JB $= 56\,762$; Student-t estimată: $\hat{\nu} = 2{,}96$
  - $\hat{\rho}_1(r) = 0{,}03$, dar $\hat{\rho}_1(|r|) = 0{,}34$: cele șase fapte stilizate din Cont (2001)
- **Greșeli frecvente**
  - confuzia dintre coeficientul de boltire $K + 3$ și excesul de boltire (distribuția Normală are boltirea 3 și excesul 0)
  - concluzia de independență trasă dintr-un ACF nesemnificativ al lui r_t

Capitolul 3: distribuții α-stabile (1/2)

- **Formule-cheie**
  - $X_1 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha} X + d_n$; cozi $P(X > x) \sim c\, x^{-\alpha}$; $E|X|^p < \infty$ doar pentru $p < \alpha$
  - patru parametri: α (cozi), β (asimetrie), γ (scală), δ (poziție), în S0 sau S1 Nolan (2020)
- **Notațiile**
  - $X_1, \ldots, X_n$: copii independente ale lui X; $\stackrel{d}{=}$: aceeași distribuție; d_n: o translație; $\alpha \in (0, 2]$: indicele de stabilitate
  - c: o constantă; p: ordinul unui moment; S0, S1: două parametrizări ale aceleiași familii

Capitolul 3: distribuții α-stabile (2/2)

- **Fapte empirice**
  - verosimilitate maximă din 2000: $\hat{\alpha} = 1{,}49$ (BET), 1,54 (S&P 500), 1,41 (Bitcoin), ca la bumbacul lui Mandelbrot (1963)
  - dar $\hat{\alpha}$ crește cu orizontul (S&P 500: 1,82 pe date lunare), iar varianța de selecție se stabilizează: cozi groase cu varianță finită; BET este excepția ($\hat{\alpha} = 1{,}50$ pe date lunare, fără o creștere clară)
- **Greșeli frecvente**
  - folosirea abaterii standard ca scală cînd $\alpha < 2$ (varianța nu există)
  - compararea lui δ din două programe care folosesc parametrizări diferite

Capitolul 4: probabilitate (1/2)

- **Formule-cheie**
  - $\mathrm{Var}(aX + bY) = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 + 2ab\,\mathrm{Cov}(X, Y)$; eroarea Monte Carlo $\sqrt{p(1-p)/N}$
  - GBM: $S_t = S_0 \exp((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t)$, media $S_0 e^{\mu t}$, mediana $S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t}$
- **Notațiile**
  - a, b: ponderi; σ_X, σ_Y: abateri standard; p: probabilitatea estimată; N: numărul de extrageri Monte Carlo
  - GBM (mișcarea browniană geometrică): S_t: prețul la momentul t (ani); μ: tendința; σ: volatilitatea; $W_t \sim N(0, t)$: o mișcare browniană

Capitolul 4: probabilitate (2/2)

- **Fapte empirice**
  - S&P 500 din 2000: o zi sub -5% are frecvența 0,34%; distribuția Normală dă 0,0017%, de 199 de ori mai puțin
  - randament mediu 6,2% pe an, cu SE 3,7%: ar fi nevoie de circa 86 de ani de date pentru $t = 3$
- **Greșeli frecvente**
  - variabile necorelate considerate independente; media lui S_t confundată cu mediana
  - o estimare Monte Carlo fără eroarea ei standard

Capitolul 5: cozi groase și teoria valorilor extreme (1/2)

- **Formule-cheie**
  - Hill: $\hat{\alpha}_k = [\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \ln(L_{(i)}/L_{(k+1)})]^{-1}$, SE $\approx \hat{\alpha}/\sqrt{k}$ Hill (1975); $\xi = 1/\alpha$
  - GPD peste u: VaR $= u + \frac{\beta}{\xi}[(n\alpha/N_u)^{-\xi} - 1]$; GEV pentru block maxima
- **Notațiile**
  - $L_{(i)}$: a i-a cea mai mare pierdere; k: numărul observațiilor din coadă; $\xi = 1/\alpha$: parametrul de formă al cozii
  - GPD: u: pragul; β: scala; N_u: pierderile peste u din cele n; în formula VaR, α este nivelul (1%), nu tail index-ul

Capitolul 5: cozi groase și teoria valorilor extreme (2/2)

- **Fapte empirice**
  - tail index-ul pierderilor: BET 2,57 (CI 95% [2,20; 2,95], din 1997), S&P 500 2,97, Bitcoin 2,71
  - BET, VaR 0,1%: EVT 9,6%, distribuția Normală doar 4,5%
- **Greșeli frecvente**
  - alegerea lui k fără graficul Hill; raportarea lui $\hat{\alpha}$ fără interval
  - aplicarea estimatorului Hill pe randamente în loc de pierderi $L = -r$

Capitolul 6: selecția modelului și managementul riscului (1/2)

- **Formule-cheie**
  - $LR = 2(\ell_1 - \ell_0) \approx \chi^2(k_1 - k_0)$ pentru modele imbricate; AIC $= -2\ell + 2k$, BIC $= -2\ell + k \ln n$
  - KS: $D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)|$; Anderson–Darling pune accentul pe cozi
- **Notațiile**
  - ℓ_0, ℓ_1: log-verosimilitățile maxime ale modelului restrîns și ale celui extins; k_0, k_1, k: numerele de parametri; n: volumul eșantionului
  - F_n: funcția de repartiție empirică; F: modelul; D_n: cea mai mare distanță verticală dintre ele; un AIC sau BIC mai mic este mai bun

Capitolul 6: selecția modelului și managementul riscului (2/2)

- **Fapte empirice**
  - BET din 2000, Anderson–Darling: Normală 161, Student-t 0,54, NIG 0,40
  - VaR 1% pentru BET: distribuția Normală 3,19%, modelele cu cozi groase 3,74–4,94%
- **Greșeli frecvente**
  - testul LR la frontieră (de exemplu $\nu = \infty$) fără valoarea critică corectată
  - respingerea tuturor modelelor la n mare, fără ordonarea lor

Capitolul 7: piețe eficiente, mers aleator și teste VR (1/2)

- **Formule-cheie**
  - eficiența în formă slabă: prețurile trecute nu prezic randamente în exces Fama (1970); ipoteza nulă: diferențe de martingal
  - $\mathrm{VR}(q) = 1 + 2\sum_{k=1}^{q-1}(1 - k/q)\rho(k)$; statistica robustă $Z^*(q) = (\widehat{\mathrm{VR}} - 1)/\sqrt{\hat{\theta}/T}$ Lo & MacKinlay (1988)
- **Notațiile**
  - $\rho(k)$: autocorelația la lagul k; q: orizontul raportului variațelor; $\mathrm{VR} = 1$ pentru un mers aleator
  - T: numărul de randamente; $\hat{\theta}$: o estimație a variației robustă la volatility clustering; $Z^* \approx N(0,1)$ în ipoteza nulă

Capitolul 7: piețe eficiente, mers aleator și teste VR (2/2)

- **Fapte empirice**
  - BET din 1997: VR(5) $= 1{,}28$, $Z^* = 5{,}25$ (momentum)
  - S&P 500 din 1990: VR(5) $= 0{,}86$, $Z^* = -2{,}76$ (revenire la medie); Bitcoin: $Z^* = -0{,}19$
- **Greșeli frecvente**
  - statistica i.i.d. $Z(q)$ pe randamente cu volatility clustering (respinge prea des)
  - rădăcina unitară a prețurilor considerată dovadă de eficiență; predictibilitatea considerată profit

Capitolul 8: estimatori de volatilitate (1/2)

- **Formule-cheie**
  - EWMA: $\sigma_t^2 = \lambda\sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda)r_{t-1}^2$, timp de înjumătățire $\ln 0{,}5 / \ln \lambda$ J.P. Morgan/Reuters (1996)
  - Parkinson: $(\ln H_t - \ln L_t)^2/(4 \ln 2)$; ARCH-LM $= nR^2 \sim \chi^2(q)$
- **Notațiile**
  - $\lambda \in (0,1)$: factorul de atenuare (decay); r_{t-1}: randamentul de ieri; H_t, L_t: maximul și minimul zilei t
  - ARCH-LM: R^2 al regresiei lui r_t^2 pe q laguri ale sale, înmulțit cu n; o valoare mare: volatility clustering

Capitolul 8: estimatori de volatilitate (2/2)

- **Fapte empirice**
  - S&P 500: Ljung–Box $Q(10)$ este 91 pe r_t și 8015 pe r_t^2 (valoarea critică 18,31)
  - EWMA cu $\lambda = 0{,}94$: timp de înjumătățire de 11,2 zile; fără ghost effect
- **Greșeli frecvente**
  - fereastra mobilă de lungime fixă: o zi extremă intră și iese brusc din calcul (ghost effect)
  - estimatori de amplitudine pe prețuri cu salturi overnight, fără corecția Yang–Zhang

Capitolul 9: modele ARCH și GARCH (1/2)

- **Formule-cheie**
  - GARCH(1,1): $\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$, $\bar{\sigma}^2 = \omega/(1-\alpha-\beta)$ Engle (1982), Bollerslev (1986)
  - prognoza $E_t\sigma_{t+h}^2 = \bar{\sigma}^2 + (\alpha+\beta)^{h-1}(\sigma_{t+1}^2 - \bar{\sigma}^2)$; timp de înjumătățire $\ln 0{,}5 / \ln(\alpha+\beta)$
- **Notațiile**
  - ω: constanta; α: reacția la șocul de ieri, ε_{t-1}; β: memoria; $\bar{\sigma}^2$: varianța pe termen lung
  - E_t: prognoza făcută în ziua t; h: orizontul, în zile; $\alpha+\beta$: viteza cu care prognoza revine la $\bar{\sigma}^2$

Capitolul 9: modele ARCH și GARCH (2/2)

- **Fapte empirice**
  - GARCH(1,1)-t din 2000: $\alpha + \beta = 0{,}995$ (S&P 500, timp de înjumătățire 131 de zile), 0,991 (BET, 74 de zile)
  - Bitcoin: $\alpha + \beta = 1{,}000$, un IGARCH; indicii de acțiuni au nevoie de asimetrie (GJR, EGARCH)
- **Greșeli frecvente**
  - inovații Normale pentru randamente cu cozi groase; erori standard nerobuste
  - raportarea variației pe termen lung $\omega/(1 - \alpha - \beta)$ cînd $\alpha + \beta \geq 1$

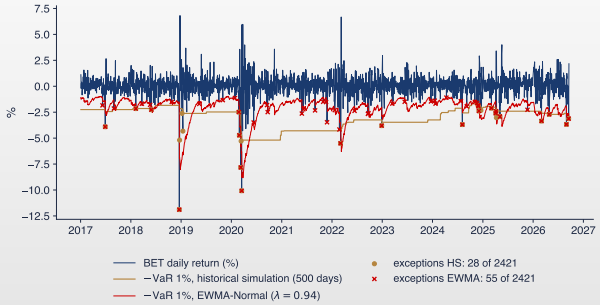
Capitolul 10: VaR, ES și backtesting (1/2)

- **Formule-cheie**
  - $\mathrm{VaR}_\alpha = -q_\alpha(X)$, $\mathrm{ES}_\alpha = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha q_u\,du$; Normal: $-(\mu+\sigma z_\alpha)$, $-\mu+\sigma\varphi(z_\alpha)/\alpha$
  - Kupiec: $LR_{uc} = -2\ln[(1-\alpha)^{n-x}\alpha^x/((1-\hat\pi)^{n-x}\hat\pi^x)] \sim \chi^2(1)$ Kupiec (1995); ES este coerent Artzner et al. (1999)
- **Notațiile**
  - q_α: cuantila de ordin α a randamentului X; z_α: cuantila Normală standard; φ: densitatea Normală standard
  - x: depășirile în n zile; $\hat\pi = x/n$: rata observată; LR_{uc} o compară cu ținta α

Capitolul 10: VaR, ES și backtesting (2/2)

- **Fapte empirice**
  - S&P 500, VaR 1%: istoric 3,46%, Normal 2,80%, adică prea mic cu 19%
  - rata depășirilor din 2005: Normal 2,71%, HS 1,41%, GARCH-t 1,74%, FHS 1,58% (ținta 1%)
- **Greșeli frecvente**
  - un VaR negativ sau „VaR 99%": în curs scriem VaR 1%, o pierdere pozitivă
  - scalarea cu $\sqrt{10}$ ca pentru randamente Normale i.i.d.; verificarea doar a numărului de depășiri, nu și a grupării lor

Prognoze VaR 1% pentru BET: simulare istorică și EWMA-Normal



- Din 3 ianuarie 2017, 2 421 de zile, 24,2 depășiri așteptate: HS 28 (1,16%, Kupiec $p = 0{,}450$), EWMA-Normal 55 (2,27%, $p < 0{,}001$)
- EWMA urmărește furtunile, dar cuantila Normală este prea mică; HS are rata corectă, dar depășirile lui vin grupat (cel mult 10 în 250 de zile)

SFM_ch16_course_summary

Capitolul 11: ipoteza piețelor fractale și memoria lungă (1/2)

- **Formule-cheie**
  - $(R/S)_n \propto n^H$ Hurst (1951); $H = 0{,}5$: fără memorie, $H > 0{,}5$: persistență; $d = H - 0{,}5$
  - scalarea riscului: $\mathrm{sd}(r^{(h)}) = h^H \mathrm{sd}(r)$; piețele fractale au nevoie de multe orizonturi investiționale Peters (1994)
- **Notațiile**
  - $(R/S)_n$: amplitudinea rescalată (amplitudinea abaterilor cumulate împărțită la abaterea standard) pe blocuri de n zile
  - H: exponentul Hurst; d: parametrul fracționar; $r^{(h)}$: randamentul pe h zile; sd: abaterea standard

Capitolul 11: ipoteza piețelor fractale și memoria lungă (2/2)

- **Fapte empirice**
  - BET: H (R/S) $= 0{,}58$ pentru r_t, la limita benzii Monte Carlo, iar testul Lo respinge: persistență slabă; 0,79 pentru $|r_t|$
  - S&P 500: 0,53 pentru randamente, 0,86 pentru randamente absolute: memoria lungă se află în volatilitate
- **Greșeli frecvente**
  - compararea lui $\hat{H}$ cu 0,5 în locul unei benzi Monte Carlo pentru același N (R/S este deplasat în sus)
  - rupturi structurale sau efecte GARCH considerate memorie lungă

Capitolul 12: modele de scoring (1/2)

- **Formule-cheie**
  - EL = PD × LGD × EAD; logit ln $\frac{p}{1-p} = \beta_0 + x^\top \beta$, e^{β_j} = raportul șanselor
  - AUC = $P(s_{\text{rău}} > s_{\text{bun}})$, Gini = $2\,\mathrm{AUC} - 1$; scorul Z Altman și distanța pînă la nerambursare Merton Altman (1968)
- **Notațiile**
  - EL: pierderea așteptată; PD: probabilitatea de nerambursare; LGD: pierderea în caz de nerambursare; EAD: expunerea la nerambursare
  - p: probabilitatea de nerambursare condiționată de x; β_j: un coeficient; s: scorul unui debitor rău sau bun; AUC = 0,5: nicio discriminare, 1: discriminare perfectă

Capitolul 12: modele de scoring (2/2)

- **Fapte empirice**
  - datele germane de credit (1000 de credite), eșantion de test de 300: AUC $= 0{,}801$, CI 95% [0,75; 0,85], Gini 0,60
  - discriminarea nu înseamnă calibrare: le verificăm pe amîndouă, în afara eșantionului
- **Greșeli frecvente**
  - acuratețea pe clase dezechilibrate (regula „mereu bun" are deja dreptate în majoritatea cazurilor)
  - alegerea pragului fără costurile celor două erori

Capitolul 13: învățare automată (1/2)

- **Formule-cheie**
  - deplasare–varianță: $E(y_0 - \hat{f})^2 = \text{deplasare}^2 + \text{Var}(\hat{f}) + \sigma^2$; ridge, lasso, arbori, boosting
  - în afara eșantionului: $R^2_{OOS} = 1 - \sum(y - \hat{y})^2 / \sum(y - \tilde{y})^2$ față de un reper simplu $\tilde{y}$ Gu, Kelly & Xiu (2020)
- **Notațiile**
  - y_0: o observație nouă; $\hat{f}$: modelul estimat; σ^2: varianța zgomotului; $\hat{y}$: prognoza
  - $\tilde{y}$: prognoza de referință; sumele parcurg eșantionul de test; $R^2_{OOS} < 0$: mai slab decît reperul

Capitolul 13: învățare automată (2/2)

- **Fapte empirice**
  - semnul randamentelor S&P 500 din 2008: „mereu creștere" 54,4%, logit 53,8%, boosting 52,1%
  - volatilitatea realizată: HAR $R^2_{OOS} = 0{,}61$ față de medie; lasso reduce eroarea pătratică a HAR doar cu 7,1%
- **Greșeli frecvente**
  - validarea încrucișată aleatoare pe serii de timp (look-ahead bias și leakage)
  - raportarea celei mai bune dintre multe încercări fără deflatarea raportului Sharpe

Capitolul 14: active cripto (1/2)

- **Formule-cheie**
  - anualizăm cu 365 de zile: $\sigma_{\text{an}} = \sqrt{365}\,\sigma$; oferta de Bitcoin limitată la 21 de milioane Nakamoto (2008)
  - abaterea de la paritate a unui stablecoin $d_t = 10\,000\,(P_t - 1)$ puncte de bază
- **Notațiile**
  - σ: abaterea standard a randamentelor zilnice; activele cripto se tranzacționează 365 de zile pe an
  - P_t: prețul stablecoin-ului în USD; 1 punct de bază $= 0{,}01\%$; $d_t < 0$: sub paritate

Capitolul 14: active cripto (2/2)

- **Fapte empirice**
  - Bitcoin: volatilitate de 66,6% pe an cu 365 de zile (55,3% dacă se folosește greșit 252), drawdown maxim $-83{,}4\%$
  - corelația cu S&P 500: 0,02 înainte de 2020, 0,39 după: nu este un activ de refugiu
- **Greșeli frecvente**
  - eliminarea weekendurilor din datele cripto sau alinierea randamentelor cripto și de acțiuni pe calendare diferite
  - un VaR Normal pentru o serie cu $\alpha + \beta = 1$ și tail index sub 3

Capitolul 15: risc sistemic (1/2)

- **Formule-cheie**
  - CoVaR: VaR-ul sistemului cînd o instituție se află la VaR-ul ei; $\Delta\mathrm{CoVaR} = b\,(q_{50} - q_\alpha)$ dintr-o regresie cuantilică Adrian & Brunnermeier (2016)
  - MES, SRISK, rețele Granger și tabelul de conectivitate Diebold–Yilmaz Diebold & Yilmaz (2012)
- **Notațiile**
  - b: panta regresiei cuantilice a sistemului pe bancă; q_α, q_{50}: cuantila de ordin α și mediana randamentului băncii
  - MES: pierderea medie a băncii în cele mai proaste zile ale pieței; SRISK: capitalul lipsă într-o criză

Capitolul 15: risc sistemic (2/2)

- **Fapte empirice**
  - Banca Transilvania și BET: VaR 1% 5,23%, ΔCoVaR 1% 3,31 pp (CI 95% [2,35; 4,78])
  - 11 bănci americane și europene: conectivitate totală de circa 78%
- **Greșeli frecvente**
  - ordonarea băncilor după propriul VaR: un VaR mare nu înseamnă neapărat o contribuție mare la riscul sistemului
  - corelații comparate între perioade calme și de criză fără ajustarea Forbes–Rigobon

Sinteza metodelor (1/2): randamente, distribuții și cozi

Întrebarea	**Instrumentul**	**Decizia**	**Cap.**
Cît de bună a fost investiția?	CAGR, Sharpe, Sortino, MDD	comparăm cu SE și un reper	1
Sînt randamentele Normale?	JB, QQ plot	respingem dacă JB $>$ 5,99	2
Cît de groase sînt cozile?	graficul Hill, GPD, α stabil	momentele există pentru $p < \alpha$	3, 5
Ce distribuție se potrivește?	LR, AIC, BIC, KS, AD	AIC minim; AD pentru cozi	6
Cît de rară este o pierdere de x?	funcția de repartiție empirică, EVT, Monte Carlo	raportăm SE a estimării	4, 5
Este varianța finită?	varianța cumulativă, agregarea lui $\hat{\alpha}$	varianță de selecție stabilă: finită	3

Sinteza metodelor (2/2): dependență în timp, volatilitate și risc

Întrebarea	**Instrumentul**	**Decizia**	**Cap.**
Sînt randamentele previzibile?	ACF, Ljung–Box, VR robust $Z^*(q)$	respingem dacă $\lvert Z^*\rvert > 1{,}96$	7
Există volatility clustering?	Ljung–Box pe r_t^2, ARCH-LM	respingem: modelăm varianța	8
Cît de volatil va fi mîine?	EWMA, GARCH(1,1)-t, GJR	QLIKE față de un reper	8, 9
Cît putem pierde?	VaR 1%, ES 2,5%: HS, t, EVT, FHS	Kupiec, Christoffersen, semaforul Basel	10
Există memorie lungă?	R/S, DFA, GPH, testul Lo	comparăm cu o bandă Monte Carlo	11
Cine va intra în nerambursare?	logit, LDA, AUC, Gini	în afara eșantionului, cu costuri	12
Ce bancă contează pentru sistem?	CoVaR, MES, SRISK	CI bootstrap pentru ΔCoVaR	15

Convențiile folosite în tot cursul

- **Randamentele**: randamente logaritmice zilnice în %, $r_t = 100\,(\ln P_t - \ln P_{t-1})$
  - portofolii: randamente simple, după alinierea prețurilor pe zilele comune
- **Anualizarea**: media $\times A$, volatilitatea $\times\sqrt{A}$, cu A real
  - A: numărul de observații pe an: circa 252 pentru acțiuni și indici, 365 pentru cripto
- **Riscul**: nivelul este probabilitatea cozii: VaR 1%, ES 2,5%
  - $\mathrm{VaR}_\alpha = -q_\alpha > 0$, o pierdere; simularea istorică cu $k = \lceil n\alpha \rceil$
- **Testele**: precizăm H_0, statistica, distribuția ei, valoarea critică și decizia la 5%
  - apoi o frază despre semnificația deciziei pentru date

Erori metodologice frecvente

- **Datele**: alinierea randamentelor în loc de prețuri; prețuri neajustate; weekenduri eliminate la cripto
- **Distribuția**: distribuția Normală pentru cuantilele din coadă; confuzia dintre boltire și excesul de boltire
- **Inferența**: erori standard i.i.d. în prezența volatility clustering; o statistică fără SE
- **Timpul**: look-ahead bias, parametri estimați pe tot eșantionul și folosiți în trecut
- **Riscul**: semnul și nivelul VaR; ES comparat cu VaR la niveluri diferite
- **Interpretarea**: semnificația statistică luată drept importanță economică, predictibilitatea drept profit

Examenul scris: formatul

- **70% din nota finală**; scris, 2 ore; calculatorul este permis
  - toate subiectele sînt obligatorii; 9 puncte plus 1 punct din oficiu
- **Valorile utile sînt date** pe subiect
  - cuantile ale distribuției Normale și Student-t, valori critice χ^2, logaritmi și radicali
- **Fiecare subiect**: un context scurt, cifre, un tabel sau un grafic, una sau două cerințe
  - un calcul urmat de o interpretare în trei pînă la cinci fraze



Academia de Studii Economice din București

Foto: Joe Mabel (2014); CC BY 3.0; Wikimedia Commons

Conținutul evaluat

- **Capitolele 0–15**: cursuri și seminarii
  - definițiile și formulele de pe slide-urile „Noțiuni necesare azi" ale fiecărui seminar
  - calculele din Partea A a seminariilor, pe hîrtie
- **Interpretarea rezultatelor obținute cu software**
  - tabele și grafice ca în Partea B: estimări, statistici de test, p-value-uri, backtesting
  - la examen nu se scrie cod
- **Înțelegere, nu memorare**
  - de ce o metodă dă greș pe randamentele financiare, ce test răspunde la ce întrebare

Criterii de notare

- **Metoda**: formula, cu cifrele înlocuite
  - o metodă corectă cu o greșeală de calcul primește cea mai mare parte a punctajului
- **Rezultatul**: cifra, cu unitatea de măsură (%, zile, lei) și semnul ei
  - pentru un test: H_0, statistica, valoarea critică sau p-value-ul, decizia
- **Interpretarea**: trei pînă la cinci fraze, statistice și economice
  - precizați ipotezele unei formule aproximative (i.i.d., distribuția Normală, n mare)
  - o cifră corectă cu o interpretare greșită nu primește tot punctajul

Tipuri de probleme

Tipul	Capitole	Exemplu în acest capitol
randamente, anualizare, performanță	0, 1	Problema 1: CAGR, drawdown, volatility drag
momente, normalitate, cozi	2, 3, 5, 6	Problema 2: JB, Student-t, Hill
probabilitate și simulare	4	Problema 3: portofoliu, Monte Carlo, GBM
eficiență și memorie	7, 11	Problemele 4 și 7: Ljung–Box, VR, Hurst
volatilitate	8, 9, 14	Problema 5: GARCH, EWMA, anualizarea Bitcoin
măsuri de risc și backtesting	10	Problema 6: VaR, ES, Kupiec, semaforul Basel
risc de credit și risc sistemic	12, 13, 15	Problema 8: matricea de confuzie, EL, ΔCoVaR

- Cele opt probleme de mai jos sînt exemple de recapitulare, cu rezolvări complete; examenul are subiecte proprii

Problema 1: randamente și drawdown

- **Context**
  - Un indice valorează 100, 160, 64 și 96 la sfîrșitul anilor 0, 1, 2 și 3
- **Cerințe**
  1. Calculați randamentele simple R_t și randamentele logaritmice r_t ale celor trei ani.
  2. Calculați randamentul total în două moduri: din $\sum_t r_t$ și din prețuri.
  3. Calculați media aritmetică a lui R_t și CAGR, apoi explicați diferența.
  4. Calculați drawdown-ul maxim și cîștigul necesar de la minim pînă la vîrful anterior.

Problema 1: rezolvare

1. $R = 60\%; -60\%; 50\%$; $r = \ln 1{,}6 = 0{,}470$, $\ln 0{,}4 = -0{,}916$, $\ln 1{,}5 = 0{,}405$
2. $\sum_t r_t = -0{,}041 = \ln(96/100)$, deci randamentul total este $e^{\mathbf{-0{,}041}} - 1 = -4\%$, la fel ca $96/100 - 1$
3. media aritmetică $(60 - 60 + 50)/3 = 16{,}67\%$; CAGR $= (96/100)^{\mathbf{1/3}} - 1 = -1{,}35\%$
4. MDD $= 64/160 - 1 = -60\%$; pentru revenirea de la 64 la 160, indicele are nevoie de $160/64 - 1 = 150\%$

Interpretare

- Un randament mediu pozitiv și totuși o pierdere de bani: volatilitatea reduce creșterea compusă (volatility drag)
- Randamentele logaritmice se adună în timp; cele simple nu

Problema 2: distribuție și cozi

Context

- $n = 1000$ de randamente zilnice cu asimetria $S = -0{,}5$ și excesul de boltire $K = 6$
- Cele mai mari cinci pierderi, în %: 8,2; 6,5; 5,9; 5,1; 4,6; $\chi^2_{0,95}(2) = 5{,}99$

Cerințe

1. Calculați statistica Jarque–Bera și cele două componente ale ei, apoi decideți la 5%.
2. Determinați numărul de grade de libertate ν al unei distribuții Student-t cu același exces de boltire.
3. Calculați estimarea Hill $\hat{\alpha}$ cu $k = 4$.
4. Precizați ce momente ale pierderilor există dacă $\alpha = \hat{\alpha}$ și dacă o lege stabilă cu $\alpha < 2$ este compatibilă cu acest rezultat.

Problema 2: rezolvare

1. componenta asimetriei $\frac{1000}{6}(0{,}25) = 41{,}67$; componenta boltirii $\frac{1000}{24}(36) = 1500{,}0$; JB $= 1541{,}7 > 5{,}99$: normalitatea se respinge
2. $6/(\nu - 4) = 6 \Rightarrow \nu = 5$
3. $\ln(8{,}2/4{,}6) = 0{,}578$, $\ln(6{,}5/4{,}6) = 0{,}346$, $\ln(5{,}9/4{,}6) = 0{,}249$, $\ln(5{,}1/4{,}6) = 0{,}103$; media 0,3190, deci $\hat{\alpha} = 3{,}14$
4. există momentele de ordin $p < 3{,}14$: media, varianța, asimetria; boltirea nu există; o lege stabilă cu $\alpha < 2$ (varianță infinită) are cozi mai groase decît aceste date

Interpretare

- Componenta boltirii domină JB: cozile groase, nu asimetria, duc la respingerea normalității
- $k = 4$ dă o estimare foarte zgomotoasă a lui $\hat{\alpha}$ (SE $\approx \hat{\alpha}/2$); în practică, k se alege din graficul Hill

Problema 3: portofoliu, Monte Carlo și GBM

Context

- Două active: volatilități zilnice de 1,5% și 2,5%, corelație 0,3, ponderi 60% și 40%
- Prețul unei acțiuni urmează un GBM cu $\mu = 8\%$, $\sigma = 25\%$ pe an, $S_0 = 100$

Cerințe

1. Calculați volatilitatea zilnică a portofoliului și comparați-o cu media ponderată a volatilităților.
2. Un studiu Monte Carlo cu $N = 10\,000$ de extrageri estimează o probabilitate de 1%; calculați SE și un interval de 95%.
3. Calculați media și mediana lui S_1, precum și $P(S_1 < S_0)$.

Problema 3: rezolvare

1. $\sigma_p^2 = 0{,}81 + 1{,}00 + 0{,}54 = 2{,}35$, $\sigma_p = 1{,}53\%$, sub media ponderată $1{,}90\%$
2. SE $= \sqrt{0{,}01 \times 0{,}99/10\,000} = 0{,}099\%$; interval $[0{,}80\%; 1{,}20\%]$
3. media $100e^{\mathbf{0{,}08}} = 108{,}33$; mediana $100e^{\mathbf{0{,}08}-\mathbf{0{,}03125}} = 105{,}00$; $P(S_1 < S_0) = \Phi(-0{,}0488/0{,}25) = \Phi(-0{,}195) = 42{,}3\%$

Interpretare

- Diversificarea: cu $\rho < 1$, portofoliul este mai puțin riscant decît media componentelor
- Un investitor într-un GBM pierde bani după un an cu probabilitatea de 42,3%, deși prețul așteptat crește

Problema 4: autocorelație și raportul variațelor

Context

- $T = 2500$ de randamente zilnice; $\hat{\rho}(1) = 0{,}06$, $\hat{\rho}(2) = 0{,}02$, $\hat{\rho}(3) = -0{,}01$, $\hat{\rho}(4) = 0{,}01$; $\chi^2_{0{,}95}(4) = 9{,}49$
- Eroarea standard robustă la heteroscedasticitate a lui $\widehat{\mathrm{VR}}(5)$ este 0,065

Cerințe

1. Calculați statistica Ljung–Box $Q(4)$ și decideți la 5%.
2. Calculați $\mathrm{VR}(5) = 1 + 2\sum_{k=1}^{4}(1 - k/5)\hat{\rho}(k)$.
3. Calculați statistica i.i.d. $Z(5)$, cu $\mathrm{SE} = \sqrt{2(2q-1)(q-1)/(3qT)}$, și statistica robustă $Z^*(5)$, apoi decideți la 5%.

Problema 4: rezolvare

1. $Q(4) = T(T+2)\sum_{k=1}^{4} \hat{\rho}_k^2/(T-k) = 10{,}51$, apropiat de $T\sum_k \hat{\rho}_k^2$, cu $\sum_k \hat{\rho}_k^2 = 0{,}0042$; $10{,}51 > 9{,}49$: se respinge absența autocorelației
2. $\mathrm{VR}(5) = 1 + 2(0{,}8 \times 0{,}06 + 0{,}6 \times 0{,}02 - 0{,}4 \times 0{,}01 + 0{,}2 \times 0{,}01) = 1 + 2 \times 0{,}058 = 1{,}116$
3. $\mathrm{SE} = \sqrt{72/37\,500} = 0{,}0438$, $Z(5) = 2{,}65 > 1{,}96$; $Z^*(5) = (1{,}116 - 1)/0{,}065 = 1{,}78 < 1{,}96$ (robust)

Interpretare

- VR > 1: autocorelație pozitivă (momentum); testul i.i.d. respinge mersul aleator
- Testul robust nu îl respinge: volatility clustering mărește artificial statistica $Z(5)$; decizia care se raportează este cea robustă

Problema 5: prognoze de volatilitate

Context

- GARCH(1,1) pentru randamente zilnice în %: $\omega = 0{,}03$, $\alpha = 0{,}09$, $\beta = 0{,}89$; azi $\sigma_t^2 = 1{,}8$ și $\varepsilon_t = -2{,}5$
- Bitcoin: abaterea standard zilnică 3,5%

Cerințe

1. Calculați σ_{t+1}^2 și VaR 1% Normal pe o zi (medie zero, $z_{0,01} = -2{,}326$).
2. Calculați persistența, timpul de înjumătățire, varianța pe termen lung și volatilitatea anuală pe termen lung.
3. Calculați $E_t[\sigma_{t+10}^2]$ și prognoza EWMA cu $\lambda = 0{,}94$.
4. Anualizați volatilitatea Bitcoin.

Problema 5: rezolvare

1. $\sigma^2_{t+1} = 0{,}03 + 0{,}5625 + 1{,}602 = 2{,}1945$, $\sigma_{t+1} = 1{,}481\%$; VaR $1\% = 2{,}326 \times 1{,}481 = 3{,}45\%$
2. $\alpha + \beta = 0{,}98$; $h_{1/2} = \ln 0{,}5 / \ln 0{,}98 = 34{,}3$ zile; $\bar{\sigma}^2 = 0{,}03/0{,}02 = 1{,}50$; $\sqrt{252 \times 1{,}50} = 19{,}44\%$ pe an
3. $E_t\sigma^2_{t+10} = 1{,}50 + 0{,}98^9(2{,}1945 - 1{,}50) = 2{,}079$; EWMA: $0{,}94 \times 1{,}8 + 0{,}06 \times 6{,}25 = 2{,}067$
4. Bitcoin se tranzacționează în fiecare zi: $3{,}5 \times \sqrt{365} = 66{,}9\%$; cu 252, rezultatul ar fi greșit: $55{,}6\%$

Interpretare

- Un șoc negativ mare crește varianța de mîine; prognoza revine la $\bar{\sigma}^2$ cu viteza $\alpha + \beta$
- EWMA nu are un nivel pe termen lung: prognoza ei rămîne constantă pentru orice orizont

Problema 6: VaR, ES și backtesting

- **Context**
  - O poziție de 1 000 000 de lei; randamente zilnice $N(0; 1{,}6^2)$ în %; $\varphi(1{,}96) = 0{,}05845$
  - Cele mai mici șapte dintre 250 de randamente istorice, în %: $-5{,}1$; $-4{,}4$; $-3{,}9$; $-3{,}6$; $-3{,}2$; $-3{,}0$; $-2{,}9$
- **Cerințe**
  1. Calculați VaR 1% și ES 2,5% Normale, în % și în lei, precum și VaR 1% pe 10 zile cu regula rădăcinii pătrate a timpului.
  2. Calculați VaR 1% și ES 2,5% prin simulare istorică.
  3. Un model are 6 depășiri ale VaR 1% în 250 de zile: calculați statistica Kupiec, decideți la 5% și precizați zona Basel.

Problema 6: rezolvare

1. VaR 1% $= 2{,}326 \times 1{,}6 = 3{,}72\%$ (37 222 de lei); ES 2,5% $= 1{,}6 \times 0{,}05845/0{,}025 = 1{,}6 \times 2{,}338 = 3{,}74\%$ (37 405 lei); 10 zile: $\sqrt{10} \times 3{,}72 = 11{,}77\%$
2. $k = \lceil 2{,}5 \rceil = 3$: VaR 1% $= 3{,}9\%$; $k = \lceil 6{,}25 \rceil = 7$: ES 2,5% $= 26{,}1/7 = 3{,}73\%$
3. $\ell_{\mathbf{0}} = 244 \ln 0{,}99 + 6 \ln 0{,}01 = -30{,}08$, $\ell_{\mathbf{1}} = 244 \ln 0{,}976 + 6 \ln 0{,}024 = -28{,}31$; $LR_{uc} = 3{,}56 < 3{,}84$ ($p = 0{,}059$): nu se respinge; zona galbenă (5–9 depășiri)

Interpretare

- Pentru distribuția Normală, ES 2,5% și VaR 1% sînt aproape egale; coada istorică este mai groasă
- Testul Kupiec nu respinge 6 depășiri, dar semaforul Basel cere deja un multiplicator de capital mai mare

Problema 7: memorie lungă și scalarea riscului

- **Context**
  - Statistica R/S medie a randamentelor zilnice este 4,1 pentru blocuri de $n = 20$ de zile și 60,0 pentru $n = 2000$
  - VaR 1% pe o zi = 2,5%
- **Cerințe**
  1. Estimați H din panta lui $\log(R/S)$ în funcție de $\log n$, precum și parametrul fracționar d.
  2. Scalați VaR la 10 zile cu h^H și cu $\sqrt{h}$, apoi comparați.
  3. Precizați ce trebuie verificat înainte de a concluziona că există memorie lungă.

Problema 7: rezolvare

1. $H = \log_{10}(60{,}0/4{,}1)/\log_{10}(2000/20) = \log_{10}(14{,}63)/2 = 1{,}165/2 = 0{,}583$; $d = H - 0{,}5 = 0{,}083$
2. $10^H = 3{,}83$: VaR $= 9{,}56\%$; $\sqrt{10} = 3{,}16$: VaR $= 7{,}91\%$
3. o bandă Monte Carlo pentru $\hat{H}$ pe date i.i.d. de aceeași lungime (R/S este deplasat în sus), testul Lo, subeșantioane și date permutate (rupturi, GARCH)

Interpretare

- Cu $H > 0{,}5$, regula rădăcinii pătrate a timpului subestimează riscul pe mai multe zile
- Pe datele cursului, memoria lungă se află în $|r_t|$, nu în r_t (Capitolul 11)

Problema 8: scoring de credit și risc sistemic

- **Context**
  - Un eșantion de test de 300 de credite, dintre care 90 neperformante; la pragul ales sînt marcate ca neperformante 60 dintre creditele neperformante și 42 dintre cele performante
  - Regresia cuantilică la 1% a randamentului sistemului în funcție de randamentul unei bănci: $\hat{a} = -2{,}1$, $\hat{b} = 0{,}6$; banca: $q_{0{,}01} = -5{,}0\%$, mediana 0,1%
- **Cerințe**
  1. Calculați acuratețea, rata adevărat pozitivelor (TPR), rata fals pozitivelor (FPR) și precizia, apoi comparați acuratețea cu regula „mereu bun".
  2. Calculați coeficientul Gini pentru AUC $= 0{,}80$ și pierderea așteptată pentru PD $= 4\%$, LGD $= 45\%$, EAD $= 200\,000$ de lei.
  3. Calculați CoVaR 1% al sistemului cînd banca este la VaR-ul ei și la mediană, precum și ΔCoVaR.

Problema 8: rezolvare

1. acuratețea $(60 + 168)/300 = 76{,}0\%$; $\text{TPR} = 60/90 = 66{,}7\%$; $\text{FPR} = 42/210 = 20{,}0\%$; precizia $60/102 = 58{,}8\%$; „mereu bun”: 70,0%
2. $\text{Gini} = 2 \times 0{,}80 - 1 = 0{,}60$; $\text{EL} = 0{,}04 \times 0{,}45 \times 200\,000 = 3\,600$ de lei
3. $\text{CoVaR} = -(-2{,}1 + 0{,}6 \times (-5{,}0)) = 5{,}10\%$; la mediană: $-(-2{,}1 + 0{,}6 \times 0{,}1) = 2{,}04\%$; $\Delta\text{CoVaR} = 0{,}6 \times 5{,}1 = 3{,}06$ pp

Interpretare

- Modelul este doar puțin mai precis decît regula „mereu bun”, dar găsește două treimi dintre creditele neperformante: îl judecăm după AUC și costuri
- Dificultățile acestei bănci cresc VaR-ul sistemului cu 3,06 puncte procentuale

Proiectul de echipă: conținut și livrabile

- **20% din nota finală**: o analiză în echipă a unor date reale de piață, cu metodele cursului
  - o singură întrebare de cercetare; randamente și indicatori, distribuții și cozi, teste de eficiență, volatilitate și măsuri de risc
  - idei: slide-ul „Idee de proiect" de la finalul fiecărui capitol și Partea C a fiecărui seminar
- **Livrabile**
  - un repository GitHub al cărui cod reproduce, din datele salvate, fiecare rezultat numeric și fiecare grafic
  - un raport scurt și o prezentare a rezultatelor
  - fișierul `AI_USE.md`, în care este declarată fiecare utilizare a instrumentelor AI

Criterii de evaluare a proiectului

- **Întrebarea**: clară, cu răspuns posibil pe baza datelor, relevantă pentru investitori sau pentru autorități
  - „Este BET azi mai puțin volatil decît în 2008?" este o întrebare; „o analiză a BET" nu este
- **Metodele și verificările**
  - testul potrivit pentru întrebare (sinteza metodelor); erori standard robuste; evaluare în afara eșantionului
  - robustețe: altă fereastră, altă serie, alt estimator
- **Interpretarea**: ce înseamnă cifrele și ce nu pot arăta datele
  - **Reproductibilitatea**: repository-ul rulează de la datele salvate pînă la fiecare grafic

Susținerea orală

- **Fiecare membru explică codul și rezultatele**
  - întrebări tipice: ce calculează această linie? de unde provine această cifră? de ce acest test și nu altul?
  - ce se schimbă dacă se modifică fereastra, seria sau nivelul α?
- **O linie de cod pe care nu o puteți explica nu este considerată muncă proprie**
  - regula este aceeași pentru codul scris cu sau fără AI
- **Pregătirea**
  - rulați din nou repository-ul de la zero cu o zi înainte; cunoașteți definiția fiecărei cifre de pe slide-urile voastre

Fișierul AI_USE.md

- **Instrumentele AI sînt permise și trebuie declarate**
  - pentru fiecare utilizare: instrumentul, promptul, ce s-a păstrat și ce s-a corectat
  - erorile instrumentului AI pe care le-ați găsit și modul în care le-ați găsit
- **Răspundeți pentru fiecare cifră și pentru fiecare referință**
  - fiecare cifră: recalculată cu propriul cod, din datele cursului
  - fiecare referință: DOI-ul deschis și titlul verificat
- **Erori AI tipice în acest curs**
  - „VaR 99%” cu semn negativ, Bitcoin anualizat cu 252 de zile, referințe inventate, un test cu distribuția greșită

O întrebare de cercetare deschisă despre BET

- **A devenit BET o piață „obișnuită"?**
  - din 1997: VR(5) $= 1{,}28$ (momentum) și tail index-ul 2,57
  - din 2015: VR(5) $= 1{,}17$, $Z^* = 1{,}93$, tail index-ul 2,19
- **Motivele pentru care întrebarea rămîne deschisă**
  - momentum-ul slăbește, dar cozile nu devin mai subțiri
  - o singură zi extremă ($-11{,}9\%$ la 19 decembrie 2018) modifică estimarea cozii; puține crize, eșantioane scurte
- Echipe diferite, cu aceleași date, ajung la răspunsuri diferite: erorile nestandard Menkveld et al. (2024)



Benoit Mandelbrot, care a arătat în 1963 că variațiile prețurilor au cozi groase

Foto: Rama (2007); CC BY-SA 2.0 fr; Wikimedia Commons

Etapele unui proiect de cercetare

1. **Întrebarea**: o frază, cu o cifră care i-ar răspunde
2. **Datele**: seria, sursa, calendarul, fereastra, fixate înainte de a vedea rezultatele
3. **Metoda**: testul ales din sinteza metodelor, cu ipoteza nulă
4. **Verificările**: SE robuste, bandă Monte Carlo, subeșantioane, alt estimator
5. **Interpretarea**: răspunsul, incertitudinea lui, limitele lui
6. **Replicarea**: o a doua persoană rulează codul și obține aceleași cifre

⊡ AI poate accelera fiecare pas; nu înlocuiește nicio verificare Wang et al. (2023)

Utilizări posibile ale instrumentelor AI

- **Literatura**: o primă listă de studii despre eficiența și cozile piețelor emergente, fiecare verificat prin DOI
- **Codul**: o primă versiune a estimărilor VR(5), Hill și GARCH pe ferestre mobile de 500 de zile
- **Robustețea**: o grilă de alegeri (fereastra, k, nivelul α, seria) și un singur tabel cu toate rezultatele
- **Redactarea**: un paragraf mai clar, după ce cifrele sînt finale
- Exemplu de prompt
  - `Write Python code that computes, on rolling windows of 500 trading days moved by 21 days, the Lo-MacKinlay robust variance-ratio statistic Z*(5), the Hill tail index of the losses with k = 2.5% of the window, and the GARCH(1,1)-t persistence for the daily log returns of the BET, and plots the three series with their 95% bands.`

Verificări necesare

- Formulele: $Z^*(q)$ robust, nu $Z(q)$; estimatorul Hill pe pierderi $L = -r$, cu k dat ca proporție din fereastră
- Look-ahead: fiecare fereastră folosește doar datele pînă în ultima ei zi
- Benzile: ferestrele suprapuse nu sînt dovezi independente; un rezultat din douăzeci este semnificativ din întîmplare
- Cifrele: recalculați pas cu pas o fereastră și comparați
- Referințele: fiecare lucrare citată trebuie să existe; deschideți DOI-ul și verificați titlul

Idee de proiect

- **Întrebarea**: a devenit BET mai eficient, mai puțin volatil și cu cozi mai subțiri între 2000 și 2026?
  - date: BET din 1997, cu S&P 500 și DAX ca repere (EODHD)
- Pași
  - VR(5) robust, tail index-ul Hill, persistența GARCH și exponentul Hurst pe ferestre mobile (Capitolele 5, 7, 9, 11)
  - benzi Monte Carlo sau bootstrap; aceeași analiză pentru repere
  - datele de schimbare (de exemplu 2008, 2020) verificate față de benzi, nu alese după inspecția graficelor
- Livrabil: un grafic cu patru panouri, un tabel și un paragraf despre ce pot și ce nu pot arăta datele
- Declarați orice utilizare a instrumentelor AI și enumerați erorile acestora pe care le-ați corectat

Idei de reținut

- Randamente, nu prețuri: randamente logaritmice în %, calendarul corect, anualizare cu frecvența reală
- Randamentele au cozi groase (tail index între 2 și 4), asimetrie negativă și varianță finită: distribuția Normală subestimează riscul
- Semnul randamentelor este aproape imprevizibil; mărimea lor este previzibilă (volatility clustering, GARCH)
- Riscul: VaR 1% $= -q_{1\%}$ și ES 2,5%, urmate întotdeauna de backtesting
- Orice rezultat are nevoie de incertitudinea lui: SE, teste robuste, benzi Monte Carlo, verificări în afara eșantionului
- Examenul răsplătește metoda, rezultatul și interpretarea; proiectul răsplătește o întrebare clară, cu un răspuns onest

Autoevaluare

- **Întrebare**: Ljung–Box nu respinge pe r_t, dar respinge puternic pe r_t^2. Ce înseamnă acest lucru?
  - **Răspuns**: randamentele sînt necorelate, dar nu independente: volatility clustering; modelăm varianța (GARCH)
- **Întrebare**: o lege stabilă estimată dă $\hat{\alpha} = 1{,}5$, iar estimarea Hill este $\hat{\alpha} = 3$. Care are dreptate în privința varianței?
  - **Răspuns**: estimarea Hill, care privește doar coada: varianța este finită; legea stabilă descrie corpul distribuției
- **Întrebare**: un model are 1% depășiri, toate în martie 2020. Este un model VaR bun?
  - **Răspuns**: nu: rata este corectă, dar depășirile sînt grupate; testul Christoffersen îl respinge

Bibliografie (1/2)

- Adrian, T., Brunnermeier, M.K. (2016). CoVaR. *American Economic Review*, 106(7), 1705–1741.
- Altman, E.I. (1968). Financial ratios, discriminant analysis and the prediction of corporate bankruptcy. *Journal of Finance*, 23(4), 589–609.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9(3), 203–228.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3), 307–327.
- Borak, S., Härdle, W.K., López-Cabrera, B. (2013). *Statistics of Financial Markets: Exercises and Solutions*, 2nd ed. Springer.
- Campbell, J.Y., Lo, A.W., MacKinlay, A.C. (1997). *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press.
- Cont, R. (2001). Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*, 1(2), 223–236.
- Diebold, F.X., Yilmaz, K. (2012). Better to give than to receive: predictive directional measurement of volatility spillovers. *International Journal of Forecasting*, 28(1), 57–66.
- Engle, R.F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, 50(4), 987–1007.
- Fama, E.F. (1970). Efficient capital markets: a review of theory and empirical work. *Journal of Finance*, 25(2), 383–417.
- Franke, J., Härdle, W.K., Hafner, C.M. (2019). *Statistics of Financial Markets: An Introduction*, 5th ed. Springer.
- Gu, S., Kelly, B., Xiu, D. (2020). Empirical asset pricing via machine learning. *Review of Financial Studies*, 33(5), 2223–2273.
- Hill, B.M. (1975). A simple general approach to inference about the tail of a distribution. *Annals of Statistics*, 3(5), 1163–1174.

Bibliografie (2/2)

- Hurst, H.E. (1951). Long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 116(1), 770–799.
- J.P. Morgan/Reuters (1996). *RiskMetrics – Technical Document*, 4th ed. New York.
- Jarque, C.M., Bera, A.K. (1980). Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals. *Economics Letters*, 6(3), 255–259.
- Kupiec, P.H. (1995). Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. *Journal of Derivatives*, 3(2), 73–84.
- Lo, A.W., MacKinlay, A.C. (1988). Stock market prices do not follow random walks: evidence from a simple specification test. *Review of Financial Studies*, 1(1), 41–66.
- Mandelbrot, B. (1963). The variation of certain speculative prices. *Journal of Business*, 36(4), 394–419.
- McNeil, A.J., Frey, R., Embrechts, P. (2015). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*, revised ed. Princeton University Press.
- Menkveld, A.J., Dreber, A., Holzmeister, F., Huber, J., Johannesson, M., et al. (2024). Nonstandard errors. *Journal of Finance*, 79(3), 2339–2390.
- Nakamoto, S. (2008). Bitcoin: a peer-to-peer electronic cash system. White paper.
- Nolan, J.P. (2020). *Univariate Stable Distributions: Models for Heavy Tailed Data*. Springer.
- Peters, E.E. (1994). *Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics*. Wiley.
- Tsay, R.S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*, 3rd ed. Wiley.
- Wang, H., Fu, T., Du, Y., Gao, W., et al. (2023). Scientific discovery in the age of artificial intelligence. *Nature*, 620, 47–60.