



Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Capitolul 1: Procese Stochastice și Staționaritate



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București

IDA Institute Digital Assets

Blockchain Research Center

AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance

Academia Română, Institutul de Prognoză Economică

MSCA Digital Finance

Obiective de învățare

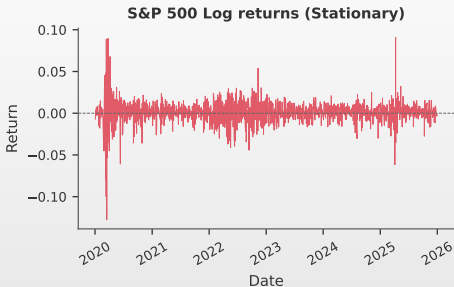
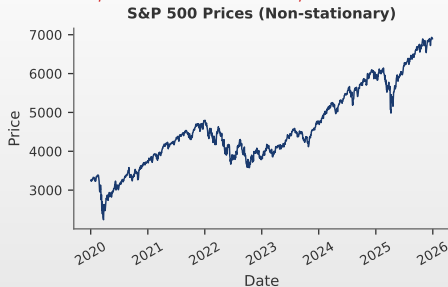
La finalul acestui capitol, veți fi capabili să:

1. **Definiți** procesele stochastice și să înțelegeți proprietățile acestora
2. **Distingeți** între staționaritatea strictă și cea slabă (în covarianță)
3. **Identificați** procesele de zgomot alb și mers aleatoriu
4. **Calculați** și interpretați ACF (Funcția de Autocorelație) și PACF (Funcția de Autocorelație Parțială)
5. **Aplicați** operatorul lag și diferențierea
6. **Efectuați** teste de staționaritate: ADF (Augmented Dickey-Fuller) și KPSS (Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin)
7. **Analizați** date financiare de tip serie de timp
8. **Distingeți** între procesele cu rădăcină unitară și cele staționare în trend

Cuprins

- Motivație
- Procese Stochastice
- Staționaritate
- Operatorul Lag și Diferențierea
- Zgomot Alb și Mers Aleatoriu
- Funcții de Autocorelație
- Testarea Staționarității
- Aplicație pe Date Financiare
- Studiu de Caz: Testarea Staționarității
- Utilizare IA
- Rezumat
- Quiz
- Extensii: Analiză Spectrală și Wavelet
- Bibliografie

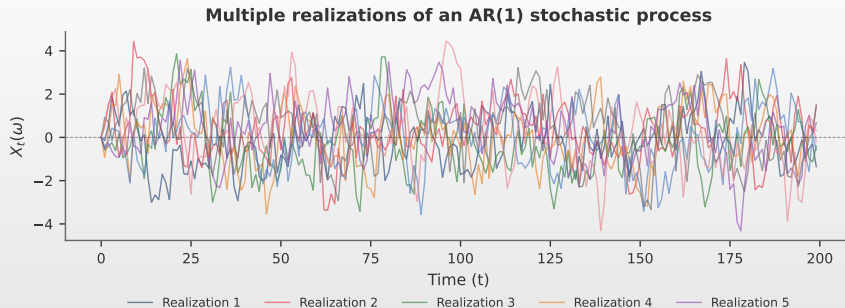
Exemple: serii staționare vs. nestaționare



Observații

- ▣ **Prețurile** (stânga) sunt nestaționare: trend, media se schimbă în timp
- ▣ **Randamentele** (dreapta) sunt staționare: medie ≈ 0 , varianță aprox. constantă
- ▣ Randamente log: $r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1} \Rightarrow$ nestaționar $\rightarrow$ staționar (după diferențiere)

Proces stochastic: ilustrare vizuală



Interpretare

- ▣ Fiecare linie reprezintă o **realizare diferită** a aceluiași proces stochastic subiacent
- ▣ Observăm doar o **singură realizare**, dar dorim să înțelegem proprietățile procesului

Proces stochastic: definiție

Definiție 1 (Proces Stochastic)

- Un **proces stochastic** este o colecție de variabile aleatoare indexate după timp
 - ▶ $\{X_t(\omega) : t \in \mathcal{T}, \omega \in \Omega\}$
 - ▶ Ω este spațiul eșantion (mulțimea tuturor rezultatelor posibile)

Două perspective

- ω **fixat**: O *realizare* $\{X_t(\omega)\}_{t \in \mathcal{T}}$
- t **fixat**: O *variabilă aleatoare* X_t

De reținut

- O serie de timp pe care o observăm nu este decât **o singură realizare** a procesului stochastic subiacent

Momentele unui proces stochastic

Primele două momente caracterizează procesul

- ▣ **Funcția de Medie:** $\mu_t = \mathbb{E}[X_t]$
- ▣ **Autocovarianța (ACVF):** $\gamma(t, s) = \text{Cov}(X_t, X_s)$
 - ▶ $\gamma(t, s) = \mathbb{E}[(X_t - \mu_t)(X_s - \mu_s)]$
- ▣ **Autocorelația (ACF):**
 - ▶ $\rho(t, s) = \gamma(t, s) / \sqrt{\text{Var}(X_t) \cdot \text{Var}(X_s)}$

Proprietăți ACF

- ▣ **Interval:** $\rho(t, s) \in [-1, 1]$
- ▣ **Normalizare:** $\rho(t, t) = 1$ (corelație perfectă cu sine)

Important

- ▣ **General:** μ_t și $\gamma(t, s)$ pot depinde de t
- ▣ **Staționar:** Elimină această dependență temporală

De ce contează staționaritatea

Fără staționaritate

- Media, varianța se schimbă în timp
 - ▶ Estimatorii sunt inconsistenți
- Trecutul poate să nu prezică corect viitorul
- Metodele standard devin inaplicabile
- Risc de corelații false (spurious regression)

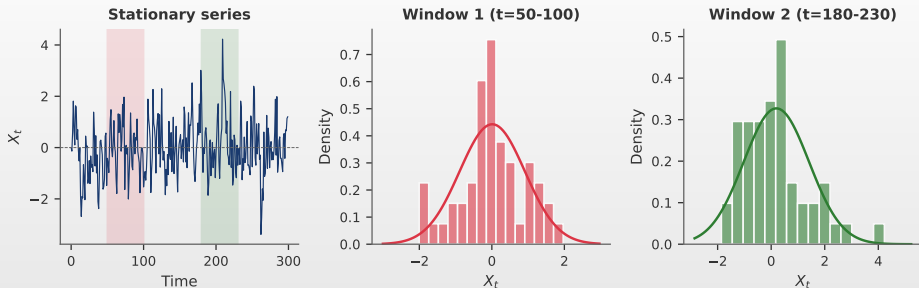
Cu staționaritate

- Proprietăți statistice constante
 - ▶ Ergodicitate justificată
- Putem estima parametrii dintr-o singură realizare
- Inferență statistică validă
- Modelele sunt bine definite

Principiu fundamental

- Majoritatea modelelor de serii de timp necesită staționaritate
- Exemple: ARMA (AutoRegressive Moving Average), ARIMA (AutoRegressive Integrated Moving Average)
- Seriile nestaționare trebuie transformate (de ex. prin diferențiere) înainte de modelare

Staționaritatea strictă: ilustrare vizuală



Interpretare

- Translația în timp nu modifică distribuția comună a variabilelor
- Oricare două ferestre temporale de aceeași lungime au aceleași proprietăți statistice
- În practică: verificăm doar primele două momente (staționaritate slabă)

Staționaritatea strictă

Definiție 2 (Staționaritate Strictă (Puternică))

- Un proces $\{X_t\}$ este **strict staționar** dacă pentru orice k , orice $t_1, \dots, t_k$, și orice h :
 - ▶ $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1+h}, \dots, X_{t_k+h})$
- **Notăție:** $X \stackrel{d}{=} Y$ înseamnă *egalitate în distribuție*
 - ▶ $P(X \leq x) = P(Y \leq x)$

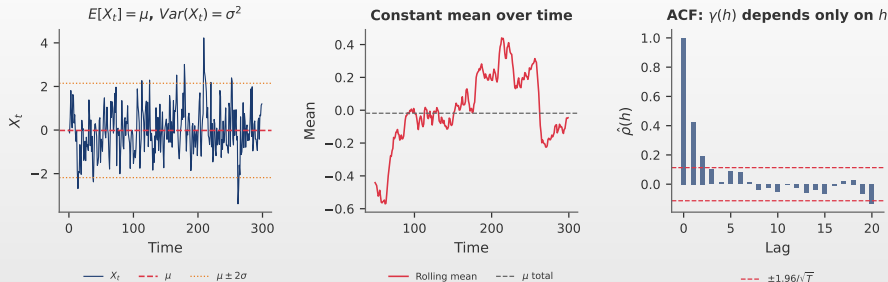
Implicații

- **Distribuții identice:** $F_{X_t}(x)$ nu depinde de t
 - ▶ $\mathbb{E}[X_t] = \mu$ (medie constantă, dacă există)
 - ▶ $\text{Var}(X_t) = \sigma^2$ (varianță constantă, dacă există)
- **Dependența de lag:** Distribuțiile comune depind doar de lag

Notă

- Condiție foarte puternică, în general neverificabilă pe baza unei singure realizări

Staționaritatea slabă: ilustrare vizuală



Cele trei condiții

- $E[X_t] = \mu$ constantă $\Rightarrow$ media nu depinde de timp
- $\text{Var}(X_t) = \sigma^2$ constantă $\Rightarrow$ varianța nu depinde de timp
- $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h)$ $\Rightarrow$ autocovarianța depinde doar de lag h

Staționaritatea slabă (covarianță)

Definiție 3 (Staționaritate Slabă (în Covarianță))

- Un proces $\{X_t\}$ este **slab staționar** (sau staționar în covarianță) dacă:
 - ▶ $\mathbb{E}[X_t^2] < \infty$ pentru orice t
 - Momente de ordinul 2 finite
 - ▶ $\mathbb{E}[X_t] = \mu$ pentru orice t
 - Medie constantă (nu depinde de t)
 - ▶ $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h)$
 - Autocovarianța depinde doar de lag-ul h , nu de t

Proprietăți

- **Autocovarianța** este funcție doar de lag:
 - ▶ $\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \mathbb{E}[(X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)]$
- **Autocorelația**:
 - ▶ $\rho(h) = \gamma(h)/\gamma(0) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h})/\text{Var}(X_t)$
- **Notă**: $\rho(0) = 1$, $|\rho(h)| \leq 1$, $\rho(h) = \rho(-h)$ (simetrie)

Relația între staționaritate strictă și slabă

Teoremă 1 (Implicație Fundamentală)

- Dacă $\{X_t\}$ este **strict staționar** și $\mathbb{E}[X_t^2] < \infty$, atunci $\{X_t\}$ este și **slab staționar**

Demonstrație.

- Fie t_1, t_2 arbitrare și h o deplasare temporală arbitrară
- Din invarianța distribuției comune: $(X_{t_1}, X_{t_2}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1+h}, X_{t_2+h})$
- $\mathbb{E}[X_{t_1}] = \mathbb{E}[X_{t_1+h}] = \mu$ (medie constantă)
- $\text{Cov}(X_{t_1}, X_{t_2}) = \text{Cov}(X_{t_1+h}, X_{t_2+h})$
- Prin urmare, autocovarianța depinde doar de diferența $t_2 - t_1 = h$, nu de t_1

□

Atenție: Reciproca *nu* este adevărată.

- Există procese slab staționare care **nu** sunt strict staționare (a se vedea contraexemplul următor)

Exemplu: modelul AR(1) este slab staționar

Modelul AR(1) (AutoRegressive de ordin 1)

- $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad |\phi| < 1$
- $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ — WN (White Noise) = zgomot alb

Verificarea celor trei condiții

1. **Medie constantă:** $\mathbb{E}[X_t] = \phi \mathbb{E}[X_{t-1}] + 0 = \phi \mathbb{E}[X_t] \Rightarrow \mathbb{E}[X_t] = 0$
2. **Varianță constantă:** $\text{Var}(X_t) = \phi^2 \text{Var}(X_t) + \sigma^2 \Rightarrow \text{Var}(X_t) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}$
3. **Autocovarianța depinde doar de lag:** $\gamma(h) = \phi^{|h|} \cdot \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}, \quad \rho(h) = \phi^{|h|}$

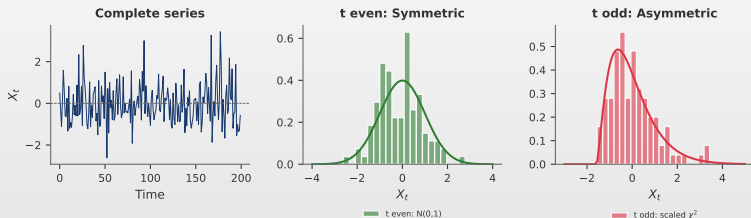
Exemplu numeric: $\phi = 0.8, \sigma^2 = 1$

- $\mathbb{E}[X_t] = 0, \quad \text{Var}(X_t) = \frac{1}{1 - 0.64} = 2.78, \quad \rho(1) = 0.8, \quad \rho(2) = 0.64, \quad \rho(5) = 0.33$

Contraexemplu: slab staționar dar *nu* strict staționar

Construcție

- Fie $\{X_t\}$ variabile aleatoare **independente** cu: t par: $X_t \sim N(0, 1)$; t impar: $X_t \sim \frac{\chi^2(5) - 5}{\sqrt{10}}$



Slab staționar ✓

- $\mathbb{E}[X_t] = 0$, $\text{Var}(X_t) = 1$, $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = 0$

NU strict staționar ✗

- Asimetria diferă: 0 vs. $> 0 \Rightarrow X_1 \stackrel{d}{\neq} X_2$

Proprietățile funcției de autocovarianță

Propoziție 1

Pentru un proces slab staționar, ACVF $\gamma(h)$ satisface:

- ▣ **Simetrie:** $\gamma(h) = \gamma(-h)$
- ▣ **Maximum la zero:** $|\gamma(h)| \leq \gamma(0) = \text{Var}(X_t)$
- ▣ **Semidefinit pozitiv:** $\sum_{i,j} a_i a_j \gamma(i-j) \geq 0$ pentru orice $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

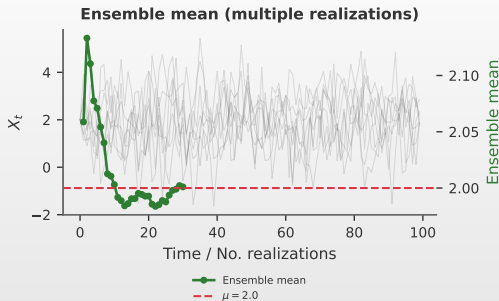
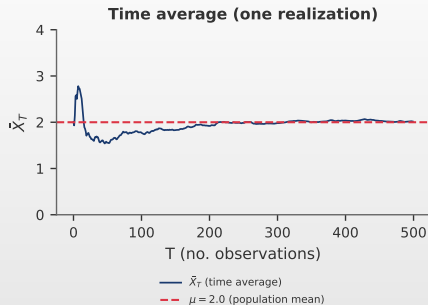
Demonstrație (prop. 3 — semidefinit pozitiv)

- ▣ $0 \leq \text{Var}(\sum_{i=1}^n a_i X_{t+i}) = \sum_{i,j} a_i a_j \text{Cov}(X_{t+i}, X_{t+j}) = \sum_{i,j} a_i a_j \gamma(i-j)$

Implicație

- ▣ Nu orice funcție poate fi o funcție de autocovarianță validă

Ergodicitatea: ilustrare vizuală



- Media temporală (o singură realizare) și media ansamblului (realizări multiple) converg ambele la μ
- Ergodicitatea garantează că putem estima μ dintr-o singură serie temporală suficient de lungă

Ergodicitatea: fundamentul inferenței din date

Definiție 4 (Ergodicitate pentru Medie)

- Un proces staționar $\{X_t\}$ este **ergodic pentru medie** dacă $\bar{X}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t \xrightarrow{P} \mu$ când $T \rightarrow \infty$

De ce contează ergodicitatea?

- **Problema:** Avem doar **o singură realizare** a procesului stocastic
- **Soluția:** Ergodicitatea permite estimarea lui μ prin $\bar{X}_T$ — media temporală converge la media populației. Fără ergodicitate, inferența statistică dintr-o singură serie nu este posibilă!

Teoremă 2 (Condiție Suficientă)

Dacă $\sum_{h=0}^{\infty} |\gamma(h)| < \infty$ (autocovarianțe absolut sumabile), procesul este ergodic pentru medie.

Contraexemplu: staționar dar ne-ergodic

- Fie $Z \sim N(0, 1)$, $X_t = Z \forall t$. Strict staționar, dar $\bar{X}_T = Z \Rightarrow$ **nu** converge la $\mu = 0$
- **Concluzie:** ergodicitatea este o ipoteză **suplimentară**, mai puternică decât staționaritatea

Teorema de descompunere Wold

Teoremă 3 (Wold, 1938)

- Orice proces staționar în covarianță $\{X_t\}$ poate fi scris ca: $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} + \eta_t$
 - ▶ $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2) \Rightarrow$ zgomot alb, cu $\psi_0 = 1, \sum \psi_j^2 < \infty$
 - ▶ $\eta_t \Rightarrow$ componenta deterministă (perfect predictibilă)

Semnificația teoremei Wold

- **Descompunere:** Orice proces staționar = **MA(∞)** (*Moving Average* de ordin infinit) + componentă deterministă
 - ▶ Justifică teoretic modelele MA(q) și ARMA(p, q) ca aproximații finite ale componentei stochastice
 - ▶ Coeficienții ψ_j (funcția de răspuns la impuls) măsoară impactul persistent al șocurilor trecute

Demonstrația teoremei Wold (schiță)

Schiță de demonstrație.

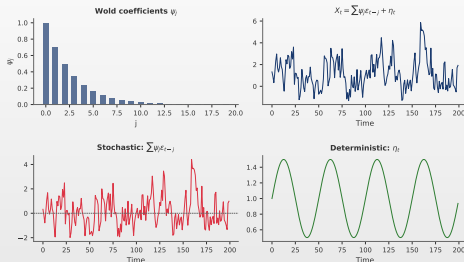
1. **Spațiul Hilbert al trecutului:** $\mathcal{H}_t = \overline{\text{sp}}\{X_s : s \leq t\}$, cu $\langle X, Y \rangle = \text{Cov}(X, Y)$.
2. **Inovația:** Definim $\varepsilon_t = X_t - \hat{X}_t$, unde $\hat{X}_t = \text{Proj}_{\mathcal{H}_{t-1}}(X_t)$ este proiecția ortogonală. Prin construcție, $\varepsilon_t \perp \mathcal{H}_{t-1}$, deci $\varepsilon_t \perp \varepsilon_s$ pentru $t \neq s \Rightarrow \{\varepsilon_t\}$ este zgomot alb.
3. **Reprezentarea iterativă:** Aplicând recursiv proiecția:

$$X_t = \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \eta_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} + \eta_t$$

unde ψ_j rezultă din proiecțiile succesive, iar $\eta_t \in \mathcal{H}_{-\infty} = \bigcap_t \mathcal{H}_t$.

4. **Convergența:** $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$ deoarece $\text{Var}(X_t) < \infty$ (staționaritate).
5. **Componenta deterministă:** $\eta_t \in \mathcal{H}_{-\infty} \Rightarrow \eta_t$ este *perfect predictibilă* din trecutul infinit. □

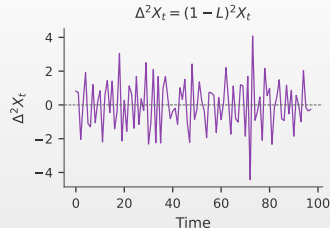
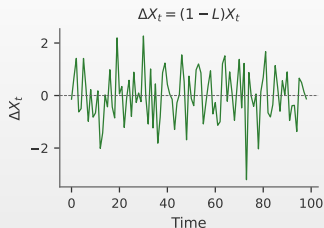
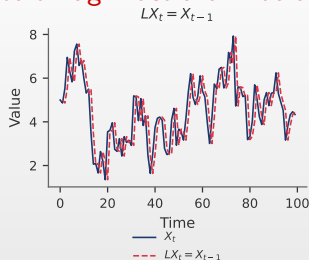
Teorema Wold: ilustrare vizuală



Interpretare

- X_t = componentă **stochastică** ($MA(\infty)$, nepredictibilă) + componentă **deterministă** (η_t , predictibilă din trecutul infinit)
- $\psi_j \rightarrow 0$: șocurile recente au impact mai mare decât cele îndepărtate

Operatorul lag: ilustrare vizuală



Proprietăți

- ▣ $LX_t = X_{t-1} \Rightarrow$ operatorul lag deplasează seria cu o perioadă în trecut
- ▣ $L^k X_t = X_{t-k} \Rightarrow$ deplasare cu k perioade înapoi; $L^0 = I$ (identitate)
- ▣ **Operatorul diferență:** $\Delta = (1 - L)$, astfel $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$

Operatorul lag

Definiție 5 (Operatorul lag)

- **Operatorul lag** (sau operatorul de întârziere) L este definit prin: $LX_t = X_{t-1}$

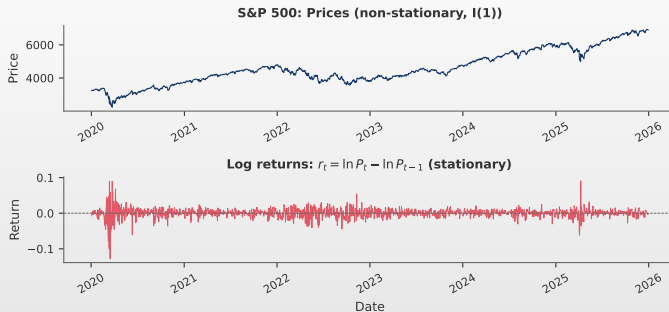
Proprietăți

- **Puteri:** $L^k X_t = X_{t-k}$ (întârziere cu k perioade)
 - ▶ Notăție compactă pentru modele
- **Identitate:** $L^0 = I$
- **Polinom:** $(1 - \phi L)X_t = X_t - \phi X_{t-1}$

Exemple

- **Prima diferență:** $(1 - L)X_t = X_t - X_{t-1}$
- **A doua diferență:** $(1 - L)^2 X_t = \Delta^2 X_t$
- **Diferență sezonieră:** $(1 - L^{12})X_t = X_t - X_{t-12}$

Efectul diferențierii: S&P 500



Interpretare

- ▣ **Sus:** Prețuri S&P 500 $\Rightarrow$ trend clar, nestaționar ($I(1)$)
- ▣ **Jos:** Randamente log $r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1} \Rightarrow$ fluctuează în jurul mediei ≈ 0 , staționar

Diferențierea

De ce diferențiem?

- ▣ **Prima diferență:** $\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = (1 - L)X_t$
 - ▶ Elimină trendul stocastic și rădăcina unitară
 - ▶ Mers aleatoriu: $\Delta X_t = \varepsilon_t$ (devine zgomot alb)

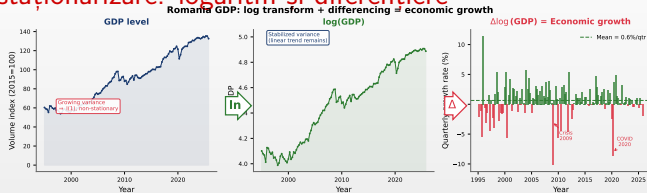
Definiție 6 (Proces Integrat de Ordin d)

- ▣ Un proces $\{X_t\}$ este **integrat de ordin d** , notat $X_t \sim I(d)$, dacă:
 - ▶ $\Delta^d X_t = (1 - L)^d X_t$ este staționar ($I(0)$ proces)
 - ▶ $\Delta^{d-1} X_t$ **nu** este staționar

Exemple

- ▣ $I(0)$: Proces staționar (zgomot alb, AR staționar)
- ▣ $I(1)$: Mers aleatoriu $\Rightarrow \Delta X_t = \varepsilon_t$ este staționar
- ▣ $I(2)$: Necesită două diferențieri succesive pentru a deveni staționar

Transformări pentru staționarizare: logaritm și diferențiere

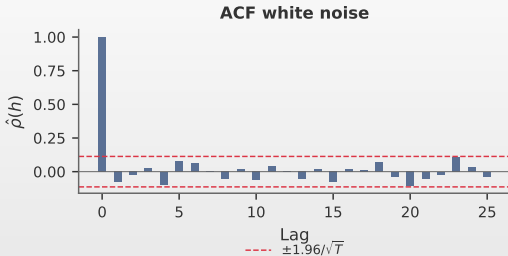
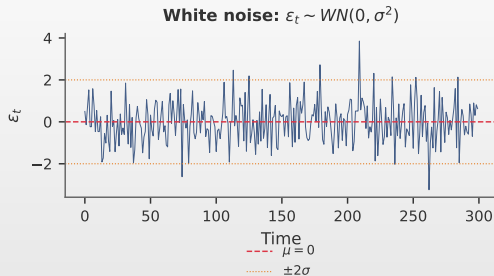


Secvența de transformare

$$\underbrace{PIB_t}_{I(1), \text{ varianță crescătoare}} \xrightarrow{\ln(\cdot)} \underbrace{\ln PIB_t}_{I(1), \text{ varianță stabilizată}} \xrightarrow{\Delta} \underbrace{\Delta \ln PIB_t}_{I(0), \text{ staționar}} = \ln PIB_t - \ln PIB_{t-1}$$

- Logaritmul elimină heteroscedasticitatea: varianța nu mai crește cu nivelul
- Diferențierea elimină trendul și rădăcina unitară: media devine constantă
- Interpretare economică: $\Delta \ln PIB_t \approx \frac{PIB_t - PIB_{t-1}}{PIB_{t-1}} = \text{rata de creștere economică}$

Zgomot alb: ilustrare vizuală



Q TSA_ch1_white_noise

Procesul de zgomot alb

Definiție 7 (Zgomot Alb)

- Un proces $\{\varepsilon_t\}$ este **zgomot alb**, notat $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$, dacă:
 - ▶ $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$ pentru orice t (medie zero)
 - ▶ $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$ pentru orice t (varianță constantă)
 - ▶ $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$ pentru $t \neq s$ (necorelat)

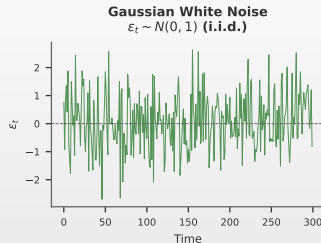
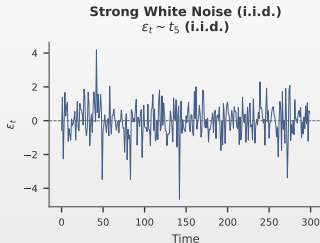
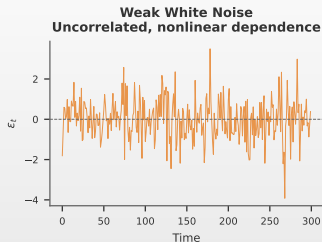
ACF al zgomotului alb

- Din definiție: $\gamma(0) = \sigma^2$ și $\gamma(h) = 0$ pentru $h \neq 0$; $\rho(h) = \begin{cases} 1 & h = 0 \\ 0 & h \neq 0 \end{cases}$

Observație

- Zgomotul alb este cel mai simplu proces staționar — element de bază al modelelor ARMA
- Există trei tipuri principale: slab (necorelat), puternic (i.i.d.) și Gaussian (vezi diapozitivul următor)

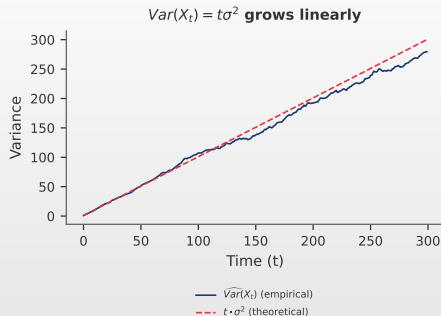
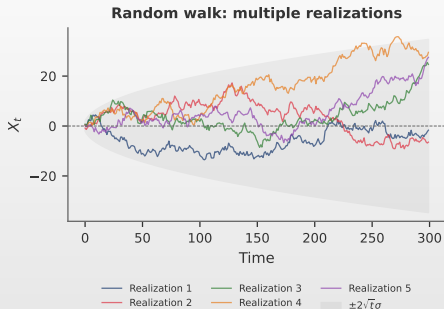
Cele trei tipuri de zgomot alb



Relația de incluziune: Gaussian $\subset$ puternic (i.i.d.) $\subset$ slab (necorelat)

- ▣ **Slab:** $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$, dar pot exista dependențe neliniare (ex. GARCH)
- ▣ **Puternic:** ε_t sunt i.i.d. (independente și identic distribuite) — orice distribuție (ex. Student- t)
- ▣ **Gaussian:** $\varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$ — necorelat $\Leftrightarrow$ independent

Mers aleator: vizualizare



Observații

- Fiecare șoc are **efect permanent**; $\text{Var}(X_t) = t\sigma^2$ crește liniar cu t
- **Soluție:** diferențierea transformă mersul aleatoriu în zgomot alb, $\Delta X_t = \varepsilon_t$

Procesul de mers aleatoriu

Definiție 8 (Mers Aleatoriu)

- ▣ $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$, $X_0 = 0$
- ▣ **Forma explicită:** $X_t = \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$

Propoziție 2 (Proprietăți)

- ▣ $\mathbb{E}[X_t] = 0$
- ▣ $\text{Var}(X_t) = t\sigma^2$ (crește cu timpul)
- ▣ $\text{Cov}(X_t, X_s) = \min(t, s) \cdot \sigma^2$

Demonstrații.

- ▣ $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^t \varepsilon_i] = 0$; $\text{Var}(X_t) = t\sigma^2$ (independență); $\text{Cov}(X_t, X_s) = \min(t, s) \sigma^2$

□

Nestaționar

- ▣ $\text{Var}(X_t) = t\sigma^2$ depinde de $t \Rightarrow$ mersul aleatoriu **nu este staționar**

Mers aleator cu drift

Definiție 9 (Mers Aleatoriu cu Drift)

- ▣ $X_t = c + X_{t-1} + \varepsilon_t$, $c \neq 0$ este **driftul**
- ▣ **Forma explicită:** $X_t = ct + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$

Propoziție 3 (Proprietăți)

$\mathbb{E}[X_t] = ct$ (trend liniar); $\text{Var}(X_t) = t\sigma^2$ (crește cu timpul)

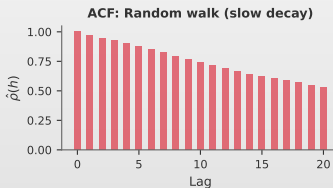
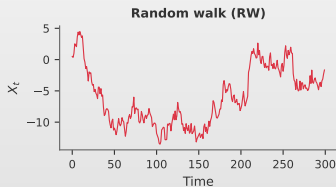
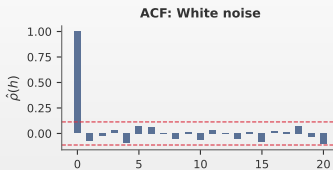
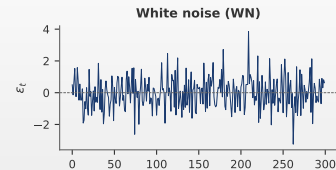
Diferențiere

$\Delta X_t = c + \varepsilon_t$ — constantă plus zgomot alb $\Rightarrow$ seria diferențiată este staționară

Importanța practică

- ▣ PIB nominal, prețuri de acțiuni $\Rightarrow$ adesea modelate ca mers aleatoriu cu drift
- ▣ Testul ADF: trei variante — fără constantă, cu constantă, cu constantă și trend liniar

Zgomot alb vs mers aleatoriu: comparație



TSA_ch1_random_walk

Zgomot alb vs mers aleatoriu: proprietăți comparative

Proprietate	Zgomot alb (WN)	Mers aleatoriu (RW)
Model	$X_t = \varepsilon_t$	$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$
Staționar?	Da	Nu
$\text{Var}(X_t)$	σ^2 (constantă)	$t\sigma^2$ (crește liniar)
$\text{ACF}(h), h \neq 0$	0	≈ 1 (descreștere lentă)
Memorie	Fără	Permanentă (șocuri persistă)
Diferențiere	—	$\Delta X_t = \varepsilon_t$ (produce WN)

Legătură

□ $\Delta X_t = \varepsilon_t$ — diferențierea mersului aleatoriu produce zgomot alb

 TSA_ch1_random_walk

Staționaritate în trend vs. staționaritate în diferențe

Staționaritate în trend — TS (Trend Stationary)

- **Model:** $Y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t$
 - ▶ Trend **determinist**
 - ▶ Abaterile de la trend sunt temporare
- **Soluție:** regresie pe t , se extrag reziduurile
- **Efect:** Șocurile *nu* au efect permanent

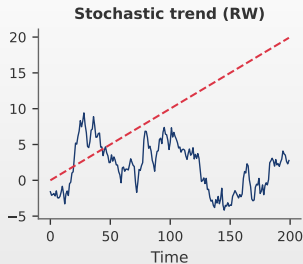
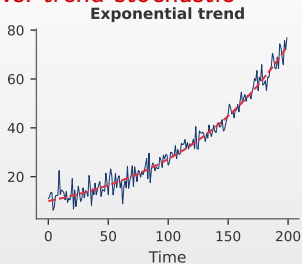
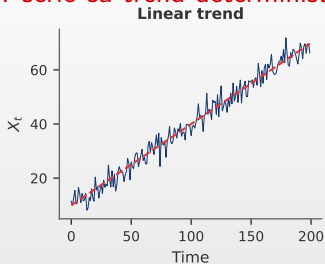
Staționaritate în diferențe — DS (Difference Stationary)

- **Model:** $Y_t = c + Y_{t-1} + \varepsilon_t$
 - ▶ Trend **stochastic**
 - ▶ Abaterile de la trend sunt permanente
- **Soluție:** diferențiere (ΔY_t)
- **Efect:** Șocurile *AU* efect permanent

De ce contează distincția?

- **Diferențiere pe TS:** introduce o rădăcină unitară artificială în componenta MA a modelului
- **Regresie pe DS:** produce reziduuri **tot nestaționare** (regresia spurioasă)
- **Soluție:** Testele ADF și KPSS ajută la distincție — alegerea greșită conduce la inferență invalidă

Exemplu: serie cu trend determinist vs. trend stochastic



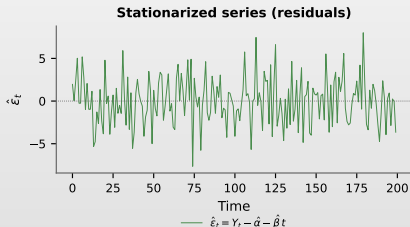
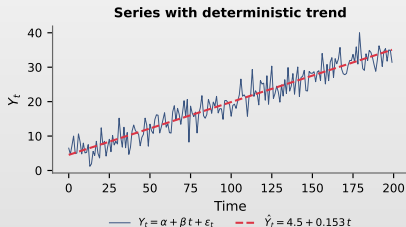
Interpretare

- ▣ **TS** (trend staționar): $Y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t$ — șocurile nu au efect permanent; reziduurile sunt staționare
- ▣ **DS** (mers aleatoriu cu drift): $Y_t = c + Y_{t-1} + \varepsilon_t$ — șocurile se acumulează; necesită diferențiere
- ▣ Distincție esențială pentru aplicarea corectă a testelor ADF și KPSS

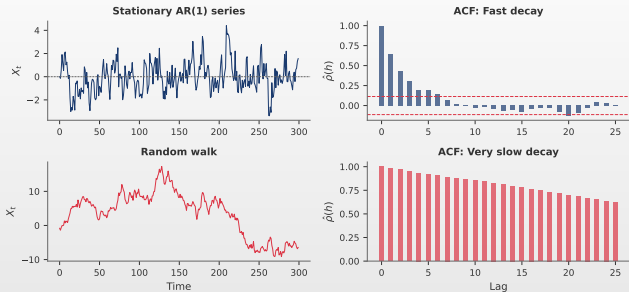
Exemplu: staționarizarea unei serii cu trend determinist

Procedura de eliminare a trendului determinist

- ▣ **Model:** $Y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t$, cu $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$
- ▣ **Pas 1:** Se estimează $\hat{\alpha}$ și $\hat{\beta}$ prin OLS: $\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^T (t-\bar{t})(Y_t - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^T (t-\bar{t})^2}$, $\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta} \bar{t}$
- ▣ **Pas 2:** Se extrag reziduurile: $\hat{\varepsilon}_t = Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} t \Rightarrow$ **serie staționară**



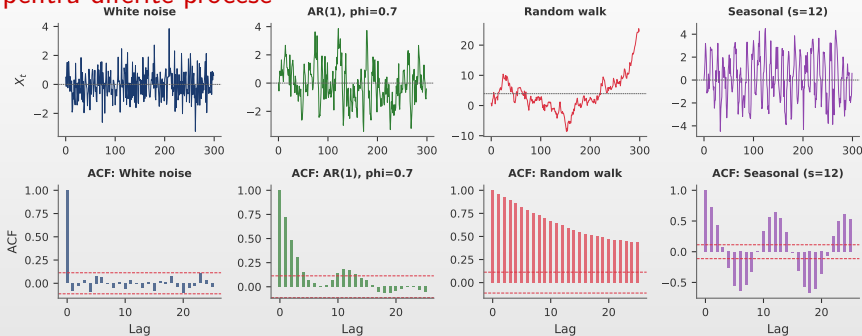
Comparație ACF: staționar vs mers aleatoriu



Interpretare

- ▣ **Staționar:** ACF scade rapid (exponențial sau oscilant) spre zero
- ▣ **Mers aleatoriu:** ACF scade foarte lent, rămâne aproape de 1 pentru mulți lag-uri
- ▣ **Regulă practică:** ACF cu scădere lentă $\Rightarrow$ suspectăm rădăcină unitară $\Rightarrow$ test ADF

Tipare ACF pentru diferite procese



Interpretare

- **Zgomot alb:** $ACF = 0$; **Staționar:** scade rapid; **Nestaționar:** scade lent
- **Sezonier:** Vârfuri la lag-uri sezoniere (12, 24 pentru date lunare)

Funcția de autocorelație eșantion

ACF eșantion la lag-ul h

$$\square \hat{\rho}(h) = \frac{\sum_{t=1}^{T-h} (x_t - \bar{x})(x_{t+h} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})^2}; \quad \text{Proprietăți: } \hat{\rho}(0) = 1, |\hat{\rho}(h)| \leq 1$$

Teoremă 4 (Bartlett, 1946)

$$\square \text{ Sub } H_0 \text{ (zgomot alb), pentru } T \text{ mare: } \hat{\rho}(h) \xrightarrow{d} N(0, 1/T)$$

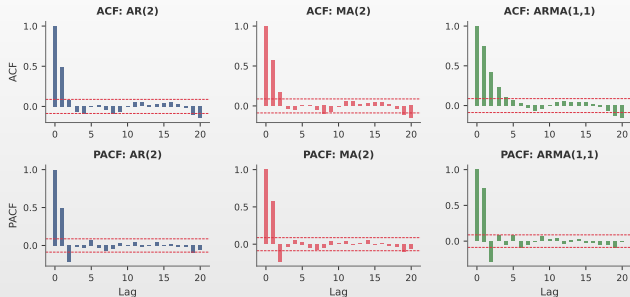
Banda de încredere 95% pentru graficul ACF

$$\square \pm 1,96/\sqrt{T} \text{ (benzile punctate din graficele ACF — acoperire exactă doar sub } H_0 \text{: zgomot alb)}$$

Atenție

$$\square \text{ Formula Bartlett validă } \textbf{doar sub } H_0 \textbf{: zgomot alb}; \text{ pentru AR/MA, varianța asimptotică diferă}$$

Tipare ACF și PACF



Reguli de identificare

- **AR(p)**: ACF scade exponențial, PACF se anulează după lag p
- **MA(q)**: ACF se anulează după lag q , PACF scade exponențial
- **ARMA(p, q)**: Ambele scad exponențial/oscilant $\Rightarrow$ utilizați criterii AIC/BIC

Funcția de autocorelație parțială (PACF)

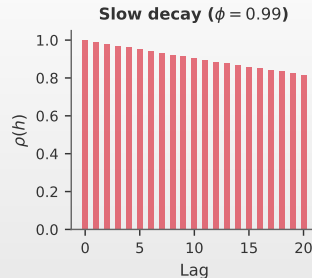
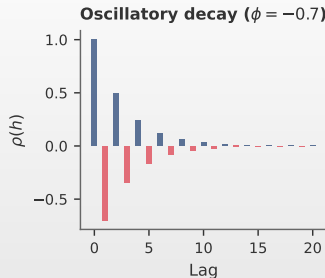
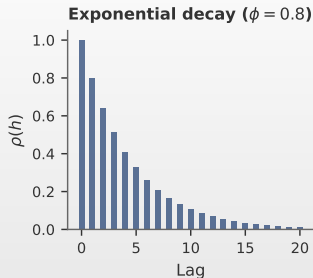
Definiție 10 (Autocorelația Parțială)

- ▣ **PACF** la lag-ul h , notat ϕ_{hh} : ultimul coeficient din regresia:
 - ▶ $X_t = \phi_{h1}X_{t-1} + \phi_{h2}X_{t-2} + \cdots + \phi_{hh}X_{t-h} + e_t$
- ▣ **Alternativ:**
 - ▶ $\phi_{hh} = \text{Corr}\left(X_t - \hat{X}_t^{(h-1)}, X_{t-h} - \hat{X}_{t-h}^{(h-1)}\right)$
- ▣ **Interpretare:** Corelația *directă* dintre X_t și X_{t-h} , eliminând efectul lag-urilor intermediare $1, 2, \dots, h-1$

Aplicație practică

- ▣ PACF identifică direct ordinul p al unui model $AR(p)$
- ▣ $\phi_{hh} = 0$ pentru $h > p \Rightarrow$ PACF se anulează după lag-ul p

Tipare de scădere ACF



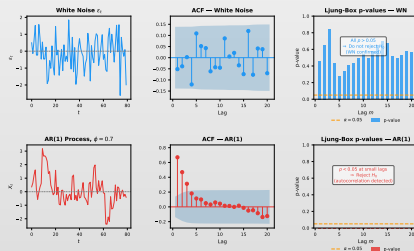
Interpretare

- ▣ **Scădere exponențială:** Dependență pozitivă persistentă (AR cu $\phi > 0$)
- ▣ **Scădere oscilantă:** Dependență alternantă (AR cu $\phi < 0$)
- ▣ Viteza de scădere indică puterea memoriei procesului

Testul Ljung-Box: testarea zgomotului alb

Definiție 11 (Statistica Ljung-Box, 1978)

- H_0 : primele m autocorelații sunt zero (seria este zgomot alb)
- $Q(m) = T(T+2) \sum_{k=1}^m \frac{\hat{\rho}(k)^2}{T-k} \xrightarrow{H_0} \chi^2(m)$, unde T = numărul de observații
- Respingem H_0 dacă $Q(m) > \chi_{m,\alpha}^2$ sau p -valoare $< \alpha$

Ljung-Box Test: H_0 — series is white noise

Testul Augmented Dickey-Fuller (ADF)

Modelul ADF

$$\square \Delta X_t = \alpha + \gamma X_{t-1} + \sum_{i=1}^p \delta_i \Delta X_{t-i} + \varepsilon_t, \quad \gamma = \rho - 1, \quad H_0 : \gamma = 0 \Leftrightarrow \rho = 1$$

Ipoteze

- $\square H_0: \gamma = 0$ (rădăcină unitară)
- $\square H_1: \gamma < 0$ (staționar)

Statistica de Test

- $\square \tau_{ADF} = \hat{\gamma} / SE(\hat{\gamma})$
- $\square \hat{\gamma} =$ coeficientul OLS (*Ordinary Least Squares*) al lui X_{t-1}
- $\square SE(\hat{\gamma}) =$ eroarea standard din regresia OLS

Regula de decizie

- $\square \tau_{ADF} < \text{val. critică} \Rightarrow$ Respingem $H_0 \Rightarrow$ Staționar
- $\square \tau_{ADF} \geq \text{val. critică} \Rightarrow$ Nu respingem H_0 (rădăcină unitară)
- $\square$ Valorile critice urmează distribuția Dickey-Fuller (nu t -Student — distribuție asimetrică spre stânga!)

Testul KPSS

Modelul

- ▣ $X_t = \xi t + r_t + \varepsilon_t$ unde $r_t = r_{t-1} + u_t$
- ▣ $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$ (eroare staționară); $u_t \sim WN(0, \sigma_u^2)$ (inovația mersului aleatoriu)

Ipoteze (opus ADF)

- ▣ $H_0: \sigma_u^2 = 0$ (seria este $I(0)$, staționară)
- ▣ $H_1: \sigma_u^2 > 0$ (seria este $I(1)$, are rădăcină unitară)

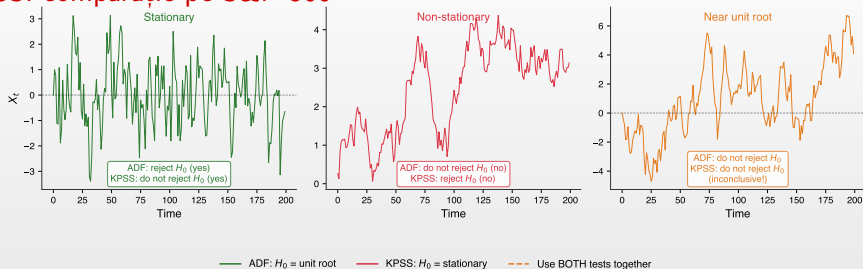
Statistica de Test

- ▣ $LM = \frac{\sum_{t=1}^T S_t^2}{T^2 \hat{\sigma}_{LR}^2}$
- ▣ $S_t = \sum_{i=1}^t \hat{\varepsilon}_i$; $\hat{\sigma}_{LR}^2 = \text{varianța de lungă durată}$

Regula de decizie

- ▣ $LM > \text{valoarea critică} \Rightarrow \text{Respingem } H_0 \Rightarrow \text{Nestaționar (rădăcină unitară)}$
- ▣ $LM \leq \text{valoarea critică} \Rightarrow \text{Nu respingem } H_0 \Rightarrow \text{Staționar}$

ADF vs KPSS: comparație pe S&P 500



TSA_ch1_unit_root_tests

Interpretare comparativă

- ▣ ADF: H_0 = rădăcină unitară — respingem $\Rightarrow$ staționar
- ▣ KPSS: H_0 = staționar — respingem $\Rightarrow$ nestaționar
- ▣ Prețuri S&P 500: ADF nu respinge H_0 + KPSS respinge $H_0 \Rightarrow$ nestaționar
- ▣ Randamente S&P 500: ADF respinge H_0 + KPSS nu respinge $H_0 \Rightarrow$ staționar

Utilizarea combinată a testelor ADF și KPSS

Strategie de testare confirmatorie

- ▣ ADF respinge H_0 + KPSS nu respinge H_0 : **Concluzie: Staționar**
- ▣ ADF nu respinge H_0 + KPSS respinge H_0 : **Concluzie: Rădăcină Unitară**
- ▣ Ambele resping sau ambele nu resping: Rezultate neconcludente
 - ▶ Necesită teste suplimentare: PP (Phillips-Perron)
 - ▶ Sau DF-GLS (*Dickey-Fuller Generalized Least Squares*)

Protocol de lucru recomandat

- ▣ **Pasul 1:** Test ADF (H_0 : rădăcină unitară) cu specificații alternative (constantă, trend)
- ▣ **Pasul 2:** Test KPSS (H_0 : staționar) cu aceeași specificație
- ▣ **Pasul 3:** Rezultate concordante $\Rightarrow$ concluzie fermă
 - ▶ Rezultate divergente: teste suplimentare PP, DF-GLS

Protocol complet de analiză a staționarității

Protocol pas-cu-pas

1. **Vizualizare:** graficul seriei + ACF/PACF $\Rightarrow$ primă intuiție (trend? sezonabilitate?)
2. **Test ADF:** H_0 : rădăcină unitară. Specificați: doar constantă *sau* constantă + trend
3. **Test KPSS:** H_0 : staționar. Aceeași specificație ca la ADF
4. **Decizie:**
 - ▶ **Concordant:** ADF respinge + KPSS nu respinge $\Rightarrow$ **staționar**
 - ▶ **Concordant:** ADF nu respinge + KPSS respinge $\Rightarrow$ **nestaționar**
 - ▶ **Divergent:** teste suplimentare (PP, DF-GLS) sau transformare
5. **Transformare** (dacă nestaționar): diferențiere (Δy_t), log + diferențiere, sau detrending

Regulă practică

- Aplicați **întotdeauna** cel puțin două teste cu H_0 opuse pentru a evita concluzii false

Testul Phillips-Perron (PP)

Definiție 12 (Phillips-Perron, 1988)

- ▣ Testează aceeași ipoteză ca ADF: H_0 : rădăcină unitară ($\gamma = 0$)
- ▣ Modelul de bază (fără lag-uri augmentate): $\Delta y_t = \alpha + \gamma y_{t-1} + e_t$
- ▣ Corectează autocorelația și heteroscedasticitatea din e_t prin **corecție neparametrică** (Newey-West) a statisticii t

Statistica PP

- ▣ $Z_\alpha = t_\gamma \cdot \sqrt{\frac{s_e^2}{\hat{\lambda}^2} - \frac{T(\hat{\lambda}^2 - s_e^2)}{2\hat{\lambda}^2 \cdot SE(\hat{\gamma})}}$
- ▣ t_γ : statistica t OLS pentru $\hat{\gamma}$; $\hat{\lambda}^2$: varianța de lungă durată (kernel Newey-West)
- ▣ s_e^2 : varianța reziduală OLS; T : numărul de observații
- ▣ Valorile critice: identice cu ADF (distribuția Dickey-Fuller)

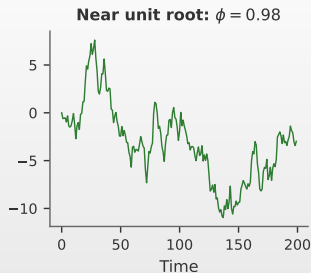
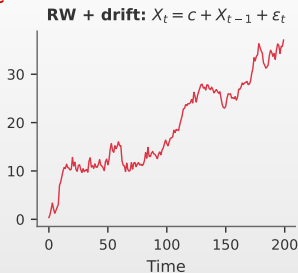
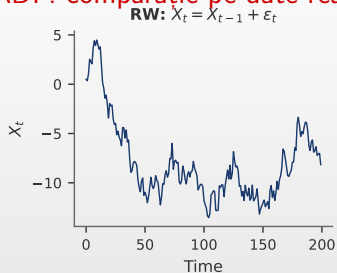
PP vs ADF

- ▣ **ADF**: adaugă lag-uri $\Delta y_{t-j} \Rightarrow$ parametric
- ▣ **PP**: corectează statistica $t \Rightarrow$ neparametric
- ▣ PP mai robust la heteroscedasticitate
- ▣ ADF mai robust la MA cu rădăcini aproape de -1

Python

```
from statsmodels.tsa.stattools import PhillipsPerron
```

PP vs ADF: comparație pe date reale



 TSA_ch1_unit_root_tests

ADF vs PP: când diferă?

- ▣ **Acord:** de regulă, ADF și PP conduc la aceleași concluzii
- ▣ **Divergență:** date financiare cu heteroscedasticitate condiționată — PP preferabil
- ▣ **Divergență:** serii cu componentă MA cu rădăcini aproape de -1 — ADF preferabil (PP poate supra-respinge)
- ▣ **Bună practică:** rulați ambele teste și comparați rezultatele

Testul DF-GLS (Elliott, Rothenberg, Stock 1996)

Definiție 13 (DF-GLS — Dickey-Fuller cu detrending GLS)

- ▣ **Principiu:** elimină componenta deterministă prin **GLS** *înainte* de testul ADF
- ▣ **Pasul 1:** seria detrended GLS: $\tilde{y}_t = y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 t$, cu $\hat{\beta}$ estimați prin quasi-diferențiere ($\bar{\alpha} = 1 - c/T$)
- ▣ **Pasul 2:** ADF pe $\tilde{y}_t$: $\Delta \tilde{y}_t = \gamma \tilde{y}_{t-1} + \sum_{j=1}^p \phi_j \Delta \tilde{y}_{t-j} + e_t$
- ▣ H_0 : rădăcină unitară ($\gamma = 0$) vs. H_1 : staționar

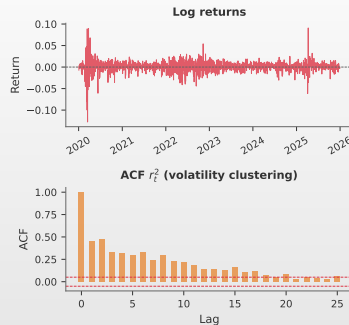
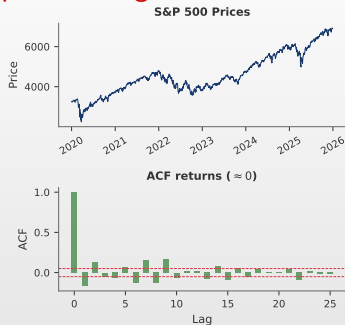
Avantaje față de ADF

- ▣ **Putere superioară:** cel mai puternic test asimptotic din clasa testelor de rădăcină unitară
- ▣ **Distorsiune de mărime redusă:** mai puțin sensibil la specificarea greșită a lag-urilor

Python

- ▣ `from arch.unitroot import DFGLS → DFGLS(y, trend='ct').summary()`

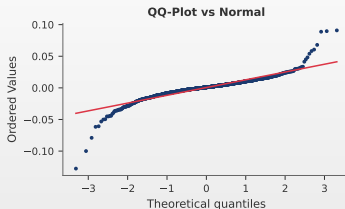
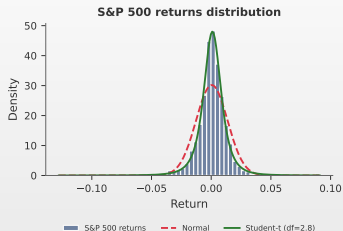
Analiza S&P 500: prezentare generală



Observații

- ▣ **Prețuri:** Trend ascendent, $I(1)$, nestaționar; **Randomamente:** Medie ≈ 0 , $I(0)$, staționar
- ▣ **ACF r_t :** ≈ 0 (eficientă); **ACF r_t^2 :** semnificativ (*volatility clustering*)

Fapte stilizate ale randamentelor financiare



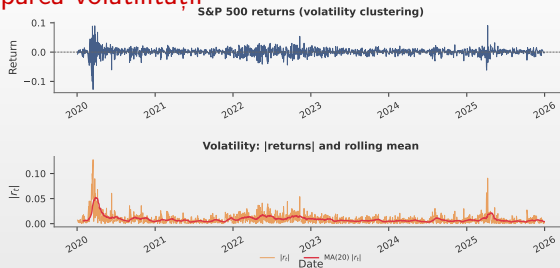
Proprietăți observate

- Asimetrie negativă (coadă stângă)
- Kurtosis excesiv ($\gg 3$)
- Cozi groase (*heavy tails*)

Implicații

- Distribuția normală inadecvată
- Evenimente extreme mai probabile
- Necesită distribuții cu cozi groase
- Ex.: Student-t, GED (Generalized Error Distribution)

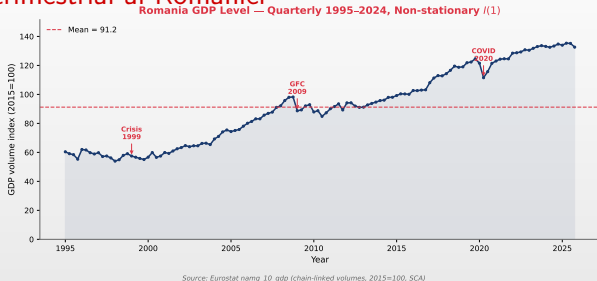
Volatility clustering: gruparea volatilității



Observații

- Randamente mari (în valoare absolută) tind să fie urmate de randamente mari
- Perioade de calm sunt urmate de perioade de volatilitate ridicată
- **Volatilitate variabilă în timp** (*volatility clustering*) $\Rightarrow$ necesită modele specializate (Cap. 5)
- Modele ARCH (*AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity*) / GARCH (*Generalized ARCH*)

Studiu de caz: PIB-ul trimestrial al României



TSA_ch1_case_gdp

Analiza inițială

- **Date:** PIB trimestrial România 1995–2024 (120 obs., sursa: Eurostat, indice de volum 2015=100)
- **Observații:** Trend ascendent puternic, cu șocuri structurale
 - Șocuri vizibile: criza 1999, criza financiară globală 2009, COVID-19 2020
- **Ipoteză de lucru:** Serie nestaționară $\Rightarrow$ testăm cu ADF și KPSS

Testarea staționarității: ADF și KPSS

Testul ADF

- ▣ **Ipoteză:** H_0 : Rădăcină unitate
- ▣ **Rezultat:** Stat. ADF: -0.14
 - ▶ p-value: 0.94
 - ▶ Nu respingem H_0

Testul KPSS

- ▣ **Ipoteză:** H_0 : Staționară
- ▣ **Rezultat:** Stat. KPSS: 0.95^{**}
 - ▶ p-value: < 0.01
 - ▶ Respingem H_0

Concluzie: Ambele teste concordă

- ▣ Seria PIB este **nestaționară** $\Rightarrow$ necesită diferențiere

Testul Zivot-Andrews (1992): rădăcină unitară cu breakpoint

Model C (shift în medie și trend)

$$y_t = \mu + \beta t + \gamma y_{t-1} + \theta DU_t(\tau) + \delta DT_t(\tau) + \sum_{j=1}^k \phi_j \Delta y_{t-j} + e_t$$

$$\square DU_t(\tau) = 1(t > T_B), \quad DT_t(\tau) = 1(t > T_B) \cdot (t - T_B)$$

$$\square H_0: \gamma = 1 \text{ (rădăcină unitară)} \quad \text{vs.} \quad H_1: |\gamma| < 1 \text{ cu breakpoint la } T_B$$

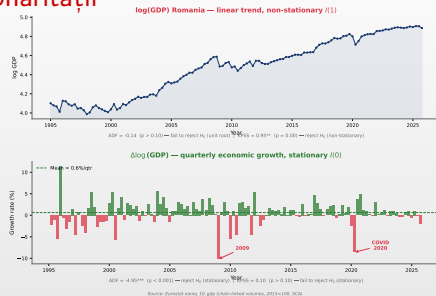


Source: Eurostat namq_10_gdp (chain-linked volumes, 2015=100, SCA)

```
from arch.unitroot import ZivotAndrews; ZivotAndrews(y, method='c').summary()
```

 TSA_ch1_case_gdp

Diferențierea: obținerea staționarității



Teste după transformare

- ▣ ADF: -4.95 ($p < 0.001$) ✓
- ▣ KPSS: 0.10 ($p > 0.10$) ✓
- ▣ Ambele confirmă staționaritate

Concluzie

- ▣ PIB_t : $I(1)$ — nestaționar
- ▣ $\ln PIB_t$: $I(1)$ — varianță stabilizată
- ▣ $\Delta \ln PIB_t$: $I(0)$ — staționar
- ▣ Modelăm $\Delta \ln PIB_t =$ creșterea economică

Exercițiu IA: Gândire critică

Prompt de analizat în ChatGPT / Claude / Copilot

“Folosind yfinance, descarcă cursul zilnic EUR/RON (EURRON=X) din 2020-01-01 până în 2024-12-31 (aprox. 1.250 observații). Testează dacă seria este staționară folosind testele ADF și KPSS. Ajustează un model adecvat și prognozează cursul pentru următoarele 5 zile lucrătoare. Evaluează fiabilitatea prognozei.”

Exercițiu:

1. Rulați promptul într-un LLM (*Large Language Model*) la alegere și analizați critic răspunsul.
2. Descărcați date reale EUR/RON și reproduceți analiza. Rezultatele coincid?
3. Testul ADF este specificat corect (trend, lag-uri)? Ce se schimbă dacă modificați opțiunile?
4. Comparați prognoza modelului AI cu un *benchmark* naiv ($\hat{X}_{t+1} = X_t$).
5. Dacă seria este un mers aleatoriu, are sens să estimăm un model ARMA?

☐ **Atenție:** Un RMSE (*Root Mean Squared Error*) mic și coeficienți semnificativi *nu garantează* o prognoză utilă în afara eșantionului.

Concluzii principale

Rezumat

- ▣ **Proces stochastic:** colecție de variabile aleatoare indexate după timp
- ▣ **Staționaritate slabă:** medie, varianță, autocovarianță constante
- ▣ **Zgomot alb:** $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$
 - ▶ Staționar, $ACF = 0$ pentru $h \neq 0$
- ▣ **Mers aleator:** $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$
 - ▶ Nestaționar, $Var(X_t) = t\sigma^2$
- ▣ **ACF/PACF:** instrumente esențiale pentru identificarea structurii
- ▣ **Diferențierea:** transformă serii nestaționare în staționare
- ▣ **Teste de rădăcină unitară:**
 - ▶ ADF (H_0 : rădăcină unitară) vs KPSS (H_0 : staționar)

Formule importante

Staționaritate slabă

- **Momente constante:**
 - ▶ $\mathbb{E}[X_t] = \mu$ (medie constantă)
 - ▶ $\text{Var}(X_t) = \sigma^2$ (varianță constantă)
- **Autocovarianță:** $\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h})$
- **Autocorelație:** $\rho(h) = \gamma(h)/\gamma(0)$

Operatorul lag

- **Lag:** $LX_t = X_{t-1}$
- **Diferență:** $\Delta X_t = (1 - L)X_t$

Zgomot alb (WN)

- **Model:** $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$
- **ACF:** $\rho(h) = 0$ pentru $h \neq 0$

Mers aleator (RW)

- **Model:** $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$
- **Varianță:** $\text{Var}(X_t) = t\sigma^2$ (crește)

Ce urmează

Capitolul 2: Modele ARMA

- ▣ **AR(p)**: Modele autoregresive
- ▣ **MA(q)**: Modele cu medie mobilă
- ▣ **ARMA(p, q)**: Modele mixte autoregresive–medie mobilă
- ▣ **Identificare**: cu ACF/PACF

Ce vom învăța

- ▣ **Estimare**: Parametrii modelului (MLE, OLS)
- ▣ **Diagnostic**: Verificarea reziduurilor (test Ljung-Box)
- ▣ **Prognoză**: Previziuni punctuale și intervale de încredere
- ▣ **Selecție**: AIC (*Akaike Information Criterion*), BIC (*Bayesian Information Criterion*)

Întrebarea 1

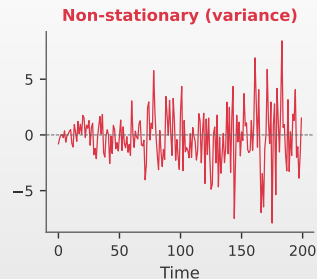
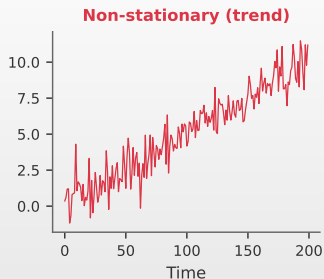
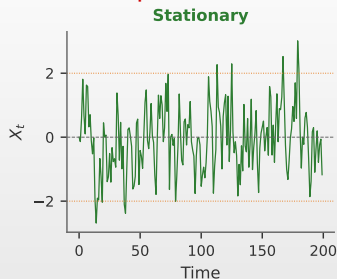
Întrebare

▣ Care sunt cele trei condiții pentru staționaritatea slabă (în covarianță)?

Variante de răspuns

- (A) Media zero, varianța infinită, covarianță dependentă de timp
- (B) Media constantă, varianța constantă, autocovarianța depinde doar de lag
- (C) Distribuție normală, independență, varianță unitară
- (D) Trend liniar, sezonaliitate constantă, reziduuri albe

Întrebarea 1: Răspuns



Răspuns: (B)

□ $\mathbb{E}[X_t] = \mu, \text{Var}(X_t) = \sigma^2, \gamma(t, s) = \gamma(|t - s|)$

Întrebarea 2

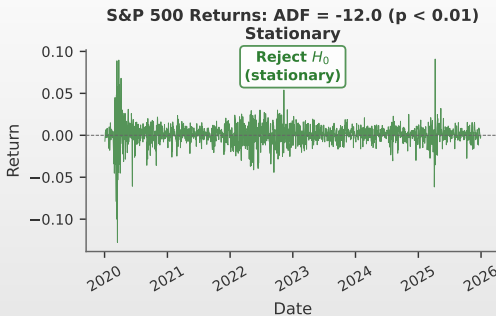
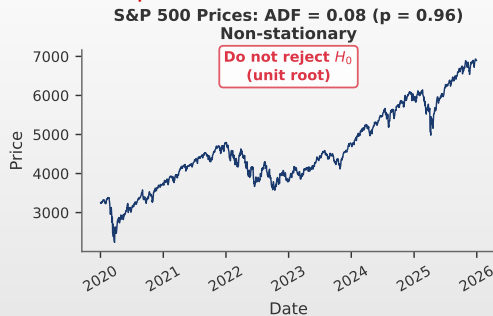
Întrebare

☐ Care este ipoteza nulă (H_0) în testul ADF (Augmented Dickey-Fuller)?

Variante de răspuns

- (A) Seria este staționară
- (B) Seria are rădăcină unitară (este nestaționară)
- (C) Seria nu are autocorelație
- (D) Seria are distribuție normală

Întrebarea 2: Răspuns



Răspuns: (B)

☐ H_0 : rădăcină unitară; $\tau_{ADF} < \text{val. critică} \Rightarrow \text{serie staționară}$

Întrebarea 3

Întrebare

☐ Care este ipoteza nulă (H_0) în testul KPSS?

Variante de răspuns

(A) Seria are rădăcină unitară (nestaționară)

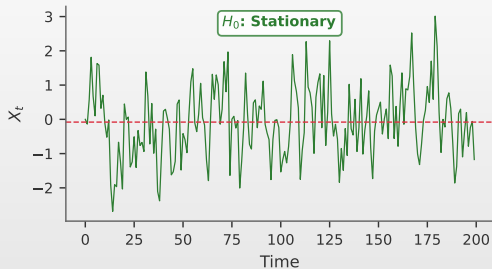
(B) Seria este staționară

(C) Seria este un mers aleatoriu

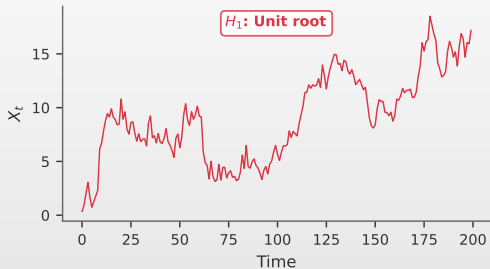
(D) Seria are trend determinist

Întrebarea 3: Răspuns

**KPSS: Do not reject H_0
(Stationary)**



**KPSS: Reject H_0
(Non-stationary)**



Răspuns: (B)

- ☐ KPSS: H_0 staționară (opus ADF). Folosiți ambele teste.

Întrebarea 4

Întrebare

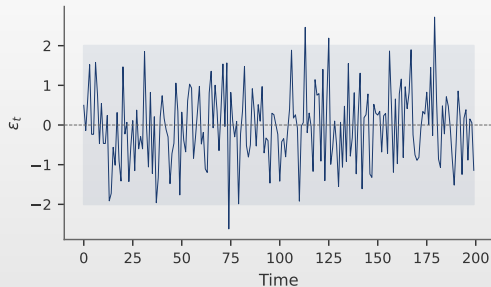
▣ Care este proprietatea fundamentală a varianței unui mers aleatoriu $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$?

Variante de răspuns

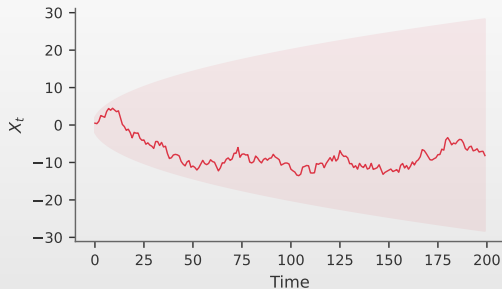
- (A) Varianța este constantă: $\text{Var}(X_t) = \sigma^2$
- (B) Varianța crește liniar cu timpul: $\text{Var}(X_t) = t\sigma^2$
- (C) Varianța scade cu timpul
- (D) Varianța este zero

Întrebarea 4: Răspuns

White noise: $Var = \sigma^2$ (const.)



Random walk: $Var = t\sigma^2$ (grows!)



Răspuns: (B)

▣ $Var(X_t) = t\sigma^2$ crește linear $\Rightarrow$ nestăionar

Întrebarea 5

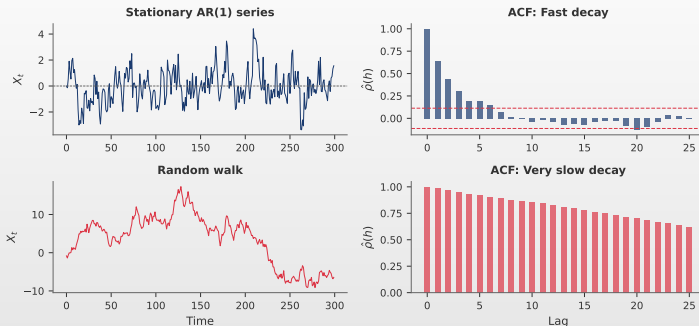
Întrebare

□ Cum arată ACF-ul unui mers aleatoriu (serie nestaționară cu rădăcină unitară)?

Variante de răspuns

- (A) Toate valorile sunt zero după lag 0
- (B) Scade exponențial rapid
- (C) Scade foarte lent (persistență ridicată)
- (D) Oscilează între pozitiv și negativ

Întrebarea 5: Răspuns



Răspuns: (C)

□ ACF ≈ 1 pentru multe lag-uri, scădere lentă $\Rightarrow$ test ADF

Întrebarea 6

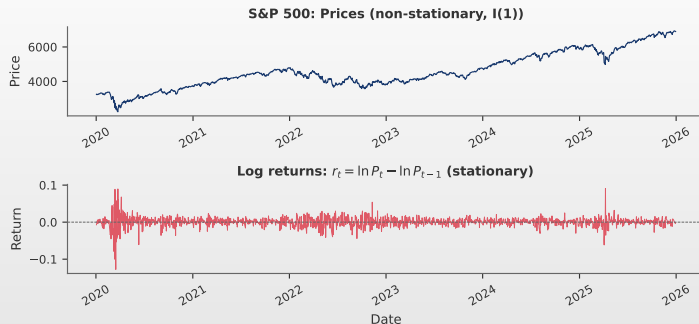
Întrebare

□ Cum obținem randamente staționare dintr-o serie de prețuri financiare P_t ?

Variante de răspuns

- (A) Diferențiere simplă: $\Delta P_t = P_t - P_{t-1}$
- (B) Logaritmare apoi diferențiere: $r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1}$
- (C) Doar logaritmare: $\ln P_t$
- (D) Standardizare: $(P_t - \bar{P})/s_P$

Întrebarea 6: Răspuns



Răspuns: (B)

- Randamente log: $r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1}$
- Mai întâi $\ln$ (stabilizează varianța), apoi Δ (elimină trendul) $\Rightarrow$ serie staționară

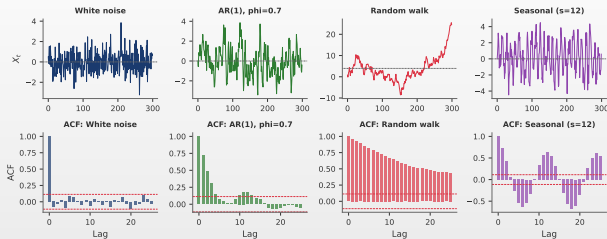
Întrebarea 7: PACF și identificarea modelului

Întrebare

Ce indică un PACF care se anulează brusc după lag 2, în timp ce ACF descrește exponențial?

- (A) Un proces MA(2)
- (B) Un proces AR(2)
- (C) Un proces ARMA(2,2)
- (D) Un mers aleatoriu

Întrebarea 7: Răspuns



Răspuns: (B) — Proces AR(2)

- Regula de identificare: PACF cu tăietură bruscă la lag p + ACF cu descreștere exponențială $\Rightarrow$ AR(p)
- PACF $\neq 0$ la lag 1 și 2, apoi ≈ 0 pentru $h > 2 \Rightarrow$ AR(2)
- Comparație: MA(q) are ACF cu tăietură la lag q și PACF cu descreștere exponențială (invers)

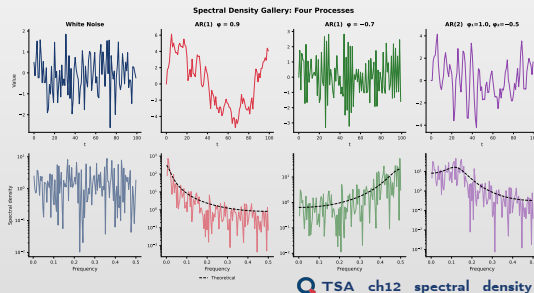
Densitatea spectrală: domeniul frecvențelor

Definiție 14 (Densitatea spectrală de putere)

- ▣ $S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) e^{-i\omega h}$, $\omega \in [-\pi, \pi]$
- ▣ Descompune varianța pe frecvențe: $\gamma(0) = \int_{-\pi}^{\pi} S(\omega) d\omega$; perechea Fourier a ACF

Interpretare

- ▣ $S(\omega)$ mare la ω mic $\Rightarrow$ ciclu lung dominant
- ▣ Zgomot alb: $S(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi}$ (plat)
- ▣ AR(1) $\phi > 0$: putere concentrată la frecvențe joase
- ▣ Periodograma: estimator empiric al lui $S(\omega)$
- ▣ Detalii: Capitolul 12



Procese local staționare

Definiție 15 (Proces local staționar (Dahlhaus, 1997))

- Un proces $\{X_{t,T}\}$ este **local staționar** dacă admite o reprezentare spectrală cu funcție de transfer variabilă în timp $A(u, \omega)$, unde $u = t/T \in [0, 1]$
- **Intuiție:** procesul „arată” staționar în vecinătăți mici de timp, dar proprietățile sale evoluează lent la scală globală

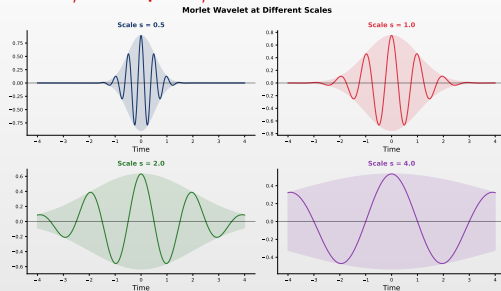
Contrast cu staționaritatea globală

- **Global staționar:** densitatea spectrală $f(\omega)$ constantă în timp
- **Local staționar:** densitatea spectrală $f(u, \omega)$ variază neted cu $u = t/T$ (timp rescalat)

Aplicații

- Randamente financiare cu regimuri de volatilitate variabile
- Serii macroeconomice cu rupturi structurale
- Semnale EEG/ECG cu structură spectrală variabilă în timp

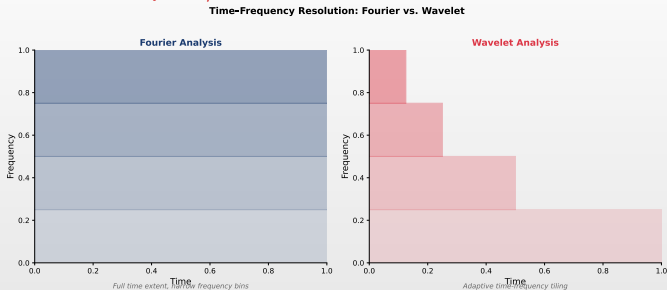
Analiza wavelet: wavelet Morlet și comparație cu Fourier



Interpretare

- **CWT:** $W_X(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int X(t) \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$ — localizat în timp (b) și frecvență ($1/a$)
- **Avantaj față de Fourier:** localizare *simultană* timp–frecvență; analiza Fourier clasică pierde complet informația temporală

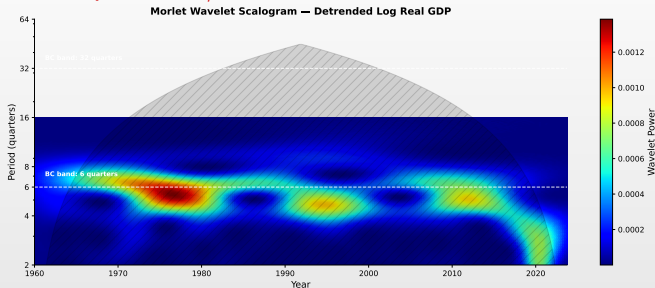
Analiza wavelet vs. Fourier: comparație vizuală



Interpretare

- **Fourier:** descompune în frecvențe globale — nu poate detecta *când anume* în timp apar ciclurile
- **Wavelet:** detectează cicluri *locale* în timp — identifică rupturi structurale, schimbări de regim și periodicități tranzitorii

Scalograma PIB: analiză timp-frecvență



Scalograma: $|W_X(a, b)|^2$

- Reprezentare timp-scală cu **rezoluție adaptivă** — detectează cicluri la diferite orizonturi temporale
- Frecvențe înalte $\Rightarrow$ fereastră îngustă (rezoluție temporală bună); frecvențe joase $\Rightarrow$ fereastră largă (rezoluție spectrală bună) — principiul incertitudinii Heisenberg

Coerența wavelet și descompunerea varianței

Coerența wavelet

- ▣ Măsoară **co-mișcarea** dintre două serii la diferite scale temporale
- ▣ Analog al coeficientului de corelație, dar *localizat* simultan în timp și frecvență
- ▣ Aplicații: relația petrol–burse de valori, sincronizarea ciclurilor economice internaționale

Pachete software

- ▣ **Python:** pywt (PyWavelets) — DWT, CWT, familii wavelet
- ▣ **R:** WaveletComp — coerență wavelet, scalograme
- ▣ **R:** wavelets — DWT, MODWT, analiză multirezoluție

Descompunerea varianței wavelet

- ▣ $\text{Var}(X) = \sum_{j=1}^J \nu_j^2$ (pe scale)
- ▣ Scala j : perioade $\approx [2^j, 2^{j+1})$ perioade de eșantionare
- ▣ Identifică orizonturile temporale dominante (scurt, mediu, lung)

Bibliografie I

Manuale fundamentale

- ▣ Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*, Princeton University Press.
- ▣ Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice*, 3rd ed., OTexts.
- ▣ Shumway, R.H., & Stoffer, D.S. (2017). *Time Series Analysis and Its Applications*, 4th ed., Springer.

Referințe clasice

- ▣ Wold, H. (1938). *A Study in the Analysis of Stationary Time Series*, Almqvist & Wiksell.
- ▣ Bartlett, M.S. (1946). On the Theoretical Specification and Sampling Properties of Autocorrelated Time-Series, *JRSS Supplement*, 8(1), 27–41.
- ▣ Box, G.E.P., & Jenkins, G.M. (1970). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, Holden-Day.

Bibliografie II

Teste de staționaritate

- Dickey, D.A., & Fuller, W.A. (1979). Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root, *JASA*, 74(366), 427–431.
- Kwiatkowski, D., Phillips, P.C.B., Schmidt, P., & Shin, Y. (1992). Testing the Null Hypothesis of Stationarity Against the Alternative of a Unit Root, *Journal of Econometrics*, 54(1–3), 159–178.
- Phillips, P.C.B., & Perron, P. (1988). Testing for a Unit Root in Time Series Regression, *Biometrika*, 75(2), 335–346.

Resurse online și cod

- **Quantlet:** <https://quantlet.com> – Platformă de cod pentru metode cantitative
- **Quantinar:** <https://quantinar.com> – Platformă de învățare pentru metode cantitative
- **GitHub TSA:** https://github.com/QuantLet/TSA/tree/main/TSA_ch1 – Cod Python pentru acest capitol

Bibliografie III

Procese local staționare și analiză wavelet

- Dahlhaus, R. (1997). Fitting Time Series Models to Nonstationary Processes, *The Annals of Statistics*, 25(1), 1–37.
- Percival, D.B., & Walden, A.T. (2000). *Wavelet Methods for Time Series Analysis*, Cambridge University Press.
- Gençay, R., Selçuk, F., & Whitcher, B. (2002). *An Introduction to Wavelets and Other Filtering Methods in Finance and Economics*, Academic Press.
- Rua, A., & Nunes, L.C. (2009). International Comovement of Stock Market Returns: A Wavelet Analysis, *Journal of Empirical Finance*, 16(4), 632–639.

Vă mulțumim!

Întrebări?

Materialele cursului sunt disponibile la: <https://danpele.github.io/Time-Series-Analysis/>



Quantlet



Quantinar