








Statistica piețelor financiare

Capitolul 9: Modele ARCH și GARCH



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București
IDA Institute Digital Assets
Blockchain Research Center
AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance
Academia Română, Institutul de Prognoză Economică
MSCA Digital Finance

Acronime folosite în acest material (1/3)

- **ACF**: Autocorrelation Function (funcția de autocorelație)
- **AI**: Artificial Intelligence (inteligență artificială)
- **AIC**: Akaike Information Criterion (criteriul informațional Akaike)
- **AR**: AutoRegressive (model); Abnormal Return (model autoregresiv; randament anormal, în studiile de eveniment)
- **ARCH**: AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity (heteroscedasticitate condiționată autoregresivă)
- **ARCH-LM**: ARCH Lagrange Multiplier (test) — testul multiplicatorului Lagrange pentru efecte ARCH
- **ARMA**: AutoRegressive Moving Average (model) — model autoregresiv cu medie mobilă
- **BET**: Bucharest Exchange Trading (index) — indicele de referință al Bursei de Valori București
- **BIC**: Bayesian Information Criterion (criteriul informațional bayesian)
- **BVB**: Bursa de Valori București
- **COVID-19**: COronaVIrus Disease 2019 (boala provocată de noul coronavirus, identificată în 2019)

Acronime folosite în acest material (2/3)

- **DM**: Diebold–Mariano (test) — testul Diebold–Mariano de comparare a prognozelor
- **EGARCH**: Exponential GARCH (GARCH exponențial)
- **EODHD**: EOD Historical Data (market-data provider) — furnizor de date de piață
- **ES**: Expected Shortfall (pierderea așteptată în coadă)
- **ETF**: Exchange-Traded Fund (fond tranzacționat la bursă)
- **EWMA**: Exponentially Weighted Moving Average (medie mobilă ponderată exponențial)
- **GARCH**: Generalised AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity (heteroscedasticitate condiționată autoregresivă generalizată)
- **GJR**: Glosten–Jagannathan–Runkle (asymmetric GARCH) — modelul GARCH asimetric Glosten–Jagannathan–Runkle
- **GJR-GARCH**: Glosten–Jagannathan–Runkle GARCH (GARCH asimetric Glosten–Jagannathan–Runkle)
- **HAC**: Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent (standard errors) — erori standard robuste la heteroscedasticitate și autocorelație
- **IGARCH**: Integrated GARCH (GARCH integrat)
- **LB**: Ljung–Box (test) — testul de autocorelație Ljung–Box

Acronime folosite în acest material (3/3)

- **LR**: Likelihood Ratio (test) — testul raportului de verosimilitate
- **MLE**: Maximum Likelihood Estimation (estimarea prin metoda verosimilității maxime)
- **NIC**: News Impact Curve (curba de impact a știrilor)
- **OMV**: Österreichische Mineralölverwaltung (Administrația austriacă a uleiurilor minerale, grupul OMV)
- **QLIKE**: Quasi-LIKElihood (loss function) — funcția de pierdere de tip cvasi-verosimilitate
- **QMLE**: Quasi-Maximum Likelihood Estimation (estimarea prin cvasi-verosimilitate maximă)
- **QQ**: Quantile–Quantile (plot) — graficul cuantilă–cuantilă
- **RW1**: Random Walk 1 (i.i.d. increments) — mersul aleator 1 (creșteri i.i.d.)
- **RW3**: Random Walk 3 (uncorrelated increments) — mersul aleator 3 (creșteri necorelate)
- **SE**: Standard Error (eroare standard)
- **SFE**: Statistics of Financial Markets, Exercises (Quantlet collection of the textbook) — colecția de Quantlet-uri a manualului Statistics of Financial Markets

Întrebarea de azi și traseul

- **Întrebarea**: dacă randamentul de mîine nu poate fi anticipat, poate fi anticipat **riscul** de mîine?
  - Capitolul 7: randamentele zilnice sînt aproape necorelate; Capitolul 8: pătratele lor sînt puternic corelate (volatility clustering)
  - acest capitol transformă volatility clustering într-un model pentru varianța condiționată
- **Traseul** capitolului
  - media condiționată și varianța condiționată; ARCH(q) și GARCH(1,1)
  - estimarea prin verosimilitate maximă; inovații Student-t și t asimetrice
  - șase piețe; asimetrie: GJR-GARCH, EGARCH, curba de impact a știrilor
  - diagnostic, alegerea modelului, prognoze, VaR 1%

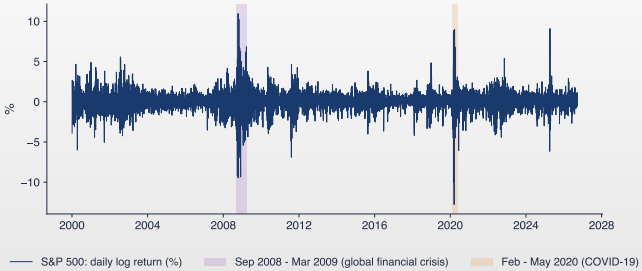
Rezultatele învățării

- Deosebiți varianța condiționată de varianța necondiționată și explicați de ce randamentele pot fi necorelate, dar dependente
- Scrieți modelele ARCH(q) și GARCH(1,1) și calculați persistența, varianța necondiționată și timpul de înjumătățire
- Estimați modele GARCH prin verosimilitate maximă, interpretați erorile standard și alegeți distribuția inovațiilor
- Măsurați efectul de levier cu GJR-GARCH, EGARCH și curba de impact a știrilor
- Verificați un model estimat cu reziduurile standardizate și alegeți între modele cu AIC și BIC
- Prognozați volatilitatea pe mai multe orizonturi, comparați prognozele cu QLIKE și calculați un VaR 1% pe o zi

Bibliografie și instrumente

- Manual: Franke, Härdle & Hafner (2019), cap. 13 (13.1 modelele ARCH și GARCH, 13.2 extensii ale modelului GARCH)
  - exerciții rezolvate: Borak, Härdle & López-Cabrera (2013), cap. 13
- Modele cu heteroscedasticitate condiționată: Tsay (2010), cap. 3
- Quantlet-urile Python ale capitolului: Quantlets/Ch_09
  - portate din Quantlet-urile SFE SFEtimegarch, SFElikarch1, SFElikgarch, SFEgarchest, SFEvolgarchest și SFENewsImpactCurve
  - estimarea cu pachetul Python `arch`
- Notebook-ul cursului: deschideți în Google Colab
- Curs video: Applied Time Series Analysis with Python

S&P 500: ani liniștiți și perioade turbulente



- Randamente logaritmice zilnice $r_t = 100(\ln P_t - \ln P_{t-1})$, în %, 6 714 zile până la 18 septembrie 2026; cea mai mare scădere: −12,8% pe 16 martie 2020; cea mai mare creștere: 11,0% pe 13 octombrie 2008
- Abaterea standard: 0,42% în 2017, 3,52% din septembrie 2008 până în martie 2009, 3,70% din februarie până în mai 2020
- Variațiile mari urmează după variații mari, de orice semn: volatility clustering Engle (1982)

SFM_ch9_volatility_markets

Crizele din 2008 și 2020



Sediul Lehman Brothers, New York, 15 septembrie 2008

Foto: Robert Scoble (2008); CC BY 2.0; Wikimedia Commons



Districtul financiar din New York, 25 martie 2020

Foto: Billie Grace Ward (2020); CC BY 2.0; Wikimedia Commons

- 15 septembrie 2008: Lehman Brothers intră în faliment; martie 2020: pandemia COVID-19 duce la închiderea economiilor
- În ambele episoade abaterea standard zilnică a S&P 500 a fost de 8,3 și, respectiv, de 8,8 ori mai mare decît în 2017; calmul a revenit abia după cîteva luni

Utilitatea modelării variației condiționate

- **Managementul riscului**: VaR (value at risk, valoarea expusă la risc) și ES (expected shortfall) au nevoie de volatilitatea de mîine, nu de volatilitatea medie din ultimii 20 de ani
  - un VaR cu variață constantă este prea mare în anii liniștiți și prea mic în crize (Capitolul 10)
- **Portofolii**: ponderile depind de variațe și covariațe, care se schimbă în timp
- **Derivate**: prețurile opțiunilor depind de volatilitatea așteptată pînă la scadență
- **Inferență**: testele și intervalele de încredere care presupun variață constantă pot fi greșite
  - de aceea Capitolul 7 a avut nevoie de teste valide și în prezența heteroscedasticității

Faptele stilizate pe care un model de volatilitate trebuie să le reproducă

- **Volatility clustering**: ACF (autocorrelation function, funcția de autocorelație) a lui r_t^2 este pozitivă și scade lent (Capitolul 8)
  - S&P 500: autocorelația lui r_t^2 la lagul 1: 0,31; la lagul 50: încă 0,053
- **Cozi groase**: coeficient de boltire peste 3, valoarea distribuției Normale (Capitolul 2)
  - randamentele zilnice S&P 500: coeficientul de boltire 13,7
- **Efectul de levier**: scăderile cresc volatilitatea mai mult decît creșterile de aceeași mărime Christie (1982)
- **Revenirea volatilității la medie**: după o perioadă turbulentă, volatilitatea revine la un nivel pe termen lung
- Aproape nicio autocorelație în r_t însuși (Capitolul 7)

Condiționarea pe trecut

- $\mathcal{F}_{t-1}$: informația disponibilă la sfîrșitul zilei $t-1$ (randamentele trecute)
  - media condiționată $E[X \mid \mathcal{F}_{t-1}]$: cea mai bună prognoză a lui X, dată fiind informația trecută (Capitolul 4)
- **Media condiționată**: $\mu_t = E[r_t \mid \mathcal{F}_{t-1}]$
  - Capitolul 7: pentru randamentele zilnice, μ_t este aproape constantă: $\mu_t = \mu$
- **Varianța condiționată**: $\sigma_t^2 = \mathrm{Var}(r_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = E[(r_t - \mu_t)^2 \mid \mathcal{F}_{t-1}]$
  - σ_t este **volatilitatea condiționată**: cunoscută la $t-1$, se schimbă de la o zi la alta
  - **heteroscedasticitate**: o varianță care nu este constantă

Descompunerea de bază

- Toate modelele din acest capitol au forma $r_t = \mu + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sigma_t z_t$
  - z_t: **inovațiile**, i.i.d. cu media 0 și varianța 1 (Normale, Student-t, ...)
  - ε_t: **șocul** (randamentul minus media lui); σ_t depinde doar de trecut
- Consecințe
  - $E[\varepsilon_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] = \sigma_t E[z_t] = 0$: șocurile sînt o diferență de martingal, deci sînt necorelate
  - $\mathrm{Var}(\varepsilon_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t^2$: varianța este previzibilă
  - ε_t sînt necorelate, dar nu independente: ε_t^2 este corelat cu ε_{t-1}^2
- În termenii Capitolului 7: RW1 (creșteri i.i.d.) este respinsă, RW3 (creșteri necorelate) rămîne valabilă

Exemplu rezolvat: varianța condiționată și varianța necondiționată

- O piață are zile liniștite ($\sigma_t^2 = 0{,}5$) și zile agitate ($\sigma_t^2 = 4{,}5$), fiecare cu probabilitatea $1/2$; media este 0
  - legea varianței totale: $\mathrm{Var}(r_t) = E[\mathrm{Var}(r_t \mid \mathcal{F}_{t-1})] + \mathrm{Var}(E[r_t \mid \mathcal{F}_{t-1}])$
  - pas cu pas: $0{,}5 \times 0{,}5 + 0{,}5 \times 4{,}5 + 0 = 2{,}50$, deci abaterea standard necondiționată este 1,58%
- Varianța necondiționată este o medie; varianța condiționată ne spune în ce fel de zi ne aflăm
  - o zi liniștită: $\sigma_t = 0{,}71\%$; o zi agitată: $\sigma_t = 2{,}12\%$; media de 1,58% nu descrie niciuna dintre ele
- Un amestec de distribuții Normale cu variațe diferite are cozi groase: heteroscedasticitatea condiționată creează boltire

1982: Robert Engle și modelul ARCH

- Engle (1982): **ARCH** (autoregressive conditional heteroskedasticity, heteroscedasticitate condiționată autoregresivă): varianța de azi depinde de pătratele șocurilor de ieri
  - prima aplicație: varianța inflației din Regatul Unit; scris în timpul vizitei lui Engle la London School of Economics
- Premiul Nobel 2003: „pentru metode de analiză a seriilor de timp economice cu volatilitate variabilă în timp (ARCH)"
  - împărțit cu Clive Granger (cointegrare); prelegerea Nobel: Engle (2004)



Robert F. Engle (2022)

Foto: Jon Demske (2022); CC BY-SA 4.0; Wikimedia Commons



Sala de concerte din Stockholm, unde se decernează Premiile Nobel

Foto: Karen Zhou (2025); CC BY-SA 4.0; Wikimedia Commons

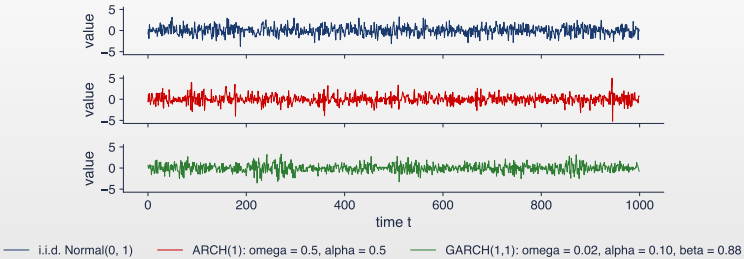
ARCH(1): definiție

- $\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2, \quad \omega > 0,\ \alpha \geq 0$
  - în cuvinte: varianța de azi = o constantă plus o fracțiune α din pătratul șocului de ieri
  - ω: varianța după un șoc nul; α: reacția la șocul de ieri; restricțiile asigură o variantă pozitivă
  - un șoc mare ieri, indiferent de semn, crește varianța de azi
- „Autoregresiv": ε_t^2 urmează un model AR(1) (autoregresiv)
  - scriem $\varepsilon_t^2 = \sigma_t^2 + v_t$, cu $v_t = \sigma_t^2(z_t^2 - 1)$, $E[v_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] = 0$
  - atunci $\varepsilon_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + v_t$: un AR(1) pentru pătratele șocurilor
- De aici, ACF a lui ε_t^2 este $\rho(k) = \alpha^k$ cînd momentul de ordinul patru există: clustering, dar o scădere rapidă

ARCH(1): proprietăți

- Media și autocorelația: $E[\varepsilon_t] = 0$, $\mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = 0$ pentru $k \neq 0$
- **Varianța necondiționată** (dacă $\alpha < 1$): aplicăm media în $\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2$
  - $\bar{\sigma}^2 = E[\varepsilon_t^2] = \omega + \alpha\bar{\sigma}^2$, deci $\bar{\sigma}^2 = \omega/(1-\alpha)$
- **Coeficientul de boltire** cu z_t Normale (dacă $3\alpha^2 < 1$): $K = \dfrac{E[\varepsilon_t^4]}{(E[\varepsilon_t^2])^2} = 3\,\dfrac{1-\alpha^2}{1-3\alpha^2} > 3$
  - inovații Normale, dar randamente cu cozi groase Franke, Härdle & Hafner (2019)
  - dacă $\alpha \geq 1/\sqrt{3} = 0{,}577$, momentul de ordinul patru este infinit
- **Exemplu rezolvat**: $\omega = 0{,}5$, $\alpha = 0{,}5$
  - $\bar{\sigma}^2 = 0{,}5/0{,}5 = 1{,}00$; $K = 3 \times 0{,}75/0{,}25 = 9{,}0$; după un șoc $\varepsilon_{t-1} = 2$: $\sigma_t^2 = 0{,}5 + 0{,}5 \times 4 = 2{,}50$, $\sigma_t = 1{,}58$

Traiectorii simulate: i.i.d., ARCH(1) și GARCH(1,1)



- Trei serii de 1000 de valori cu varianța necondiționată 1; ARCH(1) cu $\omega = \alpha = 0{,}5$, GARCH(1,1) cu $\omega = 0{,}02$, $\alpha = 0{,}10$, $\beta = 0{,}88$ (secțiunea următoare)
- Coeficientul de boltire de selecție: i.i.d. 3,12, ARCH 4,91, GARCH 3,74; teoretic: 3, 9,0, 6,06; momentul de ordinul patru converge lent
- ARCH(1) produce vîrfuri izolate; GARCH(1,1) produce perioade lungi liniștite și perioade lungi agitate, ca în randamentele reale

SFM_ch9_simulation_likelihood

ARCH(q) și limitele lui

- **ARCH(q)**: $\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2$, $\alpha_i \geq 0$; staționar dacă $\sum_i \alpha_i < 1$
  - q: numărul de laguri; α_i: reacția la șocul de acum i zile
  - efectul unui șoc durează exact q zile; clustering-ul real durează luni
- Testarea efectelor ARCH: testul ARCH-LM al lui Engle (regresia lui $\hat{\varepsilon}_t^2$ pe propriile laguri), Capitolul 8

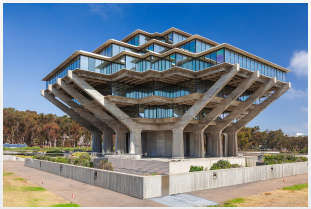
S&P 500, z_t Normale	parametri	log-verosimilitate	AIC	BIC	$\sum \alpha_i$ $(+\beta)$
ARCH(1)	3	−10305,5	20617,0	20637,5	0,394
ARCH(5)	7	−9340,5	18695,1	18742,7	0,816
ARCH(10)	12	−9227,6	18479,3	18561,0	0,849
GARCH(1,1)	4	−9218,0	**18444,0**	**18471,2**	0,980

- Interpretare: ARCH are nevoie de zece laguri și rămîne totuși inferior modelului GARCH(1,1), care are patru parametri (AIC și BIC: valoarea mai mică este mai bună, secțiunea 10)

SFM_ch9_garch_estimation

1986: Tim Bollerslev și modelul GARCH

- Bollerslev (1986), doctorand al lui Engle la University of California, San Diego: adaugă în ecuație varianța de ieri
  - **GARCH** (generalised ARCH, ARCH generalizat): cîțiva parametri înlocuiesc un ARCH(q) lung
- Inovații Student-t pentru randamente: Bollerslev (1987)
- GARCH(1,1) rămîne modelul de referință: Hansen & Lunde (2005) au comparat 330 de modele și l-au găsit greu de întrecut la cursurile de schimb



Biblioteca Geisel, University of California, San Diego

Foto: Stephen Bay (2010); CC BY 4.0; Wikimedia Commons

GARCH(1,1): definiție

- $r_t = \mu + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t^2 = \omega + \alpha\,\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\,\sigma_{t-1}^2$
  - $\omega > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$: varianța rămîne pozitivă
- Interpretarea parametrilor
  - α: **reacția** la știrile de ieri (mărimea saltului după un șoc)
  - β: **memoria** variației (cît din nivelul de ieri se păstrează)
  - $\alpha + \beta$: **persistența**; ω fixează nivelul pe termen lung
- Prin recurență, un ARCH(∞) cu ponderi geometrice
  - $\sigma_t^2 = \dfrac{\omega}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j\, \varepsilon_{t-1-j}^2$: toate șocurile trecute contează, cu ponderi descrescătoare
  - șocul de acum $j+1$ zile primește ponderea $\alpha\beta^j$

Staționaritate, varianța pe termen lung și boltire

- Ca la ARCH: $\varepsilon_t^2 = \omega + (\alpha+\beta)\varepsilon_{t-1}^2 + v_t - \beta v_{t-1}$, un ARMA(1,1) pentru pătratele șocurilor
  - $v_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$: surpriza din pătratul șocului, ca la ARCH(1)
  - ARMA: model autoregresiv cu medie mobilă; ACF a lui ε_t^2 scade ca $(\alpha+\beta)^k$ la lagul k
- **Staționar în covarianță** dacă $\alpha+\beta<1$; atunci **varianța necondiționată (pe termen lung)** este
  - $\bar{\sigma}^2 = E[\sigma_t^2] = \dfrac{\omega}{1-\alpha-\beta}$, volatilitatea anualizată $\sqrt{252\,\bar{\sigma}^2}$ pentru 252 de zile de tranzacționare
- Coeficientul de boltire cu z_t Normale, dacă $(\alpha+\beta)^2+2\alpha^2<1$: $K = 3\,\dfrac{1-(\alpha+\beta)^2}{1-(\alpha+\beta)^2-2\alpha^2} > 3$
  - $\alpha = 0{,}10$, $\beta = 0{,}88$: $(\alpha+\beta)^2+2\alpha^2 = 0{,}9804$, $K = 6{,}06$

Persistența și timpul de înjumătățire

- Prognoza variației peste h zile (derivată în secțiunea 11): $E[\sigma^2_{t+h} \mid \mathcal{F}_t] - \bar{\sigma}^2 = (\alpha+\beta)^{h-1}(\sigma^2_{t+1} - \bar{\sigma}^2)$
  - $E[\cdot \mid \mathcal{F}_t]$: prognoza făcută la sfîrșitul zilei t; $\bar{\sigma}^2$: varianța pe termen lung
  - o abatere de la varianța pe termen lung se micșorează cu factorul $\alpha+\beta$ în fiecare zi
- **Timpul de înjumătățire**: numărul de zile după care a dispărut jumătate dintr-un șoc de variață
  - $(\alpha+\beta)^h = 1/2 \;\Rightarrow\; h_{1/2} = \dfrac{\ln 0{,}5}{\ln(\alpha+\beta)}$
  - $\alpha+\beta = 0{,}90$: 6,6 zile; 0,98: 34,3 zile; 0,99: 69,0 zile: schimbările mici în apropiere de 1 contează mult
- Randamentele zilnice ale acțiunilor: α în jur de 0,05–0,15, β în jur de 0,80–0,93, $\alpha+\beta$ apropiat de 1 (secțiunea 7)

Exemplu rezolvat: un pas GARCH(1,1)

- Randamente zilnice în %: $\omega = 0{,}02$, $\alpha = 0{,}10$, $\beta = 0{,}88$, $\mu = 0$
- Mărimile pe termen lung
  - persistența $\alpha + \beta = 0{,}98$; $\bar{\sigma}^2 = 0{,}02/(1 - 0{,}98) = 1{,}00$; volatilitatea anualizată $\sqrt{252 \times 1{,}00} = 15{,}9\%$
  - timpul de înjumătățire $\ln 0{,}5 / \ln 0{,}98 = 34{,}3$ zile
- Azi: $\sigma_t^2 = 1{,}2$, iar randamentul este $r_t = -3\%$
  - mîine: $\sigma_{t+1}^2 = 0{,}02 + 0{,}10 \times 9 + 0{,}88 \times 1{,}2 = 1{,}976$, $\sigma_{t+1} = 1{,}41\%$
  - șocul a crescut varianța de la 1,2 la aproape 2; apoi ea scade spre 1,00 cu factorul 0,98 pe zi

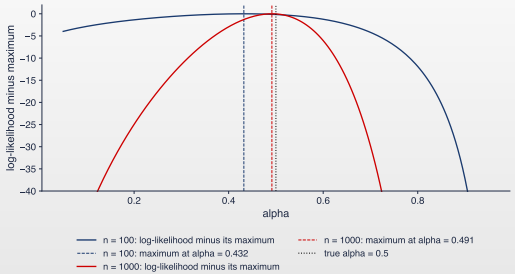
IGARCH și legătura cu EWMA

- **IGARCH** (integrated GARCH, GARCH integrat) Engle & Bollerslev (1986): $\alpha + \beta = 1$
  - șocurile varianței nu se sting niciodată: nu există timp de înjumătățire și nici variață necondiționată finită
  - cu $\omega = 0$, prognoza varianței este aceeași pentru orice orizont; cu $\omega > 0$, ea crește cu ω pe zi
- **EWMA** (exponentially weighted moving average, Capitolul 8): $\sigma_t^2 = \lambda\sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda)r_{t-1}^2$
  - este un IGARCH cu $\omega = 0$, $\alpha = 1 - \lambda$, $\beta = \lambda$; RiskMetrics folosește $\lambda = 0{,}94$ pentru date zilnice
  - EWMA: nimic de estimat, dar fără revenire la medie; GARCH: trei parametri, iar volatilitatea revine la $\bar{\sigma}$
- **Întrebare pentru sală**: un analist prognozează volatilitatea peste un an cu EWMA imediat după un crah. Unde greșește?
  - **Răspuns**: EWMA păstrează nivelul de criză de azi pentru tot anul; GARCH îl lasă să scadă spre nivelul pe termen lung

Verosimilitatea unui model GARCH

- Randamentele sînt dependente, deci descompunem densitatea comună în densități condiționate
  - f: o densitate de probabilitate; T: numărul de randamente; θ: vectorul parametrilor; ℓ: log-verosimilitatea
  - $f(r_1, \ldots, r_T) = f(r_1) \prod_{t=2}^{T} f(r_t \mid \mathcal{F}_{t-1})$, iar $r_t \mid \mathcal{F}_{t-1} \sim N(\mu, \sigma_t^2)$ pentru inovații Normale
- **Log-verosimilitatea condiționată**, cu $\theta = (\mu, \omega, \alpha, \beta)$:
  - $\ell(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=2}^{T} \left[\ln(2\pi) + \ln \sigma_t^2(\theta) + \frac{(r_t - \mu)^2}{\sigma_t^2(\theta)} \right]$
  - în cuvinte: fiecare zi adaugă o penalizare pentru un σ_t^2 mare și una pentru o eroare la pătrat mare în raport cu σ_t^2
  - $\sigma_t^2(\theta)$ se calculează recursiv, pornind de la o valoare inițială σ_1^2 (de exemplu, varianța de selecție)
- **MLE** (maximum likelihood estimation, estimarea prin verosimilitate maximă): $\hat{\theta} = \arg\max_\theta \ell(\theta)$, cu $\omega > 0$, $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta < 1$
  - nu există o formulă explicită: un algoritm numeric de optimizare caută maximul Franke, Härdle & Hafner (2019)

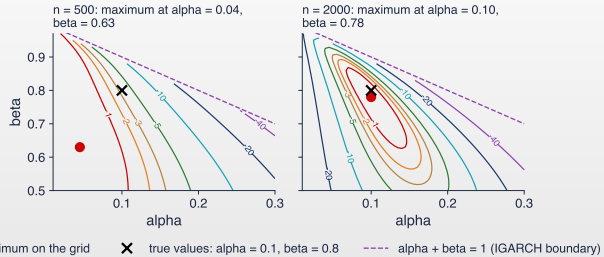
Verosimilitatea modelului ARCH(1)



- ARCH(1) simulat cu $\omega = \alpha = 0{,}5$; $\ell(\alpha)$ cu $\omega = 1 - \alpha$, ca în SFElikarch1; fiecare curbă minus maximul ei
- $n = 100$: $\hat{\alpha} = 0{,}432$ (eroarea standard 0,127); $n = 1000$: $\hat{\alpha} = 0{,}491$ (0,035)
- Interpretare: mai multe date fac curba mai ascuțită; curbura ei în punctul de maxim dă eroarea standard

SFM_ch9_simulation_likelihood

Verosimilitatea modelului GARCH(1,1)



- GARCH(1,1) simulat, $\omega = 0{,}1$, $\alpha = 0{,}1$, $\beta = 0{,}8$; ω fixat astfel încît varianța necondiționată să fie egală cu varianța de selecție, ca în SFElikgarch; contururi: log-verosimilitatea minus maximul ei
- $n = 500$: maximul în $(0{,}045; 0{,}63)$, departe de valorile adevărate; $n = 2000$: $(0{,}100; 0{,}78)$
- Interpretare: o creastă lungă și plată, de-a lungul căreia α și β se compensează: GARCH are nevoie de eșantioane lungi

SFM_ch9_simulation_likelihood

Estimarea pas cu pas și cu un pachet

S&P 500, GARCH(1,1)-N	pas cu pas (SE)	`arch`	SE clasică	SE robustă
μ	0,0614 (0,0098)	0,0615	0,0098	0,0100
ω	0,0253 (0,0030)	0,0254	0,0030	0,0048
α	0,1205 (0,0086)	0,1206	0,0086	0,0118
β	0,8600 (0,0091)	0,8599	0,0091	0,0125

- Pas cu pas: scriem $-\ell(\theta)$ în Python și o minimizăm cu `scipy.optimize.minimize`, cu restricția $\alpha + \beta < 1$
  - cele două variante diferă doar prin valoarea inițială a lui σ_t^2 și prin algoritmul de optimizare; log-verosimilitatea $-9219{,}9$ față de $-9218{,}0$
- SE (standard error, eroarea standard) clasică: din inversa matricei hessiene (curbura lui ℓ); robustă: validă și cînd z_t nu este Normal Bollerslev & Wooldridge (1992)
- Interpretare: SE robuste ale lui α și β sînt de circa 1,4 ori mai mari (1,6 pentru ω, 1,02 pentru μ): cînd z_t are cozi groase, SE clasice supraestimează precizia parametrilor variației

SFM_ch9_garch_estimation

Cvasi-verosimilitatea maximă

- **QMLE** (quasi-maximum likelihood estimation, estimarea prin cvasi-verosimilitate maximă): maximizăm verosimilitatea Normală chiar dacă z_t nu este Normal
  - estimările rămîn consistente dacă μ și σ_t^2 sînt corect specificate Bollerslev & Wooldridge (1992)
  - dar SE clasice sînt greșite: folosim SE robuste (de tip „sandwich")
- Reguli practice
  - raportăm SE robuste (opțiunea implicită în `arch`)
  - folosim cel puțin 1000–2000 de observații zilnice; randamentele în % evită problemele numerice cauzate de un ω foarte mic
  - o estimare pe frontieră ($\alpha + \beta = 1$) nu are o eroare standard obișnuită: o raportăm ca IGARCH
- O distribuție mai potrivită a inovațiilor dă estimări mai eficiente: secțiunea următoare

Inovații Student-t și t asimetrice

- GARCH cu z_t Normale explică doar o parte din boltire: randamentele S&P 500 au 13,7, reziduurile standardizate $\hat{z}_t = \hat{\varepsilon}_t / \hat{\sigma}_t$ au 4,7
  - cozile groase rămase trebuie să vină din distribuția lui z_t
- **Student-t standardizată** cu $\nu > 2$ grade de libertate (Capitolul 2) Bollerslev (1987)
  - t_ν: o variabilă Student-t cu ν grade de libertate; $z_t = t_\nu \sqrt{(\nu-2)/\nu}$ are varianța 1
  - un ν mic înseamnă cozi groase: coeficientul de boltire $3 + 6/(\nu - 4)$ pentru $\nu > 4$; $\nu \to \infty$: distribuția Normală
  - ν se estimează împreună cu $(\mu, \omega, \alpha, \beta)$
- **t asimetrică** Hansen (1994): încă un parametru $\lambda \in (-1, 1)$; $\lambda < 0$: o coadă stîngă mai lungă
  - modele incluse unul în altul: Normal $\subset$ t $\subset$ t asimetrică; le comparăm prin teste ale raportului de verosimilitate sau prin AIC/BIC (Capitolul 6)

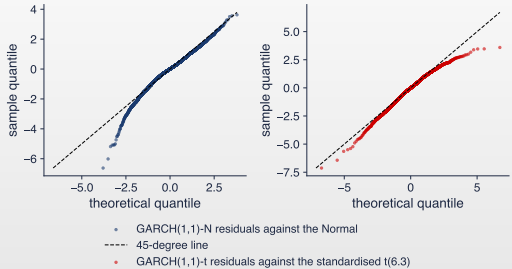
S&P 500: trei distribuții ale inovațiilor

GARCH(1,1)	ω	α	β	ν	λ	log-verosim.	$\alpha+\beta$
Normală	0,0254	0,121	0,860	–	–	−9218,0	0,980
Student-t	0,0157	0,123	0,872	6,26	–	−9062,5	0,995
t asimetrică	0,0153	0,120	0,872	6,92	−0,114	−9038,4	0,993

- Statistica raportului de verosimilitate $2(\ell_1 - \ell_0)$ (ℓ_1, ℓ_0: log-verosimilitățile maxime ale modelului mai mare și ale celui mai mic): t față de Normal 311,0 (o restricție, $\chi^2_{0,95}(1) = 3{,}84$); t asimetrică față de t 48,1: ambele resping modelul mai mic
- $\hat{\nu} = 6{,}26$: cozi mult mai groase decît la distribuția Normală; $\hat{\lambda} = -0{,}114$: scăderile mari sînt mai frecvente decît creșterile mari
- Interpretare: α și β aproape nu se schimbă; distribuția inovațiilor contează pentru cuantilele din coadă (VaR), mai puțin pentru σ_t

SFM_ch9_garch_estimation

Graficele QQ ale reziduurilor standardizate



- Stînga: reziduurile modelului GARCH cu inovații Normale față de distribuția Normală: cuantila de 0,1% este $-4{,}81$, față de $-3{,}09$ teoretic
- Dreapta: reziduurile GARCH-t față de t standardizată cu $\hat{\nu} = 6{,}3$: $-4{,}79$ față de $-4{,}19$, mult mai aproape; cele mai mari scăderi rămîn mai adînci
- Interpretare: problema este coada stîngă: un motiv pentru inovații asimetrice și pentru modele asimetrice (secțiunea 8)

SFM_ch9_garch_estimation

Estimările GARCH(1,1)-t

	din	α	β	ν	$\alpha+\beta$	înjumătățire	vol. termen lung	vol. selecție
S&P 500	2000	0,123	0,872	6,26	0,9947	131	27,3	19,2
DAX	2000	0,097	0,895	7,08	0,9922	88	25,9	22,4
BET	2000	0,192	0,799	5,01	0,9907	74	34,7	22,1
Bitcoin	2014	0,109	0,891	3,18	1,000	–	–	66,6
TLV	2010	0,139	0,824	4,91	0,9630	18	28,2	26,5
SNP	2010	0,135	0,807	4,81	0,9425	12	25,6	24,5

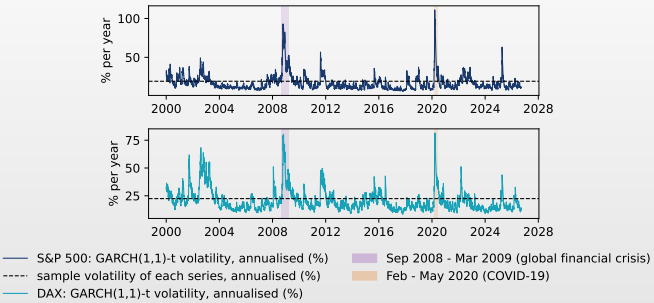
- Randamente logaritmice zilnice în % pînă la 18 septembrie 2026; SE robuste pentru $\hat{\alpha}$ și $\hat{\beta}$ între 0,010 și 0,041; timpul de înjumătățire în zile; volatilitățile anualizate cu numărul efectiv de observații pe an, în %
- Indicii: $\alpha+\beta$ între 0,9907 și 0,9947, timpi de înjumătățire de 74–131 de zile de tranzacționare; acțiunile BVB: memorie mai scurtă (TLV 18 zile, SNP 12 zile)
- BET: cel mai mare α (0,192): o reacție mai puternică la știri; toate valorile $\hat{\nu}$ sînt între 3,2 și 7,1: cozi groase peste tot

SFM_ch9_volatility_markets

Interpretarea rezultatelor: Bitcoin și volatilitatea pe termen lung

- Bitcoin: $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 1{,}0000$, pe frontiera $\alpha + \beta < 1$: un IGARCH
  - nu există timp de înjumătățire și nici volatilitate pe termen lung: modelul se comportă ca un EWMA cu $\lambda \approx 0{,}891$
  - $\hat{\nu} = 3{,}18$: cozi extrem de groase (momentul de ordinul patru al lui z_t nu există)
- **Întrebare pentru sală**: S&P 500: volatilitatea pe termen lung 27,3%, volatilitatea de selecție 19,2%. Este greșit modelul?
  - **Răspuns**: nu neapărat: $\bar{\sigma}^2 = \omega/(1 - \alpha - \beta)$ se împarte la $1 - \alpha - \beta = 0{,}0053$, un număr mic și imprecis
  - GARCH cu inovații Normale dă 18,1%; nivelul pe termen lung este cel mai puțin sigur rezultat al unui GARCH persistent

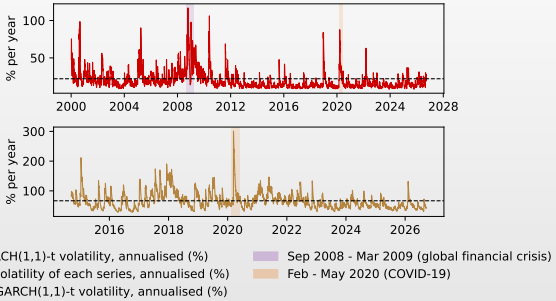
Volatilitatea condiționată: S&P 500 și DAX



- Volatilitatea GARCH(1,1)-t $\hat{\sigma}_t$, anualizată, ca în SFEvolgarchest; linia întreruptă: volatilitatea de selecție
- S&P 500: vîrfuri de 93% (16 octombrie 2008) și 111% (17 martie 2020); mediana 14%; la 18 septembrie 2026: 12%

SFM_ch9_volatility_markets

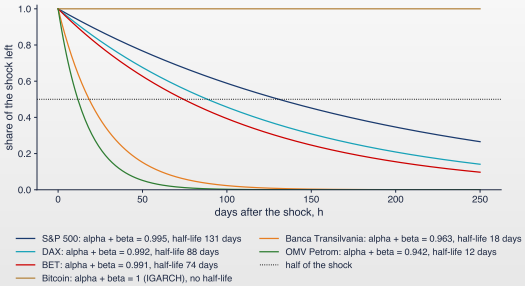
Volatilitatea condiționată: BET și Bitcoin



- BET: cel mai înalt vîrf în 2008 (117%, 15 octombrie 2008), mai mic în 2020 (88%); Bitcoin: 301% pe 13 martie 2020, mediana 59%
- Interpretare: șocul din 2020 a afectat toate piețele în aceeași săptămînă; volatilitatea mediană a Bitcoin este de 4,1 ori mai mare decît cea a S&P 500 (14%)

SFM_ch9_volatility_markets

Durata unui șoc de volatilitate



- Ponderea unui șoc de varianță rămasă după h zile: $(\alpha + \beta)^h$; timpul de înjumătățire este punctul în care curba trece de 1/2
- Interpretare: după o criză, S&P 500 are nevoie de circa jumătate de an ca să înjumătățească varianța în exces; OMV Petrom de circa două săptămîni; Bitcoin, niciodată

SFM_ch9_volatility_markets

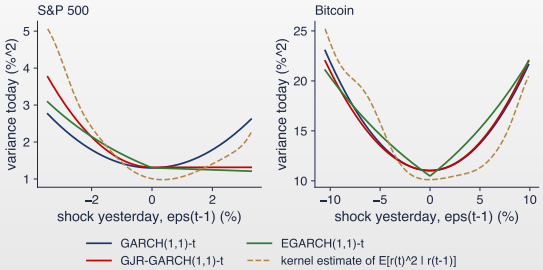
Efectul de levier

- Efectul de levier din secțiunea 1 Christie (1982) are două explicații
  - explicația prin **levier**: un preț mai mic al acțiunii crește raportul datorii/capitaluri proprii, deci acțiunea devine mai riscantă
  - **feedback-ul volatilității**: știrile despre un risc mai mare scad imediat prețurile
- GARCH(1,1) nu îl poate surprinde: σ_t^2 depinde de ε_{t-1}^2, nu de semnul lui ε_{t-1}
  - graficul QQ din secțiunea 6 și t asimetrică ($\hat{\lambda} < 0$) au arătat deja spre coada stîngă
- **NIC** (news impact curve, curba de impact a știrilor) Engle & Ng (1993): σ_t^2 ca funcție de ε_{t-1}, cu σ_{t-1}^2 fixat la varianța necondiționată

GJR-GARCH și EGARCH

- **GJR-GARCH** Glosten, Jagannathan & Runkle (1993): $\sigma_t^2 = \omega + (\alpha + \gamma\, I_{t-1})\, \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$, $I_{t-1} = 1$ dacă $\varepsilon_{t-1} < 0$, altfel 0
  - I_{t-1}: un indicator al unui șoc negativ ieri; γ: reacția suplimentară la știrile proaste
  - știri bune: panta α; știri proaste: $\alpha + \gamma$; efect de levier: $\gamma > 0$
  - persistența $\alpha + \beta + \gamma/2$ pentru z_t simetric (jumătate dintre șocuri sînt negative)
- **EGARCH** (exponential GARCH, GARCH exponențial) Nelson (1991):
  $\ln \sigma_t^2 = \omega + \alpha\big(|z_{t-1}| - E|z_{t-1}|\big) + \gamma z_{t-1} + \beta \ln \sigma_{t-1}^2$
  - $|z_{t-1}| - E|z_{t-1}|$: mărimea șocului standardizat de ieri peste media ei ($E|z| = \sqrt{2/\pi}$ pentru z Normal)
  - logaritmul păstrează $\sigma_t^2 > 0$ fără restricții de semn asupra parametrilor
  - efect de levier: $\gamma < 0$ (un z_{t-1} negativ crește $\ln \sigma_t^2$); persistența: β
- Ambele modele, precum și GARCH cu prag (threshold GARCH), sînt tratate în Franke, Härdle & Hafner (2019), secțiunea 13.2

Curbele de impact ale știrilor: S&P 500 și Bitcoin



- Curbele modelelor: σ_t^2 în funcție de ε_{t-1}, cu σ_{t-1}^2 fixat la varianța de selecție; linia întreruptă: o estimare nucleu (Nadaraya–Watson) a lui $E[r_t^2 \mid r_{t-1}]$, ideea din SFENewsImpactCurve
- S&P 500, GJR: după o scădere de 2%, varianța de mîine este de 1,62 ori mai mare decît după o creștere de 2%; Bitcoin: raportul 1,00, o curbă simetrică

SFM_ch9_asymmetry

Asimetria pe șase piețe

	GJR α	GJR γ	$t(\gamma)$	LR	p	EGARCH γ	$t(\gamma)$
S&P 500	0,000	0,205	10,0	235,7	$<0{,}001$	$-0{,}165$	$-15{,}2$
DAX	0,000	0,163	8,7	204,5	$<0{,}001$	$-0{,}133$	$-11{,}8$
BET	0,172	0,043	2,1	4,9	0,026	$-0{,}028$	$-2{,}6$
Bitcoin	0,113	$-0{,}013$	$-0{,}7$	0,7	0,416	0,015	1,2
TLV	0,101	0,065	2,7	7,8	0,005	$-0{,}040$	$-3{,}0$
SNP	0,117	0,033	1,4	1,7	0,188	$-0{,}027$	$-1{,}9$

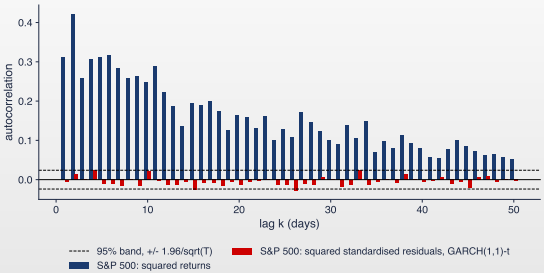
- Inovații Student-t; statistici t cu SE robuste; LR (likelihood ratio, raportul de verosimilitate) $= 2(\ell_{GJR} - \ell_{GARCH}) \sim \chi^2(1)$
- S&P 500 și DAX: GJR $\hat{\alpha} = 0$: doar știrile proaste cresc volatilitatea; un efect de levier foarte puternic
- BET și TLV: un efect slab, semnificativ după testul LR, dar BIC preferă modelul GARCH simetric; SNP: nesemnificativ la 5%; Bitcoin: niciun efect (în EGARCH, γ este ușor pozitiv și nesemnificativ)
- Interpretare: efectul de levier este o proprietate a piețelor mature de acțiuni; la cripto, creșterile mari cresc volatilitatea la fel de mult ca scăderile mari

SFM_ch9_asymmetry

Verificarea unui model estimat

- Dacă modelul este corect, **reziduurile standardizate** $\hat{z}_t = (r_t - \hat{\mu})/\hat{\sigma}_t$ sînt aproape i.i.d., cu media 0 și varianța 1
  - **LB** (Ljung–Box) $Q(10)$ pe $\hat{z}_t$: nu a rămas autocorelație în medie (Capitolul 7) Ljung & Box (1978)
  - $Q(10)$ pe $\hat{z}_t^2$ și testul ARCH-LM: nu au rămas efecte ARCH (Capitolul 8)
  - graficul QQ al lui $\hat{z}_t$: este corectă distribuția presupusă? (secțiunea 6)
- **Testul de asimetrie (sign bias)** Engle & Ng (1993): regresia lui $\hat{z}_t^2$ pe I_{t-1}, $I_{t-1}\hat{\varepsilon}_{t-1}$ și $(1 - I_{t-1})\hat{\varepsilon}_{t-1}$
  - testul comun $TR^2 \sim \chi^2(3)$: o respingere înseamnă că semnul șocurilor trecute încă anticipează varianța (lipsește asimetria)
- Un diagnostic fără respingere nu dovedește că modelul este corect; o respingere arată unde greșește

Autocorelațiile eliminate de GARCH



- ACF a lui r_t^2: 0,31 la lagul 1 și încă 0,053 la lagul 50; ACF a lui $\hat{z}_t^2$ (GARCH(1,1)-t): $-0{,}005$ la lagul 1, cel mult 0,028 în valoare absolută; banda $\pm 0{,}024$
- Interpretare: trei parametri absorb aproape tot volatility clustering din datele zilnice de după 2000

SFM_ch9_diagnostics

Diagnostic pe date reale

S&P 500	$Q(10)$ (p)	$Q(10)$ al pătratelor (p)	ARCH-LM(5) (p)	sign bias $\chi^2(3)$ (p)
randamente r_t	96,3 ($<0{,}001$)	6133 ($<0{,}001$)	1679 ($<0{,}001$)	–
$\hat{z}_t$, GARCH Normal	21,2 (0,020)	16,4 (0,089)	8,0 (0,154)	–
$\hat{z}_t$, GARCH-t	21,9 (0,016)	13,6 (0,192)	5,8 (0,326)	40,7 ($<0{,}001$)

- GARCH elimină efectele ARCH ($Q(10)$ al pătratelor: de la 6133 la 13,6); rămîne puțină autocorelație în medie (modelul are media constantă)
- Testul de asimetrie respinge pentru GARCH simetric (t al semnului $= 3{,}56$): lipsește asimetria din secțiunea 8; la fel pentru DAX ($p < 0{,}001$) și BET ($p = 0{,}009$)
- Celelalte piețe, $Q(10)$ al lui $\hat{z}_t^2$ (GARCH-t): p între 0,115 (DAX) și 0,993 (TLV): nu a rămas niciun efect ARCH

SFM_ch9_diagnostics

Nouă modele pentru S&P 500

- **AIC** (Akaike information criterion, criteriul informațional Akaike) $= -2\ell + 2k$ Akaike (1974); **BIC** (Bayesian information criterion, criteriul informațional bayesian) $= -2\ell + k \ln T$ Schwarz (1978); ℓ: log-verosimilitatea maximă, k parametri, T observații; valoarea mai mică este mai bună (Capitolul 6)

	Normal		Student-t		t asimetrică	
	log-verosim.	ΔBIC	log-verosim.	ΔBIC	log-verosim.	ΔBIC
GARCH(1,1)	−9218,0	648,9	−9062,5	346,7	−9038,4	307,4
GJR-GARCH(1,1)	−9086,5	394,7	−8944,6	119,9	−8905,1	49,6
EGARCH(1,1)	−9075,6	372,9	−8922,1	74,8	−8880,3	0,0

- ΔBIC: diferența față de cel mai bun model; AIC dă aceeași ordine
- Ambele alegeri contează: pornind de la GARCH cu inovații Normale, doar asimetria (EGARCH cu inovații Normale) reduce BIC cu 276, doar cozile groase (GARCH cu t asimetrică) cu 341, iar ambele împreună cu 649
- Interpretare: EGARCH cu inovații t asimetrice cîștigă; cu 6 714 observații chiar și îmbunătățirile mici sînt „semnificative"; comparația prognozelor din secțiunea 11 este testul real

SFM_ch9_diagnostics

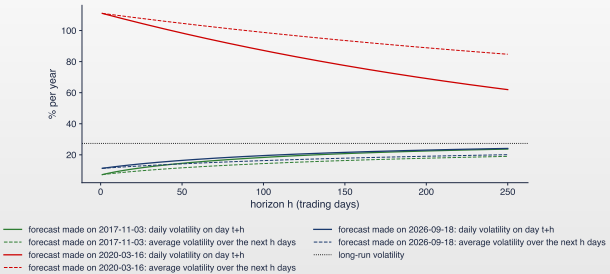
Prognoze pe mai mulți pași

- Un pas: $\sigma^2_{t+1} = \omega + \alpha\varepsilon^2_t + \beta\sigma^2_t$ este cunoscut la sfîrșitul zilei t
  - doi pași: $E_t[\sigma^2_{t+2}] = \omega + \alpha E_t[\varepsilon^2_{t+1}] + \beta\sigma^2_{t+1} = \omega + (\alpha+\beta)\sigma^2_{t+1}$, deoarece $E_t[\varepsilon^2_{t+1}] = \sigma^2_{t+1}$
- Prin inducție: $E_t[\sigma^2_{t+h}] = \bar{\sigma}^2 + (\alpha+\beta)^{h-1}(\sigma^2_{t+1} - \bar{\sigma}^2)$
  - E_t: media condiționată de informația de la sfîrșitul zilei t; h: orizontul, în zile
  - prognoza converge spre varianța pe termen lung; viteza este dată de $\alpha+\beta$
- Varianța randamentului pe H zile: suma prognozelor zilnice (randamentele sînt necorelate)
  - $\mathrm{Var}_t(r_{t+1} + \cdots + r_{t+H}) = \sum_{h=1}^{H} E_t[\sigma^2_{t+h}]$, nu $H\sigma^2_{t+1}$
  - regula rădăcinii pătrate a timpului, $\sigma_{t+1}\sqrt{H}$, dă valori prea mari în criză și prea mici într-o perioadă liniștită

Exemplu rezolvat: S&P 500 la 18 septembrie 2026

- GARCH(1,1)-t: $\alpha + \beta = 0{,}9947$, $\bar{\sigma}^2 = 2{,}972$; prognoza pentru ziua următoare $\sigma^2_{t+1} = 0{,}509$ (sub nivelul pe termen lung)
- Pas cu pas
  - ziua 10: $2{,}972 + 0{,}9947^9(0{,}509 - 2{,}972) = 2{,}972 + 0{,}953 \times (0{,}509 - 2{,}972) = 0{,}624$
  - varianța pe 10 zile: suma celor zece prognoze zilnice $= 5{,}67$, deci volatilitatea pe 10 zile este 2,38%
  - regula rădăcinii pătrate a timpului: $\sqrt{10 \times 0{,}509} = 2{,}26\%$: prea mică, deoarece volatilitatea este așteptată să crească spre nivelul ei pe termen lung

Structura la termen a volatilității



- S&P 500, GARCH(1,1)-t estimat pe toate datele; prognoze făcute într-o zi liniștită (3 noiembrie 2017), în vîrful pandemiei COVID-19 (16 martie 2020) și la 18 septembrie 2026
- Ziua liniștită: 7,3% mîine, în medie 19,0% pe un an; vîrful COVID-19: 111,0% mîine, încă 84,7% în medie pe un an
- Interpretare: toate curbele se îndreaptă spre nivelul pe termen lung (27,3%) cu aceeași viteză redusă: panta structurii la termen arată dacă sîntem într-o perioadă liniștită sau într-una turbulentă

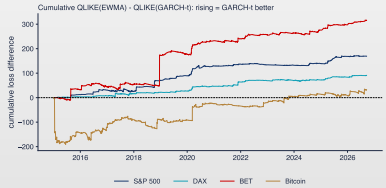
SFM_ch9_forecasts

Evaluarea unei prognoze de volatilitate

- Adevăratul σ_t^2 nu este observat niciodată: comparăm prognoza h_t cu o **aproximare** zgomotoasă, aici r_t^2
  - $E_{t-1}[r_t^2] = \sigma_t^2$ (cu $\mu \approx 0$), dar r_t^2 este foarte zgomotos: un R^2 mic chiar și pentru o prognoză perfectă Andersen & Bollerslev (1998)
- Funcția de pierdere **QLIKE** Patton (2011): $L(r_t^2, h_t) = \dfrac{r_t^2}{h_t} + \ln h_t$ (pînă la o constantă); valoarea mai mică este mai bună
  - h_t: prognoza variației pentru ziua t, făcută la sfîrșitul zilei $t-1$
  - ordonează corect prognozele chiar și cu o aproximare zgomotoasă; este minus log-verosimilitatea Normală
  - penalizează mai mult prognozele prea mici decît pe cele prea mari
- **În afara eșantionului**: din 2015, fiecare prognoză folosește doar date pînă în ziua precedentă; modelele se reestimează la fiecare 250 de zile
  - testul **DM** (Diebold–Mariano) Diebold & Mariano (1995): este diferența medie a pierderilor egală cu zero? t cu erori standard HAC (heteroskedasticity and autocorrelation consistent, robuste la heteroscedasticitate și autocorelație)

GARCH față de EWMA, în afara eșantionului

2015–2026	zile	QLIKE GARCH-t	QLIKE GJR-t	QLIKE EWMA	DM t, GARCH-t față de EWMA (p)
S&P 500	2 944	0,761	0,733	0,819	$-3{,}69$ ($<0{,}001$)
DAX	2 973	1,090	1,064	1,121	$-3{,}19$ (0,001)
BET	2 926	0,680	0,674	0,788	$-2{,}22$ (0,027)
Bitcoin	4 279	3,383	3,401	3,390	$-0{,}20$ (0,845)



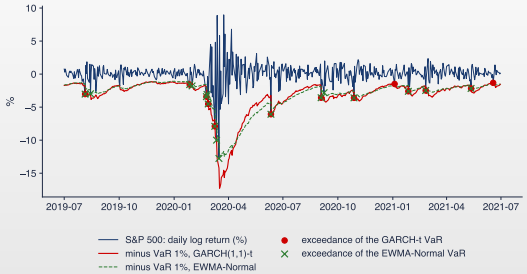
- Indicii de acțiuni: GARCH-t este mai bun decît EWMA ($t < -2$); GJR-t este și mai bun pentru S&P 500, DAX și BET
- Interpretare: Bitcoin: nicio diferență ($t = -0{,}20$): GARCH-ul lui este un IGARCH, adică aproape un EWMA (secțiunea 7)

SFM_ch9_forecasts

VaR condiționat

- **VaR** la nivelul α (value at risk, valoarea expusă la risc): pierderea depășită cu probabilitatea α: $\mathrm{VaR}_\alpha = -q_\alpha(r_{t+1})$ (Capitolul 6)
  - aici α este nivelul VaR, nu parametrul GARCH; q_α: cuantila de ordin α
  - aici $\alpha = 1\%$: VaR 1%, o pierdere depășită într-o zi din o sută
- Cu $r_{t+1} = \mu + \sigma_{t+1} z_{t+1}$: $\mathrm{VaR}_{t+1} = -(\mu + \sigma_{t+1}\, q_\alpha(z))$
  - Normală: $q_{0,01} = -2{,}326$; t standardizată: $q_{0,01} = t_\nu^{-1}(0{,}01)\sqrt{(\nu-2)/\nu}$
  - $t_\nu^{-1}(0{,}01)$: cuantila de 1% a distribuției Student-t cu ν grade de libertate; rădăcina o rescalează la varianța 1
  - VaR se schimbă în fiecare zi odată cu σ_{t+1}: mare în perioadele turbulente, mic în perioadele liniștite
- **Exemplu rezolvat**: S&P 500 la 18 septembrie 2026, GARCH(1,1)-t: $\hat{\mu} = 0{,}079$, $\sigma_{t+1} = 0{,}714$, $\hat{\nu} = 6{,}26$
  - $q_{0,01}(z) = -3{,}100 \times 0{,}825 = -2{,}557$; VaR 1% $= -(0{,}079 + 0{,}714 \times (-2{,}557)) = 1{,}75\%$
  - cu z_t Normale: 1,58%; pe 10 zile (suma variațelor, fără μ): $2{,}557 \times \sqrt{5{,}67}$, circa 6,09%, o aproximare: randamentul pe 10 zile nu este Student-t cu același ν, iar cuantila lui cere simulare

VaR 1% în timpul crahului COVID-19



- S&P 500, iulie 2019 – iunie 2021 (505 zile): VaR 1% pe o zi din GARCH(1,1)-t (reestimat la fiecare 250 de zile) și din EWMA cu z_t Normale
- Depășiri (randament sub −VaR): GARCH-t 13, EWMA-Normal 17; așteptat circa 5; ambele modele reacționează, dar abia după primele scăderi mari din martie 2020

SFM_ch9_forecasts

Depășiri 2015–2026: o primă privire asupra backtesting-ului

VaR 1%	zile	așteptat	GARCH-t	EWMA-Normal
S&P 500	2 944	29	49 (1,66%)	65 (2,21%)
DAX	2 973	30	45 (1,51%)	74 (2,49%)
BET	2 926	29	34 (1,16%)	67 (2,29%)
Bitcoin	4 279	43	64 (1,50%)	93 (2,17%)

- Un VaR 1% corect este depășit în 1% dintre zile, iar depășirile nu apar grupat
- EWMA-Normal: 2,2–2,5%: cuantila Normală este prea mică pentru cozi groase
- GARCH-t: 1,2–1,7%: mult mai aproape de 1%, dar tot peste 1% pe toate cele patru piețe, mai ales pentru S&P 500, DAX (lipsește efectul de levier) și Bitcoin
- Sînt aceste diferențe semnificative? Capitolul 10: testul Kupiec (1995), ES 2,5%, backtesting
- Lectură suplimentară despre prognoza VaR pentru Bitcoin: Pele & Mazurencu-Marinescu-Pele (2019)

SFM_ch9_forecasts

O întrebare de cercetare deschisă

- **Devine volatilitatea Bitcoin mai asemănătoare cu volatilitatea unui indice de acțiuni?**
  - azi: IGARCH, $\hat{\nu} = 3{,}18$, fără efect de levier; S&P 500: revenire la medie, efect de levier puternic
  - din 2024, ETF-urile (exchange-traded funds, fonduri tranzacționate la bursă) pe Bitcoin aduc investitorii din piața de acțiuni pe piața cripto
- Dovezi anterioare despre activele cripto ca o clasă de active: Pele et al. (2023); volatilitatea ca informație: Pele, Lazar & Dufour (2017)
- Întrebarea rămîne deschisă: schimbările de regim, prăbușirea pieței cripto din 2022 și lansarea ETF-urilor se suprapun; răspunsul depinde de fereastra aleasă
- Instrumentele AI pot accelera un astfel de studiu, dar rezultatele lui trebuie verificate Wang et al. (2023)

Utilizări posibile ale instrumentelor AI

- **Literatura**: o listă a studiilor despre modelele GARCH pentru active cripto și a modelelor folosite
- **Cod**: o primă versiune a estimărilor GJR-GARCH-t pe ferestre mobile pentru Bitcoin și S&P 500, cu pachetul `arch`
- **Robustețe**: alte ferestre, Ethereum, eliminarea zilelor de weekend, inovații t asimetrice
- Exemplu de prompt
  - `Write Python code that estimates a GJR-GARCH(1,1) model with Student-t innovations on daily Bitcoin and S&P 500 log returns in percent, on rolling windows of 750 days moved by 21 days, and plots the persistence, gamma and nu over time.`

Verificări necesare

- Unitățile: randamente în % (nu în zecimale), altfel algoritmul de optimizare se poate opri la un ω greșit
- Persistența GJR este $\alpha + \beta + \gamma/2$, nu $\alpha + \beta$; pentru EGARCH este β
- Estimările pe frontieră ($\alpha + \beta = 1$): fără timp de înjumătățire și fără volatilitate pe termen lung; nu raportăm valori infinite
- Calendarele: Bitcoin se tranzacționează 7 zile pe săptămînă, S&P 500 cinci; anualizăm fiecare serie cu propria frecvență
- Ferestrele mobile se suprapun: estimările consecutive nu sînt dovezi independente
- Referințele: fiecare lucrare citată trebuie să existe; verificați DOI-ul

Idee de proiect

- **Întrebarea**: s-a apropiat volatilitatea Bitcoin de volatilitatea acțiunilor după 2021?
  - date: Bitcoin din 2014, Ethereum din 2015, S&P 500 și BET (EODHD)
- Pași
  - GJR-GARCH-t pe 2015–2019 și pe 2021–2026: persistența, γ, ν
  - corelația volatilităților GARCH ale Bitcoin și S&P 500 în fiecare perioadă
  - QLIKE în afara eșantionului pentru GARCH față de EWMA, în fiecare perioadă
- Livrabil: un tabel, un grafic și un paragraf despre ce pot și ce nu pot arăta datele
- Declarați orice utilizare a instrumentelor AI și enumerați erorile acestora pe care le-ați corectat

Idei de reținut

- Randamentele: media imprevizibilă, varianța previzibilă: $r_t = \mu + \sigma_t z_t$
- GARCH(1,1), cu trei parametri, surprinde volatility clustering în toate seriile noastre; $\alpha + \beta$ este apropiat de 1
- Estimăm prin verosimilitate maximă și raportăm SE robuste; inovații Student-t sau t asimetrice pentru cozi
- S&P 500 și DAX au nevoie de asimetrie (GJR, EGARCH); la BET ea este slabă (BIC preferă GARCH simetric); Bitcoin nu are nevoie de ea și este un IGARCH
- Prognozele revin la nivelul pe termen lung; GARCH este mai bun decît EWMA în afara eșantionului acolo unde volatilitatea revine la medie
- VaR 1% $= -(\mu + \sigma_{t+1} q_{0,01}(z))$: contează atît modelul volatilității, cît și cuantila

Formule de reținut

Mărimea	**Formula**
ARCH(q)	$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2, \quad \bar{\sigma}^2 = \omega/(1 - \sum \alpha_i)$
GARCH(1,1)	$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2, \quad \bar{\sigma}^2 = \omega/(1 - \alpha - \beta)$
Timpul de înjumătățire	$h_{1/2} = \ln 0{,}5 / \ln(\alpha + \beta)$
GJR-GARCH	$\sigma_t^2 = \omega + (\alpha + \gamma I_{t-1})\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$
EGARCH	$\ln \sigma_t^2 = \omega + \alpha(\lvert z_{t-1}\rvert - E\lvert z_{t-1}\rvert) + \gamma z_{t-1} + \beta \ln \sigma_{t-1}^2$
Log-verosimilitatea (Normală)	$\ell = -\frac{1}{2} \sum_t [\ln 2\pi + \ln \sigma_t^2 + (r_t - \mu)^2/\sigma_t^2]$
Prognoza	$E_t[\sigma_{t+h}^2] = \bar{\sigma}^2 + (\alpha + \beta)^{h-1}(\sigma_{t+1}^2 - \bar{\sigma}^2)$
QLIKE	$L = r_t^2/h_t + \ln h_t$
VaR 1%	$-(\mu + \sigma_{t+1}\, q_{0,01}(z))$

Autoevaluare

- **Întrebare**: $\omega = 0{,}05$, $\alpha = 0{,}05$, $\beta = 0{,}90$. Care sînt varianța pe termen lung și timpul de înjumătățire?
  - **Răspuns**: $0{,}05/0{,}05 = 1$; $\ln 0{,}5 / \ln 0{,}95 = 13{,}5$ zile
- **Întrebare**: GJR dă $\hat{\alpha} = 0$, $\hat{\gamma} = 0{,}2$. Ce se întîmplă după o creștere de 3%?
  - **Răspuns**: șocul nu adaugă nimic: $\sigma^2_{t+1} = \omega + \beta\sigma^2_t$, ca după o zi cu $\varepsilon_t = 0$ (dacă $\varepsilon_t = r_t - \mu > 0$); doar șocurile negative cresc varianța
- **Întrebare**: $Q(10)$ al lui $\hat{z}^2_t$ are p $= 0{,}40$. Este modelul corect?
  - **Răspuns**: știm doar că nu a rămas niciun efect ARCH; pot rămîne asimetria sau o distribuție greșită
- Urmează: Capitolul 10, VaR, ES și backtesting

Bibliografie (1/2)

- Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(6), 716–723.
- Andersen, T.G., Bollerslev, T. (1998). Answering the skeptics: yes, standard volatility models do provide accurate forecasts. *International Economic Review*, 39(4), 885–905.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3), 307–327.
- Bollerslev, T. (1987). A conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return. *Review of Economics and Statistics*, 69(3), 542–547.
- Bollerslev, T., Wooldridge, J.M. (1992). Quasi-maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time-varying covariances. *Econometric Reviews*, 11(2), 143–172.
- Borak, S., Härdle, W.K., López-Cabrera, B. (2013). *Statistics of Financial Markets: Exercises and Solutions*, 2nd ed. Springer.
- Christie, A.A. (1982). The stochastic behavior of common stock variances: value, leverage and interest rate effects. *Journal of Financial Economics*, 10(4), 407–432.
- Diebold, F.X., Mariano, R.S. (1995). Comparing predictive accuracy. *Journal of Business & Economic Statistics*, 13(3), 253–263.
- Engle, R.F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, 50(4), 987–1007.
- Engle, R.F. (2004). Risk and volatility: econometric models and financial practice. *American Economic Review*, 94(3), 405–420.
- Engle, R.F., Bollerslev, T. (1986). Modelling the persistence of conditional variances. *Econometric Reviews*, 5(1), 1–50.
- Engle, R.F., Ng, V.K. (1993). Measuring and testing the impact of news on volatility. *Journal of Finance*, 48(5), 1749–1778.
- Franke, J., Härdle, W.K., Hafner, C.M. (2019). *Statistics of Financial Markets: An Introduction*, 5th ed. Springer.

Bibliografie (2/2)

- Glosten, L.R., Jagannathan, R., Runkle, D.E. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *Journal of Finance*, 48(5), 1779–1801.
- Hansen, B.E. (1994). Autoregressive conditional density estimation. *International Economic Review*, 35(3), 705–730.
- Hansen, P.R., Lunde, A. (2005). A forecast comparison of volatility models: does anything beat a GARCH(1,1)? *Journal of Applied Econometrics*, 20(7), 873–889.
- Kupiec, P.H. (1995). Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. *Journal of Derivatives*, 3(2), 73–84.
- Ljung, G.M., Box, G.E.P. (1978). On a measure of lack of fit in time series models. *Biometrika*, 65(2), 297–303.
- Nelson, D.B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach. *Econometrica*, 59(2), 347–370.
- Patton, A.J. (2011). Volatility forecast comparison using imperfect volatility proxies. *Journal of Econometrics*, 160(1), 246–256.
- Pele, D.T., Lazar, E., Dufour, A. (2017). Information entropy and measures of market risk. *Entropy*, 19(5), 226.
- Pele, D.T., Mazurencu-Marinescu-Pele, M. (2019). Using high-frequency entropy to forecast Bitcoin's daily value at risk. *Entropy*, 21(2), 102.
- Pele, D.T., Wesselhöfft, N., Härdle, W.K., Kolossiatis, M., Yatracos, Y.G. (2023). Are cryptos becoming alternative assets? *European Journal of Finance*, 29(10), 1064–1105.
- Schwarz, G. (1978). Estimating the dimension of a model. *Annals of Statistics*, 6(2), 461–464.
- Tsay, R.S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*, 3rd ed. Wiley.
- Wang, H., Fu, T., Du, Y., Gao, W., et al. (2023). Scientific discovery in the age of artificial intelligence. *Nature*, 620, 47–60.