








Statistica piețelor financiare

Capitolul 3: Distribuții α-stabile



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București
IDA Institute Digital Assets
Blockchain Research Center
AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance
Academia Română, Institutul de Prognoză Economică
MSCA Digital Finance

Acronime folosite în acest material

- **AI**: Artificial Intelligence (inteligență artificială)
- **AIC**: Akaike Information Criterion (criteriul informațional Akaike)
- **BET**: Bucharest Exchange Trading (index) — indicele de referință al Bursei de Valori București
- **CLT**: Central Limit Theorem (teorema limită centrală)
- **CMS**: Chambers–Mallows–Stuck (simulation method) — metoda de simulare Chambers–Mallows–Stuck
- **EODHD**: EOD Historical Data (market-data provider) — furnizor de date de piață
- **ES**: Expected Shortfall (pierderea așteptată în coadă)
- **ETF**: Exchange-Traded Fund (fond tranzacționat la bursă)
- **FFT**: Fast Fourier Transform (transformata Fourier rapidă)
- **GCLT**: Generalised Central Limit Theorem (teorema limită centrală generalizată)
- **IBM**: International Business Machines (company) — compania International Business Machines
- **KS**: Kolmogorov–Smirnov (test) — testul Kolmogorov–Smirnov
- **ML**: Maximum Likelihood (verosimilitate maximă)
- **QQ**: Quantile–Quantile (plot) — graficul cuantilă–cuantilă
- **SAS**: Statistical Analysis System (software) — programul de analiză statistică SAS
- **SE**: Standard Error (eroare standard)

Întrebarea de azi, traseul și rezultatele învățării

- **Întrebarea**: ce legi de probabilitate pot descrie randamentele zilnice și, în același timp, sumele lor săptămînale și lunare?
  - Capitolul 2: randamentele zilnice au cozi mai groase decît distribuția Normală
  - randamentele logaritmice se adună în timp (Capitolul 1): legea unei sume contează
- **Traseul și rezultatele învățării**: la finalul capitolului veți putea
  - enunța proprietatea de stabilitate și calcula scala unei sume de variabile stabile
  - explica teorema limită centrală generalizată și cînd sumele nu se apropie de distribuția Normală
  - interpreta cei patru parametri $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ și face conversia între parametrizările S0 și S1
  - stabili ce momente există pentru un α dat și compara probabilitățile din cozi cu cele ale distribuției Normale
  - simula variabile stabile și estima parametrii lor prin cuantile și prin verosimilitate maximă
  - evalua, pe randamentele BET, S&P 500, DAX și Bitcoin, unde funcționează modelul stabil și unde eșuează

Bibliografie și instrumente

- Referința principală: Nolan (2020), cap. 1 (definiții, parametrizări, cozi) și cap. 4 (estimare)
  - sinteză scurtă, cu cod: Borak, Härdle & Weron (2005); actualizată în Borak, Misiorek & Weron (2011)
- Manual: Franke, Härdle & Hafner (2019), cap. 3 (probabilități) și cap. 18 (cozi groase și riscuri extreme)
- Lucrările originale: Mandelbrot (1963), Fama (1965)
- Quantlet-urile Python ale capitolului: Quantlets/Ch_03
  - adaptate după Quantlet-ul sim_stable; fiecare grafic are un link către Quantlet-ul care îl generează
- Notebook-ul cursului: deschideți în Google Colab
- Curs video: Stable Distribution

Bumbacul: o piață veche, cu serii lungi de prețuri

- În secolul al XIX-lea, bumbacul era una dintre cele mai tranzacționate mărfuri din lume
  - bursele din New Orleans, New York și Liverpool cotau prețuri în fiecare zi
  - rezultatul: unele dintre cele mai lungi serii zilnice și lunare de prețuri din economie
- La începutul anilor 1960, aceste serii au ajuns la Benoit Mandelbrot, pe atunci la IBM
  - el a studiat **variațiile** logaritmului prețului, adică randamentele logaritmice
- Lucrarea lui, Mandelbrot (1963), a deschis studiul cozilor groase în finanțe



Edgar Degas, Un birou de bumbac din New Orleans (1873)

Imagine: Edgar Degas (1873); domeniu public; Wikimedia Commons

Observațiile lui Mandelbrot asupra prețurilor bumbacului

- **Prea multe variații mari**: mult mai multe variații mari decît permite distribuția Normală
  - varianța de selecție nu se stabiliza pe măsură ce creștea eșantionul
- **Aceeași formă la orice orizont**: variațiile zilnice și cele lunare arătau la fel după rescalare
  - o sumă de multe variații zilnice păstra forma unei singure variații zilnice
- **Propunerea lui**: legi stabile de tip Pareto, cu $\alpha \approx 1{,}7$ Mandelbrot (1963)
  - „de tip Pareto": cozile scad ca o putere a lui x, ca în legea veniturilor a lui Pareto
  - consecință: varianța variațiilor de preț ar fi infinită



Benoit Mandelbrot (1924–2010)

Foto: Rama (2007); CC BY-SA 2.0 fr; Wikimedia Commons

Testele lui Fama pe randamentele acțiunilor

- Fama (1965): randamentele zilnice ale celor 30 de acțiuni din Dow Jones Industrial Average
  - mai multe randamente mari decît permite distribuția Normală, pentru fiecare acțiune
  - estimări ale lui α sub 2: sprijin pentru ipoteza lui Mandelbrot
- Au urmat metode de estimare pentru legile stabile simetrice
  - Fama & Roll (1968), Fama & Roll (1971): estimări pe baza cuantilelor și tabele
- În mai puțin de zece ani, dovezile au început să se schimbe: vedeți critica de la finalul capitolului



Eugene Fama la ceremonia Premiului Nobel, 2013

Foto: Bengt Nyman (2013); CC BY 2.0; Wikimedia Commons

Importanța legii unei sume

- Un randament logaritmic lunar este suma a circa 21 de randamente logaritmice zilnice
  - un model pentru randamentele zilnice implică un model pentru randamentele săptămînale, lunare și anuale
- Distribuția Normală își păstrează forma la adunare (Capitolul 2)
  - dar are cozi subțiri: nu surprinde variațiile zilnice mari
- **Întrebare pentru sală**: distribuția Student-t are cozi groase; este suma a 21 de variabile Student-t independente tot Student-t?
- **Răspuns**
  - nu: familia Student-t nu este închisă la adunare
  - dacă varianța ei este finită, suma se apropie de distribuția Normală (teorema limită centrală)
- **Obiectivul**: identificarea tuturor legilor ale căror sume își păstrează forma

Definiție: legile stabile

- X este **stabilă** dacă, pentru X_1, X_2 copii independente ale lui X și orice $a, b > 0$, există $c > 0$ și d astfel încît
  - $aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} cX + d$, unde $\stackrel{d}{=}$ înseamnă „are aceeași distribuție ca"
  - a, b: ponderile celor două copii; c: scala și d: deplasarea rezultatului
  - **strict stabilă** dacă $d = 0$ pentru orice a, b
- Altfel spus: o sumă ponderată a două copii are aceeași formă ca o copie
  - se schimbă doar scala (c) și poziția (d)
- Prin inducție, pentru n copii independente: $X_1 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} c_n X + d_n$
  - singurul factor de scală posibil este $c_n = n^{1/\alpha}$, cu $0 < \alpha \leq 2$ Nolan (2020)
- α se numește **indicele de stabilitate** (sau exponentul caracteristic, sau tail index)

Două exemple: distribuția Normală și distribuția Cauchy

- **Distribuția Normală**: $X_1, X_2 \sim N(0, \sigma^2)$ independente
  - $aX_1 + bX_2 \sim N(0, (a^2 + b^2)\sigma^2)$, deci $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
  - varianțele se adună: $c^2 = a^2 + b^2$, cazul $\alpha = 2$
- **Cauchy**: densitatea $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1 + x^2)}$
  - $aX_1 + bX_2$ este Cauchy cu scala $c = a + b$
  - scalele se adună liniar: $c^1 = a^1 + b^1$, cazul $\alpha = 1$
  - media a n extrageri Cauchy este tot Cauchy standard: medierea nu reduce dispersia



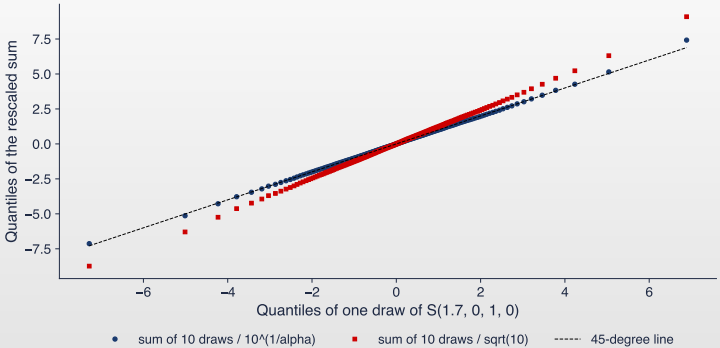
Augustin-Louis Cauchy (1789–1857)

Litografie: J. Boilly (1821), Wellcome Collection; CC BY 2.0; Wikimedia Commons

Regula generală și un exemplu lucrat

- Pentru X_1, X_2 copii independente ale unei X strict stabile cu indicele α:
  - $c^\alpha = a^\alpha + b^\alpha$, adică $c = (a^\alpha + b^\alpha)^{1/\alpha}$
- **Exemplu**: $a = 3$, $b = 4$
  - $\alpha = 2$: $c = \sqrt{9 + 16} = 5{,}00$
  - $\alpha = 1{,}5$: $c = (3^{1,5} + 4^{1,5})^{1/1,5} = 5{,}58$
  - $\alpha = 1$: $c = 3 + 4 = 7{,}00$
- Cu cît α este mai mic, cu atît scala sumei este mai mare: un singur termen mare poate domina suma
- **Ce credeți?** Pentru $\alpha = 1{,}5$, care este factorul de scală al sumei a două copii?
- **Răspuns**
  - $c_2 = 2^{1/1,5} = 2^{2/3} = 1{,}59$, mai mare decît $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ pentru distribuția Normală

Stabilitatea într-o simulare



- Notație (secțiunea 4): $S(\alpha;\beta;\gamma;\delta)$ este legea stabilă cu indicele α, asimetria β, scala γ și poziția δ
- Albastru: sumele a 10 extrageri din $S(1{,}7;0;1;0)$ împărțite la $10^{\mathbf{1/1{,}7}} = 3{,}87$ se află pe prima bisectoare: aceeași lege ca o singură extragere
- Roșu: împărțirea la $\sqrt{10} = 3{,}16$ (regula distribuției Normale) lasă cozile prea largi: cuantila de 99% este 6,31, față de 5,04

SFM_ch3_stability_gclt

Consecințe: orizonturi și diversificare

- **Orizontul**: dacă randamentele zilnice sînt i.i.d. (independente și identic distribuite) $S(\alpha; 0; \gamma; 0)$, suma pe 20 de zile are scala $20^{1/\alpha}\gamma$
  - $\alpha = 2$: $4{,}47\,\gamma$ (regula rădăcinii pătrate a timpului); $\alpha = 1{,}7$: $5{,}83\,\gamma$; $\alpha = 1{,}5$: $7{,}37\,\gamma$
  - cu $\alpha < 2$, riscul pe orizonturi lungi crește mai repede decît $\sqrt{n}$
- **Diversificarea**: un portofoliu cu ponderi egale din N active stabile i.i.d. are scala $N^{1/\alpha - 1}\gamma$
  - $N = 10$: $\alpha = 2$ dă $0{,}32\,\gamma$; $\alpha = 1{,}5$ dă $0{,}46\,\gamma$; $\alpha = 1$ dă $1{,}00\,\gamma$
  - cu $\alpha = 1$, diversificarea nu reduce deloc scala; Fama (1965) a discutat această consecință

Recapitulare: stabilitatea

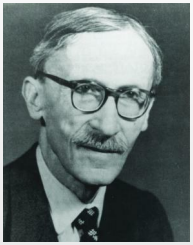
- Lege stabilă: o sumă de copii independente are aceeași formă, doar rescalată și deplasată
- Regula scalei: $c^\alpha = a^\alpha + b^\alpha$; n copii: factorul $n^{1/\alpha}$, $0 < \alpha \leq 2$
- Normală: $\alpha = 2$; Cauchy: $\alpha = 1$
- α mic: riscul crește mai repede cu orizontul, iar diversificarea ajută mai puțin

De la CLT clasică la cea generalizată

- **CLT clasică** (teorema limită centrală, Capitolul 2): X_i i.i.d. cu media μ și varianța finită σ^2
  - $\dfrac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \to N(0,1)$ în distribuție
- Ce se întîmplă dacă varianța este infinită? Normalizarea cu $\sqrt{n}$ nu mai este potrivită
- **GCLT** (teorema limită centrală generalizată) Gnedenko & Kolmogorov (1954): dacă $(X_1 + \cdots + X_n - b_n)/a_n$ converge către o lege nedegenerată, acea lege este stabilă
  - $a_n > 0$, b_n: constante de normalizare care rescalează și recentrează suma (pentru CLT clasică, $a_n = \sigma\sqrt{n}$, $b_n = n\mu$)
  - legile stabile sînt **singurele** limite posibile ale sumelor normalizate de variabile i.i.d.
  - distribuția Normală este cazul particular $\alpha = 2$

Domenii de atracție

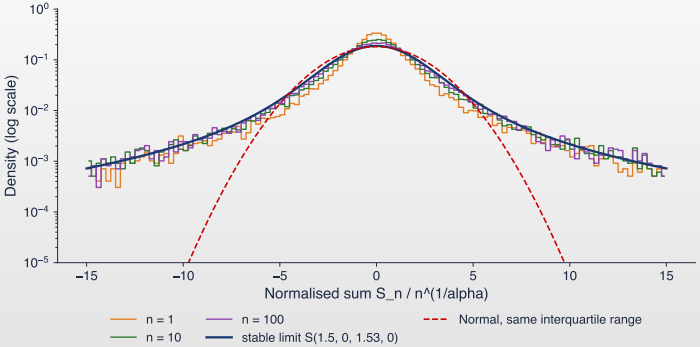
- **Domeniul de atracție** al unei legi stabile: toate legile ale căror sume normalizate converg către ea
  - varianță finită: domeniul de atracție al distribuției Normale, $a_n \propto \sqrt{n}$
  - cozi de tip putere $P(|X| > x) \approx Cx^{-\alpha}$ cu $0 < \alpha < 2$: legea stabilă cu același α, $a_n \propto n^{1/\alpha}$
  - $C > 0$: o constantă; $\propto$: proporțional cu
- Prin urmare, **coada** distribuției unui randament determină legea sumelor cu mulți termeni
- Paul Lévy a caracterizat legile stabile în anii 1920; teoria completă se găsește în Gnedenko & Kolmogorov (1954)



Paul Lévy (1886–1971)

Foto: Konrad Jacobs, Oberwolfach Photo Collection; CC BY-SA 2.0 de; Wikimedia Commons

GCLT într-o simulare



- Student-t cu $\nu = 1{,}5$ grade de libertate: varianță infinită, cozi $\propto x^{-\mathbf{1,5}}$; sumele a n extrageri împărțite la $n^{\mathbf{1/1,5}}$
- $n = 1, 10, 100$: histogramele se apropie de limita stabilă $S(1{,}5; 0; 1{,}53; 0)$; $P(|\cdot| > 10)$: 2,73% pentru $n = 100$, 2,64% la limită
- O distribuție Normală cu același interval intercuartilic dă 0,0005%: nu surprinde deloc cozile

SFM_ch3_stability_gclt

Implicațiile GCLT pentru randamente

- Două lumi posibile pentru randamentele zilnice
  - **tail index sub 2** (varianță infinită): randamentele lunare sînt stabile cu **același** α
  - **tail index peste 2** (varianță finită): randamentele lunare se apropie de distribuția Normală
- Cele două lumi conduc la predicții diferite și testabile despre randamentele pe orizonturi mai lungi
- **Întrebare pentru sală**: căreia dintre cele două lumi îi aparțin randamentele S&P 500?
- **Răspuns**
  - o testăm cu date reale în ultimele secțiuni: estimări ale lui α la orizont zilnic, săptămînal și lunar

Recapitulare: teorema limită centrală generalizată

- CLT clasică: variantă finită, normalizare $\sqrt{n}$, limită Normală
- GCLT: legile stabile sînt singurele limite ale sumelor normalizate
- Cozi de tip putere cu indicele $\alpha < 2$: normalizare $n^{1/\alpha}$, limită stabilă cu același α
- Coada distribuției unui singur randament determină legea sumelor cu mulți termeni

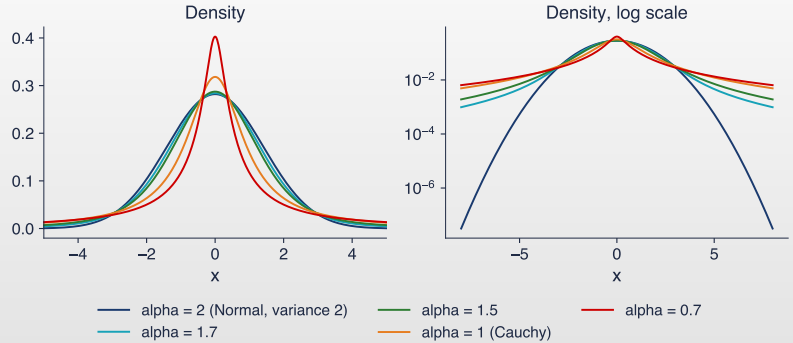
Funcția caracteristică

- **Funcția caracteristică** a lui X: $\varphi_X(t) = E[e^{itX}] = E[\cos(tX)] + i\,E[\sin(tX)]$, $t \in \mathbb{R}$
  - $i = \sqrt{-1}$: unitatea imaginară; t: un argument real, nu timpul
  - există întotdeauna, pentru că $|e^{itX}| = 1$, chiar și cînd nu există niciun moment
  - determină distribuția în mod unic
- Două proprietăți folosite în capitol
  - X, Y independente: $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\,\varphi_Y(t)$: sumele devin produse
  - $\varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt}\varphi_X(at)$
- Normală $N(\mu, \sigma^2)$: $\varphi(t) = \exp(i\mu t - \sigma^2 t^2/2)$
- Utilitatea ei: cu excepția a trei cazuri, legile stabile **nu au densitate în formă închisă**; sînt definite prin φ

Funcția caracteristică stabilă (S1)

- $X \sim S(\alpha;\beta;\gamma;\delta \mid 1)$ dacă, pentru $\alpha \neq 1$, Samorodnitsky & Taqqu (1994), Nolan (2020):
  - $\varphi(t) = \exp\left\{-\gamma^\alpha |t|^\alpha \left[1 - i\beta\,\mathrm{sign}(t)\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right] + i\delta t\right\}$
  - pentru $\alpha = 1$: $\varphi(t) = \exp\left\{-\gamma|t|\left[1 + i\beta\,\frac{2}{\pi}\mathrm{sign}(t)\ln|t|\right] + i\delta t\right\}$
- Cei patru parametri
  - $\alpha \in (0,2]$: **indicele de stabilitate**; α mai mic, cozi mai groase
  - $\beta \in [-1,1]$: **asimetria**; $\beta > 0$ coada dreaptă mai groasă, $\beta < 0$ coada stîngă mai groasă
  - $\gamma > 0$: **scala** (joacă rolul lui σ); $\delta \in \mathbb{R}$: **poziția**
- $\mathrm{sign}(t)$: $+1$ pentru $t > 0$, -1 pentru $t < 0$; termenul cu β face legea asimetrică
- Stabilitatea este vizibilă: $\varphi(t)^n$ are aceeași formă, cu γ^α înlocuit de $n\gamma^\alpha$

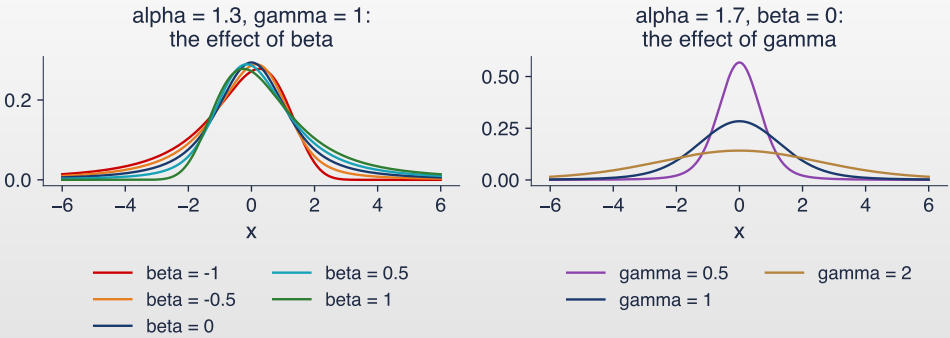
Efectul lui α



- Legi simetrice $S(\alpha; 0; 1; 0)$: α mai mic dă un vîrf mai înalt și mai îngust și cozi mult mai groase
- Scara logaritmică: coada distribuției Normale ($\alpha = 2$) scade ca $e^{-x^2/4}$; celelalte scad ca o putere a lui x

SFM_ch3_densities

Efectul lui β și γ



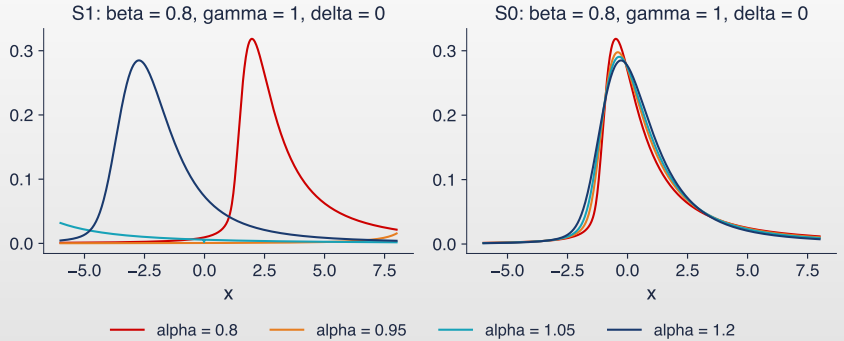
- β redistribuie masa între cozi: $\beta = 1$ (verde) are coada dreaptă mai groasă, $\beta = -1$ (roșu) coada stîngă mai groasă
- γ întinde densitatea: dublarea lui γ dublează fiecare cuantilă în jurul lui δ

SFM_ch3_densities

Două parametrizări: S0 și S1

- **S0** (recomandarea lui Nolan pentru analiza datelor), $\alpha \neq 1$:
  - $\varphi(t) = \exp\left\{ -\gamma^{\alpha}|t|^{\alpha}\left[1 + i\beta\,\mathrm{sign}(t)\tan\frac{\pi\alpha}{2}\left(|\gamma t|^{1-\alpha} - 1\right)\right] + i\delta_0 t\right\}$
- Diferă doar poziția: $\delta_0 = \delta_1 + \beta\gamma\tan\frac{\pi\alpha}{2}$ $(\alpha \neq 1)$
  - δ_0, δ_1: parametrul de poziție în S0 și în S1; α, β și γ sînt aceleași în ambele
  - pentru $\beta = 0$ cele două coincid
- Rolul fiecăreia
  - S1: algebră mai simplă pentru sume; folosită în majoritatea cărților de teorie Samorodnitsky & Taqqu (1994)
  - S0: densitatea se schimbă continuu cu α și β; mai bună pentru estimare și grafice Nolan (2020)

S1 și S0 în apropiere de $\alpha = 1$



- S1 (stînga): cu $\beta = 0{,}8$, densitatea se deplasează spre $+\infty$ cînd $\alpha \uparrow 1$ și revine dinspre $-\infty$ cînd $\alpha \downarrow 1$, pentru că $\tan \frac{\pi\alpha}{2}$ tinde la infinit
- S0 (dreapta): aceleași patru legi, deplasate; modul rămîne lîngă 0 și se schimbă lin

SFM_ch3_densities

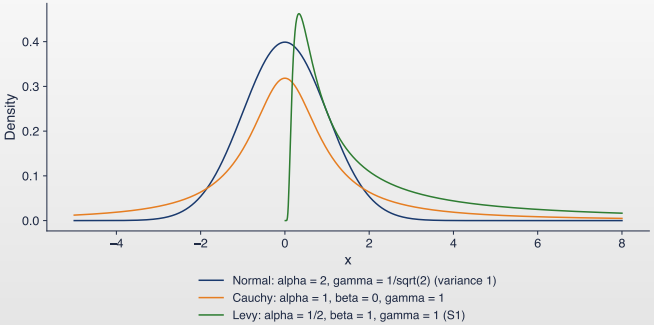
Parametrizările legilor stabile în software

- `scipy.stats.levy_stable` folosește implicit **S1**
  - se schimbă cu `levy_stable.parameterization = 'S0'`
  - argumente: `levy_stable.pdf(x, alpha, beta, loc=delta, scale=gamma)`
- Lucrările și programele raportează δ în S0, în S1 sau în alte parametrizări: verificați parametrizarea înainte de a compara rezultatele
- Capcana scalei: $S(2; 0; \gamma; \delta)$ este $N(\delta, 2\gamma^2)$, nu $N(\delta, \gamma^2)$
  - deci $\gamma = \sigma/\sqrt{2}$ pentru distribuția Normală
- În acest curs: estimările sînt în S0, iar δ_1 este raportat separat

Trei legi cu densitate în formă închisă

- **Distribuția Normală**: $\alpha = 2$ (β nu are niciun rol)
  - $\varphi(t) = \exp(-\gamma^2 t^2 + i\delta t)$, adică $N(\delta, 2\gamma^2)$
- **Cauchy**: $\alpha = 1$, $\beta = 0$
  - $f(x) = \dfrac{\gamma}{\pi\left(\gamma^2 + (x-\delta)^2\right)}$; $\varphi(t) = \exp(-\gamma|t| + i\delta t)$
- **Lévy**: $\alpha = 1/2$, $\beta = 1$ (S1); complet asimetrică la dreapta
  - $f(x) = \sqrt{\dfrac{\gamma}{2\pi}}\,(x-\delta)^{-3/2} \exp\left(-\dfrac{\gamma}{2(x-\delta)}\right)$ pentru $x > \delta$
  - momentul în care o mișcare browniană atinge prima dată un nivel are o lege Lévy
- Toate celelalte densități stabile se calculează numeric din φ Nolan (1997), Mittnik, Doganoglu & Chenyao (1999)

Distribuțiile Normală, Cauchy și Lévy



- Cauchy: vîrf mai jos, cozi mult mai groase decît distribuția Normală cu varianța 1
- Lévy: doar valori pozitive, o coadă dreaptă lungă; media ei este infinită

SFM_ch3_densities

Exemplu lucrat: S1 și S0 în $t = 1$

- X cu $\alpha = 1{,}5$, $\beta = 0{,}3$, $\gamma = 1$, $\delta = 0$; observați că $\tan \frac{3\pi}{4} = -1$
- **S1**: $\ln \varphi(1) = -1 \cdot [1 - i \cdot 0{,}3 \cdot (-1)] = -1 - 0{,}3i$
  - $\varphi(1) = e^{-1}(\cos 0{,}3 - i \sin 0{,}3) = 0{,}351 - 0{,}109i$; $|\varphi(1)| = e^{-1} = 0{,}368$
- **S0**: factorul $|t|^{1-\alpha} - 1$ este 0 în $t = 1$, deci $\varphi(1) = e^{-1} = 0{,}368$, un număr real
  - același modul: cele două legi diferă doar printr-o deplasare
  - deplasarea $= \beta\gamma \tan \frac{\pi\alpha}{2} = -0{,}3$: legea S1 cu $\delta_1 = 0$ este legea S0 cu $\delta_0 = -0{,}3$

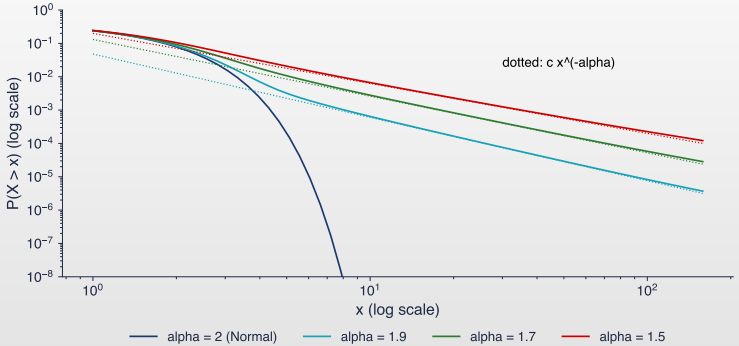
Recapitulare: parametrii și funcția caracteristică

- Legile stabile se definesc prin $\varphi(t)$; densitatea se calculează numeric
- α cozi, β asimetrie, γ scală, δ poziție
- S0 și S1: diferă doar δ, $\delta_0 = \delta_1 + \beta\gamma \tan \frac{\pi\alpha}{2}$; scipy folosește implicit S1
- Forme închise: Normală ($\alpha = 2$, varianța $2\gamma^2$), Cauchy, Lévy

Cozi de tip putere

- Pentru $\alpha < 2$, cînd $x \to \infty$ Nolan (2020):
  - $P(X > x) \sim \gamma^\alpha c_\alpha (1+\beta)\, x^{-\alpha}$ și $P(X < -x) \sim \gamma^\alpha c_\alpha (1-\beta)\, x^{-\alpha}$
  - $c_\alpha = \Gamma(\alpha)\sin(\pi\alpha/2)/\pi$, cu Γ funcția gamma; $f \sim g$ înseamnă $f/g \to 1$
- Pe axe log-log, coada este o dreaptă cu panta $-\alpha$
  - dublarea pragului împarte probabilitatea din coadă la 2^α: $\times 0{,}31$ pentru $\alpha = 1{,}7$
- Coada distribuției Normale scade ca $e^{-x^2/(4\gamma^2)}$: dublarea pragului o face practic nulă
- $\beta = \pm 1$ cu $\alpha < 1$: una dintre cozi lipsește (suportul legii este o semidreaptă)

Cozile pe axe log-log



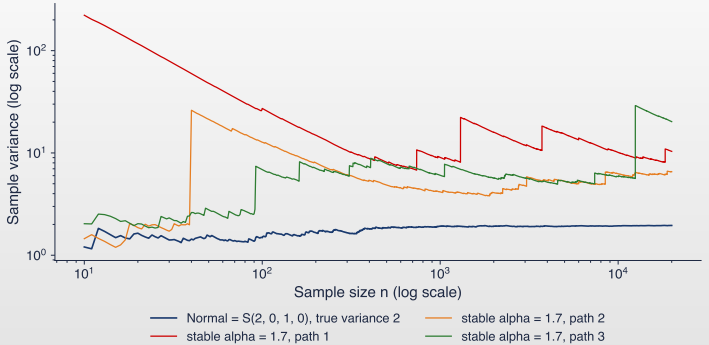
- Linie continuă: $P(X > x)$ pentru $S(\alpha; 0; 1; 0)$; linie punctată: legea de tip putere $c_\alpha x^{-\alpha}$, atinsă deja în jurul lui $x = 5$
- $P(X > 10)$: 0,279% pentru $\alpha = 1{,}7$, 0,667% pentru $\alpha = 1{,}5$, circa 8×10^{-11}% pentru distribuția Normală

SFM_ch3_tails_moments

Existența momentelor

- Pentru $0 < \alpha < 2$: $E|X|^p < \infty$ dacă și numai dacă $p < \alpha$
  - $E|X|^p$: momentul absolut de ordin $p > 0$; $p = 1$ corespunde mediei, $p = 2$ variației
  - motivul: $|x|^p$ înmulțit cu o densitate de ordinul $|x|^{-\alpha-1}$ este integrabil doar dacă $p < \alpha$
- Consecințe
  - $\alpha < 2$: **varianță infinită**; asimetria și boltirea nu sînt definite
  - $1 < \alpha < 2$: media există; în S1 este egală cu δ_1
  - $\alpha \leq 1$: nici media nu există (Cauchy, Lévy)
  - $\alpha = 2$: toate momentele există
- **Ce credeți?** Mandelbrot a găsit $\alpha \approx 1{,}7$ pentru bumbac. Există media variației zilnice?
- **Răspuns**
  - da, pentru că $1 < 1{,}7$; dar varianța nu există, pentru că $2 > 1{,}7$

Instabilitatea variației de selecție



- Distribuția Normală (albastru): varianța de selecție converge la valoarea adevărată 2
- Stabilă $\alpha = 1{,}7$: fiecare extragere mare produce un salt al variației; după 20 000 de extrageri, cele trei traiectorii ajung la 10,4, 6,6, 20,2
- Același fenomen l-a observat Mandelbrot în prețurile bumbacului

SFM_ch3_tails_moments

Probabilitățile din cozi: distribuția stabilă și distribuția Normală

k	$P(\|X\| > k)$, Normală %	$P(\|X\| > k)$, $\alpha = 1{,}7$ %	raport
2	15,73	18,59	1,2
3	3,39	7,25	2,1
5	0,041	2,13	52,4
10	$1{,}5 \times 10^{-10}$	0,56	$3{,}6 \times 10^{9}$

- Ambele legi au $\beta = 0$, $\gamma = 1$, $\delta = 0$; legea Normală este deci $N(0, 2)$
- În jurul centrului, cele două legi sînt apropiate; departe în cozi, diferă prin ordine de mărime
- Un model de risc se evaluează în cozi, unde alegerea legii contează cel mai mult

SFM_ch3_tails_moments

Varianța infinită și măsurile de risc

- Instrumente care au nevoie de varianță finită
  - volatilitatea, raportul Sharpe și eroarea lui standard (Capitolul 1); portofoliile medie–varianță; intervalele de încredere obținute din CLT
  - cu $\alpha < 2$, aceste mărimi se pot calcula pe orice eșantion, dar nu estimează nimic
- Instrumente care rămîn valabile
  - cuantilele există întotdeauna: $\mathrm{VaR}_{1\%} = -q_{1\%}$, pierderea depășită cu probabilitatea 1%
  - $\mathrm{ES}_{2,5\%}$ (expected shortfall, pierderea medie dincolo de VaR) există doar dacă $\alpha > 1$
  - scala γ și intervalul intercuartilic înlocuiesc abaterea standard
- VaR și ES sînt tratate pe larg în Capitolul 10

Recapitulare: cozi și momente

- Cozi: $P(|X| > x) \propto x^{-\alpha}$; o dreaptă pe axe log-log
- Momente: $E|X|^p < \infty$ dacă și numai dacă $p < \alpha$; $\alpha < 2$ înseamnă varianță infinită
- Varianța de selecție a unui eșantion stabil are salturi și nu se stabilizează
- Cuantilele, VaR și scala γ își păstrează sensul

Metoda Chambers–Mallows–Stuck (cazul simetric)

- Nu există densitate în formă închisă, dar variabilele stabile se simulează ușor Chambers, Mallows & Stuck (1976)
- **CMS** (Chambers–Mallows–Stuck) pentru $S(\alpha; 0; 1; 0)$:
  - extrageți $V \sim U(-\pi/2, \pi/2)$, un unghi uniform, și $W \sim \mathrm{Exp}(1)$, o variabilă exponențială cu media 1, independente
  - $X = \dfrac{\sin(\alpha V)}{(\cos V)^{1/\alpha}} \left(\dfrac{\cos((1-\alpha)V)}{W} \right)^{(1-\alpha)/\alpha}$
  - apoi $\gamma X + \delta \sim S(\alpha; 0; \gamma; \delta)$
- Verificări pe cazuri particulare
  - $\alpha = 1$: $X = \tan V$, o variabilă Cauchy
  - $\alpha = 2$: $X = 2 \sin V \sqrt{W}$, o variabilă $N(0, 2)$

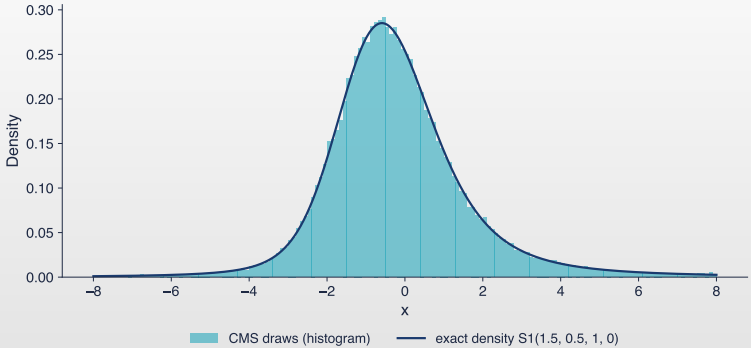
Cazul general ($\beta \neq 0$)

- Pentru $\alpha \neq 1$, parametrizarea S1 Weron (1996):
  - $B = \dfrac{\arctan\left(\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right)}{\alpha}, \quad S = \left(1 + \beta^2 \tan^2 \frac{\pi\alpha}{2}\right)^{1/(2\alpha)}$
  - $X = S \dfrac{\sin(\alpha(V+B))}{(\cos V)^{1/\alpha}} \left(\dfrac{\cos(V - \alpha(V+B))}{W}\right)^{(1-\alpha)/\alpha} \sim S(\alpha; \beta; 1; 0 \mid 1)$
- B, S: constante auxiliare care depind doar de α și β; pentru $\beta = 0$, $B = 0$ și $S = 1$
- De la extragerea standard la orice parametri
  - S1: $\gamma X + \delta_1$; S0: $\gamma X + \delta_0 - \beta\gamma \tan \frac{\pi\alpha}{2}$
- Weron (1996) a corectat o formulă din lucrarea originală pentru $\beta \neq 0$; `scipy.stats.levy_stable.rvs` folosește aceeași metodă

Exemplu lucrat: o extragere pas cu pas

- $\alpha = 1{,}5$, $\beta = 0$; o extragere uniformă $U = 0{,}8$ și o extragere exponențială $W = 1{,}2$
- Pași
  - $V = \pi(U - 1/2) = 0{,}942$: transformă U, uniformă pe $(0, 1)$, într-un unghi uniform pe $(-\pi/2, \pi/2)$
  - $\sin(\alpha V) = 0{,}988$; $(\cos V)^{1/\alpha} = 0{,}702$
  - $\big(\cos((1-\alpha)V)/W\big)^{(1-\alpha)/\alpha} = 1{,}104$
  - $X = 0{,}988/0{,}702 \times 1{,}104 = 1{,}554$
- Repetați cu noi perechi (U, W) pentru un eșantion de orice mărime

Extrageri CMS față de densitatea exactă



- 100 000 de extrageri CMS din $S(1{,}5; 0{,}5; 1; 0 \mid 1)$: histograma urmează densitatea calculată din φ
- Cuantilele de 1% și 99%: eșantion $-5{,}47$ și 9,52, exact (scipy `levy_stable`) $-5{,}39$ și 9,79
- Testul KS (Kolmogorov–Smirnov) cu două eșantioane față de `levy_stable.rvs`: statistica 0,0044, p-value 0,30, nicio diferență

SFM_ch3_sim_stable

Recapitulare: simularea

- CMS: un unghi uniform V și un W exponențial dau o extragere stabilă
- Cazurile particulare verifică formula: $\tan V$ (Cauchy), $2 \sin V \sqrt{W}$ (Normală)
- Cazul asimetric: formula din Weron (1996); deplasare cu $\beta\gamma \tan \frac{\pi\alpha}{2}$ pentru S0

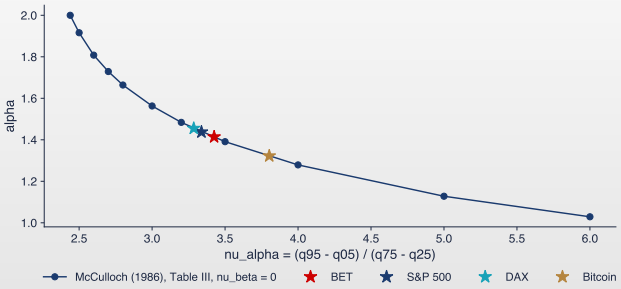
Trei familii de estimatori

- **Metodele cuantilelor**: potrivesc cuantilele de selecție cu cele ale legii stabile
  - Fama & Roll (1971) pentru legi simetrice; McCulloch (1986) pentru toți cei patru parametri
- **Metodele funcției caracteristice**: regresia lui $\ln(-\ln|\hat{\varphi}(t)|^2)$ empiric pe $\ln|t|$
  - $\hat{\varphi}(t) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{itr_j}$: funcția caracteristică empirică; $|\varphi(t)|^2 = e^{-2\gamma^\alpha |t|^\alpha}$, deci relația dublu logaritmică este liniară în $\ln|t|$
  - Koutrouvelis (1980); panta estimează α
- **Verosimilitatea maximă** (ML): cea mai precisă, dacă densitatea poate fi calculată
  - Nolan (2001), Mittnik et al. (1999)
- O implementare SAS a acestor estimatori este descrisă în Pele (2014)

Metoda cuantilelor a lui McCulloch

- Două rapoarte de cuantile de selecție $\hat{q}_p$, independente de poziție și de scală McCulloch (1986):
  - $\nu_\alpha = \dfrac{\hat{q}_{0,95} - \hat{q}_{0,05}}{\hat{q}_{0,75} - \hat{q}_{0,25}}$ (lățimea cozilor față de corp)
  - $\nu_\beta = \dfrac{\hat{q}_{0,95} + \hat{q}_{0,05} - 2\hat{q}_{0,5}}{\hat{q}_{0,95} - \hat{q}_{0,05}}$ (asimetria)
- $\hat{q}_p$: cuantila de selecție de ordin p, valoarea sub care se află o proporție p din randamente
- Tabelele III și IV din lucrare transformă (ν_α, ν_β) în $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$
  - distribuția Normală: $\nu_\alpha = 2{,}439$; un ν_α mai mare înseamnă un α mai mic
- Apoi $\hat{\gamma} = (\hat{q}_{0,75} - \hat{q}_{0,25})/\phi_3(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ (Tabelul V) și $\hat{\delta}_0$ din Tabelul VII; ϕ_3: intervalul intercuartilic al lui $S(\alpha; \beta; 1; 0)$
- Rapidă, consistentă, valabilă pentru $0{,}6 \leq \alpha \leq 2$; mai puțin precisă decît ML; un bun punct de plecare pentru ML

Corespondența McCulloch între ν_α și α



- Linia: Tabelul III pentru un eșantion simetric ($\nu_\beta = 0$)
- Stelele: randamente logaritmice zilnice din 2000 (Bitcoin din 2014)
- ν_α: BET 3,425, S&P 500 3,338, DAX 3,285, Bitcoin 3,803
- Toate mult peste 2,439: cozi mult mai largi decît permite distribuția Normală

SFM_ch3_estimation

Exemplu lucrat: McCulloch pe BET

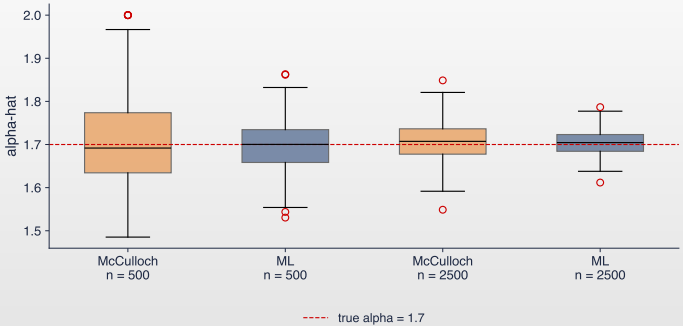
- Randamentele logaritmice zilnice BET (%), 2000–2026, $n = 6\,670$
- Pasul 1: cuantilele
  - $\hat{q}_{0,05} = -1{,}9345$, $\hat{q}_{0,25} = -0{,}5025$, $\hat{q}_{0,5} = 0{,}0771$, $\hat{q}_{0,75} = 0{,}6649$, $\hat{q}_{0,95} = 2{,}0641$
- Pasul 2: rapoartele
  - $\nu_\alpha = 3{,}9986/1{,}1674 = 3{,}425$; $\nu_\beta = -0{,}006$, practic simetric
- Pasul 3: Tabelul III, coloana $\nu_\beta = 0$: $\nu_\alpha = 3{,}2 \mapsto 1{,}484$, $\nu_\alpha = 3{,}5 \mapsto 1{,}391$
  - interpolare liniară: $\hat{\alpha} \approx 1{,}414$
- Pasul 4: $\hat{\gamma} = 0{,}60$ (% pe zi), $\hat{\beta} = -0{,}011$, $\hat{\delta}_0 = 0{,}079$

SFM_ch3_estimation

Verosimilitatea maximă

- Log-verosimilitatea unui eșantion $r_1, \ldots, r_n$: $\ell(\theta) = \sum_{t=1}^{n} \ln f(r_t; \theta)$, $\theta = (\alpha, \beta, \gamma, \delta_0)$
  - θ: vectorul celor patru parametri; $f(r_t, \theta)$: densitatea stabilă în r_t; $\hat{\theta}$ maximizează numeric ℓ, pornind de la estimarea McCulloch
  - erorile standard din curbura lui ℓ: inversa hessianei, matricea derivatelor a doua ale lui ℓ
- Densitatea f se calculează din φ
  - $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-itx} \varphi(t)\, dt$, evaluată pe o grilă cu FFT (fast Fourier transform, transformata Fourier rapidă) Mittnik, Doganoglu & Chenyao (1999)
  - sau prin integrare directă Nolan (1997); `levy_stable.fit` face acest calcul și durează cîteva minute pentru cîteva mii de randamente
- Estimarea ML în S0 este regulată pentru $\alpha \in (0, 2)$: erorile standard scad ca $1/\sqrt{n}$ Nolan (2001)

McCulloch și ML într-un studiu Monte Carlo



- 200 de eșantioane din $S(1{,}7; 0; 1; 0)$ pentru fiecare mărime; ambii estimatori sînt centrați pe 1,7
- Abaterea standard a lui $\hat{\alpha}$: $n = 500$: McCulloch 0,1065, ML 0,0611; $n = 2500$: 0,0462 față de 0,0298
- ML este mai precisă pe aceleași date: abaterea standard McCulloch este de 1,74 ori cea ML la $n = 500$ și de 1,55 ori la $n = 2500$

SFM_ch3_estimation

Recapitulare: estimarea

- McCulloch: cinci cuantile, două rapoarte, patru tabele; rapidă și robustă
- ML: densitate numerică din φ, maximizare numerică; cea mai precisă
- Raportați parametrizarea (S0 sau S1) și unitățile lui γ și δ

Legi stabile estimate pe randamentele logaritmice zilnice

	n	$\hat{\alpha}$ McC.	$\hat{\alpha}$ ML (SE)	$\hat{\beta}$ ML (SE)	$\hat{\gamma}$	$\hat{\delta}_0$	$\hat{\delta}_1$
BET	6 670	1,414	1,486 (0,020)	−0,016 (0,034)	0,62	0,088	0,078
S&P 500	6 714	1,438	1,540 (0,021)	−0,181 (0,036)	0,58	0,093	0,000
DAX	6 786	1,455	1,606 (0,021)	−0,179 (0,040)	0,74	0,090	−0,004
Bitcoin	4 384	1,322	1,410 (0,026)	0,019 (0,036)	1,54	0,132	0,171

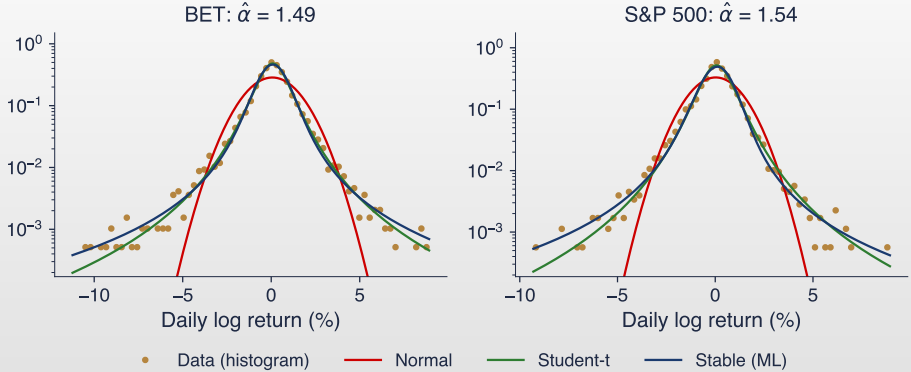
- Randamente logaritmice zilnice în %; indici 2000–2026, Bitcoin 2014–2026 (7 zile pe săptămînă); date: EODHD
- McC.: McCulloch; ML în S0, cu erori standard; $\hat{\gamma}$, $\hat{\delta}_0$, $\hat{\delta}_1$ în % pe zi

SFM_ch3_fit_returns

Interpretarea estimărilor

- $\hat{\alpha}$ mult sub 2 pentru toate cele patru serii
  - S&P 500: $(2 - 1{,}540)/0{,}021 \approx 22$ erori standard față de cazul Normal
  - cele mai groase cozi: Bitcoin ($\hat{\alpha} = 1{,}410$)
- $\hat{\beta} < 0$ pentru S&P 500 și DAX: coada stîngă este mai groasă (crahuri)
  - BET și Bitcoin: $\hat{\beta}$ la mai puțin de două erori standard de 0
- $\hat{\gamma}$: Bitcoin 1,54% pe zi, față de 0,58% pentru S&P 500; comparați abaterile standard de selecție 3,49% și 1,21%
- McCulloch dă un $\hat{\alpha}$ mai mic decît ML pentru fiecare serie: cele două metode ponderează diferit cozile

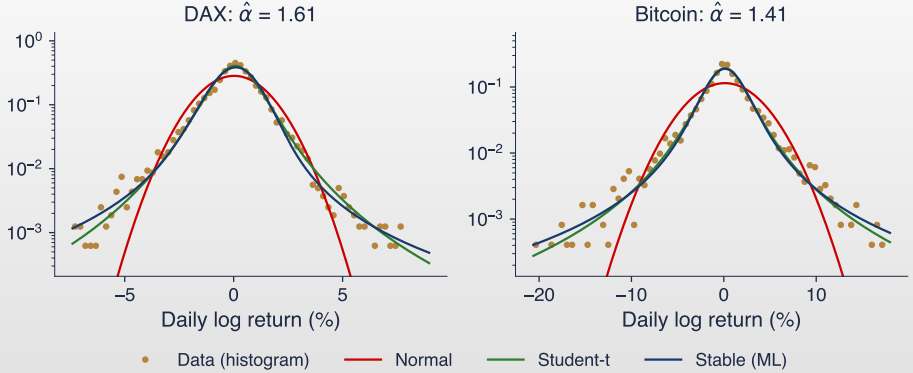
Densități estimate, pe scară logaritmică (1/2)



- Distribuția Normală (roșu): mult prea puține randamente mari; distribuțiile Student-t (verde) și stabilă (albastru) descriu bine corpul

SFM_ch3_fit_returns

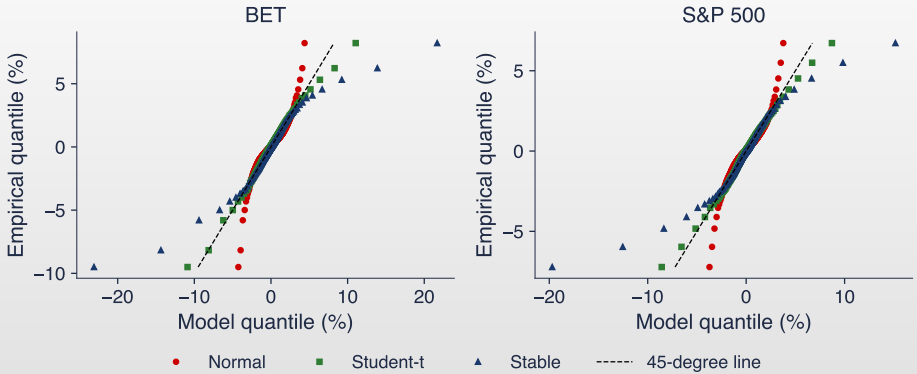
Densități estimate, pe scară logaritmică (2/2)



- Cozile îndepărtate: densitatea stabilă rămîne deasupra punctelor; distribuția Student-t este mai aproape de ele

SFM_ch3_fit_returns

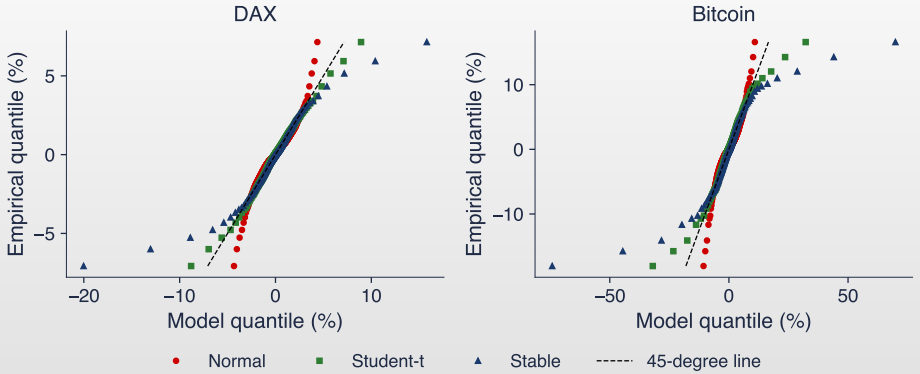
QQ plots față de cele trei modele (1/2)



- Un QQ plot (graficul cuantilă–cuantilă) reprezintă cuantilele empirice în funcție de cele ale modelului; pentru un model bun, punctele se află pe prima bisectoare

SFM_ch3_fit_returns

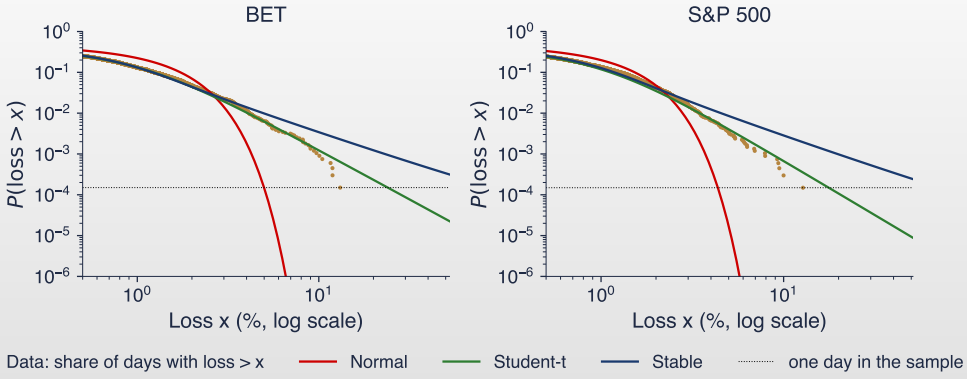
QQ plots față de cele trei modele (2/2)



- Distribuția Normală: cozi prea scurte (capete abrupte); distribuția stabilă: cozi prea lungi (capete plate, cuantile ale modelului mult dincolo de date); Student-t: cea mai apropiată

SFM_ch3_fit_returns

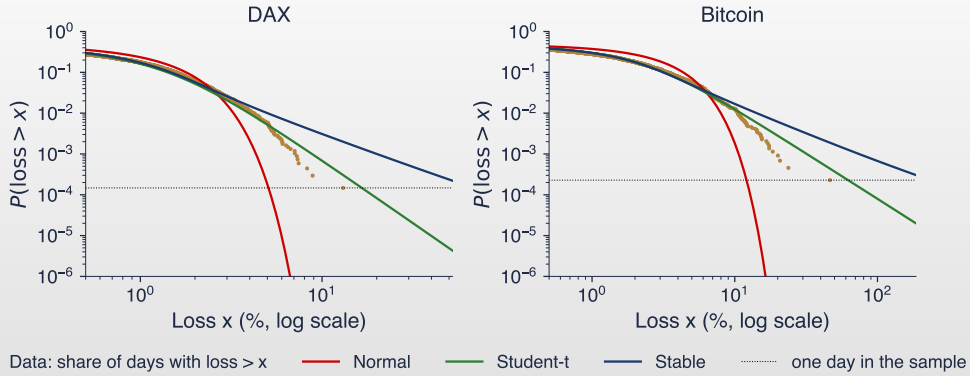
Coada stîngă pe axe log-log (1/2)



⊡ Punctele: proporția zilelor cu o pierdere peste x; liniile: aceeași probabilitate conform fiecărui model estimat

SFM_ch3_fit_returns

Coada stîngă pe axe log-log (2/2)



⊡ Coada empirică se curbează în jos mai repede decît dreapta stabilă: tail index-ul datelor este mai mare decît $\hat{\alpha}$

SFM_ch3_fit_returns

Numărarea pierderilor mari

	pierdere peste	observate	Normală	Student-t	stabilă
S&P 500	5%	23	0,1	27,0	57,3
S&P 500	10%	1	≈ 0	4,5	19,1
S&P 500	15%	0	≈ 0	1,5	10,2
BET	10%	6	≈ 0	8,2	22,8
Bitcoin	10%	56	8,1	54,2	73,9
Bitcoin	20%	4	≈ 0	12,3	26,9

- Numărul așteptat de zile $= n \times P(r < -x)$ conform fiecărui model estimat
- Distribuția Normală: aproape nicio pierdere mare; distribuția stabilă: prea multe, iar diferența crește odată cu pragul; Student-t: cea mai apropiată de valorile observate
- S&P 500, 6 714 zile: zile sub -10% observate 1, prevăzute de legea stabilă estimată 19,1

SFM_ch3_fit_returns

VaR 1% și VaR 0,1% conform celor trei modele

	VaR 1% (%)				VaR 0,1% (%)			
	date	Normală	t	stabilă	date	Normală	t	stabilă
BET	4,1	3,2	4,1	4,9	9,5	4,3	10,9	23,1
S&P 500	3,5	2,8	3,5	4,5	7,2	3,7	8,6	19,7
DAX	4,2	3,3	4,0	5,0	7,1	4,3	8,8	20,0
Bitcoin	10,5	8,0	11,1	14,3	18,1	10,7	31,9	74,2

- VaR la nivelul p: $\mathrm{VaR}_p = -q_p$, pierderea zilnică depășită cu probabilitatea p (Capitolul 10); aici notăm nivelul cu p, deoarece α desemnează indicele de stabilitate
- VaR 1%: modelul Normal dă valori prea mici, modelul stabil valori prea mari
- VaR 0,1%: modelul stabil dă valori de aproximativ două pînă la patru ori mai mari decît cuantila empirică

SFM_ch3_fit_returns

Compararea celor trei modele

	AIC Normală	AIC Student-t	AIC stabilă	$\hat{\nu}$ (Student-t)
BET	23 407	20 996	21 088	2,43
S&P 500	21 650	19 702	19 794	2,67
DAX	23 901	22 595	22 697	3,09
Bitcoin	23 391	22 056	22 159	2,23

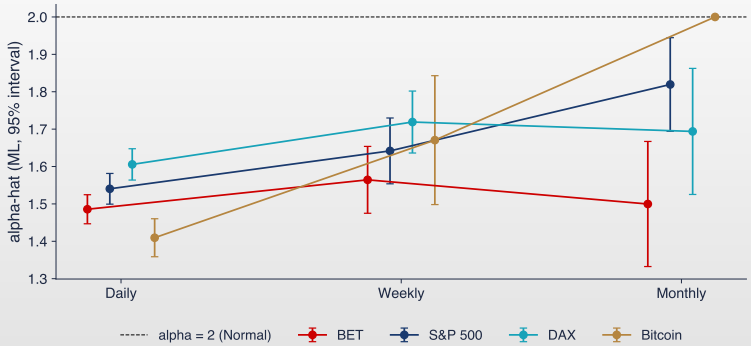
- AIC (Akaike information criterion, criteriul informațional Akaike) $= 2k - 2\ell(\hat{\theta})$, cu k numărul de parametri; se preferă valoarea mai mică
- Ambele modele cu cozi groase sînt preferate distribuției Normale: Student-t cu 1 306 (DAX) pînă la 2 411 (BET) puncte AIC, cea stabilă cu 1 204 pînă la 2 319
- Student-t este preferată pentru fiecare serie, deși are mai puțini parametri; la S&P 500, diferența este de 92 de puncte
- $\hat{\nu}$ între 2 și 3,1: varianță finită, dar aproape niciun moment finit de ordin superior

SFM_ch3_fit_returns

Recapitulare: estimarea pe randamente reale

- Toate cele patru serii: $\hat{\alpha}$ între 1,410 și 1,606, departe de 2
- Legea stabilă descrie corpul distribuției mult mai bine decît distribuția Normală
- Supraestimează cozile îndepărtate: prea multe pierderi extreme, VaR 0,1% prea mare
- După AIC, distribuția Student-t este preferată

Testul 1: stabilitatea lui α la agregarea randamentelor



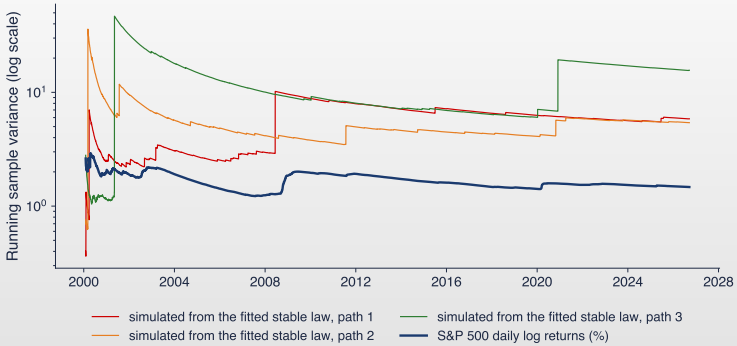
- Dacă randamentele zilnice ar fi i.i.d. stabile, sumele săptămînale și lunare ar avea **același** α (stabilitatea)
- Estimări ML: S&P 500 1,54 $\rightarrow$ 1,64 $\rightarrow$ 1,82; Bitcoin 1,41 $\rightarrow$ 1,67 $\rightarrow$ 2,00 (la limita 2)

SFM_ch3_aggregation

Interpretarea testului de agregare

- $\hat{\alpha}$ crește cu orizontul pentru S&P 500, DAX și Bitcoin
  - DAX: 1,61 $\rightarrow$ 1,72 $\rightarrow$ 1,69; pentru S&P 500, intervalele de încredere ale orizontului zilnic și lunar nu se suprapun
- BET: 1,49 $\rightarrow$ 1,56 $\rightarrow$ 1,50, fără o creștere clară
  - eșantioanele lunare sînt scurte (321 de luni): intervale largi
- Același tipar în studiile clasice: Officer (1972), Akgiray & Booth (1988)
- Un α crescător este exact ceea ce prevede GCLT pentru sume de randamente cu variantă finită care converg lent la distribuția Normală

Testul 2: convergența variației de selecție



- S&P 500 (albastru): după salturile din 2008 și 2020, varianța cumulată se stabilizează în jur de 1,47
- Traiectorii de aceeași lungime simulate din legea stabilă estimată: variațe finale între 5,4 și 15,6, mult peste date

SFM_ch3_aggregation

Testul 3: grosimea cozii îndepărtate

- α stabil este determinat de întreaga distribuție, mai ales de corp
  - tail index-ul cozii îndepărtate se estimează separat, cu estimatorul Hill Hill (1975) (Capitolul 5)
- Pentru indicii bursieri, coada îndepărtată scade aproximativ ca x^{-3}, „legea cubică inversă" Gopikrishnan et al. (1999)
  - un tail index în jur de 3 înseamnă varianță finită, iar nicio lege stabilă nu îl are
- Numărul pierderilor observate confirmă: legile stabile estimate prevăd mult mai multe pierderi peste 10% decît s-au observat
- Lau, Lau & Wingender (1990): alte dovezi împotriva modelului stabil, din comportamentul momentelor de selecție

Originea aspectului stabil al randamentelor zilnice

- **Volatility clustering** (Capitolele 2 și 9): perioadele calme și cele agitate alternează
  - un amestec de legi Normale cu varianță variabilă are cozi groase și varianță finită Blattberg & Gonedes (1974)
  - dacă pe datele generate de amestec se estimează o singură lege stabilă, se obține $\hat{\alpha} < 2$
- **Legi stabile trunchiate și temperate**: stabile la scări moderate, cu cozi mai subțiri în zona extremă
  - Mantegna & Stanley (1995) au estimat un zbor Lévy trunchiat (truncated Lévy flight) pe S&P 500
  - Grabchak & Samorodnitsky (2010): astfel de legi explică de ce randamentele par stabile pe orizonturi scurte și Normale pe orizonturi lungi

Concluzia criticii

- **Mandelbrot a avut dreptate** în privința faptelor
  - randamentele zilnice au cozi groase; distribuția Normală descrie foarte slab datele
- **Varianța infinită nu este susținută**
  - $\hat{\alpha}$ crește prin agregare; varianța de selecție se stabilizează; coada îndepărtată este mai subțire decît orice coadă stabilă
- Unde rămîn utile legile stabile
  - un etalon pentru cozi groase; simulare; ideea de scalare; date cu varianță cu adevărat infinită (unele daune de asigurări, unele tokenuri cripto)
  - GCLT: o reamintire că regulile cu $\sqrt{n}$ cer varianță finită
- Urmează: Capitolul 5 estimează direct tail index-ul cu teoria valorilor extreme

Recapitulare: critica

- Stabilitatea implică același α la orice orizont: datele arată un α crescător
- Varianța de selecție a randamentelor reale se stabilizează; cea a eșantioanelor stabile, nu
- Volatility clustering și cozile temperate explică valoarea aparentă $\alpha < 2$
- Cozi groase: da; varianță infinită: nu

O întrebare de cercetare deschisă

- **Au devenit mai subțiri cozile Bitcoin pe măsură ce piața s-a maturizat?**
  - mai mulți participanți, contracte futures (din 2017) și ETF-uri spot (exchange-traded funds, fonduri tranzacționate la bursă, din 2024)
  - dacă cozile au devenit mai subțiri, modelele de risc estimate pe date vechi supraestimează riscul de azi
- De ce rămîne deschisă: $\hat{\alpha}$ variază odată cu regimurile de volatilitate, iar eșantioanele anuale sînt scurte
- Eșantionul complet: $\hat{\alpha} = 1{,}410$ (SE 0,026), cel mai mic dintre cele patru serii
- Instrumentele AI pot accelera un astfel de studiu; nu înlocuiesc verificarea lui Wang et al. (2023)

Utilizări posibile ale instrumentelor AI

- **Literatura**: inventarierea lucrărilor despre estimarea cozilor activelor cripto și rezumarea metodelor lor
- **Cod**: o primă versiune a unui estimator McCulloch pe ferestre mobile, cu intervale bootstrap
- **Robustețe**: propunerea altor ferestre, ML în loc de cuantile, ν din Student-t în loc de α
- **Explicație**: o primă versiune a interpretării unui tabel de estimări anuale
- Exemplu de prompt
  - `Write a Python function that estimates the stable alpha of daily log returns on rolling 365-day windows with McCulloch (1986), and adds 95% bootstrap intervals.`

Verificări necesare

- Parametrizarea: S0 sau S1; scipy folosește implicit S1; poziția diferă cu $\beta\gamma \tan \frac{\pi\alpha}{2}$
- Unitățile: randamente în % sau în zecimale; γ și δ se schimbă, α și β nu
- Ferestrele suprapuse nu sînt independente: nu citiți estimările mobile ca teste separate
- Rezultatele numerice: recalculați o fereastră cu o a doua metodă (ML sau tabelele de cuantile)
- Referințele: fiecare lucrare citată trebuie să existe; verificați DOI-ul

Idee de proiect

- **Întrebarea**: este coada randamentelor Bitcoin mai subțire acum decît în 2014–2018?
  - date: prețurile de închidere zilnice ale Bitcoin din datele cursului (EODHD), 2014–2026
- Pași
  - estimați α prin McCulloch și prin ML pentru fiecare an calendaristic, cu intervale bootstrap
  - repetați pe randamente împărțite la o volatilitate mobilă: se menține tendința?
  - comparați cu $\hat{\nu}$ din Student-t pentru fiecare an
- Livrabile: un tabel, un grafic și un paragraf despre ce pot și ce nu pot arăta datele
- Declarați orice folosire a AI și listați erorile AI pe care le-ați corectat

Formule de reținut

Mărimea	Formula
Stabilitate	$aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} cX + d, \quad c^\alpha = a^\alpha + b^\alpha$
Suma a n copii	$X_1 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha} X + d_n$
Funcția caracteristică (S1)	$\exp\{-\gamma^\alpha \lvert t\rvert^\alpha [1 - i\beta \operatorname{sign}(t) \tan \frac{\pi\alpha}{2}] + i\delta_1 t\}$
S0 și S1	$\delta_0 = \delta_1 + \beta\gamma \tan \frac{\pi\alpha}{2}$
Cazul Normal	$S(2; \beta; \gamma; \delta) = N(\delta, 2\gamma^2)$
Cozi	$P(X > x) \sim \gamma^\alpha c_\alpha (1+\beta) x^{-\alpha}$
Momente	$E\lvert X\rvert^p < \infty \iff p < \alpha \quad (\alpha < 2)$
CMS ($\beta = 0$)	$\frac{\sin(\alpha V)}{(\cos V)^{1/\alpha}} \left(\frac{\cos((1-\alpha)V)}{W}\right)^{(1-\alpha)/\alpha}$
McCulloch	$\nu_\alpha = \frac{q_{0,95} - q_{0,05}}{q_{0,75} - q_{0,25}}, \quad \nu_\beta = \frac{q_{0,95} + q_{0,05} - 2q_{0,5}}{q_{0,95} - q_{0,05}}$

Autoevaluare

- **Întrebare**: randamentele zilnice sînt i.i.d. $S(1{,}5; 0; \gamma; 0)$; de cîte ori crește scala de la 1 zi la 20 de zile?
  - **Răspuns**: $20^{1/1{,}5} = 7{,}37$, adică de 1,65 ori mai mult decît factorul $\sqrt{20}$ al regulii rădăcinii pătrate a timpului
- **Întrebare**: o lege estimată are $\alpha = 1{,}2$; există media și varianța?
  - **Răspuns**: media există ($1 < 1{,}2$), varianța nu ($2 > 1{,}2$)
- **Întrebare**: scipy raportează $\delta = 0{,}05$ cu $\alpha = 1{,}7$, $\beta = -0{,}2$, $\gamma = 0{,}6$; cît este δ_0?
  - **Răspuns**: scipy folosește S1, deci $\delta_0 = 0{,}05 + (-0{,}2)(0{,}6)\tan(0{,}85\pi) = 0{,}05 + 0{,}061 = 0{,}111$
- Urmează: Capitolul 4, probabilități pentru finanțe

Bibliografie (1/2)

- Akgiray, V., Booth, G.G. (1988). The stable-law model of stock returns. *Journal of Business & Economic Statistics*, 6(1), 51–57.
- Blattberg, R.C., Gonedes, N.J. (1974). A comparison of the stable and Student distributions as statistical models for stock prices. *Journal of Business*, 47(2), 244–280.
- Borak, S., Härdle, W., Weron, R. (2005). Stable distributions. In Čížek, P., Härdle, W., Weron, R. (eds.), *Statistical Tools for Finance and Insurance*, 21–44. Springer.
- Borak, S., Misiorek, A., Weron, R. (2011). Models for heavy-tailed asset returns. In Čížek, P., Härdle, W.K., Weron, R. (eds.), *Statistical Tools for Finance and Insurance*, 2nd ed., 21–55. Springer.
- Chambers, J.M., Mallows, C.L., Stuck, B.W. (1976). A method for simulating stable random variables. *Journal of the American Statistical Association*, 71(354), 340–344.
- Cont, R. (2001). Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*, 1(2), 223–236.
- Fama, E.F. (1965). The behavior of stock-market prices. *Journal of Business*, 38(1), 34–105.
- Fama, E.F., Roll, R. (1968). Some properties of symmetric stable distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 63(323), 817–836.
- Fama, E.F., Roll, R. (1971). Parameter estimates for symmetric stable distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 66(334), 331–338.
- Franke, J., Härdle, W.K., Hafner, C.M. (2019). *Statistics of Financial Markets: An Introduction*, 5th ed. Springer.
- Gnedenko, B.V., Kolmogorov, A.N. (1954). *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*. Addison-Wesley.
- Gopikrishnan, P., Plerou, V., Amaral, L.A.N., Meyer, M., Stanley, H.E. (1999). Scaling of the distribution of fluctuations of financial market indices. *Physical Review E*, 60(5), 5305–5316.
- Grabchak, M., Samorodnitsky, G. (2010). Do financial returns have finite or infinite variance? A paradox and an explanation. *Quantitative Finance*, 10(8), 883–893.
- Hill, B.M. (1975). A simple general approach to inference about the tail of a distribution. *Annals of Statistics*, 3(5), 1163–1174.
- Koutrouvelis, I.A. (1980). Regression-type estimation of the parameters of stable laws. *Journal of the American Statistical Association*, 75(372), 918–928.

Bibliografie (2/2)

- Lau, A.H.-L., Lau, H.-S., Wingender, J.R. (1990). The distribution of stock returns: new evidence against the stable model. *Journal of Business & Economic Statistics*, 8(2), 217–223.
- Mandelbrot, B. (1963). The variation of certain speculative prices. *Journal of Business*, 36(4), 394–419.
- Mantegna, R.N., Stanley, H.E. (1995). Scaling behaviour in the dynamics of an economic index. *Nature*, 376(6535), 46–49.
- McCulloch, J.H. (1986). Simple consistent estimators of stable distribution parameters. *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, 15(4), 1109–1136.
- Mittnik, S., Doganoglu, T., Chenyao, D. (1999). Computing the probability density function of the stable Paretian distribution. *Mathematical and Computer Modelling*, 29(10–12), 235–240.
- Mittnik, S., Rachev, S.T., Doganoglu, T., Chenyao, D. (1999). Maximum likelihood estimation of stable Paretian models. *Mathematical and Computer Modelling*, 29(10–12), 275–293.
- Nolan, J.P. (1997). Numerical calculation of stable densities and distribution functions. *Communications in Statistics. Stochastic Models*, 13(4), 759–774.
- Nolan, J.P. (2001). Maximum likelihood estimation and diagnostics for stable distributions. In Barndorff-Nielsen, O.E., Mikosch, T., Resnick, S.I. (eds.), *Lévy Processes*, 379–400. Birkhäuser.
- Nolan, J.P. (2020). *Univariate Stable Distributions: Models for Heavy Tailed Data*. Springer.
- Officer, R.R. (1972). The distribution of stock returns. *Journal of the American Statistical Association*, 67(340), 807–812.
- Pele, D.T. (2014). A SAS approach for estimating the parameters of an alpha-stable distribution. *Procedia Economics and Finance*, 10, 68–77.
- Rachev, S.T., Mittnik, S. (2000). *Stable Paretian Models in Finance*. Wiley.
- Samorodnitsky, G., Taqqu, M.S. (1994). *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance*. Chapman & Hall.
- Wang, H., Fu, T., Du, Y., Gao, W., et al. (2023). Scientific discovery in the age of artificial intelligence. *Nature*, 620, 47–60.
- Weron, R. (1996). On the Chambers–Mallows–Stuck method for simulating skewed stable random variables. *Statistics & Probability Letters*, 28(2), 165–171.