



Statistica Piețelor Financiare

Seminar 2: Distribuții Clasice — Normal, Student- t și Pareto



Daniel Traian PELE

Antoaneta Amza

Academia de Studii Economice din București

IDA Institute Digital Assets

Blockchain Research Center

AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance

Academia Română, Institutul de Prognostic Economică

MSCA Digital Finance

Cuprins Seminar

- ▣ **Recapitulare Rapidă** – Formule cheie, proprietăți și comparații
- ▣ **Test Grilă** – 15 întrebări cu variante de răspuns
- ▣ **Întrebări Adevărat/Fals** – 14 întrebări de evaluare conceptuală
- ▣ **Exerciții de Calcul** – 8 probleme rezolvate pas cu pas
- ▣ **Exerciții Python** – 6 exerciții de implementare și vizualizare
- ▣ **Întrebări de Discuție** – 4 scenarii și gândire critică
- ▣ **Exerciții cu asistență AI** – Gândire critică cu LLM
- ▣ **Rezumat** – Concluzii și pași următori

Formule Cheie de Reținut

Distribuția Normală:

- PDF: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$
- Skewness: $S = 0$, Kurtosis: $K = 3$

Student-t:

- Exces kurtosis: $\kappa = 6/(\nu - 4)$, $\nu > 4$
- $\nu \rightarrow \infty \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$

Pareto:

- Supraviețuire: $\bar{F}(x) = (x_m/x)^\alpha$
- $\mathbb{E}[X] = \alpha x_m / (\alpha - 1)$, $\alpha > 1$

Măsurile de Risc:

- VaR Normal: $\text{VaR}_\alpha = -(\mu + z_\alpha \sigma)$
- ES Normal: $\text{ES}_\alpha = -\mu + \sigma \cdot \phi(z_\alpha)/\alpha$
- $\text{ES} \geq \text{VaR}$ întotdeauna

Selecția Modelului:

- AIC: $-2\ell + 2k$
- BIC: $-2\ell + k \ln n$

Testul Jarque-Bera:

- $JB = \frac{n}{6} \left(\hat{S}^2 + \frac{(\hat{K}-3)^2}{4} \right) \sim \chi^2(2)$

Rezumatul Conceptelor Cheie

Concept	Punct Cheie	Când se Folosește
Normal Student- t Pareto	$S = 0, K = 3$; complet specificată de μ, σ Cozi grele, $\kappa = 6/(\nu - 4)$ Declin polinomial $x^{-\alpha}$	Benchmark, ipoteză nulă Randamente zilnice ($\nu \approx 3-8$) Modelarea cozilor extreme
VaR ES	Cuantila pierderilor Media pierderilor $> \text{VaR}$	Limita de pierdere la nivel α Măsură coerentă de risc
AIC/BIC Jarque-Bera	Penalizare complexitate H_0 : normalitate ($S = 0, K = 3$)	Selecția modelului distribuțional Test de normalitate

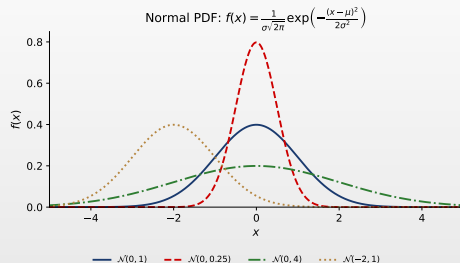
Regula Empirică și Limitele Distribuției Normale

Regula 68–95–99.7:

- $\Pr(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 68.3\%$
- $\Pr(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 95.4\%$
- $\Pr(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 99.7\%$

De ce eșuează pe piețe?

- Regula prezice: doar 0.3% dincolo de 3σ
- Realitate: randamente de 5σ – 10σ apar de **zeci de ori** mai frecvent
- **Exemplu:** “Luni Neagră” (1987): $-22\% \approx 25\sigma$
- Sub Normal: $\Pr < 10^{-100}$ — practic imposibil



Distribuția normală: simetrică, cozi exponențiale

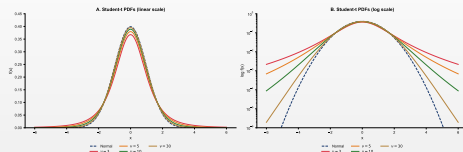
Student- t : Efectul Gradelor de Libertate ν

▣ Cum ν controlează forma distribuției:

ν	Varianță	Kurtosis	Cozi
1 (Cauchy)	∞	∞	Foarte grele
3	3.0	∞	Grele
5	1.67	9.0	Moderate
10	1.25	4.0	Ușoare
30	1.07	3.2	$\approx$ Normal
∞	1.00	3.0	Normal

▣ Randamente financiare: $\hat{\nu} \approx 3-8$

▣ Cu cât ν mai mic, cu atât mai multe evenimente extreme



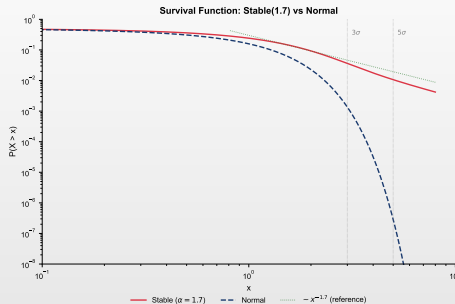
Student- t : de la Cauchy ($\nu = 1$) la Normal ($\nu = \infty$)

Distribuția Pareto și Legea de Putere

- ▣ **Legea de putere:** $\Pr(X > x) \sim x^{-\alpha}$
- ▣ **Declin polinomial** vs exponențial (Normal)
- ▣ Cozile sunt **mult** mai groase

- ▣ **Aplicații în finanțe:**
 - ▣ Pierderi extreme (cozile randamentelor)
 - ▣ Distribuția bogăției (regula 80/20)
 - ▣ Volumele de tranzacționare
 - ▣ Dimensiunea companiilor pe bursă

- ▣ **Proprietate cheie (scalabilitate):**
 - ▣ $\Pr(X > 2x \mid X > x) = 2^{-\alpha}$, constant în x
 - ▣ Probabilitatea condițională nu depinde de prag!



Pareto: declin polinomial pe log-log

Comparație: Cozile Distribuțiilor

- ▣ Rata de declin a cozilor — de la ușoare la grele:

Distribuție	Declin coadă	Momente finite	VaR 1% ($\sigma = 1\%$)	Utilizare
Normal	$e^{-x^2/2}$	Toate	2.33%	Benchmark
Student- t ($\nu = 5$)	$x^{-(\nu+1)}$	$p < \nu$	3.37%	Randamente zilnice
Pareto ($\alpha = 3$)	$x^{-\alpha}$	$p < \alpha$	9.28%	Pierderi extreme
Cauchy ($\nu = 1$)	x^{-2}	Niciun moment	–	Caz limită

- ▣ $\Rightarrow$ Cu cât cozile sunt mai grele, cu atât VaR crește **dramatic**
- ▣ Diferența este mică la 5%, dar **enormă** la 0.1%
- ▣ Alegerea distribuției contează cel mai mult în **cozile extreme**

Test 1: Testul Jarque–Bera

Întrebare

Testul Jarque–Bera verifică:

Variante de răspuns

- (A) Staționaritatea seriei
- (B) Normalitatea distribuției
- (C) Absența autocorelației
- (D) Homoscedasticitatea

Test 1: Răspuns

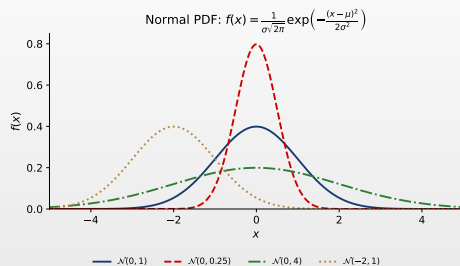
Răspuns: B

Normalitatea distribuției

Explicație:

$$JB = \frac{n}{6} \left(\hat{S}^2 + \frac{(\hat{K} - 3)^2}{4} \right) \sim \chi^2(2)$$

- H_0 : Distribuția este normală ($S = 0, K = 3$)
- H_1 : Distribuția nu este normală
- Se bazează pe skewness și kurtosis

Distribuția normală: $S = 0, K = 3$

SFM_ch2_normal_distribution

Test 2: Excesul de kurtosis

Întrebare

Excesul de kurtosis al distribuției Student- t cu $\nu = 6$ este:

Variante de răspuns

- (A) 1.5
- (B) 3.0
- (C) 6.0
- (D) Nu există

Test 2: Răspuns

Răspuns: B

$$\kappa = 6/(6 - 4) = 3.0$$

□ **Formula excesului de kurtosis:**

$$\kappa = \frac{6}{\nu - 4} \quad \text{pentru } \nu > 4$$

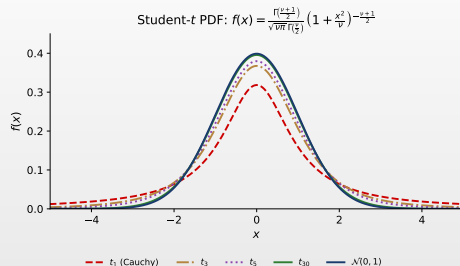
□ Verificarea opțiunilor:

□ A: $\kappa = 1.5$ ar necesita $\nu = 8$ ✗

□ B: $\kappa = 6/(6 - 4) = 3.0$ ✓

□ C: $\kappa = 6.0$ ar necesita $\nu = 5$ ✗

□ D: Kurtosis există pentru $\nu > 4$ ✗



Student-t: cozi grele, $\kappa > 0$

SFM_ch2_student_t

Test 3: VaR Normal

Întrebare

VaR Normal la 1% cu $\mu = 0$, $\sigma = 1\%$ este aproximativ:

Variante de răspuns

- (A) 1.65%
- (B) 2.33%
- (C) 3.09%
- (D) 3.72%

Test 3: Răspuns

Răspuns: B

$$\text{VaR}_{1\%} = 2.326 \times 1\% \approx 2.33\%$$

□ **Formula VaR Normal:**

$$\text{VaR}_{\alpha} = -(\mu + z_{\alpha} \cdot \sigma)$$

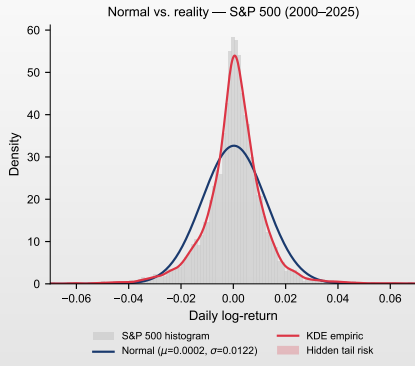
□ Cuantilele cheie:

□ A: $z_{5\%} = -1.645$ ✗

□ B: $z_{1\%} = -2.326$ ✓

□ C: $z_{0.1\%} = -3.090$ ✗

□ D: Nu corespunde unui nivel standard ✗



VaR: cuantila stângă a distribuției

 **SFM_ch2_risk_management**

Test 4: Student- t și convergența

Întrebare

Când $\nu \rightarrow \infty$, distribuția Student- t :

Variante de răspuns

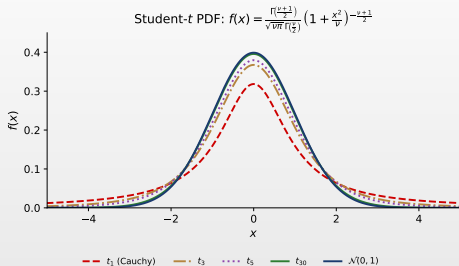
- (A) Converge la Cauchy
- (B) Converge la Normal
- (C) Varianța devine infinită
- (D) Nu converge

Test 4: Răspuns

Răspuns: B

Converge la distribuția normală standard

- ▣ **Ierarhia distribuțiilor:**
- ▣ $\nu = 1$: Cauchy (cozi foarte grele)
- ▣ $\nu = 3-8$: randamente financiare tipice
- ▣ $\nu = 30$: aproape normală
- ▣ $\nu \rightarrow \infty$: exact $\mathcal{N}(0, 1)$
- ▣ $\Rightarrow$ Distribuția normală este un **caz limită** al Student- t .



Student- t converge la normal pe măsură ce $\nu \rightarrow \infty$

 SFM_ch2_student_t

Test 5: Expected Shortfall

Întrebare

Care afirmație despre ES este **adevărată**?

Variante de răspuns

- (A) $ES < VaR$ întotdeauna
- (B) $ES \geq VaR$ întotdeauna
- (C) $ES = VaR$ sub normalitate
- (D) ES nu este definit sub Student- t

Test 5: Răspuns

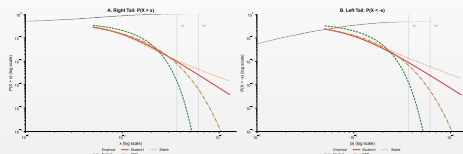
Răspuns: B

 $ES \geq VaR$ întotdeauna

Definiția ES:

$$ES_{\alpha} = \mathbb{E}[-X \mid -X > VaR_{\alpha}]$$

- ES este media pierderilor *condiționate* de depășirea VaR $\Rightarrow$ nu poate fi mai mică decât VaR.
- Sub normalitate: $ES/VaR \approx 1.14$ la 1%.
- Sub Student- t : raportul crește cu scăderea ν .



ES: aria sub coadă dincolo de VaR

Test 6: Faptele stilizate

Întrebare

Care dintre următoarele NU este un fapt stilizat al randamentelor financiare?

Variante de răspuns

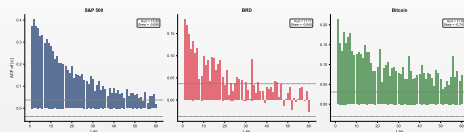
- (A) Cozi grele (leptokurtosis)
- (B) Volatility clustering
- (C) Distribuție normală perfectă
- (D) Asimetrie negativă

Test 6: Răspuns

Răspuns: C

Randamentele reale NU sunt normal distribuite

- Faptele stilizate (Cont, 2001):
- Cozi grele: $\hat{K} > 3$ ✓
- Volatility clustering ✓
- Asimetrie negativă pe acțiuni ✓
- Normalitate: respinsă pe toate piețele ✗
- $\Rightarrow$ Normalitatea este o **aproximare**, nu un fapt.



Fapte stilizate: comparație 3 active

SFM_ch2_case_study_2a

Test 7: Skewness-ul randamentelor

Întrebare

Pe randamente zilnice de acțiuni, $\hat{S} = -0.5$ sugerează:

Variante de răspuns

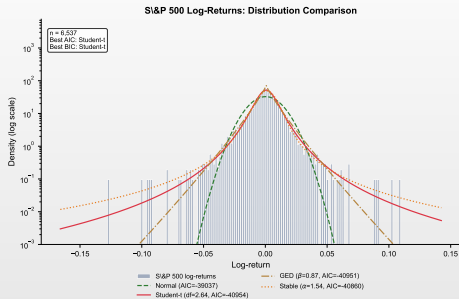
- (A) Mai multe randamente pozitive extreme
- (B) Mai multe randamente negative extreme
- (C) Simetrie perfectă
- (D) Kurtosis excesivă

Test 7: Răspuns

Răspuns: B

Coada stângă este mai grea

- ▣ Interpretarea skewness:
- ▣ $S < 0$: coada stângă mai lungă (pierderi mari) ✓
- ▣ $S > 0$: coada dreaptă mai lungă
- ▣ $S = 0$: simetrie
- ▣ Pe acțiuni: efectul de **levier** (Black, 1976) — scăderile sunt mai abrupte decât creșterile.



Skewness negativ: coada stângă mai grea

 SFM_ch2_distribution_comparison

Test 8: MLE pentru Normal

Întrebare

Estimatorul MLE pentru σ^2 în cazul normal este:

Variante de răspuns

- (A) $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$
- (B) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$
- (C) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$
- (D) $\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

Test 8: Răspuns

Răspuns: B

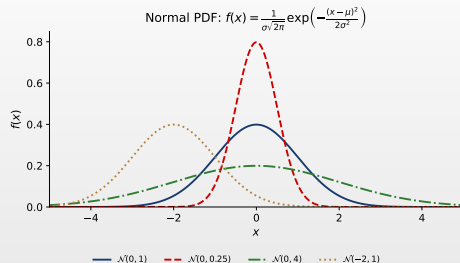
$$\hat{\sigma}_{\text{MLE}}^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2$$

Explicație:

MLE maximizează log-verosimilitatea:

$$\ell(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum (x_i - \mu)^2$$

- A: estimatorul nedeplasat (corect, dar nu MLE) ✗
- B: MLE (ușor deplasat) ✓
- C: nu centrează la medie ✗



Normal: MLE coincide cu momentele

 SFM_ch2_normal_distribution

Test 9: Raportul ES/VaR

Întrebare

Dacă $\text{VaR la } 1\% = 3\%$ și $\text{ES la } 1\% = 4.5\%$, raportul ES/VaR este:

Variante de răspuns

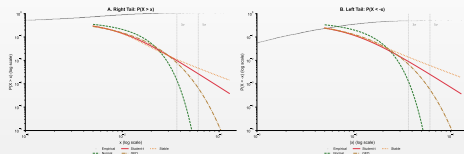
- (A) 0.67
- (B) 1.00
- (C) 1.50
- (D) 3.00

Test 9: Răspuns

Răspuns: C

$$ES/VaR = 4.5\%/3\% = 1.50$$

- **Raportul ES/VaR:**
- Sub normalitate la 1%: ≈ 1.14
- Sub Student- $t(\nu = 5)$ la 1%: ≈ 1.50
- Cu cât cozile sunt mai grele, cu atât raportul crește
- $ES/VaR = 1.50 > 1.14 \Rightarrow$ distribuția este mai grea decât distribuția normală.



ES captează severitatea pierderilor extreme

 SFM_ch2_distribution_comparison

Test 10: Penalizarea BIC

Întrebare

Pe un eșantion de $n = 5000$, BIC penalizează un parametru suplimentar cu:

Variante de răspuns

- (A) 2
- (B) 8.52
- (C) 5000
- (D) $\ln(2) \approx 0.69$

Test 10: Răspuns

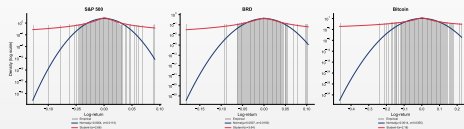
Răspuns: B

 $\ln(5000) \approx 8.52$ per parametru

□ Comparație AIC vs BIC:

AIC : penalizare = $2k$ BIC : penalizare = $k \ln(n)$

- Pentru $n = 5000$:
- AIC: +2 per parametru
- BIC: +8.52 per parametru
- $\Rightarrow$ BIC favorizează modele **mai parcimonioase**.



AIC vs BIC: selecția modelului

Test 11: Distribuția Pareto

Întrebare

Funcția de supraviețuire a distribuției Pareto(x_m, α) este:

Variante de răspuns

- (A) $\bar{F}(x) = (x_m/x)^\alpha$
- (B) $\bar{F}(x) = e^{-\alpha x}$
- (C) $\bar{F}(x) = 1/(1 + x^\alpha)$
- (D) $\bar{F}(x) = (x/x_m)^{-\alpha}$

Test 11: Răspuns

Răspuns: A

$$\bar{F}(x) = \Pr(X > x) = (x_m/x)^\alpha \text{ pentru } x \geq x_m$$

Explicație:

A: Corect — declin polinomial (legea de putere)

✓

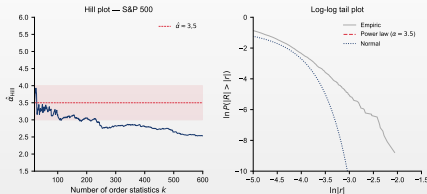
B: Declin exponențial (Exponențială, nu Pareto)

✗

C: Distribuția log-logistică ✗

D: Echivalent cu A doar dacă $x_m = 1$ ✗

Cheia: cozile Pareto scad ca $x^{-\alpha}$, **mult mai lent** decât e^{-x} .



Estimatorul Hill: $\hat{\alpha}$ pentru cozile Pareto

Test 12: Teorema Limită Centrală

Întrebare

CLT garantează convergența mediei eșantionului la Normal. Care condiție este **esențială**?

Variante de răspuns

- (A) Distribuția originală trebuie să fie normală
- (B) Varianța distribuției originale trebuie să fie finită
- (C) Observațiile trebuie să fie corelate
- (D) Eșantionul trebuie să fie mai mic de 30

Test 12: Răspuns

Răspuns: B

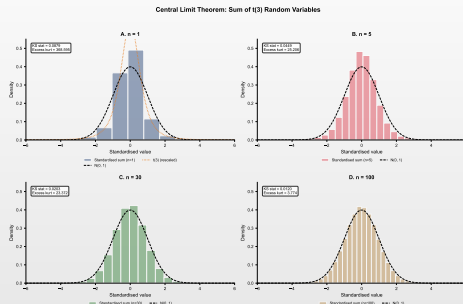
Varianță finită este condiția esențială

□ **Teorema Limită Centrală (Lindeberg-Lévy):**

□ Dacă $X_1, \dots, X_n$ sunt i.i.d. cu $\mathbb{E}[X] = \mu$ și $\text{Var}(X) = \sigma^2 < \infty$:

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

- A: Distribuția originală poate fi *orice* ✗
- B: $\sigma^2 < \infty$ este necesar ✓
- C: Observațiile trebuie să fie *independente* ✗
- D: $n \rightarrow \infty$, nu $n < 30$ ✗
- **Fără** varianță finită $\Rightarrow$ convergență la distribuții *stabile*



CLT: convergența la Normal pe măsură ce n crește

Test 13: Interpretarea Q-Q Plot

Întrebare

Pe un Q-Q plot normal, punctele curbate **în sus** la capătul drept și **în jos** la capătul stâng indică:

Variante de răspuns

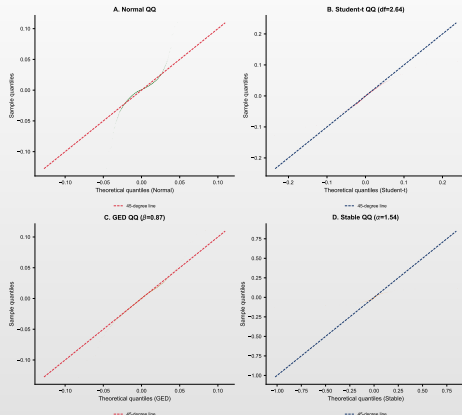
- (A) Normalitate perfectă
- (B) Cozi mai ușoare decât normala
- (C) Cozi mai grele decât normala
- (D) Asimetrie pozitivă

Test 13: Răspuns

Răspuns: C

Cozi mai grele decât distribuția normală

- ▣ Interpretarea Q-Q plot:
- ▣ Linie dreaptă: distribuția se potrivește ✓
- ▣ Curbare în S: cozi grele (leptokurtosis)
- ▣ Capăt drept ↑: valori extreme pozitive mai mari
- ▣ Capăt stâng ↓: valori extreme negative mai mari
- ▣ ⇒ Randamentele au mai multe **evenimente extreme** decât prezice distribuția normală
- ▣ Q-Q plot-ul este *vizual*, nu un test formal



Q-Q plot: deviațiile din cozi indică leptokurtosis

 SFM_ch2_distribution_comparison

Test 14: Subaditivitatea VaR

Întrebare

VaR nu este subaditivă. Ce înseamnă aceasta?

Variante de răspuns

- (A) $\text{VaR}(A + B) \leq \text{VaR}(A) + \text{VaR}(B)$ întotdeauna
- (B) $\text{VaR}(A + B) > \text{VaR}(A) + \text{VaR}(B)$ este posibil
- (C) VaR nu poate fi calculat pentru portofolii
- (D) VaR este întotdeauna mai mare decât ES

Test 14: Răspuns

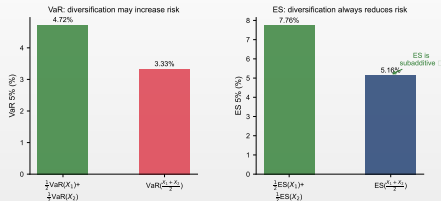
Răspuns: B

Diversificarea poate *crește* VaR-ul

- **Lipsa subaditivității:**
- Există cazuri în care combinarea a 2 active **crește** VaR-ul total
- Aceasta contrazice principiul diversificării
- **Exemplu clasic:** două opțiuni digitale cu probabilități mici de pierdere
- ES satisface **întotdeauna** subaditivitatea:

$$ES(A + B) \leq ES(A) + ES(B)$$

- $\Rightarrow$ ES este o măsură de risc **coerentă**; VaR nu este

**VaR: diversificarea nu garantează reducerea**

Test 15: Momentele Distribuției Pareto

Întrebare

Dacă $X \sim \text{Pareto}(\alpha = 2.5)$, care momente sunt finite?

Variante de răspuns

- (A) Doar media
- (B) Media și varianța
- (C) Media, varianța și skewness
- (D) Toate momentele

Test 15: Răspuns

Răspuns: B

Media și varianța, dar nu skewness

Regula momentelor Pareto:

$\mathbb{E}[X^p] < \infty$ dacă și numai dacă $p < \alpha$

Cu $\alpha = 2.5$:

$p = 1$ (media): $1 < 2.5$ ✓

$p = 2$ (varianța): $2 < 2.5$ ✓

$p = 3$ (skewness): $3 > 2.5$ ✗ infinit

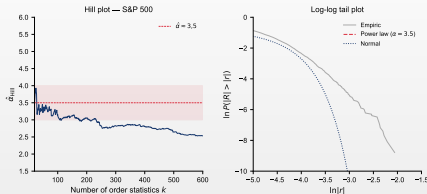
Ierarhia momentelor:

$\alpha > 1$ Media finită

$\alpha > 2$ Varianța finită

$\alpha > 3$ Skewness finit

$\alpha > 4$ Kurtosis finită



Estimatorul Hill: $\hat{\alpha}$ determină ce momente există

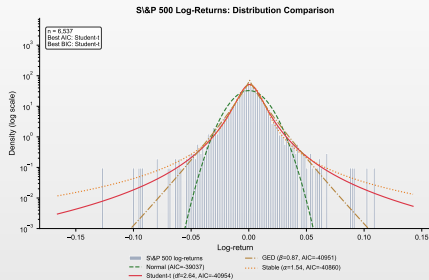
Adevărat sau Fals? — Întrebări

▣ Răspundeți cu Adevărat (A) sau Fals (F):

1. Distribuția normală este complet specificată de medie și varianță.
2. Testul Jarque–Bera are putere mare pe eșantioane mici ($n < 30$).
3. Excesul de kurtosis al distribuției Student- t există pentru orice $\nu > 0$.
4. VaR Normal subestimează riscul real la nivel de 1% pe piețele financiare.
5. ES este o măsură de risc coerentă, dar VaR nu este.
6. AIC penalizează complexitatea mai mult decât BIC.
7. Media distribuției Pareto cu $\alpha = 1.5$ este finită.

Adevărat sau Fals? — Răspunsuri

1. **A:** $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ are exact 2 parametri
2. **F:** JB are putere *scăzută* pe eșantioane mici; necesită $n \geq 100$
3. **F:** Kurtosis există doar pentru $\nu > 4$; varianța doar pentru $\nu > 2$
4. **A:** Cozile empirice sunt mai grele decât cele normale
5. **A:** VaR nu este subaditivă; ES satisface axiomele de coerență
6. **F:** BIC penalizează *mai mult* ($k \ln n$ vs $2k$ pentru $n > 7$)
7. **A:** $\mathbb{E}[X] = \alpha x_m / (\alpha - 1)$ finită pentru $\alpha > 1$; cu $\alpha = 1.5 \Rightarrow$ media există



Normal vs Student-t vs Empiric

Adevărat sau Fals? — Întrebări (Partea II)

▣ Răspundeți cu Adevărat (A) sau Fals (F):

8. Teorema Limită Centrală necesită varianță finită a distribuției originale.
9. Q-Q plot-ul este un test *formal* de normalitate (produce o *p*-valoare).
10. Expected Shortfall este subaditivă pentru orice distribuție continuă.
11. Distribuția Cauchy este Student-*t* cu $\nu = 1$.
12. Pareto cu $\alpha = 0.8$ are medie finită.
13. VaR la 5% este întotdeauna mai mare decât VaR la 1%.
14. Log-randamentele sunt preferate randamentelor simple deoarece sunt aditive în timp.

Adevărat sau Fals? — Răspunsuri (Partea II)

8. **A**: CLT standard cere $\text{Var}(X) < \infty$; fără varianță finită $\Rightarrow$ convergență către stabile, nu Normal
9. **F**: Q-Q plot-ul este un instrument *grafic*, nu un test formal; testele formale sunt JB, SW, AD
10. **A**: ES satisface subaditivitatea: $\text{ES}(A + B) \leq \text{ES}(A) + \text{ES}(B)$ — proprietate cheie de coerență
11. **A**: Cauchy $\equiv t_1$; nu are nici medie, nici varianță definite
12. **F**: Media Pareto există doar pentru $\alpha > 1$; cu $\alpha = 0.8 < 1 \Rightarrow$ medie infinită
13. **F**: VaR la 5% $<$ VaR la 1% (cuantila 5% este mai aproape de centru decât cuantila 1%)
14. **A**: $r_{1 \rightarrow T} = \sum_{t=1}^T r_t$ — aditivitate temporală; randamentele simple se compun multiplicativ

Exercițiul 1: Log-randamente și testul JB

- ▣ **Problemă:** Prețurile de închidere pe 5 zile: $P_0 = 100$, $P_1 = 103$, $P_2 = 99$, $P_3 = 101$, $P_4 = 105$.
- ▣ Calculați:
 1. Log-randamentele $r_t = \ln(P_t/P_{t-1})$
 2. Media, varianța, skewness, kurtosis ale eșantionului
 3. Statistica Jarque–Bera și concluzia la 5%

Exercițiul 1: Soluție

1. Log-randamente:

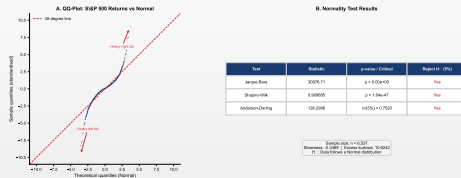
t	P_t/P_{t-1}	r_t
1	1.030	0.0296
2	0.961	-0.0396
3	1.020	0.0200
4	1.040	0.0388

2. Momente: $\bar{r} = 0.0122$, $s^2 = 0.001186$,
 $\hat{S} \approx -0.86$, $\hat{K} \approx 2.05$

3. JB: $JB = \frac{4}{6}(0.74 + 0.23) = 0.64$

$\chi^2_{0.05}(2) = 5.99 \Rightarrow$ **Nu respingem H_0**

Atenție: putere scăzută cu $n = 4$!



Teste de normalitate pe randamente reale

SFM_ch2_normal_distribution

Exercițiul 2: VaR și ES Normal

- ▣ **Problemă:** Portofoliu de 10 000 000 EUR, $\mu = 0.05\%$, $\sigma = 1.2\%$ zilnic.
- ▣ Calculați:
 1. VaR Normal la 5%, 1% și 0.1%
 2. ES la 1% sub ipoteza normală
 3. Raportul ES/VaR la 1%

Exercițiul 2: Soluție

$$\square \text{VaR}_\alpha = -(\mu + z_\alpha \sigma) \cdot W$$

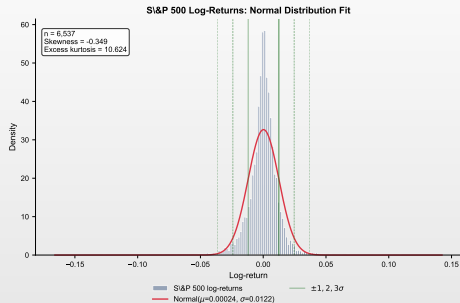
α	z_α	VaR (EUR)
5%	-1.645	192 400
1%	-2.326	274 100
0.1%	-3.090	365 800

$\square$ ES la 1%:

$$\text{ES}_{1\%} = -\mu + \sigma \frac{\phi(z_{0.01})}{0.01} = 3.13\%$$

$\square \Rightarrow 313\,200 \text{ EUR}$

$\square$ Raport: $\text{ES}/\text{VaR} = 1.143$



VaR: cuantila din coada stângă

Exercițiul 3: AIC/BIC — Normal vs Student- t

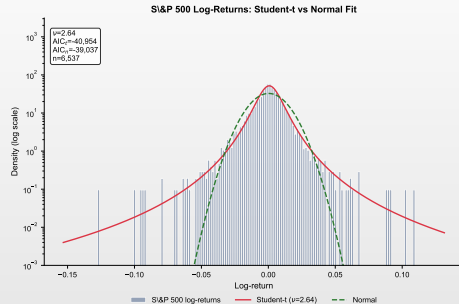
- ▣ **Problemă:** Pe $n = 2000$ randamente zilnice:
- ▣ Normal ($k = 2$): $\ell_N = 6421.3$
- ▣ Student- t ($k = 3$): $\ell_t = 6487.1$
- ▣ Calculați AIC, BIC și interpretați.

Exercițiul 3: Soluție

$$\square AIC = -2\ell + 2k, \quad BIC = -2\ell + k \ln n$$

Model	k	AIC	BIC
Normal	2	-12 839	-12 827
Student- t	3	-12 968	-12 951

- $\square \Delta AIC = 129.6$
- $\square \Rightarrow$ Student- t **foarte semnificativ** preferat ($\Delta > 10$)
- $\square$ **Exces kurtosis:** $\kappa = 6/(\hat{\nu} - 4)$
- $\square$ Cu $\hat{\nu} = 5.2$: $\kappa = 5.0$ (mult > 0)



Student- t fit: captează mai bine cozile

SFM_ch2_student_t

Exercițiul 4: VaR Normal vs Student- t

- ▣ **Problemă:** Portofoliu cu $\mu = 0$, $\sigma = 1.5\%$ zilnic. Student- t cu $\hat{\nu} = 5$.
- ▣ Calculați:
 1. VaR la 1% sub Normal și Student- t
 2. ES la 1% sub ambele ipoteze
 3. Raportul ES/VaR pentru fiecare distribuție

Exercițiul 4: Soluție

$$\square z_{1\%} = -2.326, \quad t_5^{-1}(0.01) \approx -3.365$$

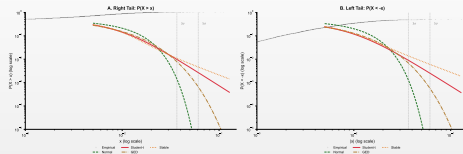
□ 1. VaR la 1%:

Model	VaR 1%
Normal	$2.326 \times 1.5\% = 3.49\%$
Student- t	$3.365 \times 1.5\% = 5.05\%$

□ 2. ES la 1%:

	ES	ES/VaR
Normal	3.99%	1.14
Student- t	7.58%	1.50

□ $\Rightarrow$ Student- t dă VaR cu 45% mai mare.



Normal vs Student- t : diferența crește în cozi

Exercițiul 5: Distribuția Pareto — Cozi grele

- ▣ **Problemă:** Pierderile extreme ale unui portofoliu urmează o distribuție Pareto cu $x_m = 2\%$ și $\alpha = 3$.
- ▣ Calculați:
 1. Probabilitatea unei pierderi mai mari de 4%: $\Pr(X > 4\%)$
 2. Media pierderilor: $\mathbb{E}[X]$
 3. Variația: $\text{Var}(X)$
 4. VaR la 1% (cuantila 99%)

Exercițiul 5: Soluție

1.

$$\Pr(X > 4\%) = (x_m/x)^\alpha = (2/4)^3 = 1/8 = 12.5\%$$

$$2. \text{ Media } (\alpha = 3 > 1): \mathbb{E}[X] = \frac{\alpha x_m}{\alpha - 1} = \frac{3 \times 2\%}{2} = 3\%$$

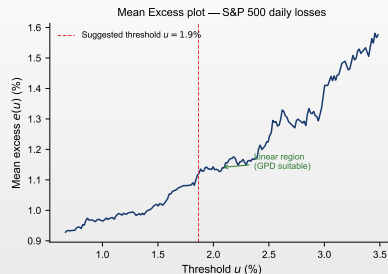
$$3. \text{ Varianța } (\alpha = 3 > 2):$$

$$\text{Var}(X) = \frac{\alpha x_m^2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)} = \frac{12}{4} = 3\%^2$$

$$4. \text{ VaR la } 1\%: \Pr(X > q) = 0.01$$

$$q = x_m (0.01)^{-1/\alpha} = 2\% \times 100^{1/3} \approx 9.28\%$$

$$\text{VaR Pareto} = 9.28\% \text{ vs Normal } \approx 5.6\% (+66\%!)$$

Mean excess plot: liniar $\Rightarrow$ coadă Pareto

SFM_ch2_extreme_value

Exercițiul 6: Testul Raportului de Verosimilitate

- ▣ **Problemă:** Pe $n = 1500$ randamente zilnice ale indicelui BET:
 - ▣ Normal ($k = 2$): $\ell_N = 5102.7$
 - ▣ Student- t ($k = 3$): $\ell_t = 5189.4$
- 1. Calculați statistica testului raportului de verosimilitate (LR)
- 2. Testul este la nivel de semnificație $\alpha = 1\%$. Respingem H_0 : Normal?
- 3. Estimați $\hat{\nu}$ din relația $\hat{\kappa} = 4.8$ (exces kurtosis eșantion)

Exercițiul 6: Soluție

1. Statistica LR:

$$LR = 2(\ell_t - \ell_N) = 2(5189.4 - 5102.7) = 173.4$$

2. Test: $LR \sim \chi^2(1)$ sub H_0

$$\chi^2_{0.01}(1) = 6.635$$

$$173.4 \gg 6.635 \Rightarrow \text{Respingem } H_0$$

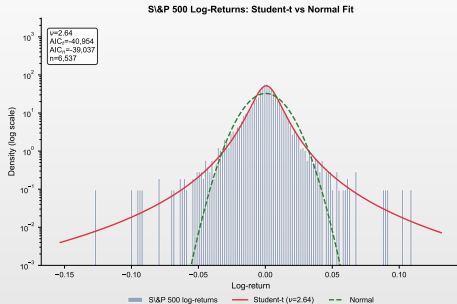
$$p\text{-value} \approx 0 \text{ — normalitatea este clar respinsă}$$

3. Estimare $\hat{\nu}$:

$$\kappa = 6/(\nu - 4) = 4.8$$

$$\nu - 4 = 6/4.8 = 1.25$$

$$\hat{\nu} = 5.25 \text{ (tipic pentru acțiuni)}$$



LR test: Student-t semnificativ mai bun

 SFM_ch2_student_t

Exercițiul 7: Comparație Cross-Asset — VaR și ES

▣ **Problemă:** Trei active cu randamente zilnice estimate:

Activ	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\nu}$	$\hat{S}$	$\hat{K}$
S&P 500	0.04%	1.1%	5.2	−0.3	5.5
Bitcoin	0.10%	3.8%	3.5	−0.1	8.0
Obligațiuni (10Y)	0.01%	0.4%	7.8	0.1	3.8

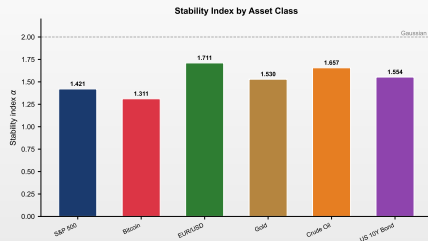
1. Calculați VaR Normal la 1% pentru fiecare activ
2. Calculați VaR Student- t la 1% (folosind tabelul cuantilelor)
3. Pentru care activ diferența Normal vs Student- t este cea mai mare?

Exercițiul 7: Soluție

- ▣ **Cuantile cheie:** $z_{1\%} = 2.326$
- ▣ $t_{5.2}^{-1}(0.01) \approx 3.30$, $t_{3.5}^{-1}(0.01) \approx 4.14$,
 $t_{7.8}^{-1}(0.01) \approx 2.78$

Activ	VaR _N	VaR _t	Δ%
S&P 500	2.52%	3.59%	+42%
Bitcoin	8.74%	15.63%	+79%
Oblig. 10Y	0.92%	1.10%	+20%

- ▣ $\Rightarrow$ **Bitcoin:** cel mai mare impact al cozilor
- ▣ Motiv: $\hat{\nu} = 3.5$ (kurtosis foarte ridicată)
- ▣ Obligațiunile: aproape de Normal ($\hat{\nu} = 7.8$)



Cross-asset: estimări $\hat{\alpha}$ diferite

SFM_ch2_case_study_2a

Exercițiul 8: Funcția Mean Excess și Coadă Pareto

- ▣ **Problemă:** Pierderile peste pragul u au funcția mean excess $e(u) = \mathbb{E}[X - u \mid X > u]$.
- ▣ Pentru Pareto(x_m, α): $e(u) = u/(\alpha - 1)$.
- ▣ Datele: pentru praguri $u = 2\%, 3\%, 4\%, 5\%$, media excesurilor observate este:

u	2%	3%	4%	5%
$\hat{e}(u)$	1.05%	1.48%	2.10%	2.45%

1. Verificați dacă $\hat{e}(u)$ este aproximativ liniară în u (justifică Pareto?)
2. Estimați $\hat{\alpha}$ din panta relației $e(u) = u/(\alpha - 1)$
3. Calculați VaR la 1% folosind $\hat{\alpha}$ estimat și $x_m = 2\%$

Exercițiul 8: Soluție

- ▣ 1. **Liniaritate:** raportul $\hat{e}(u)/u$:

u	$\hat{e}(u)$	$\hat{e}(u)/u$
2%	1.05%	0.525
3%	1.48%	0.493
4%	2.10%	0.525
5%	2.45%	0.490

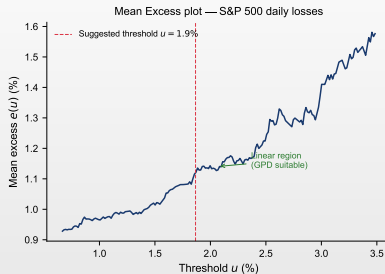
- ▣ Raport ≈ 0.51 (liniar) $\Rightarrow$ **Pareto justificat**

- ▣ 2. $1/(\alpha - 1) \approx 0.51 \Rightarrow \hat{\alpha} \approx 2.96$

- ▣ 3. **VaR 1%:**

▣ $q = x_m \cdot (0.01)^{-1/\alpha} = 2\% \times 100^{1/2.96}$

▣ $= 2\% \times 4.73 \approx 9.46\%$



Mean excess liniar $\Rightarrow$ coadă Pareto

 SFM_ch2_extreme_value

Exercițiu Python 1: Descărcare și teste de normalitate

Sarcină:

1. Descărcați datele S&P 500 din ultimii 5 ani cu `yfinance`
2. Calculați statisticile descriptive (medie, std, skewness, kurtosis)
3. Aplicați testul Jarque–Bera și Shapiro–Wilk

Cod cheie:

```
import yfinance as yf
from scipy import stats
data = yf.download('^GSPC', start='2020-01-01', end='2025-01-01')
returns = np.log(data['Adj Close'] / data['Adj Close'].shift(1)).dropna()
jb_stat, jb_pval = stats.jarque_bera(returns)
```

Exercițiu Python 2: Estimare MLE și AIC/BIC

Sarcină:

1. Ajustați Normal și Student- t prin MLE
2. Calculați AIC și BIC pentru fiecare model
3. Comparați și selectați cel mai bun model

Cod cheie:

```
mu_n, sigma_n = stats.norm.fit(returns)
df_t, loc_t, sc_t = stats.t.fit(returns)
ll_n = np.sum(stats.norm.logpdf(returns, mu_n, sigma_n))
ll_t = np.sum(stats.t.logpdf(returns, df_t, loc_t, sc_t))
aic_n = -2*ll_n + 2*2;  aic_t = -2*ll_t + 2*3
```

Exercițiu Python 3: Comparație VaR

Sarcină:

1. Calculați VaR la 5%, 1%, 0.1% sub Normal, Student- t și Empiric
2. Vizualizați histograma cu overlay Normal vs Student- t (log-scale)
3. Calculați ES prin Monte Carlo sub Student- t

Funcții cheie:

- ▣ `stats.norm.ppf(alpha)` pentru cuantila normală
- ▣ `stats.t.ppf(alpha, df)` pentru cuantila Student- t
- ▣ `np.quantile(returns, alpha)` pentru cuantila empirică

 [SFM_ch2_distribution_comparison](#)

Exercițiu Python 4: Pareto — Fit și VaR

Sarcină:

1. Extrageți pierderile extreme (peste cuantila 95%) din S&P 500
2. Ajustați o distribuție Pareto pe aceste pierderi
3. Comparați VaR Pareto vs VaR Normal la 1% și 0.1%

Cod cheie:

```
losses = -returns[returns < 0]
threshold = np.quantile(losses, 0.95)
tail = losses[losses > threshold]
alpha_hat, loc, scale = stats.pareto.fit(tail, floc=0)
var_pareto = stats.pareto.ppf(0.99, alpha_hat, loc, scale)
```

Exercițiu Python 5: Q-Q Plots și Diagnostic Vizuale

Sarcină:

1. Construiți Q-Q plot-uri ale randamentelor S&P 500 față de Normal și Student- t
2. Adăugați intervalul de încredere 95% pe Q-Q plot
3. Interpretați abaterile din cozi

Cod cheie:

```
from scipy import stats
import matplotlib.pyplot as plt
# Q-Q plot Normal
stats.probplot(returns, dist="norm", plot=plt)
# Q-Q plot Student-t
df_hat = stats.t.fit(returns)[0]
stats.probplot(returns, dist=stats.t, sparams=(df_hat,), plot=plt)
```

Exercițiu Python 6: Bootstrap VaR și Intervale de Încredere

Sarcină:

1. Estimați VaR la 1% prin bootstrap (10 000 re-eșantionări)
2. Calculați intervalul de încredere 95% pentru VaR
3. Comparați VaR bootstrap cu VaR parametric (Normal, Student- t)

Cod cheie:

```
n_boot = 10000
var_boot = np.zeros(n_boot)
for i in range(n_boot):
    sample = np.random.choice(returns, size=len(returns), replace=True)
    var_boot[i] = -np.quantile(sample, 0.01)
ci_lower, ci_upper = np.quantile(var_boot, [0.025, 0.975])
```

Discuție 1: Normalitatea pe piețele financiare

- ▣ **Scenariu:** Testul JB respinge normalitatea pe S&P 500 ($p < 0.001$), dar managementul riscului folosește încă VaR Normal.
- ▣ **Întrebări:**
 1. De ce modelul Normal este încă utilizat dacă este respins statistic?
 2. La ce nivel de VaR (5%, 1%, 0.1%) diferența contează cel mai mult?
 3. Cum se schimbă concluzia dacă folosim date săptămânale în loc de zilnice?
 4. Ce implicații are pentru capitalul de reglementare (Basel III)?

Discuție 2: Alegerea gradelor de libertate ν

▣ **Scenariu:** Estimați Student- t pe 3 active: S&P 500 ($\hat{\nu} = 5.2$), Bitcoin ($\hat{\nu} = 3.5$), Obligațiuni ($\hat{\nu} = 7.8$).

▣ **Întrebări:**

1. Ce determină diferențele de $\hat{\nu}$ între clase de active?
2. Bitcoin cu $\hat{\nu} = 3.5$: ce momente *nu* există?
3. Dacă $\hat{\nu} < 4$, Sharpe ratio-ul mai este valid?
4. Cum se modifică $\hat{\nu}$ în perioadele de criză vs calm?

▣ **Indiciu:** Gândiți-vă la relația $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$ dacă $p < \nu$.

Discuție 3: Lecții din Crizele Financiare

▣ **Scenariu:** În criza din 2008, S&P 500 a înregistrat randamente zilnice de -9% (15 oct.) și -8% (29 sept.). Sub distribuția normală cu $\sigma = 1.2\%$, aceste evenimente au probabilitate $< 10^{-12}$.

▣ **Întrebări:**

1. Câte deviații standard reprezintă un randament de -9% sub Normal cu $\sigma = 1.2\%$?
2. Care ar fi probabilitatea aceluiași eveniment sub Student- t cu $\nu = 4$?
3. Ce rol au **cozile grele** în subestimarea riscului de către bănci pre-2008?
4. Cum s-ar schimba capitalul minim reglementar dacă băncile ar folosi Student- t în loc de Normal?

▣ **Indiciu:** $-9\%/1.2\% = 7.5\sigma$. Sub Normal: $\Pr(Z < -7.5) \approx 3 \times 10^{-14}$

Discuție 4: Trade-offs Practice — Normal vs Student- t

- ▣ **Scenariu:** Sunteți analist de risc. Managerul vă cere un raport VaR zilnic. Aveți la dispoziție Normal, Student- t și metoda empirică.
- ▣ **Întrebări:**
 1. Care sunt **avantajele** modelului Normal? (simplitate, formulă închisă, CLT)
 2. Când este Student- t **indispensabil**? (VaR la 1%, orizont scurt, active volatile)
 3. Ce probleme are metoda **empirică** pe date limitate? (cuantila 0.1% cu $n = 500$?)
 4. Cum combinați cele 3 abordări într-un raport complet?

Recomandare practică

Raportați VaR/ES sub **toate** cele 3 ipoteze. Diferența dintre ele este informativă.

Exercițiu AI: Gândire critică

Prompt de testat în ChatGPT / Claude / Copilot

“Descarcă de pe Yahoo Finance datele zilnice ale acțiunii Apple (AAPL) din 2015 până în 2025. Calculează log-randamentele. Aplică testul Jarque-Bera și Shapiro-Wilk. Ajustează distribuția normală și Student-t prin MLE. Compară AIC/BIC. Calculează VaR la 1% și 5% sub ambele ipoteze + empiric. Vizualizează: histogramă cu overlay + Q-Q plot. Vreau cod Python complet.”

▣ Exercițiu:

1. Rulați prompt-ul într-un LLM la alegere și analizați critic răspunsul.
2. Folosește `stats.t.fit()` corect (3 parametri: ν , loc, scale)?
3. AIC/BIC sunt calculate corect ($-2\ell + 2k$ vs $-2\ell + k \ln n$)?
4. Q-Q plot-ul este pentru distribuția t sau doar pentru normală?
5. Compară VaR-ul parametric cu cel empiric? Sunt consistente?

Atenție: Codul generat de AI poate rula fără erori și arăta profesional. *Asta nu înseamnă că e corect.*

Exercițiu AI 2: Comparație între LLM-uri

Prompt de testat în mai multe LLM-uri

“Explică diferența dintre VaR și Expected Shortfall. De ce VaR nu este o măsură coerentă de risc? Dă un exemplu numeric simplu în care VaR nu este subaditivă, dar ES este. Arată calculul pas cu pas.”

▣ Exercițiu:

1. Testați prompt-ul în **3 LLM-uri diferite** (ChatGPT, Claude, Gemini)
2. Verificați exemplul numeric: sunt probabilitățile și valorile consistente?
3. LLM-ul demonstrează corect **lipsa subaditivității** VaR?
4. Formula $ES = \mathbb{E}[-X \mid -X > VaR]$ este aplicată corect?
5. Care LLM dă explicația cea mai clară și corectă matematic?

Observație: Exemplele numerice sunt punctul slab al LLM-urilor. Verificați *fiecare* pas de calcul.

Concluzii Cheie de Astăzi

1. **Normalitatea este respinsă** pe toate piețele financiare — testul JB confirmă
2. **Student- t captează cozile grele** — $\hat{\nu} \approx 3-8$ pentru randamente zilnice
3. **Excesul de kurtosis** $\kappa = 6/(\nu - 4)$ crește cu scăderea lui ν
4. **VaR Normal subestimează** riscul real, în special la 1% și 0.1%
5. **ES $\geq$ VaR** întotdeauna; raportul ES/VaR crește cu greutatea cozilor
6. **Pareto descrie cozile** — declin polinomial vs exponențial

Următorul Seminar

Distribuții Stabile

Bibliografie I

Distribuții și Managementul Riscului

- ▣ Fama, E.F. (1965). "The Behavior of Stock-Market Prices," *Journal of Business*, 38(1), 34–105.
- ▣ Cont, R. (2001). "Empirical Properties of Asset Returns: Stylized Facts and Statistical Issues," *Quantitative Finance*, 1, 223–236.
- ▣ McNeil, A.J., Frey, R. & Embrechts, P. (2015). *Quantitative Risk Management*. 2nd ed., Princeton.
- ▣ Mandelbrot, B. (1963). "The Variation of Certain Speculative Prices," *Journal of Business*, 36(4), 394–419.

Instrumente Software

- ▣ `scipy.stats` – Distribuții, MLE, teste statistice
- ▣ `yfinance` – Descărcare date financiare
- ▣ `matplotlib`, `seaborn` – Vizualizare
- ▣ `numpy`, `pandas` – Calcul și manipulare date

Exercițiu de Replicare: Fama (1965)

Obiectiv

Replicați analiza lui Fama (1965) privind non-normalitatea randamentelor bursiere, cu date actuale.

1. Descărcați randamentele zilnice S&P 500 și 5 acțiuni individuale (ultimii 10 ani)
2. Calculați statisticile descriptive: medie, deviație standard, skewness, kurtosis
3. Aplicați testul Jarque–Bera pe fiecare serie
4. Ajustați Normal și Student- t prin MLE, comparați AIC/BIC
5. Reprezentați Q-Q plot normal vs Student- t pentru fiecare serie
6. **Întrebare:** Concluziile lui Fama (1965) sunt încă valabile azi?

Ref: Fama, E.F. (1965). "The Behavior of Stock-Market Prices," *Journal of Business*, 38(1), 34–105. <https://www.jstor.org/stable/2350752>

Temă pentru acasă: Seminar 2

Obiectiv

Analizați distribuția randamentelor pentru 3 active din clase diferite.

1. Descărcați randamentele zilnice pentru: un indice bursier (ex. BET), o acțiune (ex. FP.RO) și o criptomonedă (ex. BTC-USD) — ultimii 5 ani
2. Calculați statisticile descriptive: medie, deviație standard, skewness, kurtosis
3. Aplicați testele Jarque–Bera, Shapiro–Wilk, Anderson–Darling
4. Ajustați Normal și Student- t prin MLE, comparați AIC/BIC
5. Calculați VaR și ES la 1% sub ambele ipoteze + empiric
6. Reprezentați Q-Q plot normal vs Student- t pentru fiecare activ
7. **Întrebare:** Care activ se abate cel mai mult de la normalitate? De ce?

Vă mulțumesc!

Întrebări?

Materialele seminarului sunt disponibile la: <https://danpele.github.io/SFM/>

 Quantlet

 Quantinar