



Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Capitolul 12: Analiză Spectrală și Metode în Domeniul Frecvenței



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București

IDA Institute Digital Assets

Blockchain Research Center

AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance

Academia Română, Institutul de Prognoză Economică

MSCA Digital Finance

Obiective de învățare

La finalul acestui capitol, veți fi capabili să:

1. **Explicați** de ce analiza în domeniul frecvenței completează metodele din domeniul timpului
2. **Derivați** reprezentarea Fourier a unui proces staționar
3. **Calculați** și interpretați periodograma și funcția de densitate spectrală
4. **Aplicați** metode de estimare spectrală neparametrică și parametrică
5. **Interpretați** măsuri cross-spectrale: coerență, fază și câștig
6. **Distingeți** analiza Fourier de analiza wavelet și situațiile lor de aplicare
7. **Utilizați** filtre band-pass pentru extragerea componentelor ciclului de afaceri
8. **Implementați** analiza spectrală în Python pentru date economice și financiare reale

Cuprins

- ▣ Motivație
- ▣ Fundamentele analizei Fourier
- ▣ Periodograma
- ▣ Funcția de densitate spectrală
- ▣ Estimarea spectrală
- ▣ Memorie lungă și spectrul
- ▣ Analiza cross-spectrală
- ▣ Filtrarea în domeniul frecvenței
- ▣ Analiza Wavelet
- ▣ Studiu de Caz: Extragerea Ciclurilor de Afaceri
- ▣ Utilizare IA
- ▣ Rezumat
- ▣ Quiz

De ce analiză în domeniul frecvenței?

Domeniul timpului vs. domeniul frecvenței

- ▣ **Domeniul timpului:** descrie cum evoluează seria în timp — ACF, ARIMA, GARCH
- ▣ **Domeniul frecvenței:** descrie care *componente periodice* determină variația
- ▣ Acestea sunt **reprezentări duale** — echivalente matematic, dar fiecare dezvăluie structuri diferite

Când analiza în domeniul frecvenței este esențială

- ▣ Detectarea **periodicităților ascunse** (cicluri de afaceri, sezonabilitate, cicluri astronomice)
- ▣ Înțelegerea **la ce frecvențe** se concentrează cea mai mare energie (varianță)
- ▣ Proiectarea **filtrelor optime** pentru extragerea trendului, ciclului sau sezonality
- ▣ Analiza **co-mișcării** între serii la frecvențe specifice (coerență)

Impact istoric

- ▣ Fourier (1807): orice funcție periodică poate fi descompusă în unde sinusoidale
- ▣ Schuster (1898): a inventat periodograma pentru detectarea periodicităților ascunse
- ▣ Wiener–Khintchine (anii 1930): au legat autocovarianța de densitatea spectrală

Exemplu motivațional: Activitatea petelor solare

Perspectiva domeniului timpului

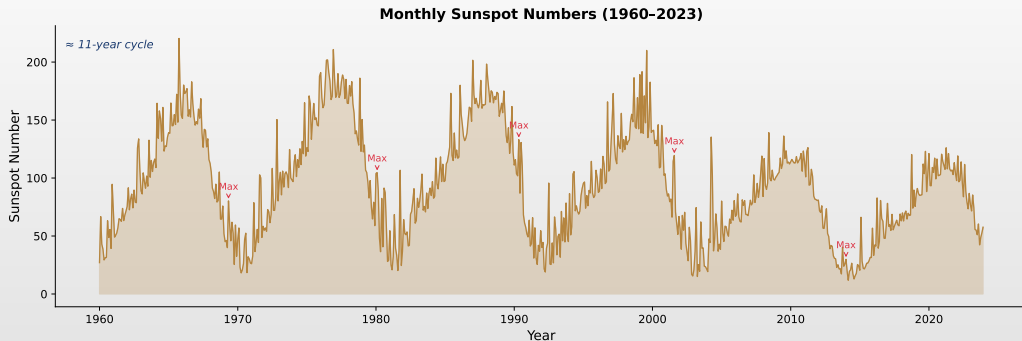
- Număr lunar de pete solare (1749–2024)
- Caracter ciclic pronunțat, vizibil cu ochiul liber
- ACF scade lent — sugerează memorie lungă sau comportament ciclic
- Totuși: care este *exact* perioada? Există cicluri multiple?

Perspectiva domeniului frecvenței

- Periodograma relevă un **vârf pronunțat** la frecvența $f \approx 0,0076$ cicluri/lună
- Corespunde perioadei $T = 1/f \approx 131$ luni $\approx$ **11 ani**
- Vârf secundar la $\approx 5,5$ ani (armonică)
- Răspuns imediat: „care cicluri contează?”

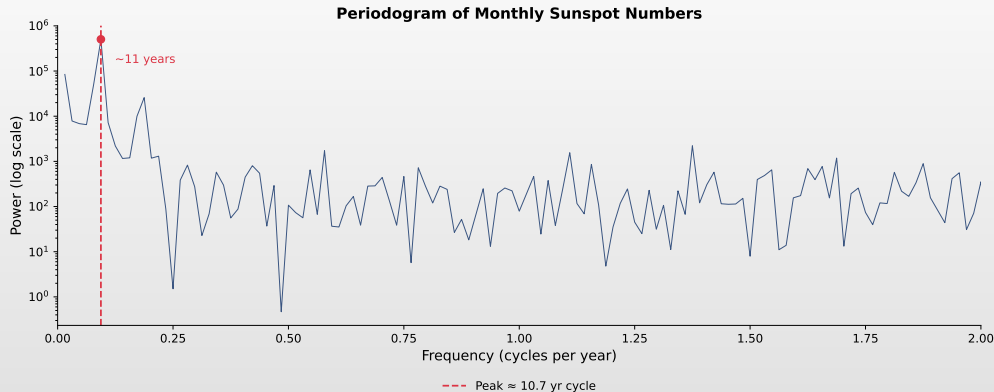
Ție cheie: Domeniul frecvenței *descompune varianța pe frecvențe*, relevând componentele oscilatorii dominante care determină seria.

Seria temporală a petelor solare



- Număr lunar de pete solare (1749–2024) cu ciclul solar de ≈ 11 ani
- Amplitudinea și forma ciclurilor variază — sunt necesare atât metode din domeniul timpului, cât și din domeniul frecvenței

Periodograma petelor solare



- Vârf dominant la $f \approx 0,0076$ cicluri/lună $\Rightarrow$ ciclul solar de **11 ani**
- Armonică secundară la $\approx 5,5$ ani confirmă forma non-sinusoidală a ciclului

Reprezentarea spectrală: Imaginea de ansamblu

Două descrieri echivalente ale unui proces staționar

	Domeniul timpului	Domeniul frecvenței
Statistică rezumativă	Autocovarianța $\gamma(h)$	Densitatea spectrală $f(\omega)$
Varianța totală	$\gamma(0) = \text{Var}(Y_t)$	$\int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) d\omega$
Relația	Pereche de transformate Fourier (Wiener–Khintchine)	
Clasă de modele	ARMA(p, q)	Densitate spectrală rațională
Estimare	ACF de eșantion	Periodogramă / estimatori spectrali
Analiza filtrelor	Convoluție (dificilă)	Multiplicare (ușoară)

De ce să învățăm ambele?

- Filtrarea (extragerea trendului, ajustarea sezonieră) este **multiplicare** în domeniul frecvenței dar **convoluție** în domeniul timpului
- Densitatea spectrală oferă un rezumat **vizual complet** al structurii varianței
- Unele fenomene (cicluri de afaceri, interferențe) sunt *descrise natural* prin frecvență

Serii Fourier: Descompunerea funcțiilor periodice

Ideea fundamentală a lui Fourier

Orice funcție periodică $g(t)$ cu perioada T poate fi scrisă ca:

$$g(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right]$$

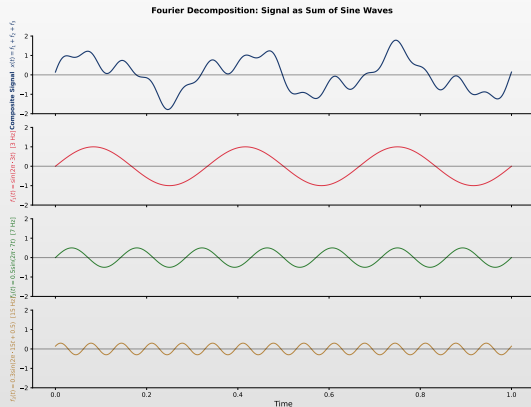
unde coeficienții Fourier sunt:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) dt, \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt$$

Terminologie cheie

- ▣ **Frecvența:** $f_k = k/T$ cicluri pe unitate de timp; **Frecvența unghiulară:** $\omega_k = 2\pi f_k$ radiani pe unitate de timp
- ▣ **Frecvența fundamentală:** $f_1 = 1/T$; **Armonice:** $f_k = k \cdot f_1$ pentru $k = 2, 3, \dots$
- ▣ **Amplitudinea:** $R_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$; **Faza:** $\phi_k = \arctan(b_k/a_k)$

Ilustrare descompunere Fourier



- Semnal periodic complex (sus) descompus în componentele fundamentală + armonice
- Fiecare rând = o componentă de frecvență; suma reconstruiește semnalul original exact

Forma exponențială complexă

Formula lui Euler și seria Fourier complexă

Utilizând formula lui Euler $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$, putem scrie:

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi kt/T}, \quad c_k = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) e^{-i2\pi kt/T} dt$$

unde $c_k = (a_k - ib_k)/2$ pentru $k > 0$ și $c_{-k} = \overline{c_k}$ (conjugatul complex).

De ce notația complexă?

- ▣ Mai compactă: o singură formulă în locul termenilor separați sinus/cosinus
- ▣ Algebric mai simplă: convoluția devine multiplicare
- ▣ Standard în procesarea semnalelor, fizică și analiza modernă a seriilor de timp

Teorema lui Parseval (Conservarea energiei)

Energia totală este conservată între reprezentări

$$\frac{1}{T} \int_0^T |g(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Fiecare $|c_k|^2$ măsoară **contribuția frecvenței k/T la varianța totală**.

Implicație

- Energia din domeniul timpului = energia din domeniul frecvenței
- Acesta este fundamentul descompunerii spectrale a varianței

Transformata Fourier Discretă (DFT)

De la continuu la discret

Fie date n observații $y_1, y_2, \dots, y_n$; DFT este:

$$J(\omega_j) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n y_t e^{-i\omega_j t}, \quad \omega_j = \frac{2\pi j}{n}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1$$

Frecvențele ω_j se numesc **frecvențe Fourier** sau **frecvențe fundamentale**.

Proprietăți cheie ale DFT

- ▣ **Ortogonalitate:** $\sum_{t=1}^n e^{i(\omega_j - \omega_k)t} = n \cdot 1_{j=k}$ — frecvențele sunt ortogonale
- ▣ **Inversabilitate:** $y_t = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} J(\omega_j) e^{i\omega_j t}$ — reconstrucție perfectă
- ▣ **Frecvența Nyquist:** $\omega_{n/2} = \pi$ — cea mai mare frecvență detectabilă (≥ 2 obs. per ciclu)

Transformata Fourier Rapidă (FFT)

- ▣ DFT naivă: $O(n^2)$ operații. FFT (Cooley–Tukey, 1965): $O(n \log n)$
- ▣ Unul dintre cele mai importante algoritme ale secolului XX

Aliasing și frecvența Nyquist

Teorema eșantionării (Shannon–Nyquist)

Un semnal continuu cu frecvența maximă $f_{\max}$ poate fi reconstruit perfect din eșantioane discrete dacă rata de eșantionare satisface:

$$f_s > 2f_{\max} \quad (\text{criteriul Nyquist})$$

Frecvența Nyquist $f_N = f_s/2$ este cea mai mare frecvență detectabilă.

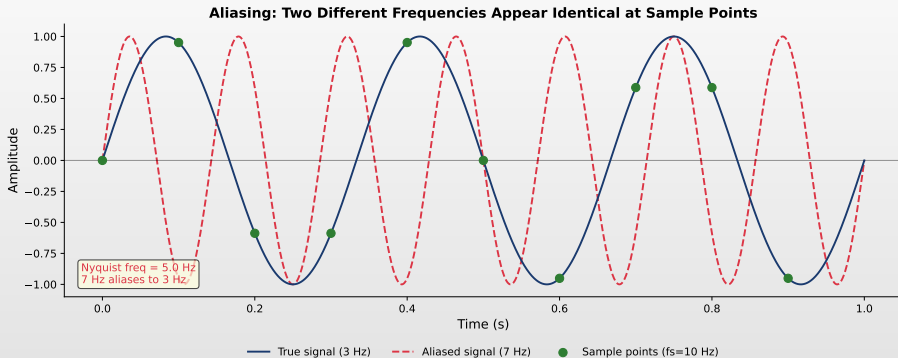
Aliasing: efectele subeșantionării

- Dacă un semnal conține frecvențe *peste* f_N , acestea sunt „repliate” și apar ca frecvențe mai joase
- **Exemplu:** date zilnice ($f_s = 1/\text{zi}$, $f_N = 0,5/\text{zi}$). Un ciclu intra-zilnic la 0,7 cicluri/zi apare ca 0,3 cicluri/zi
- Aliasing-ul este **irreversibil** — odată ce datele sunt eșantionate, frecvențele repliate nu pot fi separate

Implicații practice

- Date lunare: $f_N = 0,5$ cicluri/lună $\Rightarrow$ cicluri ≥ 2 luni. Date trimestriale: cicluri ≥ 6 luni.

Ilustrare Aliasing



- Sinusoidă de frecvență înaltă (punctată) eșantionată prea rar $\Rightarrow$ indistinguibilă de alias-ul de frecvență joasă (continuă)
- Filtrele anti-aliasing trebuie aplicate *înainte* de eșantionare pentru a preveni distorsiunea ireversibilă

Rezumat secțiune: Analiza Fourier

Concepte cheie

- ▣ **DFT** descompune o serie în sinusoide ortogonale la frecvențele $\omega_j = 2\pi j/n$
- ▣ **Teorema lui Parseval**: energia totală se conservă între domenii
- ▣ **Aliasing**: frecvențele de deasupra $\omega_N = \pi$ sunt aliate — eșantionați la $\geq 2f_{\max}$
- ▣ **Urmează**: Cum se estimează densitatea spectrală din date

Definiție și interpretare

Definiție 1 (Periodograma)

Periodograma seriei $\{y_t\}_{t=1}^n$ la frecvența $\omega_j = 2\pi j/n$ este:

$$I(\omega_j) = |J(\omega_j)|^2 = \frac{1}{n} \left| \sum_{t=1}^n y_t e^{-i\omega_j t} \right|^2$$

Echivalent, în formă trigonometrică:

$$I(\omega_j) = \frac{n}{2} (\hat{a}_j^2 + \hat{b}_j^2)$$

unde $\hat{a}_j = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n y_t \cos(\omega_j t)$ și $\hat{b}_j = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n y_t \sin(\omega_j t)$.

Interpretare

- ▣ $I(\omega_j)$ măsoară **contribuția frecvenței ω_j la varianța totală a eșantionului**
- ▣ $I(\omega_j)$ mare $\Rightarrow$ oscilație puternică la perioada $T_j = 2\pi/\omega_j = n/j$
- ▣ Periodograma descompune varianța: $\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2 = \sum_{j=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} I(\omega_j)$ (până la constante)

Periodograma și autocovarianța eșantionului

Teoremă 1 (Relația periodogramă–autocovarianță)

Periodograma este transformata Fourier a funcției de autocovarianță a eșantionului:

$$I(\omega) = \sum_{h=-(n-1)}^{n-1} \hat{\gamma}(h) e^{-i\omega h}$$

unde $\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-|h|} (y_t - \bar{y})(y_{t+|h|} - \bar{y})$ este autocovarianța eșantionului la lag-ul h .

Analogul de eșantion al teoremei Wiener–Khinchine

- ▣ Populație: $f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) e^{-i\omega h}$ (densitate spectrală)
- ▣ Eșantion: $I(\omega) = \sum_h \hat{\gamma}(h) e^{-i\omega h}$ (periodogramă)
- ▣ Periodograma este un **estimator natural** al densității spectrale — dar este oare unul *bun*?

Atenție: Periodograma este inconsistentă!

- ▣ $\mathbb{E}[I(\omega_j)] \rightarrow f(\omega)$ când $n \rightarrow \infty$ (asimptotic nedeplasată)
- ▣ Dar $\text{Var}[I(\omega_j)] \not\rightarrow 0$ — varianța *nu* scade cu mai multe date!

Citirea periodogramei: Tipare comune

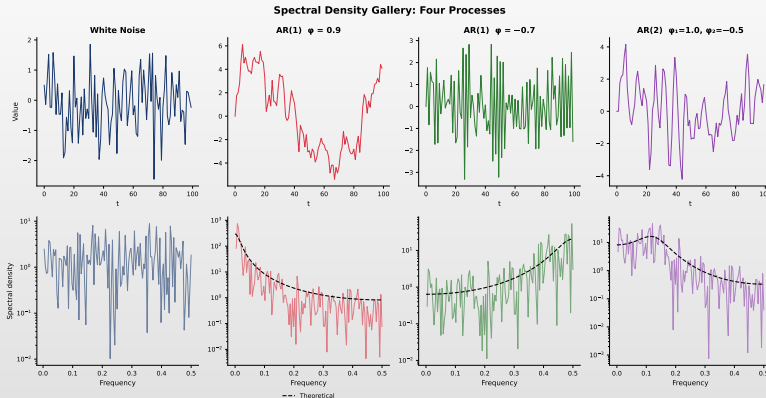
Semnăturile spectrale ale proceselor comune

Proces	Forma spectrală	Tiparul periodogramei
Zgomot alb	Plat: $f(\omega) = \sigma^2/(2\pi)$	Aproximativ uniform, fără vârfuri
AR(1), $\phi > 0$	Vârf la $\omega = 0$, descrescător	Valori mari la frecvențe joase
AR(1), $\phi < 0$	Vârf la $\omega = \pi$, descrescător	Valori mari la frecvențe înalte
AR(2), rădăcini complexe	Vârf la frecvența ciclică	Vârf atenuat la frecvența ciclică
Mers aleator	$f(\omega) \propto \omega^{-2}$	Dominanță puternică la frecvențe joase
Sezonier ($s = 12$)	Vârfuri la $\omega = 2\pi k/12$	Vârfuri ascuțite la armonicile sezoniere

Regulă practică

- ▣ **Spectru roșu** (putere concentrată la ω mic): dominat de trend, autocorelat pozitiv
- ▣ **Spectru albastru** (putere concentrată la ω mare): dominat de zgomot, autocorelat negativ
- ▣ **Vârfuri ascuțite**: componente periodice deterministe sau cvasi-deterministe

Galerie densitate spectrală



- Zgomot alb: plat; AR(1) $\phi > 0$: spectru roșu; AR(1) $\phi < 0$: spectru albastru
- AR(2) cu rădăcini complexe: vârf la frecvența ciclică; sezonier: vârfuri ascuțite la armonice

Proprietățile statistice ale periodogramei

Distribuția asimptotică (proces gaussian)

Pentru un proces gaussian staționar cu densitate spectrală $f(\omega)$:

$$\frac{2 I(\omega_j)}{f(\omega_j)} \xrightarrow{d} \chi_2^2 \quad \text{pentru } 0 < \omega_j < \pi$$

- ▣ $\mathbb{E}[I(\omega_j)] \approx f(\omega_j)$ — aproximativ nedeplasată
- ▣ $\text{Var}[I(\omega_j)] \approx f(\omega_j)^2$ — varianța este egală cu media la pătrat!
- ▣ Valorile periodogramei la **frecvențe Fourier diferite sunt asimptotic independente**

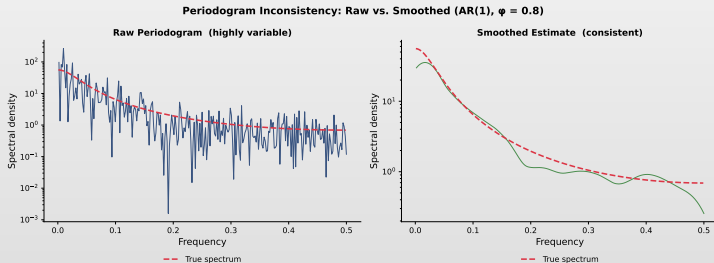
Problema inconsistenței

- ▣ Coeficientul de variație $CV = SD/Media = 1$ indiferent de dimensiunea eșantionului
- ▣ Adăugarea mai multor date adaugă mai multe frecvențe dar **nu** reduce zgomotul la nicio frecvență
- ▣ Periodograma brută **nu este un estimator consistent** al densității spectrale
- ▣ **Soluție:** netezirea periodogramei (Secțiunea 5)

Ilustrare inconsistență periodogramă

Rezultat cheie: Distribuția periodogramei

- Pentru n mare, la frecvențe non-zero și non-Nyquist: $I(\omega_j) \stackrel{d}{\approx} f(\omega_j) \cdot \chi^2_2/2$
- $\text{Var}[I(\omega_j)] \approx f(\omega_j)^2$ — nu scade pe măsură ce $n \rightarrow \infty$: periodograma este *inconsistentă*



Testul Fisher pentru periodicități ascunse

Acel vârf este real sau doar zgomot?

Fisher (1929) a propus testarea H_0 : seria este zgomot alb contra H_1 : există o periodicitate ascunsă. Statistica de test este:

$$g = \frac{\max_j I(\omega_j)}{\sum_{j=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} I(\omega_j)}$$

Sub H_0 , distribuția exactă a lui g este cunoscută. Pentru n mare:

$$P(g > x) \approx m(1-x)^{m-1} - \binom{m}{2}(1-2x)_+^{m-1} + \dots$$

unde $m = \lfloor n/2 \rfloor$ și $(a)_+ = \max(a, 0)$.

Interpretare

- Dacă cea mai mare valoare a periodogramei depășește semnificativ pragul așteptat sub ipoteza de zgomot alb, se respinge H_0
- Poate fi aplicat iterativ: se elimină frecvența detectată, se testează din nou
- Alternativă modernă: testarea frecvențelor individuale folosind distribuția χ^2_2

Definiția și teorema Wiener–Khintchine

Teoremă 2 (Teorema Wiener–Khintchine)

Fie $\{Y_t\}$ un proces slab staționar cu funcția de autocovarianță $\gamma(h)$ satisfăcând $\sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma(h)| < \infty$. Atunci **funcția de densitate spectrală** (FDS) există și este dată de:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) e^{-i\omega h}, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

Relația **inversă** este:

$$\gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) e^{i\omega h} d\omega$$

Proprietățile densității spectrale

- ▣ $f(\omega) \geq 0$ pentru orice ω (non-negativă — reprezintă contribuția la varianță)
- ▣ $f(\omega) = f(-\omega)$ (simetrică pentru procese cu valori reale)
- ▣ $\gamma(0) = \text{Var}(Y_t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) d\omega$ (varianța totală = aria sub f)
- ▣ f este **periodică** cu perioada 2π , deci avem nevoie doar de $\omega \in [-\pi, \pi]$ sau $[0, \pi]$

Densitatea spectrală: Zgomot alb și AR(1)

Zgomot alb: $Y_t = \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$

$$\gamma(h) = \sigma^2 1_{h=0} \quad \implies \quad f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \quad (\text{plat} \text{ — putere egală la toate frecvențele})$$

Densitatea spectrală este constantă: zgomotul alb contribuie egal la orice frecvență.

AR(1): $Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{|1 - \phi e^{-i\omega}|^2} = \frac{\sigma^2}{2\pi(1 - 2\phi \cos \omega + \phi^2)}$$

- ▣ $\phi > 0$: **spectru roșu** — vârf la $\omega = 0$, putere concentrată la frecvențe joase (similar tendințelor)
- ▣ $\phi < 0$: **spectru albastru** — vârf la $\omega = \pi$, putere la frecvențe înalte (oscilatoriu)
- ▣ $|\phi| \rightarrow 1$: spectrul devine mai concentrat, apropiindu-se de un impuls

Densitatea spectrală: MA(1) și ARMA general

MA(1): $Y_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \cdot |1 + \theta e^{-i\omega}|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi} (1 + 2\theta \cos \omega + \theta^2)$$

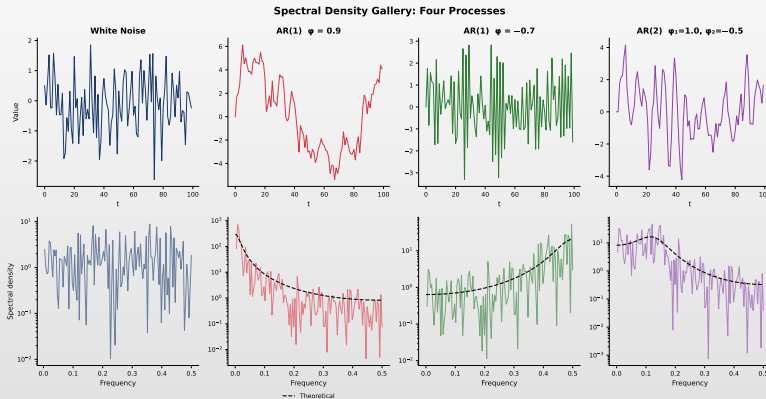
- ▣ $\theta > 0$: mai multă putere la frecvențe joase; $\theta < 0$: mai multă putere la frecvențe înalte
- ▣ Forma spectrală este o modulare cosinusoidală simplă a spectrului de zgomot alb

ARMA(p, q) general: $\phi(B)Y_t = \theta(B)\varepsilon_t$

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \cdot \frac{|\theta(e^{-i\omega})|^2}{|\phi(e^{-i\omega})|^2} \quad (\text{densitate spectrală rațională})$$

- ▣ Polii AR $\Rightarrow$ vârfuri în spectru; zerourile MA $\Rightarrow$ minime (zerouri spectrale)
- ▣ Forma rațională face estimarea spectrală parametrică naturală pentru procese ARMA

Galerie densitate spectrală: Comparație vizuală



- Zgomot alb, AR(1) ($\phi = 0,9$), AR(1) ($\phi = -0,7$), AR(2) și procese sezoniere
- Structura de autocorelație a fiecărui model se traduce într-o formă spectrală distinctivă

Teorema reprezentării spectrale

Teoremă 3 (Reprezentarea spectrală / Reprezentarea Cramér)

Orice proces slab staționar $\{Y_t\}$ cu $\mathbb{E}[Y_t] = 0$ poate fi reprezentat ca:

$$Y_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega t} dZ(\omega)$$

unde $Z(\omega)$ este un proces cu incrementuri ortogonale satisfăcând:

- ▣ $\mathbb{E}[dZ(\omega)] = 0$
- ▣ $\mathbb{E}[|dZ(\omega)|^2] = dF(\omega)$ unde $F(\omega)$ este funcția de distribuție spectrală
- ▣ $\mathbb{E}[dZ(\omega_1) dZ(\omega_2)] = 0$ pentru $\omega_1 \neq \omega_2$

Interpretare

- ▣ Orice proces staționar este o **superpoziție de oscilații necorelate** la diferite frecvențe
- ▣ $dZ(\omega)$ dă amplitudinea și faza (aleatoare) la frecvența ω
- ▣ Densitatea spectrală $f(\omega) = dF(\omega)/d\omega$ măsoară **varianța pe unitate de frecvență**
- ▣ Acesta este **analogul în domeniul frecvenței al descompunerii Wold**

Problema estimării

Obiectiv: Estimarea lui $f(\omega)$ din date

- Avem nevoie de un estimator **consistent**: atât biasul $\rightarrow 0$, cât și varianța $\rightarrow 0$ când $n \rightarrow \infty$. Două abordări principale:

Metode neparametrice

- Netezesc periodograma brută
- Fără ipoteze de model
- **Fereastră lag** (Blackman–Tukey)
- **Mediere pe segmente** (Bartlett, Welch)
- **Multitaper** (Thomson)
- Controlul compromisului bias-varianță prin alegerea bandwidth-ului

Metode parametrice

- Se ajustează un model, se derivă densitatea spectrală
- Presupune o formă specifică de model
- **Estimare spectrală AR**
- Rezoluție mai mare pentru serii scurte
- Risc de specificare greșită
- AIC/BIC pentru selecția modelului

Încheiere: Estimarea spectrală consistentă necesită sacrificarea rezoluției în frecvență — nu putem avea simultan rezoluție perfectă și varianță mică.

Periodograma netezită (Nucleul Daniell)

Ideea: Medierea valorilor periodogramei vecine

Periodograma netezită la frecvența ω este:

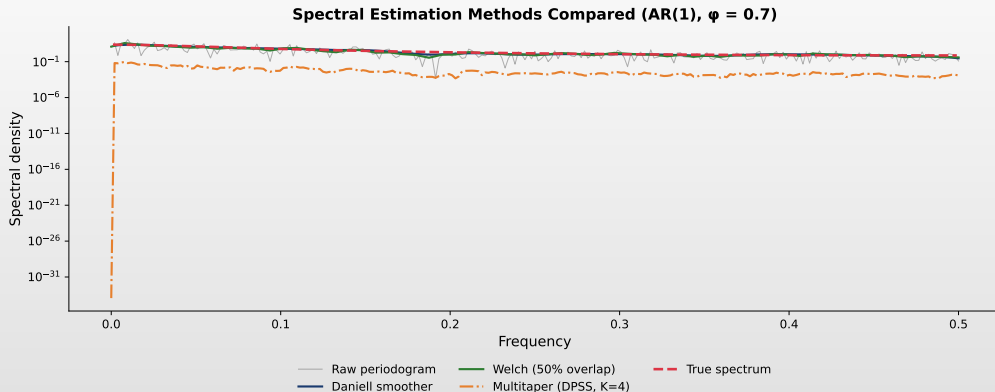
$$\hat{f}(\omega) = \sum_{k=-m}^m w_k I(\omega + \omega_k)$$

unde $\{w_k\}$ sunt ponderi non-negative cu sumă 1, iar m este parametrul de **bandwidth**. Cea mai simplă alegere este nucleul Daniell (uniform): $w_k = 1/(2m+1)$ pentru $|k| \leq m$. Grade de libertate echivalente: $\nu \approx 2(2m+1)$.

Alegerea bandwidth-ului: Compromisul fundamental

- ▣ m mic: bias mic, varianță mare (aproape de periodograma brută)
- ▣ m mare: varianță mică, bias mare (supra-netezit, vârfurile sunt estompate)
- ▣ Aproximativ $\hat{f}(\omega) \sim f(\omega) \cdot \chi^2_\nu / \nu$

Comparație netezire



- Periodograma brută vs. estimări netezite Daniell cu bandwidth $m = 3, 8, 20$
- Bandwidth-ul mai larg reduce varianța dar estompează vârfurile — compromisul bias-varianță

Estimarea Blackman–Tukey (fereastră lag)

Alternativă: Ponderarea autocovarianțelor

În loc de netezire în domeniul frecvenței, se aplică o fereastră pe autocovarianțele eșantionului:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-(M-1)}^{M-1} w(h/M) \hat{\gamma}(h) e^{-i\omega h}$$

unde $w(\cdot)$ este o **fereastră lag** (nucleu) și M este **punctul de trunchiere**.

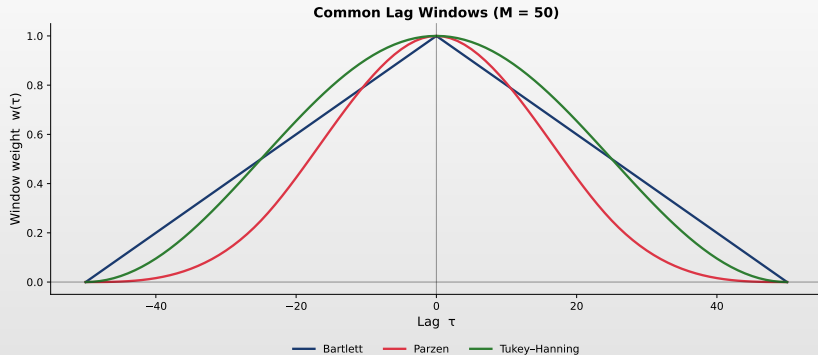
Ferestre lag comune

Fereastră	Formula $w(x)$, $ x \leq 1$	Proprietăți
Bartlett (triunghi)	$1 - x $	Simplă, spectru non-negativ
Parzen	$1 - 6x^2 + 6 x ^3$ pt. $ x \leq 1/2$, altfel $2(1 - x)^3$	Netedă, non-negativă
Tukey–Hanning	$\frac{1}{2}(1 + \cos(\pi x))$	Rezoluție bună
Bartlett–Priestley	$\frac{3}{(\pi x)^2} \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} - \cos(\pi x) \right)$	Optimală pt. spectre netede

Alegerea lui M

- Regulă practică: $M \approx 2\sqrt{n}$. Validare încrucișată sau selectori plug-in pentru alegere automată.

Ilustrare ferestre lag



- Ferestrele lag Bartlett, Parzen, Tukey-Hanning și Bartlett-Priestley (stânga) și ferestrele spectrale (dreapta)
- Ferestre lag mai netede $\Rightarrow$ estimări spectrale mai stabile cu valori non-negative

Metoda Welch (medierea pe segmente)

Ideea: Împărțire și mediere

Welch (1967): împărțirea seriei în K segmente suprapuse de lungime L , aplicarea unei ferestre (ex. Hanning) pe fiecare, calcularea periodogramei fiecărui segment, apoi medierea: $\hat{f}_{\text{Welch}}(\omega) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I^{(k)}(\omega)$

Avantaje

- ▣ Varianța redusă cu factorul $\approx 1/K$
- ▣ Ferestrele reduc scurgerea spectrală
- ▣ Suprapunere de 50% este standard

Compromis

- ▣ Rezoluție în frecvență $\Delta f = 1/L$
- ▣ Segmente mai scurte $\Rightarrow$ rezoluție mai slabă
- ▣ Segmente mai lungi $\Rightarrow$ mai puține medieri
- ▣ Tipic: $L = n/4$ până la $n/8$ cu suprapunere 50%

Estimarea spectrală Multitaper

Metoda Multitaper a lui Thomson (1982)

În loc de o singură fereastră, se folosesc K **ferestre ortogonale** $\{h_k(t)\}_{k=0}^{K-1}$:

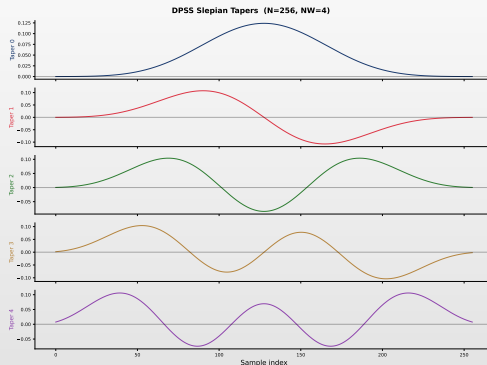
$$\hat{f}_{\text{MT}}(\omega) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \left| \sum_{t=1}^n h_k(t) y_t e^{-i\omega t} \right|^2$$

Ferestrele sunt **secvențe sferoidale prolate discrete** (DPSS / secvențe Slepian), care concentrează optim energia în banda de frecvență $[-W, W]$.

De ce Multitaper este superioară

- Utilizează **toate datele** (fără segmentare) — rezoluție maximă în frecvență
- K ferestre ortogonale furnizează K estimări spectrale aproximativ independente
- Compromis bias-varianță aproape optim controlat de bandwidth W ; $K = 2nW - 1$
- $NW = 3-4$ este standard ($K = 5-8$). Python: `scipy.signal.windows.dpss()`

Ferestre DPSS Multitaper



- Primele ferestre DPSS (Slepian) pentru $NW = 4$; fiecare fereastră succesivă are o trecere prin zero suplimentară
- Împreună furnizează estimări spectrale aproape independente concentrate în $[-W, W]$

Estimarea spectrală parametrică

Estimarea spectrală bazată pe AR

Dacă ajustăm un model $AR(p)$: $Y_t = \sum_{k=1}^p \hat{\phi}_k Y_{t-k} + \varepsilon_t$, densitatea spectrală este:

$$\hat{f}_{AR}(\omega) = \frac{\hat{\sigma}^2}{2\pi |1 - \hat{\phi}_1 e^{-i\omega} - \dots - \hat{\phi}_p e^{-ip\omega}|^2}$$

Avantaje

- ▣ Rezoluție înaltă chiar pentru serii scurte
- ▣ Estimare netedă (fără fluctuații eratice)
- ▣ Poate rezolva vârfuri apropiate
- ▣ Algoritm Yule–Walker sau Burg

Dezavantaje

- ▣ Presupune că modelul AR este corect
- ▣ Poate rata caracteristici necaptate de AR
- ▣ Selecția ordinului p este critică (AIC, BIC)
- ▣ Nu poate reprezenta zerouri spectrale ascuțite

practică: Utilizați estimarea spectrală AR pentru serii scurte ($n < 100$) și când procesul subiacent este presupus a fi autoregresiv. Folosiți metode neparametrice pentru serii mai lungi sau când forma spectrală este necunoscută.

Comparația metodelor de estimare spectrală

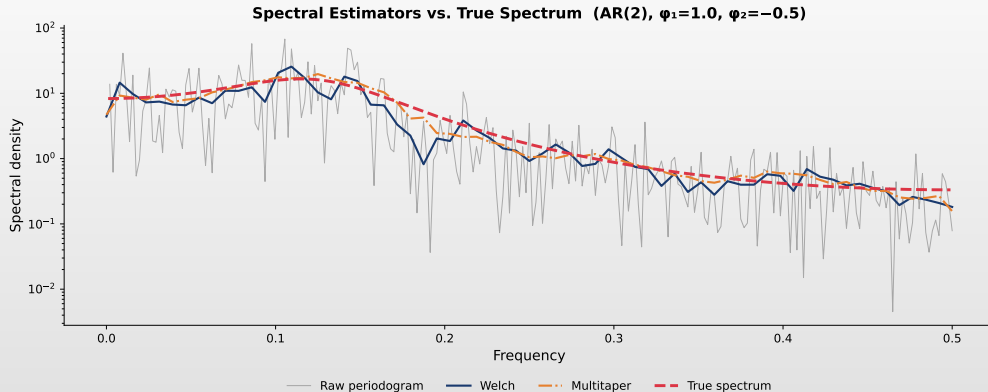
Rezumatul comparativ al metodelor

Metoda	Rezoluție	Varianță	Ipoteze	Optim pentru
Periodogramă brută	Cea mai mare	Cea mai mare	Niciuna	Explorare inițială
Netezire Daniell	Medie	Medie	f local netedă	Estimare rapidă
Blackman–Tukey	Medie	Mică–medie	f netedă	Analiză clasică
Metoda Welch	Mică–medie	Mică	Local staționare	Serii lungi, timp real
Multitaper	Medie–mare	Mică	Niciuna	Standard de aur
AR parametric	Foarte mare	Foarte mică	Model AR corect	Serii scurte

Flux de lucru practic

1. Reprezentați periodograma brută (pe scală logaritmică) pentru explorare inițială
2. Aplicați estimarea multitaper pentru analiza principală
3. Verificați cu estimarea spectrală AR dacă vârfurile necesită rezoluție mai mare
4. Folosiți intervale de încredere: $\hat{f}(\omega) \cdot \chi^2_\nu / \nu$ cu ν grade de libertate efective

Comparație estimare spectrală



- ▣ Șase metode de estimare aplicate aceleiași serii AR(2) pentru comparație directă
- ▣ Multitaper obține cel mai bun echilibru rezoluție-varianță dintre metodele neparametrice

Rezumat secțiune: Estimarea spectrală

Comparație estimatori

- ▣ **Periodograma**: nedeplasată, inconsistentă — varianță ridicată
- ▣ **Netezită (Daniell/BT)**: compromis bias–varianță prin lățimea de bandă M
- ▣ **Welch**: reduce varianța prin medierea pe segmente; rezoluție mai mică
- ▣ **Multitaper**: optim bias–varianță via tapere DPSS; preferată în practică
- ▣ **Parametrică**: eficientă dacă modelul este corect; sensibilă la specificare greșită

Procese cu Memorie Lungă

ARFIMA și comportamentul spectral în vecinătatea originii

Un proces ARFIMA(p, d, q) cu parametrul de diferențiere fracționară $d \in (-0,5; 0,5)$:

$$\phi(B)(1 - B)^d Y_t = \theta(B)\varepsilon_t$$

are densitatea spectrală care satisface:

$$f(\omega) \sim C_f |\omega|^{-2d} \quad \text{când } \omega \rightarrow 0$$

Pentru $0 < d < 0,5$: memorie lungă — spectrul **diverge** la origine (putere nelimitată la frecvențe joase).

Legătura cu exponentul Hurst

- Exponentul Hurst: $H = d + 1/2$, deci $H > 1/2$ indică memorie lungă
- Autocovarianțele descresc hiperbolic: $\gamma(h) \sim C |h|^{2d-1}$ (nesumabile pentru $d > 0$)
- Teorema Wiener–Khintchine se aplică în continuare, dar spectrul este nemărginit la $\omega = 0$

Exemple în economie și finanțe

- Volatilitate realizată ($d \approx 0,4$), persistența inflației, spread-uri ale ratelor dobânzii, volum tranzacționat.

Estimatori spectrali de regresie ai lui d

Estimatorul GPH (Geweke & Porter-Hudak, 1983)

Regresați $\log I(\omega_j)$ față de $\log |2 \sin(\omega_j/2)|^2$ la cele mai mici m frecvențe Fourier:

$$\log I(\omega_j) = \beta_0 - d \cdot \log(4 \sin^2(\omega_j/2)) + \varepsilon_j, \quad j = 1, \dots, m$$

unde $m = n^\alpha$ cu $\alpha \in (0, 1)$, de regulă $\alpha = 0,5-0,8$.

- ▣ Regresie simplă pe log-periodogramă; consistent dar ineficient
- ▣ $\hat{d}_{\text{GPH}} \xrightarrow{d} N(d, \pi^2/(24m))$ în condiții de regularitate

Estimatorul Local Whittle (Robinson, 1995)

Maximizează funcția de verosimilitate locală Whittle la cele m frecvențe inferioare:

$$\hat{d}_{\text{LW}} = \arg \min_d \left[\log \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{I(\omega_j)}{\omega_j^{-2d}} \right) - \frac{2d}{m} \sum_{j=1}^m \log \omega_j \right]$$

- ▣ Mai eficient decât GPH; $\sqrt{m}(\hat{d}_{\text{LW}} - d) \xrightarrow{d} N(0, 1/4)$
- ▣ Versiuni extinse: Local Whittle exact (Shimotsu & Phillips, 2005) tratează nestationaritatea

Estimarea prin funcția de verosimilitate Whittle

Funcția de verosimilitate Whittle

Pentru un model spectral parametric $f_\theta(\omega)$, aproximarea log-verosimilității Whittle este:

$$\ell_W(\theta) = - \sum_{j=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[\log f_\theta(\omega_j) + \frac{I(\omega_j)}{f_\theta(\omega_j)} \right], \quad \hat{\theta}_W = \arg \max_{\theta} \ell_W(\theta)$$

Proprietăți asimptotice

- ▣ $\sqrt{n}(\hat{\theta}_W - \theta_0) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma^{-1})$ unde $\Sigma = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\partial \log f_\theta}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial \log f_\theta}{\partial \theta} \right)^\top d\omega$
- ▣ Asimptotic echivalent cu MLE gaussian în domeniul timpului

Avantaje față de MLE în domeniul timpului

- ▣ Calcul: $O(n \log n)$ față de $O(n^2)$ pentru verosimilitatea exactă în domeniul timpului
- ▣ Robustețe: necesită doar specificarea corectă a spectrului, nu ipoteze complete de distribuție
- ▣ Modularitate: direct aplicabil pentru ARFIMA sau modele cu structuri spectrale complexe

Memorie lungă: Aplicație practică

Exemplu: Persistența volatilității financiare

- ▣ Volatilitatea realizată a randamentelor bursiere prezintă memorie lungă cu $d \approx 0,35-0,45$
- ▣ Spectrul diverge în vecinătatea $\omega = 0$: revenire la medie extrem de lentă
- ▣ Modelele ARMA standard necesită un ordin p foarte ridicat pentru a aproxima acest comportament
- ▣ ARFIMA surprinde aceleași dinamici parsimonios cu un singur parametru d

Flux de lucru practic

1. Reprezentați log-periodograma: dacă este aproximativ liniară lângă origine, suspectați memorie lungă
2. Estimați d prin GPH și Local Whittle; comparați pentru robustețe
3. Ajustați ARFIMA(p, d, q); comparați AIC/BIC cu ARMA standard
4. Folosiți verosimilitatea Whittle pentru estimare parametrică eficientă

Atenție: Rupturi structurale și tendințe deterministe pot imita memoria lungă în periodogramă — testați întotdeauna ambele ipoteze (Qu, 2011; Shimotsu, 2006).

Analiza spectrală bivariată

De la univariat la bivariat

Pentru două procese conjunct staționare $\{X_t\}$ și $\{Y_t\}$, **densitatea cross-spectrală** este:

$$f_{XY}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_{XY}(h) e^{-i\omega h}$$

unde $\gamma_{XY}(h) = \text{Cov}(X_{t+h}, Y_t)$ este funcția de cross-covarianță.

Diferența față de cazul univariat

- ▣ $f_{XY}(\omega)$ este **cu valori complexe**: $f_{XY}(\omega) = c_{XY}(\omega) - i q_{XY}(\omega)$
- ▣ $c_{XY}(\omega)$: **co-spectrul** (co-mișcare în fază la frecvența ω)
- ▣ $q_{XY}(\omega)$: **spectrul de cuadratură** (co-mișcare defazată)
- ▣ Acestea sunt mai greu de interpretat direct $\Rightarrow$ se folosesc măsurile derivate

Coerența pătratică

Coerența pătratică: R^2 în domeniul frecvenței

$$\kappa_{XY}^2(\omega) = \frac{|f_{XY}(\omega)|^2}{f_X(\omega) f_Y(\omega)}, \quad 0 \leq \kappa_{XY}^2(\omega) \leq 1$$

Interpretare

- ▣ Măsoară **tăria asocierii liniare** între X și Y la frecvența ω
- ▣ $\kappa^2 = 1$: relație liniară perfectă la această frecvență; $\kappa^2 = 0$: nicio relație
- ▣ Analog al R^2 din regresie, dar **specific frecvenței**
- ▣ Spre deosebire de corelația în domeniul timpului, coerența poate arăta că două serii sunt puternic legate la frecvențele ciclului de afaceri dar necorelate la frecvențe mai înalte

Estimare

- ▣ Cross-periodograma brută dă $\hat{\kappa}^2 = 1$ peste tot — trebuie netezită în prealabil
- ▣ Se folosesc estimări cross-spectrale cu multitaper sau netezire prin nuclee

Spectrul de fază și câștigul

Spectrul de fază

$$\phi_{XY}(\omega) = \arctan\left(\frac{-q_{XY}(\omega)}{c_{XY}(\omega)}\right)$$

- ▣ **Avans/întârziere** între X și Y la frecvența ω
- ▣ $\phi > 0$: X conduce Y
- ▣ Decalaj temporal: $\tau(\omega) = \phi(\omega)/\omega$
- ▣ Faza are sens doar unde coerența este semnificativă

Câștigul (raportul de amplitudine)

$$G_{XY}(\omega) = \frac{|f_{XY}(\omega)|}{f_X(\omega)}$$

- ▣ Măsoară cât de mult frecvența ω din X este **amplificată sau atenuată** în Y
- ▣ Dacă $Y = \beta X + \varepsilon$, câștigul este $|\beta|$ la toate frecvențele
- ▣ Util pentru evaluarea transmisiei dependente de frecvență

Împreună: Coerența vă spune *cât de puternic* sunt legate două serii la fiecare frecvență, faza vă spune *care conduce*, iar câștigul vă spune *cu cât* sunt amplificate oscilațiile.

Faza: Exemplu numeric

Configurație

- ▣ Fie $Y_t = X_{t-2} + \varepsilon_t$ (relație de decalaj pur de 2 perioade)
- ▣ Cross-spectrul: $S_{XY}(\omega) = e^{-2i\omega} S_{XX}(\omega)$
- ▣ Faza: $\phi(\omega) = -2\omega$

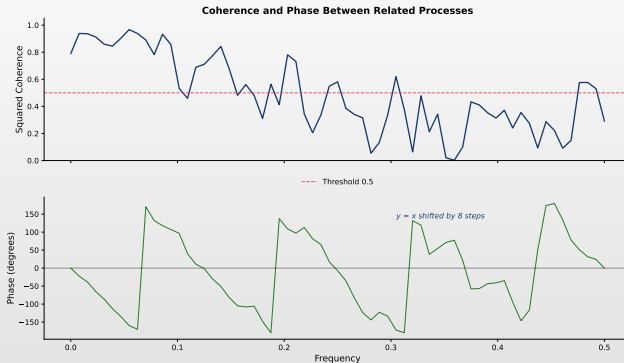
Interpretare

- ▣ La $\omega = \pi/4$ (ciclu de 8 perioade): $\phi = -\pi/2$ (sfert de ciclu)
- ▣ La $\omega = \pi/8$ (ciclu de 16 perioade): $\phi = -\pi/4$ (optime de ciclu)
- ▣ **Panta fazei** = $d\phi/d\omega = -2$ dă decalajul de grup (în perioade)

Concluzie cheie

- ▣ Fază negativă $\Rightarrow Y$ urmează X (întârziere)
- ▣ Fază pozitivă $\Rightarrow Y$ precede X (avans)
- ▣ Faza = $-\omega k$ înseamnă k -perioade decalaj la toate frecvențele

Exemplu coerență



- Coerența pătratică, spectrul de fază și câștigul între două serii economice simulate
- Coerență ridicată la frecvențele ciclului de afaceri (6–32 trimestre) cu fază $\approx 0 \Rightarrow$ co-mișcare sincronizată

Analiza cross-spectrală: Aplicații economice

Aplicația 1: Sincronizarea ciclurilor de afaceri

- Coerența între PIB-ul a două țări la frecvențele ciclului de afaceri (ω corespunzând la 6–32 trimestre)
- Coerență ridicată $\Rightarrow$ cicluri de afaceri sincronizate (relevant pentru uniunea monetară)
- Faza $\Rightarrow$ care țară conduce/urmează

Aplicația 2: Indicatori avansați

- Coerența și faza între un indicator avansat (ex. panta curbei randamentelor) și PIB
- Dacă coerența ridicată + fază pozitivă, indicatorul chiar „conduce”

Aplicația 3: Transmisia politicii monetare

- Coerența între rata de politică și inflație: poate fi ridicată la frecvențe joase dar scăzută la frecvențe înalte
- Faza dezvăluie **întârzierea transmisiei** la fiecare frecvență

Filtre liniare și funcții de transfer I

Un filtru liniar

Un filtru liniar invariant în timp transformă $\{X_t\}$ în $\{Y_t\}$:

$$Y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j X_{t-j} = A(B) X_t$$

Funcția de răspuns în frecvență (funcția de transfer) este:

$$A(\omega) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{-i\omega j}$$

Rezultatul fundamental: Filtrarea = Multiplicare

Dacă X_t are densitate spectrală $f_X(\omega)$, atunci $Y_t = A(B)X_t$ are densitate spectrală:

$$f_Y(\omega) = |A(\omega)|^2 \cdot f_X(\omega)$$

Un filtru multiplică spectrul cu câștigul său pătratic — de aceea domeniul frecvenței face analiza filtrelor trivială!

Filtre liniare și funcții de transfer II

Exemple clasice de filtre

- ▣ **Prima diferență** ($1 - B$): $|A(\omega)|^2 = 4 \sin^2(\omega/2)$
 $\Rightarrow$ amplifică frecvențele înalte, elimină $\omega = 0$ (elimină trendul)
- ▣ **Media mobilă de ordin m** : $|A(\omega)|^2 = \left(\frac{\sin(m\omega/2)}{m \sin(\omega/2)} \right)^2$
 $\Rightarrow$ filtru trece-jos (lasă componentele lente, elimină oscilațiile rapide)
- ▣ **Diferența sezonieră** ($1 - B^{12}$): vârfuri ale $|A(\omega)|^2 = 0$ la armonicile sezoniere
 $\Rightarrow$ elimină tiparul sezonier lunar

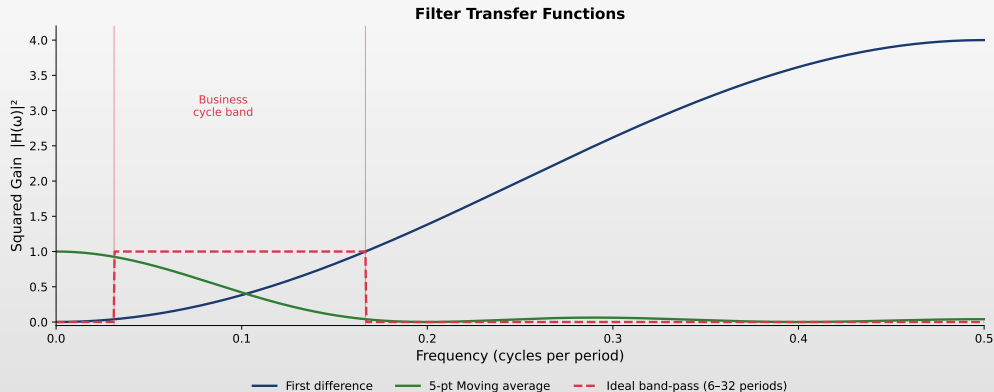
Filtrul band-pass ideal

Lasă să treacă frecvențele din $[\omega_L, \omega_H]$ și blochează restul:

$$A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } \omega_L \leq |\omega| \leq \omega_H \\ 0 & \text{altfel} \end{cases} \quad a_j = \frac{\sin(\omega_H j) - \sin(\omega_L j)}{\pi j}$$

Problemă: necesită infinit de multe avansuri/întârzieri $\Rightarrow$ trebuie trunchiat în practică.

Funcții de transfer ale filtrelor



- Câștigul pătratic $|A(\omega)|^2$ pentru patru filtre: prima diferență, MA pe 12 luni, band-pass ideal, ciclul HP
- Selectivitatea în frecvență a fiecărui filtru este imediat vizibilă în domeniul frecvenței

Filtrele Baxter–King și Christiano–Fitzgerald

Filtrul Baxter–King (BK) (1999)

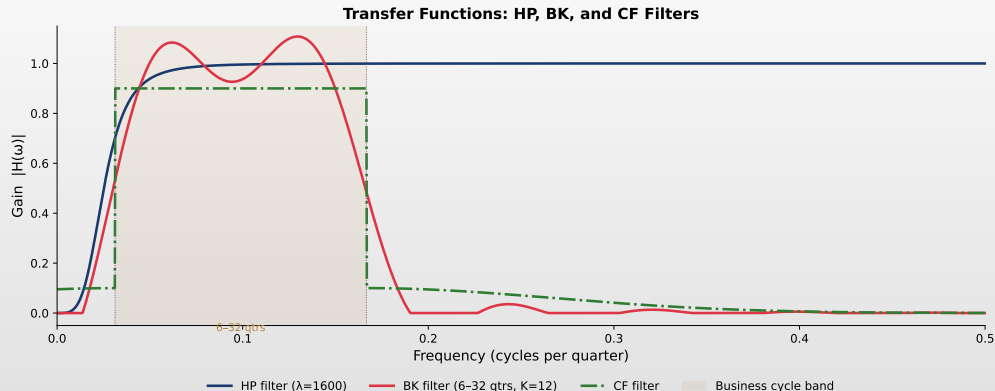
- ▣ Aproximare simetrică, de lungime fixă a filtrului band-pass ideal
- ▣ Utilizează K avansuri și întârzieri (de obicei $K = 12$ pentru date trimestriale)
- ▣ Coeficienți: filtru ideal trunchiat + constrâns să aibă suma zero (elimină trendul)
- ▣ **Dezavantaj:** pierde K observații la fiecare capăt al seriei

Filtrul Christiano–Fitzgerald (CF) (2003)

- ▣ Filtru asimetric, variabil în timp — utilizează toate observațiile (fără pierdere de date)
- ▣ Aproximare optimală sub ipoteza că X_t este un mers aleator
- ▣ Ponderile filtrului se adaptează la capetele seriei
- ▣ În general preferat față de BK pentru majoritatea aplicațiilor economice

Filtrul HP: ($\lambda = 1600$): filtru trece-sus cu $|A_{HP}(\omega)|^2 = \frac{4\lambda(1-\cos \omega)^2}{1+4\lambda(1-\cos \omega)^2}$, lasă să treacă cicluri < 32 trimestre.

Funcții de transfer HP, BK și CF



- Ciclul HP ($\lambda=1600$), BK band-pass ($K=12$, 6–32 trim.) și filtrul CF pe date trimestriale
- Ținta ideală band-pass (gri) arată cât de bine aproximează fiecare filtru idealul

Filtrul HP: Perspective critice

- **Critica Hamilton (2018):** filtrul HP introduce cicluri false care nu există în date
 - ▶ Seria filtrată are o structură ARMA(4,4) indiferent de DGP-ul original
 - ▶ Alternativă propusă: detrendare bazată pe regresie
- **Efectul de capăt:** estimările la marginile eșantionului sunt nesigure
 - ▶ Filtrul HP este un filtru bilateral; capetele utilizează ponderi asimetrice
 - ▶ Ultimii 2–3 ani de estimări trebuie interpretați cu prudență
- **Sensibilitate la λ :** rezultatele depind puternic de parametrul de netezire
 - ▶ $\lambda = 1600$ (trimestrial) este o convenție, nu un optim universal
 - ▶ Filtrele BK și CF sunt mai puțin sensibile la alegerea lățimii de bandă
- **Recomandare practică:** utilizați HP ca unul dintre mai multe instrumente; comparați întotdeauna cu BK/CF

Scurgerea spectrală și ponderarea datelor

Problema scurgerii spectrale

- ▣ Calculul DFT presupune implicit că datele sunt periodice (se „înfășoară”)
- ▣ Dacă seria nu începe și nu se termină la aceeași valoare, aceasta creează **discontinuități**
- ▣ Energia de la vârfurile spectrale puternice „se scurge” în frecvențele vecine
- ▣ Rezultat: periodograma arată humps largi în loc de vârfuri ascuțite

Soluție: Ponderarea datelor (aplicarea ferestrei)

Se aplică o pondere $\{d_t\}$ care aduce lin datele la zero la ambele capete:

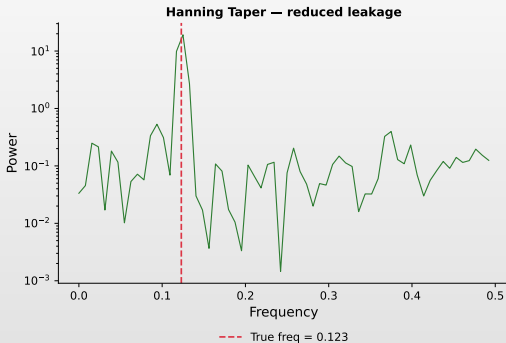
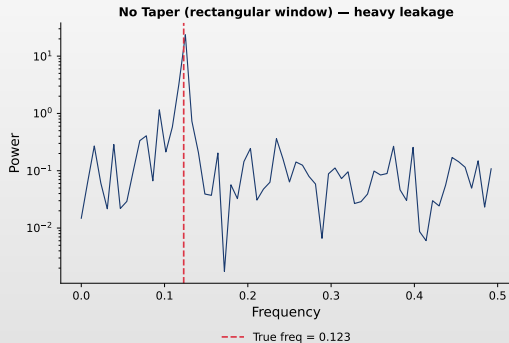
$$y_t^{\text{ponderat}} = d_t \cdot y_t, \quad \text{unde } d_1 \approx d_n \approx 0, \quad d_{n/2} \approx 1$$

Ferestre comune:

- ▣ **Hanning:** $d_t = 0,5(1 - \cos(2\pi t/n))$ — bun uz general
- ▣ **Hamming:** $d_t = 0,54 - 0,46 \cos(2\pi t/n)$ — reducere ușor mai mică a scurgerii
- ▣ **Blackman:** $d_t = 0,42 - 0,5 \cos(2\pi t/n) + 0,08 \cos(4\pi t/n)$ — excelentă suprimare
- ▣ **DPSS (Slepian):** concentrare optimală a energiei (folosit în multitaper)

Ilustrare scurgere spectrală

Spectral Leakage: Effect of Tapering



- Fără ponderare (stânga): scurgere severă a energiei spectrale în frecvențele vecine
- Cu fereastră Hanning (dreapta): vârful este bine concentrat, nivelul de scurgere mult redus

De la Fourier la Wavelets: Motivație

Limitarea analizei Fourier

- ▣ Analiza Fourier descompune un semnal în componente sinus/cosinus *globale*
- ▣ Fiecare componentă de frecvență se extinde pe **întreaga** perioadă de timp
- ▣ Problemă: **semnale nestăționare** — conținutul de frecvență se schimbă în timp!
- ▣ Exemplu: volatilitatea financiară este calmă în unele perioade, turbulentă în altele

Principiul incertitudinii (Heisenberg–Gabor)

- ▣ **Nu puteți** avea rezoluție perfectă simultan în timp și frecvență
- ▣ $\Delta t \cdot \Delta f \geq \frac{1}{4\pi}$ (incertitudine timp-frecvență)
- ▣ Fourier: Δf este minimă dar $\Delta t = \infty$ (fără localizare în timp)
- ▣ Wavelets: adaptivă — rezoluție bună în timp la f înaltă, rezoluție bună în frecvență la f joasă

Wavelets: Localizate atât în timp, cât și în frecvență

- ▣ Folosesc funcții bază **scurte, oscilatorii** („wavelets”) în loc de sinusoidă infinite
- ▣ Wavelets se întind pentru frecvențe joase, se comprimă pentru frecvențe înalte

Transformata Wavelet Continuă (CWT)

Definiție

CWT a unui semnal $x(t)$ în raport cu un wavelet mamă $\psi(t)$ este:

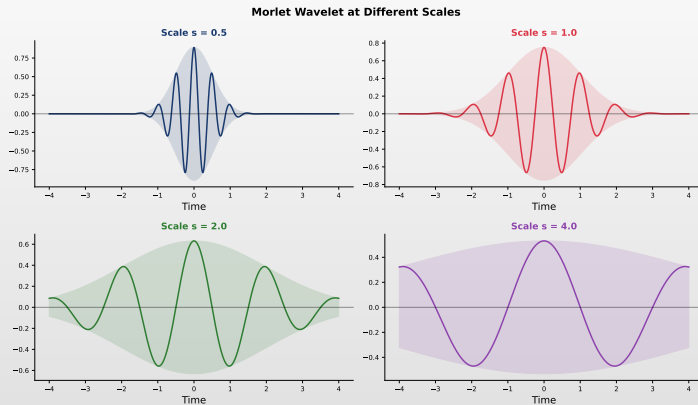
$$W(a, b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt$$

- ▣ a : parametrul de **scală** (invers proporțional cu frecvența: a mare = frecvență joasă)
- ▣ b : parametrul de **translație** (localizare în timp)
- ▣ $|W(a, b)|^2$: **puterea wavelet** la scala a și momentul b

Wavelets mamă comune

- ▣ **Morlet**: $\psi(t) = \pi^{-1/4} e^{i\omega_0 t} e^{-t^2/2}$ (exponențială complexă modulată gaussian, $\omega_0 = 6$)
- ▣ **Pălăria mexicană**: $\psi(t) = (1 - t^2)e^{-t^2/2}$ (derivata a doua a gaussienei)
- ▣ **Haar**: cel mai simplu wavelet — constant pe porțiuni (bun pentru detectarea salturilor)
- ▣ Pentru serii de timp: **Morlet este standard** — echilibru bun timp/frecvență

Ilustrare wavelet Morlet



- Wavelet-ul Morlet la patru scale: scalele mai mari captează oscilații de frecvență joasă
- Scalele mai mici captează tranziții de frecvență înaltă — rezoluție timp-frecvență adaptivă

Spectrul de putere wavelet și scalograma

Spectrul de putere wavelet

$$WPS(a, b) = |W(a, b)|^2$$

Afișat ca o **scalogramă**: o hartă termică 2D cu timpul pe axa x și scala (perioada) pe axa y . Intensitatea culorii = puterea.

Spectrul wavelet global

Puterea medie în timp la fiecare scală:

$$\overline{W}^2(a) = \frac{1}{n} \sum_{b=1}^n |W(a, b)|^2$$

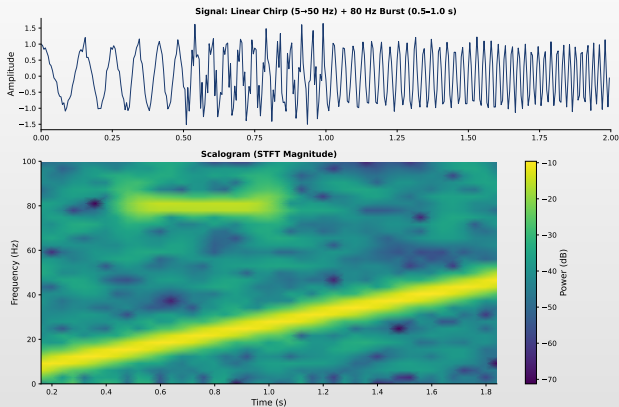
Comparabil cu densitatea spectrală Fourier. Util pentru identificarea periodicităților dominante.

Conul de influență (COI)

- Lângă capetele seriei, coeficienții wavelet sunt nesiguri (efecte de margine)
- COI marchează regiunea unde efectele de margine sunt semnificative
- Interpretați puterea doar în interiorul COI

Semnif.: Sub H_0 de zgomot roșu (AR(1)), puterea wavelet urmează χ^2_2 scalată de spectrul de fundal. Contururi la 95% semnificație.

Scalograma unei serii sintetice



- Semnal sintetic: ciclu de 4 ani (prima jumătate) + ciclu de 10 ani (a doua jumătate)
- Scalograma relevă conținutul de frecvență variabil în timp; COI (punctat) delimitează regiunea fiabilă

Coerența wavelet

Transformata cross-wavelet și coerența

Pentru două serii X_t și Y_t cu CWT-urile $W_X(a, b)$ și $W_Y(a, b)$:

$$W_{XY}(a, b) = W_X(a, b) \overline{W_Y(a, b)} \quad (\text{spectrul cross-wavelet})$$

Coerența wavelet este:

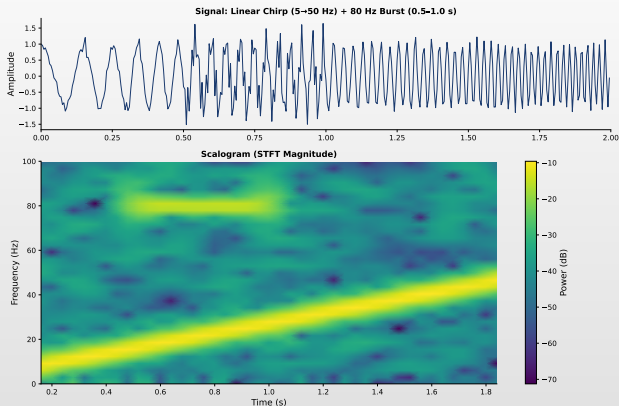
$$R_{XY}^2(a, b) = \frac{|S(W_{XY}(a, b))|^2}{S(|W_X(a, b)|^2) \cdot S(|W_Y(a, b)|^2)}$$

unde $S(\cdot)$ este un operator de netezire atât în timp, cât și în scală.

Interpretare și aplicații

- ▣ $R_{XY}^2(a, b) \in [0, 1]$: măsură variabilă în timp și scală a co-mișcării
- ▣ **Săgeți de fază** pe graficul de coerență indică relații de avans/întârziere
- ▣ Aplicație: prețul petrolului și piețele de acțiuni — coerența poate fi ridicată la frecvențele ciclului în timpul crizelor dar scăzută în perioade normale
- ▣ Aplicație: inflația și masa monetară — coerența variază între regimuri istorice

Coerența wavelet: Scalograma



- Coerența wavelet între două serii sintetice cu săgeți de fază
- Dreapta = în fază, stânga = anti-fază, sus = prima serie conduce

Procese local staționare

Dahlhaus (1997): Un cadru pentru spectre nestaționare

Un **proces local staționar** are reprezentarea:

$$X_{t,T} = \int_{-\pi}^{\pi} A\left(\frac{t}{T}, \omega\right) e^{i\omega t} dZ(\omega)$$

unde $A(u, \omega)$ este **funcția de transfer variabilă în timp** și $Z(\omega)$ are incrementi ortogonali. **Densitatea spectrală variabilă în timp** este:

$$f(u, \omega) = |A(u, \omega)|^2, \quad u \in [0, 1], \omega \in [-\pi, \pi]$$

Ideea cheie

- La fiecare punct de timp rescalat $u = t/T$, procesul “arată” staționar cu spectrul $f(u, \omega)$
- Generalizează reprezentarea Cramér clasică pentru a permite structuri variabile în timp
- Estimare prin periodograma locală sau metode bazate pe wavelets

Detecția punctelor de schimbare spectrală

Testarea staționarității spectrale

- $H_0: f(u, \omega) = f(\omega)$ pentru toți u (spectrul este invariant în timp)
- $H_1: f(u, \omega)$ se schimbă la unul sau mai multe puncte de timp (puncte de schimbare spectrală)

Abordări

- **CUSUM pe periodograme locale:** Compararea estimărilor spectrale din sub-segmente
- **Teste bazate pe wavelets:** Utilizarea varianței la fiecare scală pentru detectarea schimbărilor în benzi de frecvență specifice
- **Statistici de tip Kolmogorov–Smirnov:** Compararea distribuțiilor spectrale între ferestre

Aplicație: Detectarea regimurilor în economie

- Detectarea începutului și sfârșitului Marii Moderații prin schimbări spectrale
- Identificarea rupturilor structurale în dinamica inflației sau volatilitatea financiară
- Schimbări în frecvența sau amplitudinea ciclului de afaceri între regimuri de politică economică

STFT vs. CWT: Legătura dintre Fourier și Wavelets

Transformata Fourier pe termen scurt (STFT)

- Aplicați DFT pe segmente cu fereastră: $\text{STFT}(\tau, \omega) = \sum_t x(t) w(t - \tau) e^{-i\omega t}$, unde $w(\cdot)$ este o fereastră de lățime fixă centrată la momentul τ

	STFT	CWT
Fereastră	Lățime fixă pentru toți ω	Adaptivă (îngustă la ω mare)
Rezoluție	Uniformă $\Delta t \times \Delta \omega$	Variabilă: $\Delta t \propto 1/\omega$
Bază	Sinusoide cu fereastră	Wavelets scalate/deplasate
Cel mai bun pentru	Semnale cu frecvență stabilă	Semnale cu elemente tranzitorii
Spectrogramă	$ \text{STFT} ^2 = \text{spectrogramă}$	$ W(a, b) ^2 = \text{scalogramă}$

Perspectivă practică

- STFT adaugă localizare temporală analizei Fourier; CWT adaptează în plus lățimea ferestrei la frecvență
- Pentru date economice: CWT este preferată deoarece dinamicile ciclului de afaceri și cele de înaltă frecvență necesită rezoluții diferite

Fourier vs. Wavelets: Când se folosește fiecare

Ghid de decizie		
Criteriu	Fourier / Spectral	Wavelet
Staționaritate	Necesară (sau presupusă)	Nu este necesară
Localizare în timp	Nu	Da
Rezoluția în frecvență	Uniformă la toate ω	Variază cu scala
Cel mai bun pentru	Serii staționare, proiectare filtre	Nestaționare, evenimente tranzitorii
Testarea ipotezelor	Bine dezvoltată (F-test, χ^2)	Monte Carlo, nul AR(1)
Cost computațional	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$ la $O(n^2)$
Comun în	Economie, procesarea semnalelor	Geofizică, finanțe, climă

Recomandare practică

- ▣ Folosiți **analiza Fourier/spectrală** când credeți că structura de frecvență este *stabilă* în timp
- ▣ Folosiți **wavelets** când suspectați că structura de frecvență *se schimbă* în timp (schimbări de regim, cicluri în evoluție)
- ▣ De multe ori este util să folosiți **ambele**: Fourier pentru forma spectrală generală, wavelets pentru comportamentul variabil în timp

Rezumat secțiune: Wavelets vs. Fourier

Când să folosiți fiecare metodă

- ▣ **Fourier**: serii staționare, conținut global de frecvență, rezoluție ascuțită în frecvență
- ▣ **Wavelets**: nestaționare, frecvențe variabile în timp, localizare în timp ȘI frecvență
- ▣ **STFT**: compromis — fereastră fixă; rezoluție uniformă timp-frecvență
- ▣ **Scalograma**: vizualizare preferată pentru cicluri economice și financiare

Flux practic: Analiza spectrală a unei serii reale

1. **Preprocesare:** eliminați trendul (HP/prima diferență), luați logaritmi dacă este necesar
2. **Verificarea staționarității:** test ADF/KPSS; diferențiați dacă este necesar
3. **Calculați periodograma:** identificați vizual frecvențele dominante
4. **Neteziți:** aplicați Welch sau multitaper pentru o estimare fiabilă a densității spectrale
5. **Testați:** testul Fisher pentru periodicități ascunse semnificative
6. **Memorie lungă?:** estimați d prin GPH sau Local Whittle dacă $\hat{f}(\omega) \rightarrow \infty$ aproape de $\omega = 0$
7. **Cross-spectral:** coerență + fază dacă analizați două serii
8. **Wavelet:** dacă se suspectează nestacionaritate, folosiți scalograma CWT

Prezentarea studiului de caz

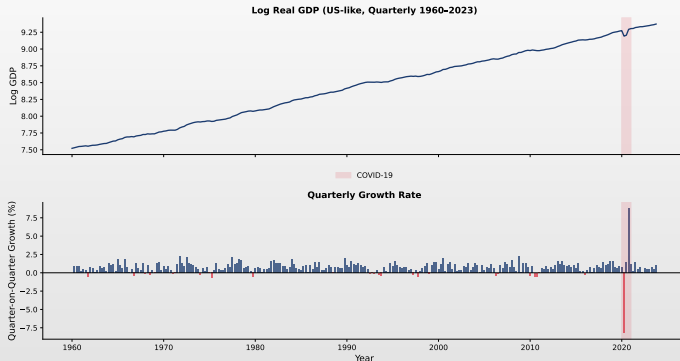
Descrierea datelor

- ▣ **Date:** PIB Real SUA, trimestrial, 1947T1–2024T4 (seria FRED GDPC1)
- ▣ **Transformare:** logaritmul PIB-ului real
- ▣ **Obiectiv:** Extragerea componentei ciclului de afaceri folosind metode spectrale
- ▣ **Metode comparate:** Periodogramă, Multitaper, filtru HP, filtru BK, filtru CF, Wavelet

Definiția ciclului de afaceri

- ▣ Burns & Mitchell (1946) / NBER: fluctuații recurente cu perioada 6–32 trimestre
- ▣ Banda de frecvență: $\omega \in [2\pi/32, 2\pi/6] \approx [0,196, 1,047]$ radiani/trimestru
- ▣ Obiectiv: izolarea acestei benzi de trend (frecvențe joase) și componenta neregulată (frecvențe înalte)

Seria temporală PIB SUA



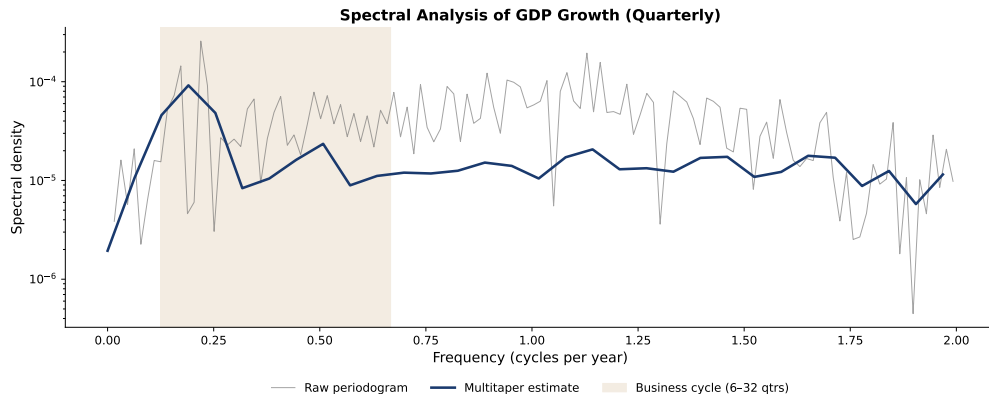
- Logaritmul PIB-ului Real SUA (FRED GDPC1), 1947T1–2024T4, cu rata de creștere trimestrială
- Trendul puternic domină vizualizarea în domeniul timpului; metodele spectrale sunt necesare pentru extragerea ciclului

Python: Estimarea periodogramei și Multitaper

Analiză spectrală cu Python

```
import numpy as np; import pandas as pd
from scipy import signal; from spectrum import pmtm
# Incarca PIB Real SUA (trimestrial, log-transformat)
gdp = pd.read_csv('GDPC1.csv', parse_dates=['DATE'], index_col='DATE')
y = np.log(gdp['GDPC1'].values)
y_dt = y - np.polyval(np.polyfit(np.arange(len(y)), y, 1), np.arange(len(y)))
# Periodograma bruta (fs=4 = trimestrial)
freqs_p, Pxx_p = signal.periodogram(y_dt, fs=4)
# Estimare spectrala multitaper (NW=4, K=7 ferestre)
Pxx_mt, w, ev = pmtm(y_dt, NW=4, NFFT=1024, method='adapt')
freqs_mt = np.linspace(0, 2, len(Pxx_mt))
bc_low, bc_high = 1/8, 1/1.5 # banda ciclului de afaceri (cicluri/an)
```

Periodograma și estimarea multitaper a PIB-ului



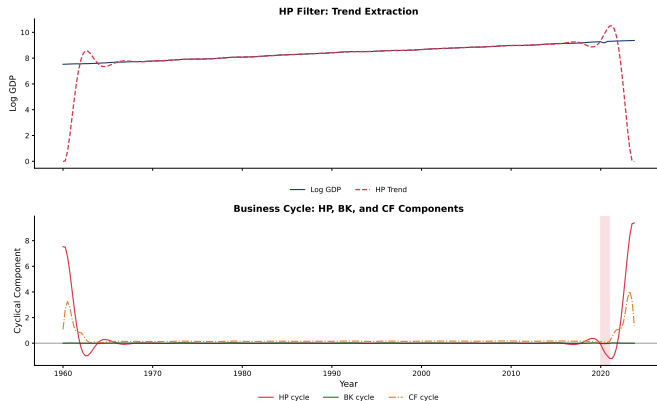
- ▣ Periodograma brută (gri) și estimarea multitaper (albastru) a log PIB-ului ajustat pentru trend
- ▣ Banda umbrită = intervalul ciclului de afaceri (6–32 trim.); vârf dominant la $\approx 16\text{--}20$ trimestre

Python: Filtrare Band-Pass

Extragerea componentei ciclului de afaceri

```
import statsmodels.api as sm
cycle_hp, trend_hp = sm.tsa.filters.hpfilter(y, lamb=1600) # HP filter
cycle_bk = sm.tsa.filters.bkfilter(y, low=6, high=32, K=12) # BK filter
cycle_cf, trend_cf = sm.tsa.filters.cffilter(y, low=6, high=32) # CF filter
# Compara ciclurile extrase
import matplotlib.pyplot as plt
fig, ax = plt.subplots(figsize=(12, 5))
ax.plot(gdp.index, cycle_hp, label='HP filter', alpha=0.8)
ax.plot(gdp.index[12:-12], cycle_bk, label='BK filter', alpha=0.8)
ax.plot(gdp.index, cycle_cf, label='CF filter', alpha=0.8)
ax.axhline(0, color='black', linewidth=0.5)
ax.legend(); ax.set_title('US Business Cycle Components')
```

Cicluri de afaceri filtrate band-pass



- HP ($\lambda=1600$), BK ($K=12$) și CF — componentele ciclului de afaceri cu umbrire recesiuni NBER
- Toate trei filtrele sunt de acord asupra sincronizării vârfurilor și minimelor; CF păstrează capetele

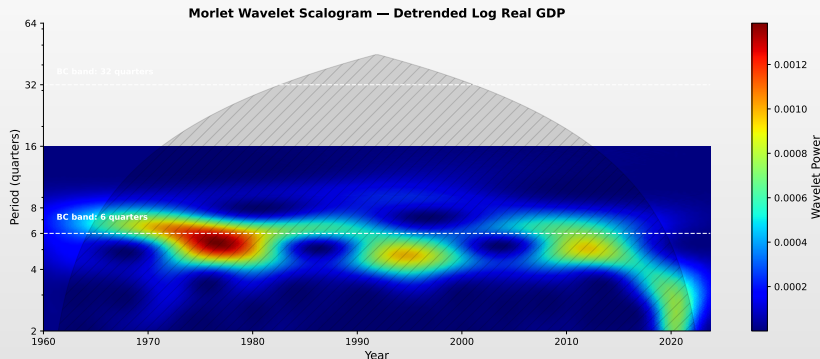
Python: Analiza Wavelet

Spectrul de putere wavelet și scalograma

```
import pywt # PyWavelets
scales = np.arange(2, 128) # scale ~ perioade in trimestre
coefficients, frequencies = pywt.cwt(y_dt, scales, 'morl',
                                     sampling_period=0.25)

power = np.abs(coefficients) ** 2
periods = 1 / frequencies # conversie in ani
# Grafic scalograma
fig, ax = plt.subplots(figsize=(12, 6))
im = ax.contourf(gdp.index, periods, power, levels=20, cmap='jet')
ax.set_ylim(1, 32); ax.set_yscale('log', base=2)
ax.set_ylabel('Period (years)')
ax.axhline(y=1.5, color='white', linestyle='--')
ax.axhline(y=8, color='white', linestyle='--')
plt.colorbar(im, label='Power')
```

Scalograma wavelet: PIB Real SUA



- Scalograma wavelet Morlet a PIB-ului Real SUA ajustat pentru trend; liniile albe = banda ciclului 6–32 trim.
- „Marea Moderație” (1985–2007) apare ca putere redusă; 2008 și 2020 ca explozii localizate

Rezultate: Densitatea spectrală a PIB-ului SUA

Constatări cheie din analiza spectrală

- ▣ **Vârf dominant** în periodogramă la perioada $\approx 16\text{--}20$ trimestre (4–5 ani)
- ▣ Consistent cu durata medie a ciclurilor de afaceri NBER
- ▣ Concentrare secundară a puterii la perioada $\approx 32\text{--}40$ trimestre (8–10 ani) — ciclul Juglar
- ▣ Putere foarte mare la cele mai joase frecvențe confirmă componenta puternică de trend
- ▣ Estimarea multitaper este mai netedă, confirmă aceeași structură de vârfuri

Comparația filtrelor

- ▣ Filtrele HP, BK și CF produc componente ciclice **similare** (corelație $> 0,85$)
- ▣ BK pierde 12 observații la fiecare capăt; CF și HP păstrează întregul eșantion
- ▣ Toate trei identifică corect recesiunile NBER ca minime ale componentei ciclice
- ▣ Filtrul CF este ușor mai bun la capete datorită adaptării asimetrice

Rezultate: Scalograma Wavelet

Structura spectrală variabilă în timp

- ▣ Scalograma wavelet relevă că puterea ciclului de afaceri **nu este constantă** în timp
- ▣ **Anii 1970–1980**: Putere puternică la perioade de 4–8 ani (șocuri petroliere, dezinflația Volcker)
- ▣ **1985–2007**: Putere redusă la toate frecvențele ciclice — „Marea Moderație”
- ▣ **2008–2009**: Concentrare intensă de putere la perioade de 4–6 ani (Marea Recesiune)
- ▣ **2020**: Explozie bruscă, localizată de putere la perioade de 2–4 ani (șocul COVID)

Observație: De ce wavelets completează Fourier

- ▣ Analiza Fourier ne spune că ciclul *mediu* este de ≈ 5 ani
- ▣ Wavelets ne spune că durata și intensitatea ciclului *se schimbă în timp*
- ▣ Marea Moderație este vizibilă ca o „zonă liniștită” în scalogramă
- ▣ Aceasta nu poate fi detectată cu analiza spectrală Fourier standard

Exercițiu IA: Analiză spectrală cu LLM-uri

Ingineria prompt-urilor pentru analiză spectrală

- Utilizați un LLM (Claude, GPT-4) pentru a asista analiza spectrală

Exemplu de prompt

„Date lunare de producție industrială pentru România (2000–2024). Trend, sezonabilitate și posibil cicluri. Vă rog:

- *Calculați periodograma și estimarea spectrală multitaper*
- *Identificați frecvențele dominante și perioadele corespunzătoare*
- *Aplicați filtru band-pass pentru ciclurile cu perioada 2–8 ani*
- *Creați scalogramă wavelet; interpretați în termeni economici*

Ce trebuie verificat în răspunsul IA

- Setează corect f_s (frecvența de eșantionare) pentru date lunare?
- Interpretează frecvențele în unitățile corecte (cicluri/lună vs. cicluri/an)?
- Aplică ajustarea pentru trend înainte de calculul periodogramei?

Concluzii cheie

Ce am învățat

- ▣ **Densitatea spectrală** $f(\omega)$ descompune varianța pe frecvențe (Wiener–Khinchine: $\gamma(h) \leftrightarrow f(\omega)$)
- ▣ **Periodograma** este estimatorul natural dar *inconsistentă* — trebuie netezită (multitaper = standard de aur)
- ▣ Măsurile **cross-spectrale** (coerență, fază, câștig) dezvăluie relații specifice frecvenței
- ▣ **Filtrele band-pass** (BK, CF) extrag ciclurile de afaceri; HP este un filtru trece-sus
- ▣ **Wavelets** oferă localizare timp-frecvență pentru semnale nestaționare

Recomandări practice

- ▣ Eliminați trendul întotdeauna înainte de analiza spectrală; folosiți scala logaritmică pentru grafice
- ▣ Alegeți multitaper pentru estimări finale; periodograma brută doar pentru explorare
- ▣ Pentru date nestaționare, preferați analiza wavelet în locul metodelor Fourier

Întrebarea 1

Întrebare

- Ce măsoară funcția de densitate spectrală $f(\omega)$ și care este relația sa cu funcția de autocovarianță $\gamma(h)$?

Variante de răspuns

- **(A)** $f(\omega)$ măsoară media procesului la frecvența ω ; este transformata Laplace a lui $\gamma(h)$
- **(B)** $f(\omega)$ măsoară contribuția frecvenței ω la varianța totală; este transformata Fourier a lui $\gamma(h)$ (teorema Wiener–Khintchine)
- **(C)** $f(\omega)$ măsoară defazajul la frecvența ω ; este inversa lui $\gamma(h)$
- **(D)** $f(\omega)$ măsoară componenta de trend la frecvența ω ; este derivata lui $\gamma(h)$

Întrebarea 1: Răspuns

Răspuns: (B)

- Funcția de densitate spectrală $f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_h \gamma(h) e^{-i\omega h}$ descompune varianța totală a unui proces staționar pe frecvențe. Varianța totală este $\gamma(0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) d\omega$. Această pereche de transformate Fourier între $\gamma(h)$ și $f(\omega)$ este teorema Wiener–Khinchine — rezultatul fundamental al analizei spectrale.

 TSA_ch12_quiz1

Întrebarea 2

Întrebare

- De ce periodograma brută este un estimator *inconsistent* al densității spectrale și cum poate fi remediat acest lucru?

Variante de răspuns

- (A)** Periodograma este deplasată; se remediază prin creșterea dimensiunii eșantionului
- (B)** Varianța periodogramei nu scade cu dimensiunea eșantionului ($\text{Var}[I(\omega)] \approx f(\omega)^2$ pentru orice n); se remediază prin netezire (ex. multitaper, Welch, nucleu Daniell)
- (C)** Periodograma funcționează doar pentru zgomot alb; se remediază prin diferențierea datelor
- (D)** Periodograma este inconsistentă deoarece folosește FFT; se remediază prin calculul direct al DFT

Întrebarea 2: Răspuns

Răspuns: (B)

- Periodograma este aproximativ nedeplasată ($\mathbb{E}[I(\omega)] \rightarrow f(\omega)$), dar varianța sa $\text{Var}[I(\omega)] \approx f(\omega)^2$ nu scade când $n \rightarrow \infty$. Aceasta se datorează faptului că adăugarea mai multor date introduce mai multe frecvențe Fourier, în loc să îmbunătățească estimările la frecvențele existente. Netezirea (medierea valorilor vecine ale periodogramei, multitaper sau metode cu fereastră lag) sacrifică rezoluția în frecvență în schimbul varianței reduse, producând un estimator consistent.

 TSA_ch12_quiz2

Întrebarea 3

Întrebare

- ▣ Observați o densitate spectrală cu un vârf ascuțit lângă $\omega = 0$ și vârfuri mai mici la $\omega = \pi/6, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, 5\pi/6, \pi$. Ce tip de proces a generat probabil aceste date?

Variante de răspuns

- ▣ **(A)** Zgomot alb — spectru plat cu fluctuații aleatorii
- ▣ **(B)** AR(1) cu $\phi > 0$ — spectru roșu cu vârf la zero
- ▣ **(C)** Proces sezonier lunar cu trend — vârf la zero (trend) plus vârfuri la armonicile sezoniere $\omega_k = 2\pi k/12$
- ▣ **(D)** Mers aleator — toată puterea la $\omega = 0$

Întrebarea 3: Răspuns

Răspuns: (C)

- Vârfurile la $\omega = \pi/6, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, 5\pi/6, \pi$ corespund exact lui $2\pi k/12$ pentru $k = 1, 2, \dots, 6$ — armonicile sezoniere ale datelor lunare ($s = 12$). Vârful la $\omega \approx 0$ indică o componentă puternică de trend sau pe termen lung. Aceasta este semnătura spectrală clasică a unei serii lunare cu atât trend, cât și sezonalitate, cum ar fi pasagerii companiilor aeriene sau vânzările cu amănuntul.

 TSA_ch12_quiz3

Întrebarea 4

Întrebare

- ▣ Care este avantajul principal al analizei wavelet față de analiza spectrală Fourier pentru serii de timp economice?

Variante de răspuns

- ▣ **(A)** Wavelets oferă rezoluție mai mare în frecvență decât Fourier pentru serii staționare
- ▣ **(B)** Wavelets pot localiza caracteristici spectrale atât în timp, cât și în frecvență, fiind potrivite pentru procese nestaționare unde conținutul de frecvență se schimbă în timp
- ▣ **(C)** Wavelets sunt computațional mai rapide decât FFT
- ▣ **(D)** Wavelets nu necesită alegerea niciunui parametru, spre deosebire de metodele Fourier

Întrebarea 4: Răspuns

Răspuns: (B)

- Analiza wavelet oferă localizare simultană în timp și frecvență. Spre deosebire de analiza Fourier, care produce un spectru global unic, wavelets creează o scalogramă care arată cum puterea spectrală evoluează în timp. Aceasta este crucială pentru seriile economice supuse rupturilor structurale, schimbărilor de regim și dinamicii ciclurilor de afaceri în evoluție. Principiul incertitudinii Heisenberg limitează rezoluția comună, dar wavelets echilibrează adaptiv rezoluția în timp și frecvență pe scale diferite.

 TSA_ch12_quiz4

Întrebarea 5

Întrebare

- Un cercetător aplică filtrul Hodrick–Prescott (HP) cu $\lambda = 1600$ pe date trimestriale de PIB. Care este interpretarea spectrală a acestui filtru?

Variante de răspuns

- (A) Este un filtru band-pass care extrage cicluri cu perioada 6–32 trimestre
- (B) Este un filtru trece-jos care extrage trendul păstrând doar frecvențele joase
- (C) Componenta ciclică HP este un filtru trece-sus: $|A(\omega)|^2 = \frac{4\lambda(1-\cos \omega)^2}{1+4\lambda(1-\cos \omega)^2}$, lasând să treacă toate ciclurile mai scurte de ≈ 32 trimestre inclusiv zgomotul neregulat
- (D) Este un filtru notch care elimină doar frecvența sezonieră

Întrebarea 5: Răspuns

Răspuns: (C)

- Componenta ciclică a filtrului HP este un filtru trece-sus care lasă să treacă toate frecvențele peste un prag determinat de λ . Cu $\lambda = 1600$ și date trimestriale, lasă să treacă cicluri mai scurte de ≈ 32 trimestre. Spre deosebire de un filtru band-pass (BK, CF), ciclul HP include atât componenta ciclului de afaceri, *cât și* componenta neregulată de frecvență înaltă. Aceasta este o limitare bine cunoscută: „ciclul” HP este contaminat cu zgomot, motiv pentru care filtrele band-pass dedicate sunt preferate pentru extragerea ciclului de afaceri.

Bibliografie I

Referințe fundamentale

- Priestley, M.B. (1981). *Spectral Analysis and Time Series*. Academic Press.
- Brockwell, P.J. & Davis, R.A. (1991). *Time Series: Theory and Methods*, ed. a 2-a. Springer.
- Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press, Capitolele 6, 10.
- Percival, D.B. & Walden, A.T. (1993). *Spectral Analysis for Physical Applications*. Cambridge University Press.

Estimare spectrală

- Thomson, D.J. (1982). Spectrum Estimation and Harmonic Analysis, *Proceedings of the IEEE*, 70(9), 1055–1096.
- Welch, P.D. (1967). The Use of Fast Fourier Transform for the Estimation of Power Spectra, *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, 15(2), 70–73.

Bibliografie II

Filtre band-pass și cicluri de afaceri

- Baxter, M. & King, R.G. (1999). Measuring Business Cycles: Approximate Band-Pass Filters for Economic Time Series, *Review of Economics and Statistics*, 81(4), 575–593.
- Christiano, L.J. & Fitzgerald, T.J. (2003). The Band Pass Filter, *International Economic Review*, 44(2), 435–465.
- Hodrick, R.J. & Prescott, E.C. (1997). Postwar U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation, *Journal of Money, Credit and Banking*, 29(1), 1–16.
- Burns, A.F. & Mitchell, W.C. (1946). *Measuring Business Cycles*. NBER.

Analiza wavelet

- Torrence & Compo (1998). A Practical Guide to Wavelet Analysis, *Bull. Amer. Meteorol. Soc.*, 79(1).
- Grinsted, Moore & Jevrejeva (2004). Cross Wavelet Transform and Wavelet Coherence, *Nonlin. Proc. Geophys.*, 11.
- Rua & Nunes (2009). Stock Market Returns: A Wavelet Analysis, *J. Empir. Finance*, 16(4).

Bibliografie III

Referințe suplimentare

- ▣ Cooley & Tukey (1965). Machine Calculation of Complex Fourier Series. *Math. Comput.*, 19(90).
- ▣ Fisher (1929). Tests of Significance in Harmonic Analysis. *Proc. R. Soc. A*, 125(796).
- ▣ Granger & Hatanaka (1964). *Spectral Analysis of Economic Time Series*. Princeton UP.
- ▣ Stock & Watson (1999). Business Cycle Fluctuations in U.S. Macroeconomic Time Series. *Handbook Macro*. Vol. 1.

Bibliografie IV

Resurse online și cod

- ▣ **Quantlet:** <https://quantlet.com> – Platformă de cod pentru metode cantitative
- ▣ **Quantinar:** <https://quantinar.com> – Platformă de învățare pentru metode cantitative
- ▣ **GitHub TSA:** https://github.com/danpele/TSA/tree/main/TSA_ch12 – Cod Python pentru acest capitol

Vă mulțumim!

Întrebări?

- Materialele cursului: <https://danpele.github.io/Time-Series-Analysis/>
-  Quantlet  Quantinar