








Statistica piețelor financiare

Capitolul 4: Probabilitate



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București
IDA Institute Digital Assets
Blockchain Research Center
AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance
Academia Română, Institutul de Prognoză Economică
MSCA Digital Finance

Acronime folosite în acest material

- **AI**: Artificial Intelligence (inteligență artificială)
- **AR**: AutoRegressive (model) — model autoregresiv
- **ARCH**: AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity (heteroscedasticitate condiționată autoregresivă)
- **BET**: Bucharest Exchange Trading (index) — indicele de referință al Bursei de Valori București
- **CDF**: Cumulative Distribution Function (funcția de repartiție)
- **CLT**: Central Limit Theorem (teorema limită centrală)
- **CRR**: Cox–Ross–Rubinstein (binomial model) — modelul binomial Cox–Ross–Rubinstein
- **GARCH**: Generalised AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity (heteroscedasticitate condiționată autoregresivă generalizată)
- **GBM**: Geometric Brownian Motion (mișcarea browniană geometrică)
- **IBM**: International Business Machines (company) — compania International Business Machines
- **LCG**: Linear Congruential Generator (generator congruențial liniar)
- **LLN**: Law of Large Numbers (legea numerelor mari)
- **PCG64**: Permuted Congruential Generator, 64-bit (NumPy default) — generatorul congruențial permutat pe 64 de biți (implicit în NumPy)
- **PMF**: Probability Mass Function (funcția de masă de probabilitate)
- **RANDU**: RANDU (IBM random number generator of the 1960s) — generatorul de numere aleatoare RANDU al IBM, anii 1960
- **SFE**: Statistics of Financial Markets, Exercises (Quantlet collection of the textbook) — colecția de Quantlet-uri a manualului Statistics of Financial Markets

Întrebarea de azi, traseul și rezultatele învățării

- **Întrebarea**: de ce instrumente de probabilitate avem nevoie pentru a descrie randamentele și pentru a simula prețuri?
  - toate capitolele următoare (cozi, volatilitate, VaR, eficiență) se sprijină pe ele
- **Traseul și rezultatele învățării**: la finalul capitolului veți putea
  - calcula medii, variațe, covariațe și corelații, precum și volatilitatea unui portofoliu
  - explica de ce randamente necorelate pot fi totuși dependente și măsura această dependență
  - folosi media condiționată și varianța condiționată, elementele de bază ale modelelor GARCH
  - genera numere aleatoare prin metoda transformării inverse și estima o probabilitate prin Monte Carlo, cu eroarea ei standard
  - defini și simula modelul binomial, mersul aleator, martingalul, zgomotul alb, AR(1), procesul Wiener și GBM
- Date reale, 2000–2026: S&P 500, DAX, BET și Bitcoin (din 2014)

Bibliografie și instrumente

- Manual: Franke, Härdle & Hafner (2019), *Statistics of Financial Markets*, ed. a 5-a, cap. 3 (secț. 3.1–3.5) și cap. 4 (procese stochastice în timp discret)
  - exerciții rezolvate: Borak, Härdle & López-Cabrera (2013), cap. 3–4
- Metode Monte Carlo în finanțe: Glasserman (2003)
- Quantlet-urile Python ale capitolului: Quantlets/Ch_04
  - portate din Quantlet-urile SFE ale manualului (SFErandu, SFErangen1, SFErangen2, SFEBinomp, SFEWienerProcess, SFEsimGBM)
  - fiecare grafic din aceste slide-uri are legătură către Quantlet-ul care îl desenează
- Notebook-ul cursului: deschideți în Google Colab
- Curs video: Statistics of Financial Markets

1654: problema punctelor

- Doi jucători opresc un joc echitabil înainte de final: cum se împarte miza?
- Blaise Pascal și Pierre de Fermat au rezolvat-o prin scrisori (1654): împărțim după probabilitatea de a câștiga, nu după scor
- Exemplu: lui A îi mai trebuie 1 victorie, lui B 2; cel mult încă două runde
  - B câștigă doar dacă câștigă ambele runde: probabilitatea 1/4
  - A trebuie să primească 75% din miză: câștigul lui **așteptat**
- Aceeași idee stă azi la baza evaluării derivatelor: prețul corect este o plată așteptată

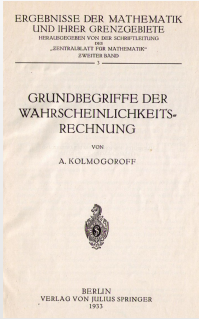


Blaise Pascal (1623–1662)

Portret: autor necunoscut, după François II Quesnel (c. 1690); domeniu public; Wikimedia Commons

Axiomele lui Kolmogorov (1933)

- Un **spațiu de probabilitate** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ Kolmogoroff (1933)
  - Ω: toate rezultatele posibile (toate traiectoriile posibile ale pieței de mîine)
  - $\mathcal{F}$: evenimentele cărora le putem atribui o probabilitate (o σ-algebră)
  - P: o funcție de la evenimente la $[0, 1]$
- Axiomele, pentru orice eveniment $A \in \mathcal{F}$
  - $P(A) \geq 0$: nicio probabilitate nu este negativă
  - $P(\Omega) = 1$: unul dintre rezultate are loc sigur
  - $P(\cup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$ pentru $A_1, A_2, \ldots$ disjuncte (oricare două nu pot avea loc simultan): probabilitatea ca unul dintre ele să aibă loc este suma probabilităților
- Tot restul (media, independența, procese) se construiește pe aceste trei reguli

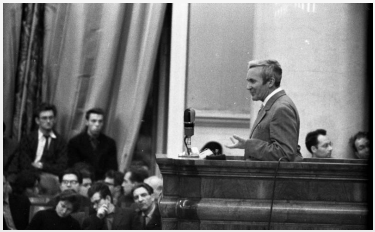


Pagina de titlu a lucrării *Grundbegriffe*, Springer 1933

Foto: KurtSchwitters (2012); CC BY-SA 3.0; Wikimedia Commons

Andrei Kolmogorov

- Andrei Nikolaevici Kolmogorov (1903–1987), Universitatea de Stat din Moscova
- A făcut din probabilitate o ramură a teoriei măsurii: evenimentele sînt mulțimi, probabilitatea este o măsură
- Alte contribuții: media condiționată în forma ei modernă, procese Markov, turbulență, complexitate
- Testul Kolmogorov–Smirnov (Capitolul 6) îi poartă numele



Kolmogorov la un curs la Moscova, 1963–1964

Foto: Vsevolod Tarasevich (1963–1964); CC BY 4.0; Wikimedia Commons

Evenimente, probabilitate condiționată, independență

- **Probabilitatea condiționată**: $P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B)$, pentru $P(B) > 0$
  - A, B: două evenimente; $A \cap B$: au loc amîndouă
  - în cuvinte: dintre cazurile în care are loc B, proporția celor în care are loc și A
- **Regula lui Bayes**: $P(B \mid A) = P(A \mid B)P(B)/P(A)$
  - $P(B)$: probabilitatea lui B înainte de a afla A; $P(B \mid A)$: probabilitatea actualizată după ce observăm A
  - inversează sensul condiționării: de la „semnal dată fiind criza" la „criză dat fiind semnalul"
- Evenimente **independente**: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, adică $P(A \mid B) = P(A)$
  - faptul că B a avut loc nu schimbă probabilitatea lui A

Exemplu: zile de scădere consecutive

- S&P 500, 2000–2026: $P(\text{zi de scădere}) = 46{,}3\%$
  - după o zi de scădere: $P(\text{scădere} \mid \text{scădere ieri}) = 43{,}4\%$
  - două zile de scădere la rînd: 20,1% în date
  - în ipoteza de independență: $P(\text{scădere})^2 = 21{,}4\%$, apropiat de date
- BET: 50,0% după o zi de scădere, față de 42,6% după o zi de creștere
  - semnul randamentului persistă de la o zi la alta
  - o consecință a lichidității reduse: prețurile se ajustează la știri în mai multe zile

Recapitulare: originile teoriei probabilităților

- Spațiul de probabilitate $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ și trei axiome
- Valoare corectă = valoare așteptată: ideea lui Pascal și Fermat
- Probabilitatea condiționată măsoară cum schimbă informația șansele

Variabile aleatoare

- O **variabilă aleatoare** $X : \Omega \to \mathbb{R}$ asociază un număr fiecărui rezultat
  - randamentul logaritmic de mîine, numărul zilelor de creștere dintr-o săptămînă, pierderea unui portofoliu
- **Discretă**: un număr finit sau numărabil de valori x_i
  - **PMF** (probability mass function, funcția de masă de probabilitate): $p(x_i) = P(X = x_i)$, cu $\sum_i p(x_i) = 1$
  - $p(x_i)$: probabilitatea valorii x_i; probabilitățile tuturor valorilor însumează 1
- **Continuă**: $P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$
  - probabilitatea unui interval $(a, b]$ este aria de sub f între a și b
  - f este **PDF** (probability density function, densitatea de probabilitate): $f \geq 0$, iar aria totală $\int f = 1$
  - un singur punct nu are arie: $P(X = x) = 0$ pentru orice x
- Manual: Franke, Härdle & Hafner (2019), secț. 3.1

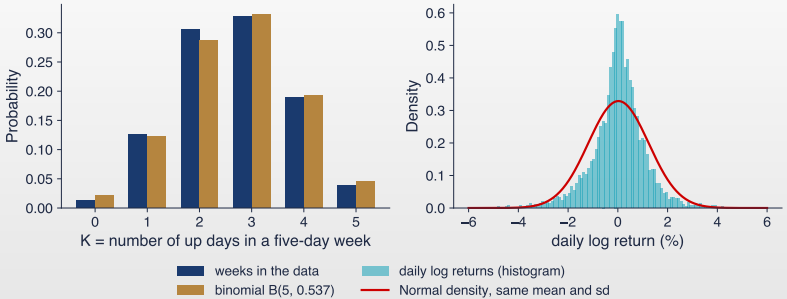
Funcția de repartiție și funcția cuantilă

- **CDF** (cumulative distribution function, funcția de repartiție): $F(x) = P(X \leq x)$
  - probabilitatea ca X să nu depășească pragul x
  - nedescrescătoare, continuă la dreapta, de la $F(-\infty) = 0$ la $F(\infty) = 1$
  - pentru X continuă, densitatea este derivata ei: $f = F'$
- **Cuantila** de ordin α: $q_\alpha = F^{-1}(\alpha) = \inf\{x : F(x) \geq \alpha\}$
  - $\alpha \in (0, 1)$: o probabilitate; q_α este cel mai mic x pentru care $P(X \leq x) \geq \alpha$
  - F^{-1}: funcția cuantilă, inversa funcției de repartiție; inf: cea mai mică valoare a mulțimii
  - mediana $= q_{0,5}$; cuantila de 1% este randamentul depășit în 99% din zile

VaR și funcția de repartiție empirică

- **VaR** (Value at Risk, valoarea expusă la risc) 1%: $\text{VaR}_{1\%} = -q_{0,01}$
  - $q_{0,01}$: cuantila de 1% a randamentelor, un număr negativ
  - semnul minus o transformă în pierdere: pierderea depășită cu probabilitatea 1%
  - estimarea și backtesting-ul: Capitolul 10
- **CDF empirică** a unui eșantion: $\hat{F}(x) = \frac{1}{n}\#\{t : r_t \leq x\}$
  - $r_1, \ldots, r_n$: randamentele observate; n: volumul eșantionului
  - $\#\{\cdot\}$: numărul de zile din mulțime; $\hat{F}(x)$ este proporția zilelor cu randamentul cel mult x
  - notația $\hat{}$ indică o estimare calculată din date

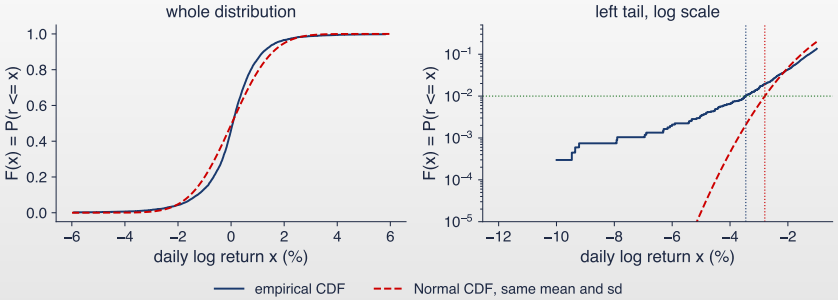
O variabilă aleatoare discretă și una continuă



- Stînga: K = numărul zilelor de creștere dintr-o săptămînă completă a S&P 500 (1 144 de săptămîni)
  - comparat cu $B(5, p)$, distribuția binomială: 5 zile, fiecare de creștere cu probabilitatea $p = 0{,}537$
  - media 2,67 față de 2,69; varianța 1,16 față de 1,24
- Dreapta: randamentele logaritmice zilnice, o variabilă aleatoare continuă; histograma estimează PDF
- Distribuția binomială se potrivește bine lui K; densitatea distribuției Normale nu surprinde nici vîrful, nici cozile randamentelor (Capitolul 2)

SFM_ch4_random_variables

CDF empirică și cuantila de 1% a S&P 500



- $n = 6\,714$ zile; mediana 0,063%; în $\hat{F}(0) = 46{,}3\%$ din zile randamentul nu a fost pozitiv
- VaR 1%: empiric 3,45%, în distribuția Normală 2,80%; $P(r < -3\%)$: 1,55% față de 0,63%
- $P(r < -5\%)$: 0,34% în date, de 199 de ori mai mult decît în distribuția Normală ($1{,}7 \times 10^{-3}\%$)

SFM_ch4_random_variables

Recapitulare: variabile aleatoare

- PMF pentru variabile discrete, PDF pentru cele continue; CDF este definită pentru ambele
- Cuantilele inversează CDF; VaR 1% este minus cuantila de 1%
- Cozile CDF empirice sînt mult mai groase decît cele ale distribuției Normale

Media

- **Media** (valoarea așteptată): $E[X] = \sum_i x_i p(x_i)$ sau $E[X] = \int x f(x)\, dx$
  - x_i, $p(x_i)$: valorile și probabilitățile lor; f: densitatea
  - centrul de greutate al distribuției; există doar dacă $E|X| < \infty$ (nu și pentru Cauchy, Capitolul 3)
- A unei funcții: $E[g(X)] = \int g(x) f(x)\, dx$, fără a afla distribuția lui $g(X)$
- **Liniaritate**: $E[aX + bY + c] = aE[X] + bE[Y] + c$, întotdeauna (fără independență)
  - a, b, c: constante; X, Y: oricare două variabile aleatoare
  - randamentul așteptat al unui portofoliu este media ponderată a randamentelor așteptate
- În general, $E[g(X)] \neq g(E[X])$
  - Jensen: pentru g convexă, $E[g(X)] \geq g(E[X])$; de exemplu, $E[e^X] > e^{E[X]}$
  - sursa volatility drag din Capitolul 1

Varianța și momentele

- **Varianța**: $\text{Var}(X) = E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - \mu^2$
  - $\mu = E[X]$; varianța este distanța pătratică medie față de medie
  - abaterea standard $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$, în unitățile lui X; pentru randamente, este volatilitatea
- $\text{Var}(aX+b) = a^2\,\text{Var}(X)$
  - adăugarea unei constante b nu schimbă riscul; înmulțirea cu a înmulțește varianța cu a^2
- Momentele: $E[X^k]$, pentru $k = 1, 2, \ldots$
  - asimetria $E[(X-\mu)^3]/\sigma^3$: lipsa de simetrie a distribuției (0 pentru distribuția Normală)
  - boltirea $E[(X-\mu)^4]/\sigma^4$: egală cu 3 pentru distribuția Normală
  - excesul de boltire = boltirea -3; pozitiv pentru cozi groase (Capitolul 2)

Exemplu lucrat: media și volatilitatea anuale

- S&P 500, randamentele logaritmice zilnice r_t
  - media zilnică 0,0247%, abaterea standard zilnică $\sigma = 1{,}213\%$
  - $A = 252$: numărul de zile de tranzacționare pe an
- Presupunem randamente zilnice i.i.d. (independente și identic distribuite)
  - randamentul logaritmic anual este suma celor A randamente zilnice: $\sum_{t=1}^{A} r_t$
- Media: $E[\sum r_t] = A \times 0{,}0247 = 6{,}2\%$ pe an
  - din liniaritatea mediei
- Varianța: $\mathrm{Var}(\sum r_t) = A\sigma^2$, pentru că toate covariațele sînt zero
  - volatilitatea anuală $\sigma\sqrt{A} = 1{,}213\sqrt{252} = 19{,}3\%$
  - regula rădăcinii pătrate a timpului: pe h perioade, volatilitatea crește cu $\sqrt{h}$

Frecvența zilelor de 4 sigma: marginea lui Cebîșev

- **Inegalitatea lui Cebîșev**: pentru orice X cu varianță finită, $P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq 1/k^2$
  - μ, σ: media și abaterea standard; $k > 1$: distanța față de medie, în abateri standard
  - folosește doar media și varianța, deci este valabilă pentru orice distribuție
- $k = 4$, S&P 500, 2000–2026
  - marginea Cebîșev: cel mult 6,25% din zile
  - distribuția Normală: 0,0063%
  - în date: 46 de zile, 0,69%
- Frecvența observată se află între cele două valori
  - distribuția Normală este mult prea optimistă; cazul cel mai nefavorabil al lui Cebîșev este prea pesimist

Recapitulare: media și varianța

- Media este liniară; varianța se scalează cu pătratul
- Pentru randamente i.i.d., media crește cu h, iar volatilitatea cu $\sqrt{h}$
- Cebîșev mărginește probabilitățile din cozi pentru orice distribuție

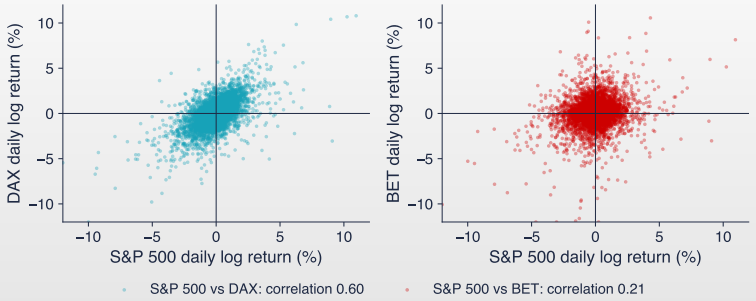
Distribuția comună și distribuțiile marginale

- **CDF comună**: $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$
  - probabilitatea ca ambele variabile să fie simultan sub pragurile lor
  - pentru două randamente: ambele piețe scad sub nivelurile date în aceeași zi
- CDF **marginală**: $F_X(x) = F(x, \infty)$
  - distribuția lui X singură, oricare ar fi valoarea lui Y
- **PDF comună** $f(x, y)$: $P((X, Y) \in B) = \iint_B f(x, y)\, dx\, dy$
  - B: o regiune din plan; probabilitatea este volumul de sub f deasupra lui B
  - densitatea marginală: $f_X(x) = \int f(x, y)\, dy$, prin integrare după y

Covarianța, corelația și varianța unei sume

- **Covarianța**: $\mathrm{Cov}(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = E[XY] - \mu_X \mu_Y$
  - μ_X, μ_Y: mediile; pozitivă cînd X și Y tind să fie simultan peste mediile lor
- **Corelația**: $\rho = \mathrm{Cov}(X, Y)/(\sigma_X \sigma_Y) \in [-1, 1]$
  - covarianța împărțită la cele două abateri standard: un număr fără unitate de măsură
  - măsoară doar dependența **liniară**; $|\rho| = 1$ dacă și numai dacă $Y = a + bX$
- **Varianța unei sume**: $\mathrm{Var}(aX + bY) = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 + 2ab\,\mathrm{Cov}(X, Y)$
  - a, b: constante (într-un portofoliu, ponderile); termenul de covarianță poate crește sau reduce riscul
  - mai multe active: $\sigma_p^2 = w^\top \Sigma w$, cu w vectorul ponderilor și Σ matricea de covarianță
  - σ_p^2: varianța portofoliului; $w^\top$: vectorul transpus

Distribuții comune ale randamentelor zilnice



- Doar zilele de tranzacționare comune: întîi se unesc prețurile, apoi se calculează randamentele ($n = 6\,605$ zile pentru S&P 500 și DAX)
- S&P 500 și DAX: $\rho = 0{,}60$; S&P 500 și BET: $\rho = 0{,}21$
- Norul este eliptic în centru, dar zilele extreme apar simultan: crizele lovesc toate piețele deodată

SFM_ch4_dependence

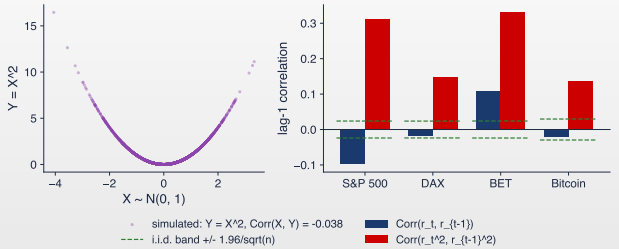
Exemplu lucrat: un portofoliu 50/50 din S&P 500 și DAX

- Abaterile standard zilnice: $\sigma_1 = 1{,}22\%$ (S&P 500), $\sigma_2 = 1{,}43\%$ (DAX)
  - covariația 1,045; corelația 0,60
  - ponderile $a = b = 0{,}5$, deci $a^2 = b^2 = 0{,}25$ și $2ab = 0{,}5$
- $\sigma_p^2 = 0{,}25\sigma_1^2 + 0{,}25\sigma_2^2 + 2 \times 0{,}25\,\mathrm{Cov} = 0{,}883 + 0{,}522 = 1{,}405$
  - $\sigma_p = 1{,}19\%$, sub volatilitatea medie 1,32%: efectul diversificării
- S&P 500 și BET, corelație mai mică: $\sigma_p = 1{,}04\%$ față de media 1,33%
  - cu cît corelația este mai mică, cu atît reducerea riscului este mai mare
- Diversificarea funcționează doar prin $\rho < 1$
  - într-un crah corelațiile cresc, exact cînd diversificarea ar fi necesară

Independență și necorelare

- X și Y sînt **independente** dacă $F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$ pentru orice x, y
  - CDF comună este produsul CDF marginale
  - atunci $E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]E[h(Y)]$ pentru **toate** funcțiile g, h (de exemplu, pătrate sau valori absolute)
- Independente $\Rightarrow$ necorelate ($g, h =$ identitatea); reciproca este falsă
- Exemplu: $X \sim N(0,1)$, $Y = X^2$
  - $\mathrm{Cov}(X, X^2) = E[X^3] = 0$: necorelate
  - dar Y este o funcție de X: complet dependente
- Excepție: pentru variabile cu distribuție Normală comună (bivariată), necorelate $\Leftrightarrow$ independente

Autocorelația randamentelor și a pătratelor randamentelor



- Stînga: $Y = X^2$ simulat, corelația de selecție $-0{,}038$, deși Y este determinat de X
- Dreapta: Corr(r_t, r_{t-1}) este mică: S&P 500 $-0{,}099$, DAX $-0{,}017$, Bitcoin $-0{,}022$
  - Corr(r_t^2, r_{t-1}^2) iese mult din bandă: 0,31, 0,15, 0,14; BET 0,33
  - banda $\pm 1{,}96/\sqrt{n}$: valorile compatibile cu o corelație nulă, la pragul de 5%
  - valoarea negativă pentru S&P 500 provine mai ales din zilele de criză
- BET: Corr(r_t, r_{t-1}) $= 0{,}109$, un efect al lichidității reduse

SFM_ch4_dependence

Recapitulare: distribuții comune

- Covarianța intră în varianța oricărui portofoliu
- Independența implică necorelarea, nu invers
- Randamentele: aproape necorelate, dar pătratele lor sînt corelate, deci nu sînt independente

Media condiționată

- Densitatea condiționată: $f(y \mid x) = f(x, y)/f_X(x)$
  - distribuția lui Y după ce aflăm că $X = x$: densitatea comună rescalată prin cea marginală
- **Media condiționată**: $E[Y \mid X = x] = \int y f(y \mid x)\, dy$
  - media lui Y calculată cu densitatea condiționată
  - $E[Y \mid X]$ este o variabilă aleatoare, o funcție de X
- Este cea mai bună prognoză a lui Y pe baza lui X: minimizează $E[(Y - g(X))^2]$ dintre toate funcțiile g
  - $E[(Y - g(X))^2]$: eroarea pătratică medie a prognozei $g(X)$
  - pentru randamente: $E[r_t \mid \mathcal{F}_{t-1}]$, prognoza dată fiind toată informația $\mathcal{F}_{t-1}$ pînă ieri
- **Proprietatea turnului** (legea mediilor iterate): $E\big[E[Y \mid X]\big] = E[Y]$
  - media prognozelor condiționate, pe toate valorile lui X, este media necondiționată

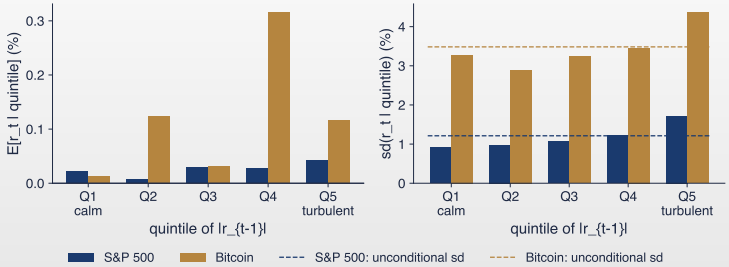
Varianța condiționată și legea variației totale

- **Varianța condiționată**: $\mathrm{Var}(Y \mid X) = E\left[(Y - E[Y \mid X])^2 \mid X\right]$
  - dispersia lui Y în jurul mediei condiționate, după ce X este cunoscut
- **Legea variației totale**: $\mathrm{Var}(Y) = E\left[\mathrm{Var}(Y \mid X)\right] + \mathrm{Var}\left(E[Y \mid X]\right)$
  - $E[\mathrm{Var}(Y \mid X)]$: varianța medie din interiorul grupurilor definite de X
  - $\mathrm{Var}(E[Y \mid X])$: cît de mult diferă mediile grupurilor între ele
  - riscul total = varianța din interiorul grupurilor + varianța dintre grupuri

Exemplu lucrat: două regimuri

- X = regimul pieței, $Y = r$ = randamentul zilnic (în %)
  - calm: probabilitatea 0,7, media 0,05%, abaterea standard 0,8%
  - agitat: probabilitatea 0,3, media $-0{,}10\%$, abaterea standard 2%
- Media (proprietatea turnului): $E[r] = 0{,}7 \times 0{,}05 + 0{,}3 \times (-0{,}10) = 0{,}005\%$
- Cele două componente ale variației
  - în interiorul regimurilor: $E[\mathrm{Var}(r \mid X)] = 0{,}7 \times 0{,}8^2 + 0{,}3 \times 2^2 = 1{,}648$
  - între regimuri: $\mathrm{Var}(E[r \mid X]) = 0{,}7(0{,}05 - E[r])^2 + 0{,}3(-0{,}10 - E[r])^2 = 0{,}0047$
- $\mathrm{Var}(r) = 1{,}653$, abaterea standard 1,286%
  - aproape tot riscul provine din diferența de variață dintre regimuri, nu din diferența de medie

Randamentul de azi dată fiind mișcarea de ieri



- Chintilele lui $|r_{t-1}|$: Q1 = cele mai calme 20% dintre zilele de ieri, Q5 = cele mai agitate 20%
- Media condiționată: între 0,006% și 0,042% pentru S&P 500, fără un tipar util
- Abaterea standard condiționată: S&P 500 de la 0,91% (Q1) la 1,71% (Q5), raportul Q5/Q1 1,88; Bitcoin, raportul 1,33
- Legea variației totale, S&P 500: 1,469 = 1,469 + 0,00013; componenta dintre grupuri reprezintă 0,01% din total

SFM_ch4_dependence

Varianța condiționată și modelele GARCH

- Scriem randamentul ca $r_t = \mu_t + \sigma_t z_t$, cu z_t i.i.d., media 0, varianța 1
  - $\mu_t = E[r_t \mid \mathcal{F}_{t-1}]$: media condiționată, aproape constantă
  - $\sigma_t^2 = \text{Var}(r_t \mid \mathcal{F}_{t-1})$: varianța condiționată, care se schimbă cu știrile
- ARCH (autoregressive conditional heteroskedasticity) Engle (1982): $\sigma_t^2 = \omega + \alpha r_{t-1}^2$
  - varianța de azi este un nivel de bază plus o parte din pătratul randamentului de ieri
  - $\omega > 0$: nivelul de bază; $\alpha \geq 0$: cît de mult crește varianța de azi după o mișcare mare ieri
- GARCH Bollerslev (1986): $\sigma_t^2 = \omega + \alpha r_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$ (Capitolul 9)
  - $\beta \geq 0$: persistența; un β mare menține mult timp o varianță ridicată
- Este exact tiparul din grafic: un $|r_{t-1}|$ mare crește abaterea standard condiționată de azi
- Distribuția necondiționată este un amestec de distribuții cu diferite σ_t
  - are cozi mai groase decît distribuția Normală, chiar dacă z_t are distribuție Normală

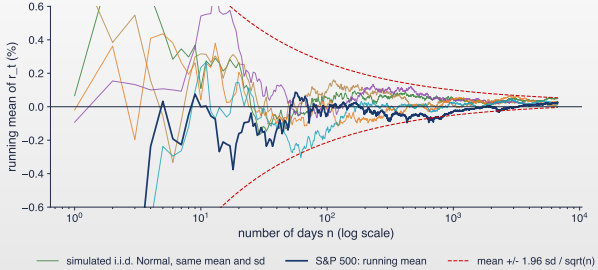
Recapitulare: condiționare

- $E[Y \mid X]$ este cea mai bună prognoză; proprietatea turnului o readuce, în medie, la $E[Y]$
- Randamente: media condiționată aproape constantă, varianța condiționată puternic variabilă în timp
- Modelele ARCH și GARCH descriu dinamica lui σ_t^2

Două teoreme limită

- **LLN** (law of large numbers, legea numerelor mari): pentru X_i i.i.d. cu $E|X| < \infty$, $\bar{X}_n \to \mu$ cînd $n \to \infty$
  - $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$: media de selecție; $\mu = E[X]$: media adevărată
  - motivul pentru care funcționează mediile, frecvențele și estimările Monte Carlo
- **CLT** (central limit theorem, teorema limită centrală): cu varianță finită, $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/\sigma \to N(0,1)$ (Capitolul 2)
  - media de selecție standardizată are, pentru n mare, aproximativ distribuția Normală standard
  - dă viteza de convergență: eroarea lui $\bar{X}_n$ este de circa $\sigma/\sqrt{n}$
  - varianță infinită: sumele converg, în schimb, către legi α-stabile (Capitolul 3)
- Ambele au nevoie de o formă de independență; randamentele dependente converg mai încet

LLN pentru randamentul mediu: convergență lentă



- S&P 500, 26,6 ani: media 0,0247% pe zi, eroarea standard $\sigma/\sqrt{n} = 0{,}0148\%$
  - t = media / eroarea standard = 1,67; $|t| > 1{,}96$ ar indica o medie semnificativ diferită de 0, la pragul de 5%
- Media anuală 6,2%, intervalul de încredere de 95%: $[-1{,}1\%; 13{,}5\%]$
  - nici 26 de ani de date nu ajung pentru a estima precis randamentul așteptat
  - pentru $t = 3$, la această medie și volatilitate, ar fi nevoie de circa 86 de ani de date

SFM_ch4_monte_carlo

Metoda Monte Carlo

- Estimăm $\theta = E[g(X)]$ prin $\hat{\theta}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(X_i)$, cu X_i simulate
  - θ: mărimea necunoscută; g: o funcție de variabila simulată; N: numărul de simulări
  - o probabilitate este o medie: $P(A) = E[1_A]$, cu $1_A = 1$ dacă A are loc și 0 altfel
  - LLN face ca $\hat{\theta}_N \to \theta$; CLT dă eroarea $\text{sd}(g(X))/\sqrt{N}$, unde sd este abaterea standard
- Ulam și von Neumann au numit metoda după cazinoul din Monaco (Los Alamos, anii 1940) Metropolis & Ulam (1949)
- În finanțe Glasserman (2003)
  - prețuri de opțiuni dependente de traiectorie, VaR-ul portofoliilor (Capitolul 10), scenarii de stres
  - orice medie fără formulă analitică
- Două ingrediente: numere aleatoare uniforme și o metodă de a le transforma în extrageri din orice distribuție

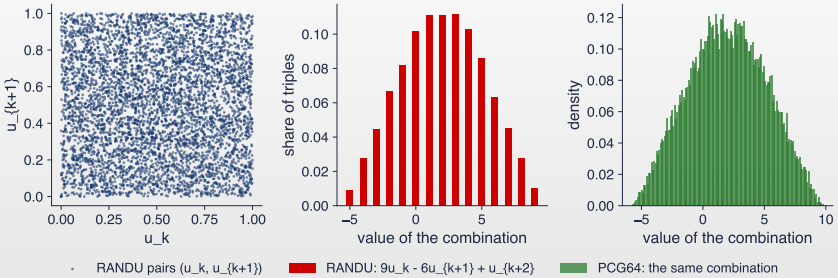
Numere pseudo-aleatoare: generatoare congruențiale liniare

- **LCG** (linear congruential generator, generator congruențial liniar): $x_{k+1} = (ax_k + c) \bmod M$, $u_k = x_k/M \in [0, 1)$
  - fiecare număr întreg x_{k+1} se calculează din precedentul, x_k
  - a: multiplicatorul; c: incrementul; M: modulul; $\bmod M$: restul împărțirii la M
  - u_k: numărul uniform din $[0, 1)$ obținut prin împărțirea la M
- Determinist: aceeași sămînță x_0 dă același șir
  - acest lucru face rezultatele reproductibile
  - **perioada**: numărul de valori după care șirul se repetă; cel mult M
- Generatoarele reale folosesc M uriaș; perioada trebuie să fie mult mai lungă decît orice simulare

Exemplu lucrat: un LCG cu $M = 16$

- SFErangen1: $a = 5$, $c = 1$, $M = 16$, $x_0 = 7$
  - primul pas: $x_1 = (5 \times 7 + 1) \bmod 16 = 36 \bmod 16 = 4$
  - șirul x: 7, 4, 5, 10, 3, 0, 1, 6, 15, 12, 13, 2, 11, 8, 9, 14, 7
- Perioada 16, maximul posibil, M
  - cu $a = 4$ șirul se blochează după doi pași (perioada 1)
- Nu ajunge ca distribuțiile marginale să fie uniforme
  - numerele consecutive trebuie să pară și independente: graficul următor

RANDU: numerele aleatoare cad mai ales în plane (SFErandu)



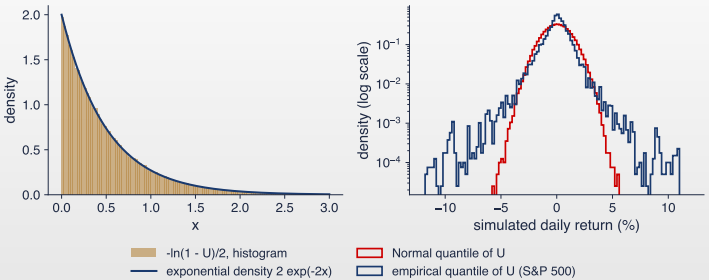
- RANDU, IBM, anii 1960: $x_{k+1} = 65539\, x_k \bmod 2^{31}$; perechile par uniforme (stînga), corelația 0,003
- Dar $9u_k - 6u_{k+1} + u_{k+2}$ ia doar 15 valori întregi, de la -5 la 9: toate tripletele stau pe 15 plane Marsaglia (1968)
- Generatoare moderne: Mersenne Twister Matsumoto & Nishimura (1998), PCG64 (implicit în NumPy, panoul din dreapta)

SFM_ch4_random_numbers

Metoda transformării inverse

- **Teoremă**: dacă $U \sim U(0,1)$ și F este o CDF, atunci $X = F^{-1}(U)$ are CDF F
  - $U(0,1)$: distribuția uniformă pe $[0,1]$, deci $P(U \leq u) = u$
  - în cuvinte: un număr uniform, interpretat ca probabilitate, este transformat în cuantila de acel ordin
  - demonstrație: $P(X \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x)$
- Distribuția exponențială cu rata $\lambda > 0$: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, deci $X = -\ln(1-U)/\lambda$
  - se obține rezolvînd $u = F(x)$ în raport cu x; media este $1/\lambda$
  - $\lambda = 2$, $u = 0{,}9$: $x = -\ln(0{,}1)/2 = 1{,}151$
- Distribuția Normală: $X = \mu + \sigma\,\Phi^{-1}(U)$
  - Φ^{-1}: funcția cuantilă a distribuției $N(0,1)$; μ, σ: media și abaterea standard dorite
- Pentru date reale: folosim funcția cuantilă empirică $\hat{F}^{-1}$
  - adică reeșantionăm zilele trecute: simularea istorică și bootstrap-ul

Transformarea inversă: extrageri exponențiale, Normale și istorice



- Stînga: 200 000 de extrageri $-\ln(1-U)/2$ urmează densitatea exponențială; media de selecție 0,500 (teoretic $1/\lambda = 0{,}5$)
- Dreapta: aceleași numere uniforme trecute prin funcția cuantilă a distribuției Normale și prin cea empirică a S&P 500
- Extrageri sub -5%: 0,0035% din cele Normale (7 extrageri; exact 0,0017%, diferența este zgomot de simulare) față de 0,34% din cele istorice (în date: 0,34%); cea mai mică extragere: $-5{,}7\%$ față de $-12{,}7\%$

SFM_ch4_random_numbers

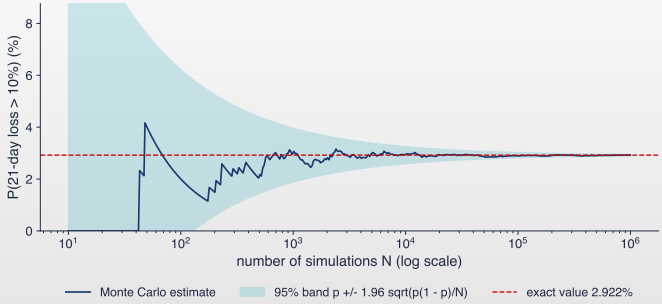
Exemplu lucrat: probabilitatea unei pierderi lunare prin Monte Carlo (1/2)

- Modelul: randamentele logaritmice zilnice ale S&P 500, i.i.d. $N(0{,}0247; 1{,}213^2)$, în %
  - $N(m, s^2)$: distribuția Normală cu media m și varianța s^2
- Evenimentul: randamentul logaritmic pe 21 de zile (o lună) este sub -10%
  - p: probabilitatea lui, mărimea căutată
- Exact: suma a 21 de randamente Normale i.i.d. este $N(0{,}519; 5{,}56^2)$
  - media $21 \times 0{,}0247$, abaterea standard $1{,}213\sqrt{21}$
  - standardizăm: $z = (-10 - 0{,}519)/5{,}56 = -1{,}892$
  - $p = \Phi(z) = 2{,}922\%$, cu Φ funcția de repartiție a distribuției $N(0, 1)$

Exemplu lucrat: probabilitatea unei pierderi lunare prin Monte Carlo (2/2)

- Monte Carlo: simulăm N luni; $\hat{p}_N$ = ponderea lunilor simulate sub -10%
  - eroarea standard $\sqrt{p(1-p)/N}$: distanța tipică dintre $\hat{p}_N$ și p
- Rezultate
  - $N = 1\,000$: 3,000% (eroarea standard 0,533%)
  - $N = 100\,000$: 2,901% (eroarea standard 0,053%)
  - o precizie de 10 ori mai mare cere de 100 de ori mai multe simulări
- Pentru o eroare relativă de 10%, la nivelul de încredere de 95%: $N \approx 1{,}96^2(1-p)/(0{,}1^2 p) = 12\,762$
  - se obține din $1{,}96 \times \sqrt{p(1-p)/N} = 0{,}1\,p$: semilățimea intervalului este 10% din p
  - un eveniment rar cere multe simulări

Viteza de convergență Monte Carlo: $1/\sqrt{N}$



- Pentru N mic estimarea fluctuează mult, apoi intră în banda de 95%, care se îngustează ca $1/\sqrt{N}$
- $N = 10^6$: 2,926% față de valoarea exactă 2,922%, eroarea standard 0,017%
- Un N mare reduce eroarea de simulare, nu și eroarea de model: Seminarul 4 (B3) repetă calculul cu zile reeșantionate

SFM_ch4_monte_carlo

Recapitulare: numere aleatoare și Monte Carlo

- Generatoarele pseudo-aleatoare sînt deterministe; verificați-le în mai multe dimensiuni
- $F^{-1}(U)$ transformă numerele uniforme în orice distribuție, inclusiv cea empirică
- Eroarea Monte Carlo $\propto 1/\sqrt{N}$; raportați-o întotdeauna

Procesul binomial

- În fiecare perioadă prețul se înmulțește cu u (creștere), cu probabilitatea p, sau cu $d < u$ (scădere), cu probabilitatea $1 - p$
  - u, d: factorii de creștere și de scădere (de exemplu, $u = 1{,}2$: $+20\%$); perioadele sînt independente
- După n pași, dintre care K creșteri: $S_n = S_0 u^K d^{n-K}$
  - S_0: prețul inițial; $K \sim B(n, p)$: numărul de creșteri are distribuție binomială
  - $\ln S_n = \ln S_0 + K \ln u + (n - K) \ln d$: un mers aleator în prețurile logaritmice (secțiunea 9)
- $E[S_n] = S_0 (pu + (1 - p)d)^n$, pentru că pașii sînt independenți
  - $pu + (1 - p)d$: factorul de creștere așteptat al unui pas
  - baza modelului binomial de evaluare a opțiunilor Cox, Ross & Rubinstein (1979); manual: Franke, Härdle & Hafner (2019), cap. 7

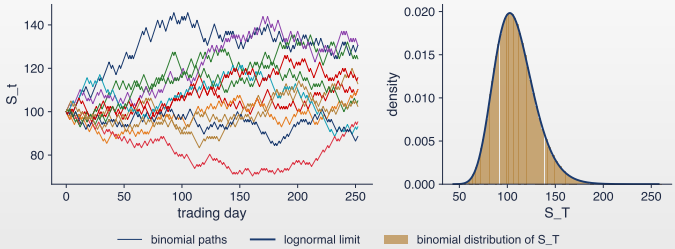
Exemplu lucrat: un arbore cu doi pași

- $S_0 = 100$, $u = 1{,}2$, $d = 0{,}8$, $p = 0{,}6$
- Valorile finale și probabilitățile lor
  - uu: 144 cu $p^2 = 0{,}36$; ud sau du: 96 cu $2p(1-p) = 0{,}48$; dd: 64 cu $(1-p)^2 = 0{,}16$
- $E[S_2] = 100 \times (0{,}6 \times 1{,}2 + 0{,}4 \times 0{,}8)^2 = 100 \times 1{,}04^2 = 108{,}16$
- $P(S_2 < 100) = 0{,}48 + 0{,}16 = 0{,}64$
  - o creștere și o scădere, în orice ordine, aduc o pierdere, pentru că $ud = 0{,}96 < 1$
- Cu $p^* = (1-d)/(u-d) = 0{,}50$ prețul este un joc echitabil: $E[S_{t+1} \mid S_t] = S_t$ (secțiunea 9)
  - p^* este soluția ecuației $p^* u + (1-p^*)d = 1$: factorul de creștere așteptat al unui pas este 1

Calibrarea arborelui pe o piață (Cox–Ross–Rubinstein)

- **CRR** (Cox–Ross–Rubinstein) cu pasul Δt: $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$, $d = 1/u$, $p = (e^{\mu\Delta t} - d)/(u - d)$
  - Δt: lungimea unui pas, în ani; μ: tendința anuală (drift); σ: volatilitatea anuală
  - $d = 1/u$: o creștere urmată de o scădere readuce prețul la valoarea inițială
  - alese astfel încît media și varianța fiecărui pas să corespundă unei piețe cu tendința μ și volatilitatea σ
- S&P 500, 2000–2026: $\sigma = 19{,}26\%$, $\mu = 8{,}08\%$ pe an; pași zilnici, $\Delta t = 1/252$
  - $u = 1{,}0122$, $d = 0{,}9879$, $p = 0{,}5102$
- Cînd $\Delta t \to 0$, $\ln S_T$ devine Normal (CLT aplicată lui K)
  - T: orizontul; arborele converge către GBM (secțiunea 10)

Traiectorii binomiale și limita lognormală (SFEBinomp)



- Stînga: 12 traiectorii pe un an, cu pași zilnici, $S_0 = 100$
- Dreapta: distribuția lui S_T după 252 de pași ($T = 1$ an); $E[S_T] = 108{,}42 = 100e^{\mu}$
  - cuantila de 5%: 78,5, față de 77,5 în limita lognormală
- $P(S_T < 100)$: 34,9% în modelul binomial ($P(S_T \leq 100) = 39{,}7\%$), față de 37,3% în cel lognormal
  - valoarea exactă $S_T = 100$ are în arbore probabilitatea 4,8%; valoarea lognormală se află între cele două

SFM_ch4_binomial

Recapitulare: modelul binomial

- Creștere sau scădere în fiecare perioadă: $S_n = S_0 u^K d^{n-K}$ cu K binomial
- CRR reproduce μ și σ; limita este lognormală
- Un p^* special transformă prețul într-un joc echitabil: cheia evaluării opțiunilor

Procese stochastice și informație

- Un **proces stochastic** $\{X_t\}$: o familie de variabile aleatoare indexate după timp
  - o realizare = o traiectorie; o serie de prețuri este o singură traiectorie a procesului
- $\mathcal{F}_t$: informația disponibilă la momentul t (prețuri trecute, știri)
  - crește cu t: nimic nu se uită (o **filtrare**)
- **Staționar (slab)**: $E[X_t]$ și $\text{Cov}(X_t, X_{t+h})$ nu depind de t
  - h: lagul dintre două momente; media și dependența arată la fel la orice moment
  - randamentele: aproximativ da; prețurile: nu
- Manual: Franke, Härdle & Hafner (2019), cap. 4 și secț. 11.3

Zgomotul alb și mersul aleator

- **Zgomot alb**: $E[\varepsilon_t] = 0$, $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$, $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$ pentru $t \neq s$
  - ε_t: șocul de la momentul t; medie zero, variață constantă σ^2, necorelat între momente diferite
  - zgomotul i.i.d. este o condiție mai tare: ε_t sînt independente, nu doar necorelate
- **Mers aleator**: $S_t = S_{t-1} + \mu + \varepsilon_t = S_0 + \mu t + \sum_{s=1}^{t} \varepsilon_s$
  - fiecare pas adaugă tendința (drift-ul) μ și un șoc nou; S_0: valoarea de pornire
  - $E[S_t] = S_0 + \mu t$; $\text{Var}(S_t) = t\sigma^2$ crește cu t: nestaționar
  - simulat cu $\sigma = 1$: varianța 10,1; 49,8; 100,9 la $t = 10, 50, 100$
- Dacă prețurile logaritmice urmează un mers aleator, randamentele sînt zgomot alb
  - ipoteza de referință din Capitolul 7 (piețe eficiente)

Martingale

- $\{X_t\}$ este un **martingal** dacă $E|X_t| < \infty$ și $E[X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = X_t$
  - $E|X_t| < \infty$: media există; $\mathcal{F}_t$: informația pînă la momentul t
  - un joc echitabil: cea mai bună prognoză pentru mîine este valoarea de azi
- O **diferență de martingal**: $\varepsilon_t = X_t - X_{t-1}$ cu $E[\varepsilon_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] = 0$
  - variația nu poate fi prevăzută pe baza trecutului
- Exemple
  - un mers aleator fără tendință; $S_t^2 - t\sigma^2$ pentru același mers; prețul binomial cu p^*
- Martingal $\neq$ creșteri i.i.d.: **varianța** condiționată se poate schimba, ca în GARCH
  - forma slabă a ipotezei pieței eficiente Fama (1970): randamentele în exces (peste dobînda fără risc) sînt o diferență de martingal

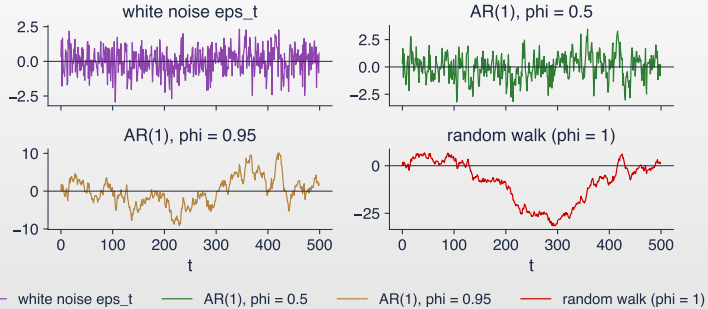
Procesul AR(1)

- **AR(1)** (autoregresiv de ordinul 1): $X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$, ε_t zgomot alb
  - valoarea de azi este o constantă, plus o fracțiune ϕ din valoarea de ieri, plus un șoc nou
  - c: constanta; ϕ: persistența; σ^2: varianța lui ε_t
  - $\phi = 0$: zgomot alb; $\phi = 1$, $c = \mu$: mers aleator
- Staționar dacă și numai dacă $|\phi| < 1$; atunci
  - media $c/(1-\phi)$, varianța $\sigma^2/(1-\phi^2)$
  - autocorelația la lagul h: $\rho(h) = \text{Corr}(X_t, X_{t-h}) = \phi^h$, cu scădere geometrică
  - timpul de înjumătățire al unui șoc: $\ln 0{,}5 / \ln \phi$ perioade, timpul după care jumătate din șoc a dispărut
- Utilizări
  - dobînzi și spread-uri (revenire la medie)
  - pătratele randamentelor se comportă ca un AR persistent, ceea ce duce la GARCH

Procesul AR(1): simulare

- Simulat cu $\sigma = 1$, $\phi = 0{,}5$
  - varianța 1,34 (teoretic $1/(1 - 0{,}5^2) = 1{,}33$)
  - $\rho(5) = 0{,}034$ (teoretic $0{,}5^5 = 0{,}031$); timpul de înjumătățire 1,0 perioade
- Simulat cu $\sigma = 1$, $\phi = 0{,}95$
  - varianța 10,20 (teoretic 10,26)
  - $\rho(5) = 0{,}772$; timpul de înjumătățire 13,5 perioade
- Cu cît ϕ este mai aproape de 1, cu atît varianța este mai mare și un șoc se stinge mai încet

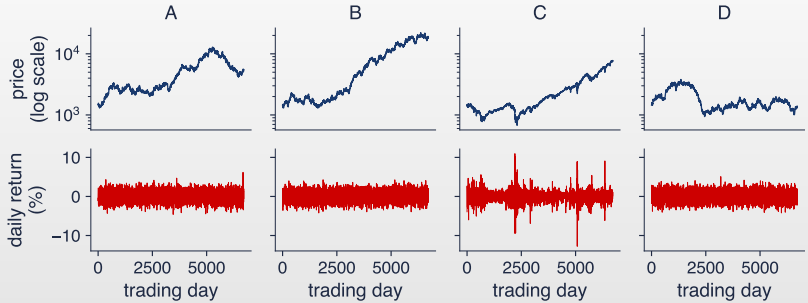
Zgomot alb, AR(1) și mers aleator cu aceleași șocuri



- Cu cît ϕ este mai mare, cu atît un șoc persistă mai mult: AR(1) cu $\phi = 0{,}95$ se abate mult timp de la 0, dar revine
- Mersul aleator nu revine în mod sistematic: șocurile sînt permanente, iar varianța lui crește cu t

SFM_ch4_processes

Întrebare pentru sală: care serie este cea reală?



- O coloană este S&P 500, 2000–2026; trei sînt traiectorii GBM (randamente Normale i.i.d.) cu aceeași medie și volatilitate
- **Ce credeți?** Care coloană este reală, doar după prețuri?
- **Ce credeți?** Care coloană este reală, după randamente?

SFM_ch4_processes

Răspuns: coloana C

- **Răspuns**: coloana C este S&P 500
- Prețurile: greu de spus; mersurile aleatoare cu tendință produc și ele avînturi și căderi lungi
  - de aceea Bachelier (1900) și Osborne (1959) au modelat prețurile ca mers aleator
- Randamentele: diferența este evidentă; seria reală are ani liniștiți și episoade violente grupate (2008, 2020)
  - exces de boltire 10,7 față de cel mult 0,02 în simulări; $\mathrm{Corr}(r_t^2, r_{t-1}^2) = 0{,}31$ față de cel mult 0,006
  - cea mai mare mișcare zilnică în valoare absolută 12,8% față de 6,2%
- Lecția: un model poate reproduce traiectoria prețului și totuși să greșească în privința riscului

Recapitulare: procese în timp discret

- Zgomot alb: necorelat; zgomot i.i.d.: independent; diferență de martingal: media imprevizibilă
- Mers aleator: șocuri permanente, varianța $t\sigma^2$; AR(1) cu $|\phi| < 1$: șocurile se sting în ritmul ϕ^h
- Prețurile arată ca mersuri aleatoare; randamentele nu sînt i.i.d.

Scurt istoric al mișcării browniene

- 1827: botanistul Robert Brown observă mișcarea neregulată a particulelor de polen în apă
- 1900: Louis Bachelier modelează piața obligațiunilor de la Paris cu aceeași mișcare, cu cinci ani înaintea lui Einstein Bachelier (1900)
- 1905: Albert Einstein o explică prin ciocniri moleculare Einstein (1905)
- 1923: Norbert Wiener construiește obiectul matematic riguros Wiener (1923)
- 1959: Osborne (1959) o aplică prețurilor logaritmice: mișcarea browniană geometrică



Robert Brown (1773–1858)

Foto: Maull & Polyblank (1855); domeniu public; Wikimedia Commons

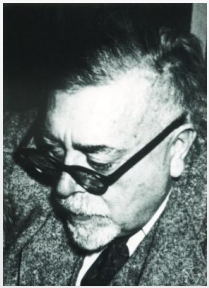


Louis Bachelier (1870–1946)

Foto: autor necunoscut; domeniu public; Wikimedia Commons

Procesul Wiener

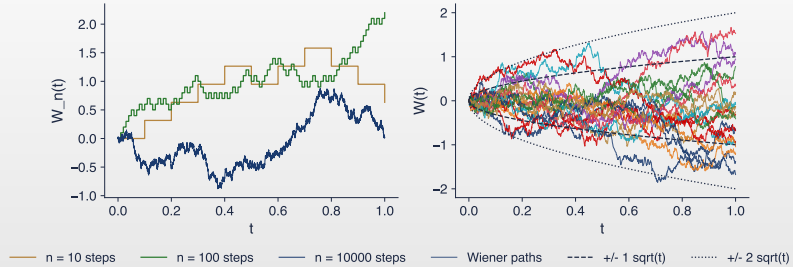
- $\{W(t), t \geq 0\}$ este un **proces Wiener** (mișcare browniană standard) dacă
  - $W(0) = 0$
  - creșterile pe intervale disjuncte sînt independente
  - $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$ pentru $s < t$: varianța este egală cu timpul scurs
  - traiectoriile sînt continue
- Limita mersului aleator scalat $W_n(t) = (\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{\lfloor nt \rfloor})/\sqrt{n}$ (Donsker)
  - $\varepsilon_i = \pm 1$, fiecare cu probabilitatea $1/2$; n pași pe unitatea de timp
  - $\lfloor nt \rfloor$: numărul de pași pînă la momentul t (partea întreagă); împărțirea la $\sqrt{n}$ menține varianța egală cu t
- Manual: Franke, Härdle & Hafner (2019), cap. 5



Norbert Wiener (1894–1964)

Foto: Konrad Jacobs; CC BY-SA 2.0 DE; Wikimedia Commons

Procesul Wiener ca limită a mersului aleator (SFEWienerProcess)



- Stînga: mersuri aleatoare scalate cu 10, 100 și 10 000 de pași; treptele dispar, caracterul aleator rămîne
- Dreapta: 20 de traiectorii Wiener; $\mathrm{Var}(W(t)) = t$, deci dispersia crește ca $\pm\sqrt{t}$
  - $\mathrm{Var}(W(1))$ simulată $= 1{,}006$; 68,2% din valorile $W(1)$ în ± 1 (teoretic 68,3%)

SFM_ch4_wiener_gbm

Proprietățile traiectoriilor Wiener

- Continue peste tot, nicăieri derivabile
  - panta $(W(t+h) - W(t))/h \sim N(0, 1/h)$ are varianța $1/h$, care crește nelimitat cînd $h \to 0$
- **Variația pătratică**: $\sum_k (W(t_{k+1}) - W(t_k))^2 \to t$ pe o grilă tot mai fină
  - $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t$: grila; suma pătratelor creșterilor tinde către timpul scurs t
  - 1000 de pași pe $[0, 1]$: media 0,999, abaterea standard 0,045 pe 10 000 de traiectorii
  - motivul pentru care $(dW)^2 = dt$ în calculul Itô și pentru care varianța realizată măsoară volatilitatea (Capitolul 8)
- $\mathrm{Cov}(W(s), W(t)) = \min(s, t)$: $\mathrm{Cov}(W(0{,}5), W(1))$ simulată $= 0{,}496$
- W este un martingal; la fel și $W(t)^2 - t$

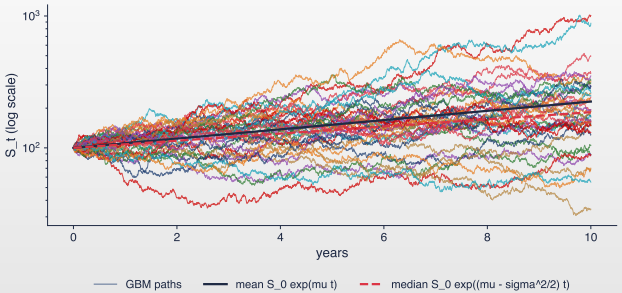
Mișcarea browniană geometrică

- **GBM** (geometric Brownian motion, mișcarea browniană geometrică): $dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t$
  - dS_t: variația prețului pe un interval foarte scurt dt
  - dW_t: creșterea procesului Wiener pe intervalul dt, cu distribuția $N(0, dt)$
  - variația relativă dS/S are tendința (drift-ul) μ și volatilitatea σ, ambele anuale
- Soluția: $S_t = S_0 \exp\left((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t\right)$
  - $\ln(S_t/S_0) \sim N\left((\mu - \sigma^2/2)t, \sigma^2 t\right)$
  - prețuri lognormale, randamente logaritmice Normale i.i.d.
- Modelul din spatele formulei Black & Scholes (1973) (manual: Franke, Härdle & Hafner (2019), cap. 6)

GBM: media, mediana și simularea

- Media $E[S_t] = S_0 e^{\mu t}$; mediana $S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t}$
  - mediana este mai mică: jumătate din traiectorii se termină sub $S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t}$
  - diferența, $\sigma^2/2$ pe an în termeni logaritmici, este volatility drag
- Simulare exactă pe o grilă: $S_{t+\Delta t} = S_t \exp\left((\mu - \sigma^2/2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\, Z\right)$
  - Δt: pasul grilei, în ani; $Z \sim N(0,1)$, o extragere nouă și independentă la fiecare pas
  - exactă, pentru că fiecare creștere logaritmică este Normală, cu media și varianța corecte

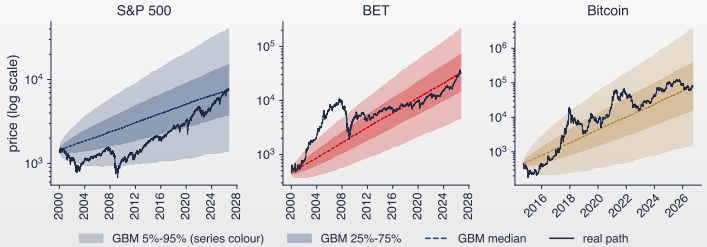
GBM calibrat pe S&P 500 (SFEsimGBM)



- Calibrare, 2000–2026: $\sigma = 19{,}26\%$, tendința logaritmică $\mu - \sigma^2/2 = 6{,}23\%$, deci $\mu = 8{,}08\%$ pe an
- După $T = 10$ ani: media 224,4, mediana 186,4
  - 62,0% din traiectorii se termină sub medie; teoretic: $\Phi(\sigma\sqrt{T}/2) = 62{,}0\%$, cu Φ funcția de repartiție $N(0,1)$
- Probabilitatea unei pierderi după 10 ani: 15,3%

SFM_ch4_wiener_gbm

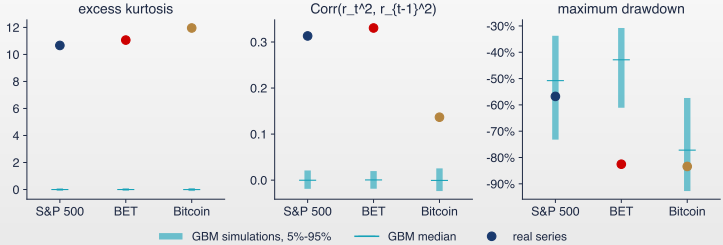
Traiectorii reale în evantaiul GBM



- Fiecare evantai: 4000 de traiectorii GBM cu tendința și volatilitatea seriei respective, pornite din prima zi a seriei
- S&P 500: traiectoria reală a coborît pînă la cuantila de 0,5% pe 23 iulie 2002 și a încheiat perioada în jurul medianei
  - în afara benzii de 90% în 7% din timp
- BET: în afara benzii 24% din timp
  - avîntul din 2000–2007 și crahul din 2008 nu seamănă cu GBM
- Bitcoin: cu $\sigma = 66{,}6\%$ pe an, evantaiul este foarte larg
  - anualizată cu $A = 365$: activele cripto se tranzacționează în fiecare zi calendaristică ($A = 252$ pentru indici)

SFM_ch4_wiener_gbm

Limitele modelului GBM



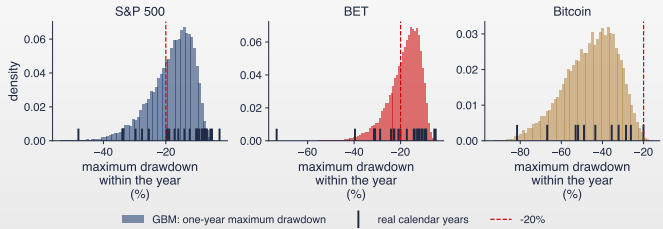
- Excesul de boltire: S&P 500 10,7, BET 11,1, Bitcoin 12,0; 90% din 300 de simulări GBM sînt în $[-0{,}10; 0{,}09]$
- Volatility clustering: $\mathrm{Corr}(r_t^2, r_{t-1}^2) = 0{,}31,\ 0{,}33,\ 0{,}14$ față de cel mult 0,03 în GBM
- Drawdown-ul maxim $\min_t \left(S_t / \max_{s \le t} S_s - 1\right)$: cea mai mare scădere față de un maxim anterior
  - -57% la S&P 500 este obișnuit în GBM; -83% la BET depășește 95% din traiectorii (cuantila de 5%: -61%)
- Zile de 4 sigma: 46 (S&P 500) față de cel mult 1 în 95% din traiectoriile GBM; criptomonedele au aceeași problemă Pele et al. (2023)

SFM_ch4_wiener_gbm

Recapitulare: procesul Wiener și GBM

- Procesul Wiener: creșteri Normale independente, cu varianța egală cu timpul scurs
- GBM: prețuri lognormale, mediana sub medie, reperul evaluării opțiunilor
- Randamentele reale au cozi groase și volatility clustering, pe care GBM nu le poate genera

O întrebare de cercetare deschisă: riscul de drawdown în modelul GBM



- Drawdown (Limitele modelului GBM), aici în cursul unui an calendaristic
  - peste 20%: S&P 500 în 6 din 26 de ani (23%), față de 34% în GBM; BET 46% față de 34%
- Peste 40%: GBM prevede, în medie, 0,14 asemenea ani pentru S&P 500 și 0,18 pentru BET
  - fiecare indice a avut 1 (2008: −48% și −73%)
- Întrebare deschisă
  - supraestimează GBM drawdown-urile moderate și le subestimează pe cele extreme pentru că anii calmi și cei de criză apar grupat?

SFM_ch4_drawdown_open

Utilizări posibile ale instrumentelor AI

- **Literatura**: identificarea și rezumarea studiilor despre distribuția drawdown-urilor și legătura lor cu volatility clustering
- **Cod**: o primă versiune a simulărilor drawdown-urilor anuale în GBM, în bootstrap i.i.d. și într-un model GARCH
- **Design**: propunerea unui test care compară numărul observat de ani nefavorabili cu probabilitatea din model
- Exemplu de prompt
  - `Write Python code that simulates 10,000 one-year paths of daily S&P 500 returns under GBM and under an i.i.d. bootstrap of 2000-2026 returns, and returns the probability of a drawdown beyond 20% and 40% within the year.`

Verificări necesare

- Definițiile: drawdown-ul se calculează față de maximul atins pînă atunci în cursul anului, nu față de prima zi a anului
- Calibrarea: aceleași μ și σ, același număr de zile de tranzacționare pe an ca în date
- Inferența: 26 de ani reprezintă un eșantion mic; calculați un p-value binomial, nu doar proporții
- Mecanismul: bootstrap-ul i.i.d. păstrează cozile groase, dar elimină clustering-ul; diferența izolează efectul clustering-ului
- Referințele: fiecare lucrare citată trebuie să existe; verificați DOI-ul

Idee de proiect

- **Întrebarea**: cît de mult greșește GBM probabilitatea unui an nefavorabil și de ce?
  - date: S&P 500, DAX, BET și Bitcoin din datele cursului
- Pași
  - calculați drawdown-ul maxim din fiecare an calendaristic
  - simulați aceeași statistică în GBM, în bootstrap-ul i.i.d. și într-un model GARCH(1,1) (Capitolul 9)
  - comparați ponderile peste 20% și 40% cu teste binomiale
- Rezultat: un tabel, un grafic și un paragraf despre concluziile pe care datele le susțin și pe care nu le susțin
- Declarați orice folosire a AI și listați erorile AI pe care le-ați corectat Wang et al. (2023)

Formule de reținut

Mărimea	**Formula**
Varianța unei sume	$\mathrm{Var}(aX + bY) = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 + 2ab\,\mathrm{Cov}(X, Y)$
Corelația	$\rho = \mathrm{Cov}(X, Y)/(\sigma_X\sigma_Y)$
Proprietatea turnului	$E[E[Y \mid X]] = E[Y]$
Varianța totală	$\mathrm{Var}(Y) = E[\mathrm{Var}(Y \mid X)] + \mathrm{Var}(E[Y \mid X])$
Transformarea inversă	$X = F^{-1}(U)$, $U \sim U(0, 1)$
Eroarea Monte Carlo	$\sqrt{p(1-p)/N}$
Mers aleator	$S_t = S_{t-1} + \mu + \varepsilon_t$, $\mathrm{Var}(S_t) = t\sigma^2$
AR(1)	$\mathrm{Var}(X_t) = \sigma^2/(1-\phi^2)$, $\rho(h) = \phi^h$
GBM	$S_t = S_0 \exp((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t)$, $E[S_t] = S_0 e^{\mu t}$

Autoevaluare

- **Întrebare**: $\sigma_1 = 2\%$, $\sigma_2 = 3\%$, $\rho = 0{,}5$; cît este volatilitatea portofoliului 50/50?
  - **Răspuns**: $\sqrt{0{,}25 \times 4 + 0{,}25 \times 9 + 2 \times 0{,}25 \times 0{,}5 \times 2 \times 3} = \sqrt{4{,}75} = 2{,}18\%$
- **Întrebare**: GBM cu $\mu = 8\%$, $\sigma = 20\%$, $S_0 = 100$; cît sînt media și mediana lui S_1?
  - **Răspuns**: media $100e^{0{,}08} = 108{,}33$, mediana $100e^{0{,}06} = 106{,}18$
- **Întrebare**: AR(1) cu $\phi = 0{,}8$ și $\sigma = 1$; cît este varianța lui?
  - **Răspuns**: $1/(1 - 0{,}64) = 2{,}78$
- Urmează: Capitolul 5, cozi groase și teoria valorilor extreme

Bibliografie (1/2)

- Bachelier, L. (1900). Théorie de la spéculation. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 17, 21–86.
- Black, F., Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637–654.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3), 307–327.
- Borak, S., Härdle, W.K., López-Cabrera, B. (2013). *Statistics of Financial Markets: Exercises and Solutions*, 2nd ed. Springer.
- Cont, R. (2001). Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*, 1(2), 223–236.
- Cox, J.C., Ross, S.A., Rubinstein, M. (1979). Option pricing: a simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7(3), 229–263.
- Einstein, A. (1905). Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. *Annalen der Physik*, 322(8), 549–560.
- Engle, R.F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, 50(4), 987–1007.
- Fama, E.F. (1970). Efficient capital markets: a review of theory and empirical work. *Journal of Finance*, 25(2), 383–417.
- Franke, J., Härdle, W.K., Hafner, C.M. (2019). *Statistics of Financial Markets: An Introduction*, 5th ed. Springer.

Bibliografie (2/2)

- Glasserman, P. (2003). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer.
- Kolmogoroff, A. (1933). *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Springer, Berlin.
- Marsaglia, G. (1968). Random numbers fall mainly in the planes. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 61(1), 25–28.
- Matsumoto, M., Nishimura, T. (1998). Mersenne twister: a 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*, 8(1), 3–30.
- Metropolis, N., Ulam, S. (1949). The Monte Carlo method. *Journal of the American Statistical Association*, 44(247), 335–341.
- Osborne, M.F.M. (1959). Brownian motion in the stock market. *Operations Research*, 7(2), 145–173.
- Pele, D.T., Wesselhöfft, N., Härdle, W.K., Kolossiatis, M., Yatracos, Y.G. (2023). Are cryptos becoming alternative assets? *European Journal of Finance*, 29(10), 1064–1105.
- Wang, H., Fu, T., Du, Y., Gao, W., et al. (2023). Scientific discovery in the age of artificial intelligence. *Nature*, 620, 47–60.
- Wiener, N. (1923). Differential-space. *Journal of Mathematics and Physics*, 2(1–4), 131–174.