








Serii de timp

Capitolul 10: Modele în spațiul stărilor, filtrul Kalman și modele Markov switching



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București
IDA Institute Digital Assets
Blockchain Research Center
AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance
Academia Română, Institutul de Prognoză Economică
MSCA Digital Finance

Acronime folosite în acest material (1/2)

- **ACF**: Autocorrelation Function (funcția de autocorelație)
- **AI**: Artificial Intelligence (inteligență artificială)
- **AIC**: Akaike Information Criterion (criteriul informațional Akaike)
- **AR**: AutoRegressive (model) — model autoregresiv
- **ARCH**: AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity (heteroscedasticitate condiționată autoregresivă)
- **ARIMA**: AutoRegressive Integrated Moving Average (model) — model autoregresiv integrat cu medie mobilă
- **ARMA**: AutoRegressive Moving Average (model) — model autoregresiv cu medie mobilă
- **BET**: Bucharest Exchange Trading (index) — indicele de referință al Bursei de Valori București
- **BIC**: Bayesian Information Criterion (criteriul informațional bayesian al lui Schwarz)
- **EM**: Expectation–Maximisation (algorithm) — algoritmul așteptare–maximizare
- **EODHD**: EOD Historical Data (market-data provider) — furnizor de date de piață
- **ETS**: Error, Trend, Seasonality (exponential smoothing state space models) — eroare, trend, sezonalitate (modele de netezire exponențială)
- **FRED**: Federal Reserve Economic Data (baza de date economice a Rezervei Federale din St. Louis)
- **GARCH**: Generalised AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity (heteroscedasticitate condiționată autoregresivă generalizată)
- **GDP**: Gross Domestic Product (produsul intern brut)

Acronime folosite în acest material (2/2)

- **HP**: Hodrick–Prescott (filter) — filtrul Hodrick–Prescott
- **IGARCH**: Integrated GARCH (GARCH integrat)
- **MA**: Moving Average (medie mobilă)
- **ML**: Machine Learning (învățare automată)
- **MS-AR**: Markov-Switching AutoRegressive (model) — model autoregresiv cu schimbare de regim de tip Markov
- **NASA**: National Aeronautics and Space Administration (agenția spațială a SUA)
- **NBER**: National Bureau of Economic Research (biroul național de cercetare economică al SUA, care datează recesiunile)
- **OLS**: Ordinary Least Squares (metoda celor mai mici pătrate)
- **PIB**: Produsul intern brut
- **RTS**: Rauch–Tung–Striebel (smoother) — netezitorul Rauch–Tung–Striebel
- **SD**: Standard Deviation (abaterea standard)
- **SES**: Simple Exponential Smoothing (netezire exponențială simplă)
- **SUA**: Statele Unite ale Americii
- **SWARCH**: Switching ARCH (model ARCH cu schimbare de regim)
- **TVP**: Time-Varying Parameter (regression) — regresie cu parametri variabili în timp
- **UC**: Unobserved Components (model) — model cu componente neobservate
- **UE**: Uniunea Europeană
- **VAR**: Vector AutoRegression (model vector autoregresiv)

Întrebarea de azi și traseul

- **Întrebarea**: cum măsurăm ceea ce nu observăm direct: nivelul real al unei serii zgomotoase, deviația PIB de la potențial, un beta care se schimbă, o recesiune?
  - răspunsul: scriem mărimea neobservată ca o **stare** și lăsăm datele să ne actualizeze estimarea ei, perioadă cu perioadă
- **Traseul** capitolului
  - forma în spațiul stărilor: ecuația de măsurare și ecuația de tranziție; local level, local linear trend, ARMA, regresie cu parametri variabili
  - filtrul Kalman de mînă; netezirea; verosimilitatea și estimarea; valorile lipsă
  - trend și ciclu: PIB-ul României, filtrul HP și critica lui; factori dinamici și nowcasting
  - Markov switching: recesiuni, regimuri ale creșterii economice din România, regimuri de volatilitate
- Pornim de la Capitolul 0 (netezirea exponențială), Capitolul 2 (ARMA), Capitolul 5 (GARCH) și Capitolul 8 (memoria lungă)

Rezultatele învățării

- Scrieți un model în forma în spațiul stărilor: local level, local linear trend, AR(2), o regresie cu un coeficient variabil în timp
- Aplicați de mînă filtrul Kalman și explicați cîștigul Kalman
- Arătați că netezirea exponențială simplă este starea de echilibru a filtrului pentru modelul local level
- Estimați un model în spațiul stărilor prin verosimilitate maximă, netezați-l și tratați valorile lipsă și prognozele
- Descompuneți PIB-ul în trend și ciclu și evaluați filtrul HP prin prisma criticii lui Hamilton (2018)
- Estimați un model Markov switching și interpretați probabilitățile regimurilor, duratele și capcanele lui

Bibliografie și instrumente

- Manual: Huang și Petukhina (2022), capitolul despre modelele în spațiul stărilor și filtrul Kalman
  - spațiul stărilor: Durbin și Koopman (2012) (exemplul Nilului din acest capitol provine din cartea lor); Harvey (1989); Shumway și Stoffer (2017), cap. 6
  - schimbări de regim: Hamilton (1989); Hamilton (1994), cap. 13 (filtrul Kalman) și cap. 22 (schimbări de regim); Kim și Nelson (1999)
- Quantlet-urile Python ale capitolului: Quantlets/Ch_10
  - un filtru Kalman scris explicit în `numpy`; `statsmodels`: `UnobservedComponents`, `SARIMAX`, `DynamicFactor`, `MarkovRegression`, `MarkovAutoregression`
- Notebook-ul cursului: deschideți în Google Colab
- Curs video: Kalman Filter

Rudolf Kálmán și navigația misiunilor Apollo



Rudolf E. Kálmán (1930–2016)

Foto: ETH-Bibliothek Zürich, Bildarchiv (2007); CC BY-SA 4.0; Wikimedia Commons



Apollo 8 (1968): Jim Lovell la stația de ghidare și navigație

Foto: NASA (1968); domeniu public; Wikimedia Commons

- Kalman (1960): o estimare recursivă a unei stări ascunse din măsurători zgomotoase
  - la fiecare pas: prezicem starea, apoi corectăm predicția cu noua măsurătoare
  - ponderea corecției, **câștigul Kalman**, echilibrează cele două surse de incertitudine
- Filtrul a fost adaptat la NASA Ames pentru navigația navelor Apollo
  - starea: poziția și viteza; măsurătorile: observații ale stelelor și radar
- În economie starea este un trend, un ciclu, un coeficient sau un regim; măsurătorile sînt datele publicate

Stări ascunse în economie și finanțe

Seria observată	Starea ascunsă	Modelul din acest capitol
Debitul Nilului, inflația lunară	nivelul de fond	local level
PIB real	trendul și deviația PIB	componente neobservate
randamentele unui indice bursier	un beta variabil în timp	regresie cu parametri variabili
mai mulți indicatori de activitate	un factor comun	model cu factori dinamici
creșterea PIB, randamentele	recesiune sau expansiune; calm sau agitat	Markov switching

- Primele patru au o stare **continuă** și sînt filtrate cu filtrul Kalman
- Ultimul are o stare **discretă** (un regim) și este filtrat cu filtrul Hamilton
- Ambele filtre fac același lucru: prezic starea, apoi actualizează predicția cu y_t

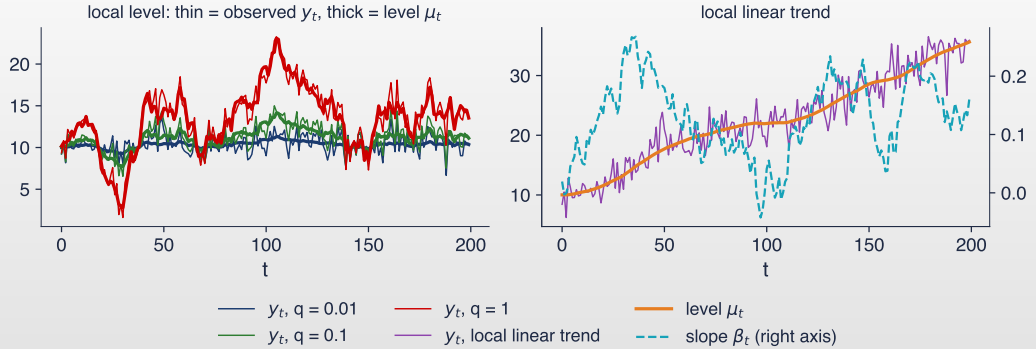
Forma în spațiul stărilor

- **Ecuația de măsurare**: $y_t = Z_t\alpha_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, H)$
  - y_t: observația (aici un scalar); α_t: **vectorul de stare** ($m \times 1$), neobservat; Z_t: un rînd $1 \times m$ de numere cunoscute
- **Ecuația de tranziție**: $\alpha_{t+1} = T\alpha_t + R\eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, Q)$
  - starea evoluează ca o autoregresie vectorială de ordinul 1 (VAR(1), Capitolul 6); T este $m \times m$
  - R: transmite șocurile η_t în stare; H, Q: variațele șocurilor de măsurare și ale șocurilor stării
  - starea inițială: $\alpha_1 \sim N(a_1, P_1)$, a_1, P_1: media și varianța ei; ε_t, η_s și α_1 sînt independente între ele
- **Matricele sistemului** Z_t, H, T, R, Q conțin parametrii θ; aceștia se estimează prin verosimilitate maximă
  - aceeași formă acoperă ARMA, netezirea exponențială, modelele trend–ciclu, regresiile cu coeficienți mobili și modelele factoriale Durbin și Koopman (2012)

Modelul local level

- **Local level** (mers aleator plus zgomot): $y_t = \mu_t + \varepsilon_t, \quad \mu_{t+1} = \mu_t + \eta_t$
  - starea $\alpha_t = \mu_t$, nivelul; $Z = T = R = 1$, $H = \sigma_\varepsilon^2$, $Q = \sigma_\eta^2$
  - ε_t: zgomot de măsurare care dispare în perioada următoare; η_t: o deplasare permanentă a nivelului
- **Raportul semnal–zgomot** $q = \sigma_\eta^2/\sigma_\varepsilon^2$: cîtă parte din mișcare este permanentă
  - $q = 0$: un nivel constant (zgomot alb în jurul unei medii); $q \to \infty$: un mers aleator pur
- Forma redusă: $\Delta y_t = \eta_{t-1} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$ este un MA(1) cu $\rho(1) = -1/(q+2)$
  - deci modelul local level este un ARIMA(0,1,1) (Capitolul 3) cu un coeficient MA negativ
  - $\gamma(0) = \sigma_\eta^2 + 2\sigma_\varepsilon^2$ și $\gamma(1) = -\sigma_\varepsilon^2$ dau $\rho(1)$

Traiectorii local level și local linear trend



- Stînga: aceleași șocuri $\varepsilon_t, \eta_t \sim N(0,1)$, cu $\sigma_\varepsilon^2 = 1$ și $q = 0{,}01;\ 0{,}1;\ 1$ (subțire: y_t, gros: μ_t). Dreapta: un local linear trend, a cărui pantă β_t este ea însăși un mers aleator

TSA_ch10_state_space_examples

Interpretarea traiectoriilor simulate

- q mic: nivelul abia se mișcă, iar y_t arată ca un zgomot în jurul unei medii; q mare: nivelul rătăcește, iar y_t îl urmează
  - autocorelația primei diferențe: $-0{,}51$ pentru $q = 0{,}01$ (teoretic $-1/2{,}01$) și $-0{,}28$ pentru $q = 1$ (teoretic $-1/3$)
- Local linear trend are o pantă care se schimbă lent: perioade de creștere rapidă și lentă
  - acesta este modelul de trend pe care îl vom folosi pentru PIB
- Problema de estimare: doar din y_t, cît este nivel și cît este zgomot? Filtrul Kalman răspunde pentru variațe date; verosimilitatea alege variațele

Modelul local linear trend

- **Local linear trend**: $y_t = \mu_t + \varepsilon_t, \quad \mu_{t+1} = \mu_t + \beta_t + \eta_t, \quad \beta_{t+1} = \beta_t + \zeta_t$
  - starea $\alpha_t = (\mu_t, \beta_t)'$: nivelul și panta (rata de creștere)
  - $Z = (1,\ 0), \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \text{diag}(\sigma_\eta^2, \sigma_\zeta^2)$
- Cazuri particulare
  - $\sigma_\eta^2 = \sigma_\zeta^2 = 0$: un trend liniar determinist $\mu_1 + \beta_1 t$ (Capitolul 3)
  - $\sigma_\zeta^2 = 0$: un mers aleator cu deriva β
  - $\sigma_\eta^2 = 0$: **trendul neted** (mers aleator integrat), modelul din spatele filtrului HP (secțiunea 5)
- Prognozele: $\hat{y}_{T+h} = \hat{\mu}_T + h\hat{\beta}_T$, versiunea în spațiul stărilor a metodei Holt (Capitolul 0)

Modele ARMA în forma în spațiul stărilor

- **AR(2)**: $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + u_t$; starea $\alpha_t = (y_t, y_{t-1})'$
  - $y_t = (1,\ 0)\,\alpha_t$ $(H = 0)$, $\quad \alpha_{t+1} = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \alpha_t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u_{t+1}$
  - T este matricea companion din Capitolul 2; valorile ei proprii sînt inversele rădăcinilor AR
- **ARMA(1,1)**: $y_t = \phi y_{t-1} + u_t + \theta u_{t-1}$, cu $\alpha_t = (y_t, \theta u_t)'$
  - $T = \begin{pmatrix} \phi & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R = (1,\ \theta)'$; orice ARMA(p, q) se scrie cu $m = \max(p, q+1)$
- Importanța practică: filtrul Kalman dă verosimilitatea gaussiană **exactă** a unui model ARMA, chiar cu valori lipsă
  - pornirea staționară: P_1 rezolvă $P = TPT' + RQR'$, adică $\mathrm{vec}(P_1) = (I - T \otimes T)^{-1}\mathrm{vec}(RQR')$
  - așa estimează `statsmodels` `SARIMAX` modelele ARIMA din Capitolele 2–4

Exemplu rezolvat: AR(2) pentru creșterea PIB din SUA

- Date: creșterea PIB real al SUA, trimestru față de trimestru, 1947–2019 ($T = 291$, FRED GDPC1)
  - AR(2) cu termen liber estimat cu `SARIMAX`: $\hat{\phi}_1 = 0{,}319$, $\hat{\phi}_2 = 0{,}111$, $\hat{\sigma}^2 = 0{,}739$, media $\hat{\mu} = 0{,}774\%$ pe trimestru
- Filtrul nostru, cu matricele din slide-ul anterior și cu P_1 staționar
  - log-verosimilitatea: Kalman $-368{,}9157$; `SARIMAX` $-368{,}9157$: același număr
- Erorile de predicție v_t ale filtrului sînt erorile de prognoză la un pas ale AR(2); verosimilitatea se construiește din ele (secțiunea 4)

Regresie cu parametri variabili în timp

- **Regresia cu parametri variabili în timp** (TVP): $y_t = \alpha + \beta_t x_t + \varepsilon_t, \quad \beta_{t+1} = \beta_t + \eta_t$
  - starea $(\alpha, \beta_t)'$; rîndul $Z_t = (1,\ x_t)$ **se schimbă în timp**; $Q = \text{diag}(0, \sigma_\eta^2)$
  - $\sigma_\eta^2 = 0$: metoda celor mai mici pătrate (OLS), calculată recursiv
- Exemple
  - un beta de piață care crește în crize; transmiterea cursului de schimb în inflație; persistența inflației
- Mai bună decît o fereastră mobilă: nu alegem lungimea ferestrei, folosim toate observațiile, iar β_t vine cu o eroare standard

Netezirea exponențială ca model în spațiul stărilor

- Capitolul 0: netezirea exponențială simplă (SES) actualizează un nivel $\ell_t = \alpha y_t + (1-\alpha)\ell_{t-1}$ și prognozează $\hat{y}_{t+1} = \ell_t$
  - echivalent $\ell_t = \ell_{t-1} + \alpha(y_t - \ell_{t-1})$: nivelul vechi plus o fracțiune α din surpriză
- Muth (1960): SES dă prognozele optime atunci cînd datele urmează modelul local level
  - secțiunea 3 o arată: α este cîștigul Kalman de echilibru
- Modelele ETS (eroare, trend, sezonalitate) sînt modele în spațiul stărilor cu o singură sursă de eroare Hyndman et al. (2008); modelele de aici au șocuri separate pentru fiecare componentă

Recapitulare: forma în spațiul stărilor

- $y_t = Z_t\alpha_t + \varepsilon_t$, $\alpha_{t+1} = T\alpha_t + R\eta_t$: un VAR(1) ascuns, observat cu zgomot
- Local level: $q = \sigma_\eta^2/\sigma_\varepsilon^2$; forma redusă ARIMA(0,1,1)
- Local linear trend, ARMA și regresia TVP sînt alte alegeri ale lui Z_t, T, Q
- Verosimilitatea Kalman a unui AR(2) este egală cu verosimilitatea ARMA exactă

Ideea filtrului

- Notație: $Y_t = (y_1, \ldots, y_t)$; urmărim două mărimi (vectori) pentru stare
  - predicția: $a_t = E(\alpha_t \mid Y_{t-1})$, cu varianța P_t
  - estimarea filtrată: $a_{t|t} = E(\alpha_t \mid Y_t)$, cu varianța $P_{t|t}$
- Fiecare perioadă are doi pași
  - **actualizarea**: sosește y_t; corectăm a_t cu o fracțiune din surpriza $v_t = y_t - Z_t a_t$
  - **predicția**: trecem starea filtrată prin ecuația de tranziție și obținem a_{t+1}
- Cu erori gaussiene, $a_{t|t}$ este media condiționată exactă; fără normalitate rămîne cea mai bună estimare **liniară** Durbin și Koopman (2012)
- Pornirea: a_1, P_1; pentru o stare nestaționară folosim o pornire **difuză** (P_1 foarte mare: nu știm nimic)

Cei doi pași în formule

- **Actualizarea** (cînd y_t este observat)
  - eroarea de predicție $v_t = y_t - Z_t a_t$, cu varianța $F_t = Z_t P_t Z_t' + H$
  - **cîștigul Kalman** $K_t = P_t Z_t' F_t^{-1}$
  - $a_{t|t} = a_t + K_t v_t, \quad P_{t|t} = P_t - K_t Z_t P_t$
- **Predicția**
  - $a_{t+1} = T a_{t|t}, \quad P_{t+1} = T P_{t|t} T' + RQR'$
- **Local level**: $F_t = P_t + \sigma_\varepsilon^2, \quad K_t = P_t/(P_t + \sigma_\varepsilon^2)$
  - $a_{t+1} = a_t + K_t(y_t - a_t), \quad P_{t+1} = P_t(1 - K_t) + \sigma_\eta^2$
- Lipsește y_t: sărim peste actualizare ($a_{t|t} = a_t$, $P_{t|t} = P_t$) și facem predicția

Cîștigul Kalman

- Local level: $K_t = \dfrac{P_t}{P_t + \sigma_\varepsilon^2}$ este ponderea noii observații, între 0 și 1
  - $a_{t|t} = (1 - K_t)\, a_t + K_t\, y_t$: o medie ponderată a predicției și a observației
- Două incertitudini concurează
  - măsurători zgomotoase (σ_ε^2 mare): K_t mic, avem încredere în model
  - stare incertă (P_t mare, de exemplu la început sau după valori lipsă): K_t mare, avem încredere în date
- Varianța scade întotdeauna după o observație: $P_{t|t} = (1 - K_t)P_t \leq P_t$
  - și crește cu σ_η^2 în pasul de predicție: cele două forțe se echilibrează într-o stare de echilibru
- Aceeași formulă ca la ponderarea a două estimări independente după precizia lor, $1/P_t$ și $1/\sigma_\varepsilon^2$

Exemplu rezolvat: trei perioade de mînă (1/2)

- Local level cu $\sigma_\varepsilon^2 = 4$, $\sigma_\eta^2 = 1$ ($q = 0{,}25$); a priori $a_1 = 10$, $P_1 = 4$; datele $y = (12, 11, 14)$
  - $t = 1$: $F_1 = 4 + 4 = 8$, $K_1 = 4/8 = 0{,}5$, $v_1 = 12 - 10 = 2$
  - $a_{1|1} = 10 + 0{,}5 \cdot 2 = 11$, $P_{1|1} = 4(1 - 0{,}5) = 2$; predicția $a_2 = 11$, $P_2 = 2 + 1 = 3$
- $t = 2$: $F_2 = 3 + 4 = 7$, $K_2 = 3/7 = 0{,}429$, $v_2 = 11 - 11 = 0$
  - nicio surpriză: nivelul rămîne $a_{2|2} = 11$, dar incertitudinea scade la $P_{2|2} = 3 \cdot 4/7 = 1{,}71$
  - predicția $a_3 = 11$, $P_3 = 1{,}71 + 1 = 2{,}71$
- Cîștigul scade de la 0,5 la 0,429: filtrul învață despre nivel și se bazează mai puțin pe fiecare observație nouă

Exemplu rezolvat: trei perioade de mînă (2/2)

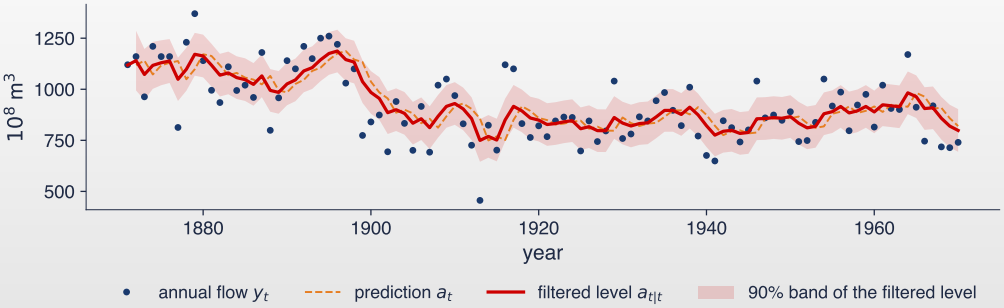
t	y_t	a_t	P_t	F_t	K_t	v_t	$a_{t\|t}$	$P_{t\|t}$
1	12	10,00	4,00	8,00	0,500	2	11,00	2,00
2	11	11,00	3,00	7,00	0,429	0	11,00	1,71
3	14	11,00	2,71	6,71	0,404	3	12,21	1,62

- $t = 3$: $K_3 = 2{,}71/6{,}71 = 0{,}404$, $v_3 = 14 - 11 = 3$, $a_{3|3} = 11 + 0{,}404 \cdot 3 = 12{,}21$
  - prognoza pentru $t = 4$: $a_4 = 12{,}21$, cu $P_4 = 2{,}62$; prognoza lui y_4 are varianța $P_4 + \sigma_\varepsilon^2$
- Cîștigul continuă să scadă spre starea de echilibru $\bar{K} = 0{,}390$ ($\bar{P} = 2{,}56$, slide-ul următor)
  - surpriza de 3 mută nivelul doar cu $0{,}404 \cdot 3$: o parte din ea este tratată ca zgomot

Starea de echilibru și netezirea exponențială

- Pentru modelul local level, P_t converge la soluția ecuației $\bar{P} = \bar{P}(1 - \bar{K}) + \sigma_\eta^2$, cu $\bar{K} = \bar{P}/(\bar{P} + \sigma_\varepsilon^2)$
  - soluția: $\bar{P} = \sigma_\varepsilon^2 \dfrac{q + \sqrt{q^2 + 4q}}{2}, \quad \bar{K} = \dfrac{\bar{P}}{\bar{P} + \sigma_\varepsilon^2}$
  - exemplu: $q = 0{,}25$ dă $\bar{P}/\sigma_\varepsilon^2 = (0{,}25 + \sqrt{1{,}0625})/2 = 2{,}56/4$ și $\bar{K} = 0{,}390$
- În starea de echilibru: $a_{t+1} = a_t + \bar{K}(y_t - a_t) = \bar{K} y_t + (1 - \bar{K}) a_t$
  - aceasta este SES cu $\alpha = \bar{K}$: netezirea exponențială este filtrul Kalman al unui model local level Muth (1960)
- Relația inversă: o pondere SES α corespunde lui $q = \alpha^2/(1 - \alpha)$
  - versiunea în spațiul stărilor adaugă ce îi lipsește SES: o verosimilitate pentru q, intervale de prognoză, valori lipsă

Nilul: filtrul Kalman pentru modelul local level



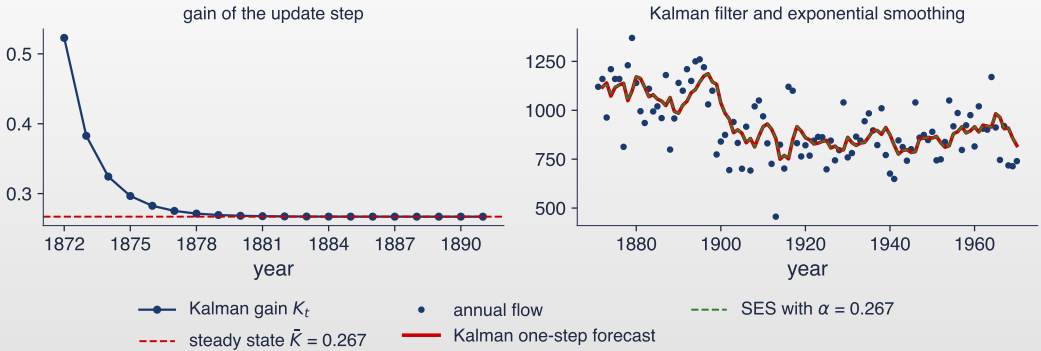
- Debitul anual la Aswan, 1871–1970 (10^8 m^3, statsmodels); variațele prin verosimilitate maximă, cu pornire difuză: $\hat{\sigma}^2_\varepsilon = 15100$, $\hat{\sigma}^2_\eta = 1468$, $\hat{q} = 0{,}097$, estimările din Durbin și Koopman (2012)

TSA_ch10_kalman_filter

Interpretarea filtrului pentru Nil

- Cea mai mare parte a mișcării de la un an la altul este zgomot: $\hat{q} = 0{,}097$, deci fiecare debit mută nivelul cu aproximativ un sfert din surpriză ($\bar{K} = 0{,}267$)
  - `statsmodels UnobservedComponents('llevel')` dă 15078 și 1479: același model, o pornire puțin diferită
- 1899: debitul este 774, nivelul prezis 1133; surpriza $v = -359$ coboară nivelul doar la 1037
  - filtrul are nevoie de mai mulți ani slabi pentru a accepta noul nivel (834 în 1905): primul baraj de la Aswan a fost finalizat în 1902
- În 1970 nivelul este 798, cu eroarea standard 63, mult sub media eșantionului, 919

Convergența cîștigului Kalman și echivalența cu SES



⊡ Stînga: K_t al filtrului pentru Nil; dreapta: prognozele Kalman la un pas a_t și SES cu $\alpha = \bar{K}$, pornită de la prima observație

TSA_ch10_kalman_filter

Interpretarea cîștigului

- K_t pornește de la 0,523 (după pornirea difuză), 0,297 în anul 5 și se află la mai puțin de 0,001 de $\bar{K} = 0{,}267$ începînd din anul 11
  - prognozele diferă cu 0,24 în anul 5 și cu mai puțin de 0,02 după 20 de ani
- SES estimată direct prin cele mai mici pătrate (Capitolul 0) dă $\hat{\alpha} = 0{,}246$, adică $q = \alpha^2/(1-\alpha) = 0{,}080$
  - aproape de răspunsul verosimilității: două criterii, un singur model
- Perspectiva spațiului stărilor explică SES: α este mare cînd nivelul se mișcă mult în raport cu zgomotul

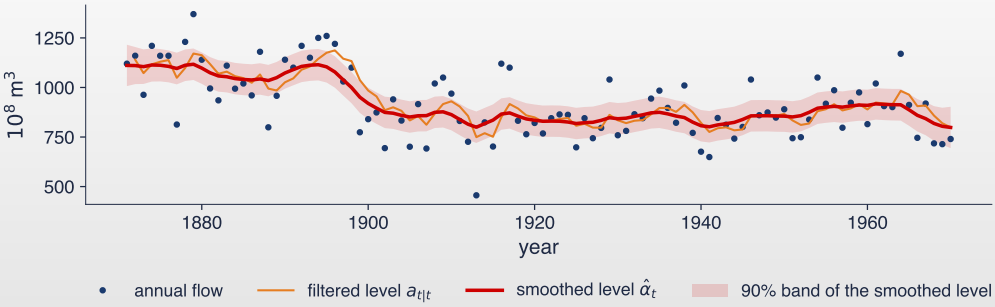
Recapitulare: filtrul Kalman

- Actualizarea: $v_t = y_t - Z_t a_t$, $F_t = Z_t P_t Z_t' + H$, $K_t = P_t Z_t' F_t^{-1}$, $a_{t|t} = a_t + K_t v_t$
- Predicția: $a_{t+1} = T a_{t|t}$, $P_{t+1} = T P_{t|t} T' + RQR'$
- Cîștigul cîntărește datele în raport cu modelul; se stabilizează într-o stare de echilibru
- Local level în starea de echilibru = SES cu $\alpha = \bar{K}$; Nilul: $\bar{K} = 0{,}267$

Netezirea: folosim tot eșantionul

- **Filtrarea** folosește Y_t (trecutul și prezentul): estimarea în timp real
  - **netezirea** folosește Y_n (tot eșantionul): $\hat{\alpha}_t = E(\alpha_t \mid Y_n)$, cu varianța $V_t \leq P_{t|t}$
- Netezitorul **Rauch–Tung–Striebel** Rauch, Tung și Striebel (1965): o trecere înapoi după filtru, de la $t = n - 1$ la 1
  - n: volumul eșantionului; J_t: cîștigul netezitorului, ponderea revizuirii care vine din viitor
  - $J_t = P_{t|t} T' P_{t+1}^{-1}, \quad \hat{\alpha}_t = a_{t|t} + J_t(\hat{\alpha}_{t+1} - a_{t+1})$
  - $V_t = P_{t|t} + J_t(V_{t+1} - P_{t+1})J_t'$; la $t = n$ estimarea netezită și cea filtrată coincid
- Utilizare: starea filtrată pentru decizii în timp real și prognoză; starea netezită pentru istorie (datarea rupturilor, deviația PIB din trecut)

Nilul: nivelul filtrat și nivelul netezit



- Nivelul filtrat $a_{t|t}$ și nivelul netezit $\hat{\alpha}_t$, cu banda de 90%; aceleași varianțe de verosimilitate maximă

TSA_ch10_smoothing_likelihood

Interpretarea nivelului netezit

- Nivelul netezit reacționează la scăderea din 1898–1899 **înainte** ca ea să apară în date: în 1897 este deja 1038, față de 1145 filtrat
  - folosește informație din viitor: util pentru istorie, imposibil în timp real
- În 1900: netezit 920, filtrat 985; nivelul netezit se adaptează mai repede, pentru că vede anii slabi de după 1900
  - eroarea standard în 1920: 48 netezit, față de 63 filtrat
- Traiectoria netezită arată o treaptă în jurul anului 1899 mai clar decît orice medie mobilă din Capitolul 0

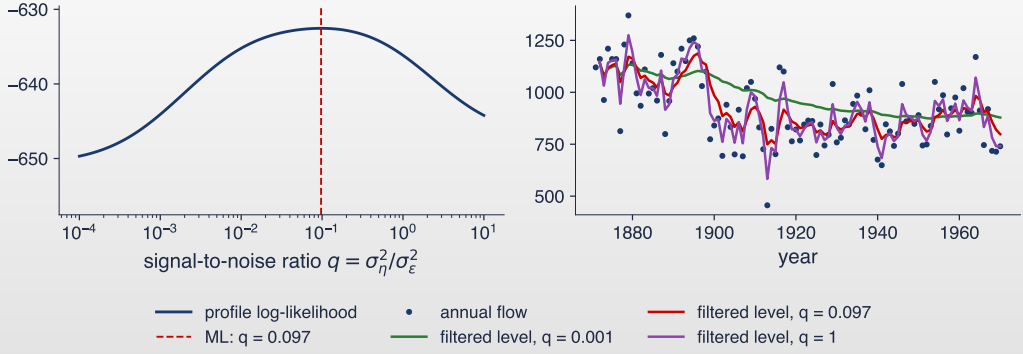
Verosimilitatea: descompunerea erorilor de predicție

- Densitatea comună se descompune în densități condiționate la un pas: $p(y_1, \ldots, y_n) = \prod_t p(y_t \mid Y_{t-1})$
  - cu erori gaussiene, $y_t \mid Y_{t-1} \sim N(Z_t a_t, F_t)$: filtrul dă media și varianța
- **Descompunerea erorilor de predicție**
  - $\log L(\theta) = -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\left(\log F_t + \frac{v_t^2}{F_t}\right)$
  - θ: parametrii (variațele modelului); v_t, F_t: erorile de predicție și variațele lor, date de filtru
  - o rulare a filtrului dă $\log L$ pentru o valoare a lui θ; un optimizator numeric caută după θ
- Pornirea difuză: primii d termeni (aici $d = 1$ pentru nivel) sînt omiși, deoarece acolo F_t este uriaș Durbin și Koopman (2012)
- Aceeași idee ca verosimilitatea ARMA exactă din Capitolul 2, acum pentru orice model în spațiul stărilor

Verosimilitatea maximă în practică

- Optimizăm după $\log \sigma^2$ (variațele rămîn pozitive); mai multe valori de pornire, deoarece suprafața poate fi plată
  - o variață estimată la zero este frecventă și are sens: acea componentă este deterministă
- **Concentrarea**: pentru local level scriem $\sigma_\eta^2 = q\sigma_\varepsilon^2$; pentru q fixat, $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{n-1}\sum_t v_t^2/F_t^*$ are formă închisă, cu v_t, F_t^* din filtrul rulat cu $\sigma_\varepsilon^2 = 1$, $\sigma_\eta^2 = q$
  - log-verosimilitatea profil devine atunci o funcție doar de q (graficul următor)
- Erorile standard din hessiana numerică; alegerea modelului după AIC și BIC; teste pe erorile de predicție standardizate $e_t = v_t/\sqrt{F_t}$
  - `statsmodels`: `UnobservedComponents`, `SARIMAX`, `DynamicFactor` folosesc toate acest mecanism

Verosimilitatea profil și alegerea lui q



⊡ Stînga: log-verosimilitatea profil a modelului local level pentru Nil, în funcție de q (scară logaritmică); dreapta: nivelurile filtrate pentru $q = 0{,}001$, valoarea ML și $q = 1$

TSA_ch10_smoothing_likelihood

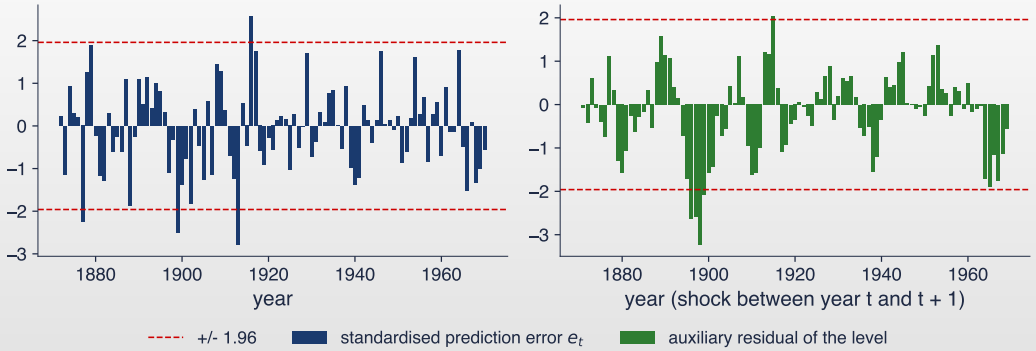
Interpretarea verosimilității profil

- Un maxim clar la $\hat{q} = 0{,}097$, cu $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = 15100$ din forma închisă
  - statistica raportului de verosimilitate față de $q = 0{,}001$ (un nivel aproape constant): 23,1; față de $q = 1$: 7,2
- q mic: nivelul este aproape plat și nu surprinde scăderea de după 1899; q mare: nivelul urmărește fiecare viitură
  - verosimilitatea alege compromisul care prezice cel mai bine la un pas
- Alegerea lui q este echivalentă cu alegerea ponderii SES α din Capitolul 0, acum cu un criteriu statistic

Diagnosticare

- Dacă modelul este corect, erorile de predicție standardizate $e_t = v_t/\sqrt{F_t}$ sînt i.i.d. $N(0,1)$
  - verificările din Capitolele 1–2: ACF și testul Ljung–Box (independență), Jarque–Bera (normalitate), graficul în timp (valori extreme)
- **Reziduurile auxiliare** Durbin și Koopman (2012): perturbațiile netezite $\hat{\varepsilon}_t$ și $\hat{\eta}_t$, standardizate
  - un $\hat{\varepsilon}_t$ mare: o **valoare extremă** într-o singură observație
  - un $\hat{\eta}_t$ mare: o **ruptură** în nivel, o deplasare permanentă
- Se calculează printr-o recursie înapoi (netezitorul perturbațiilor) după filtru

Diagnosticarea modelului pentru Nil



- Stînga: erorile de predicție la un pas standardizate e_t; dreapta: reziduul auxiliar standardizat al nivelului, $\hat{\eta}_t$ (un șoc între anul t și $t+1$); linie punctată: $\pm 1{,}96$

TSA_ch10_smoothing_likelihood

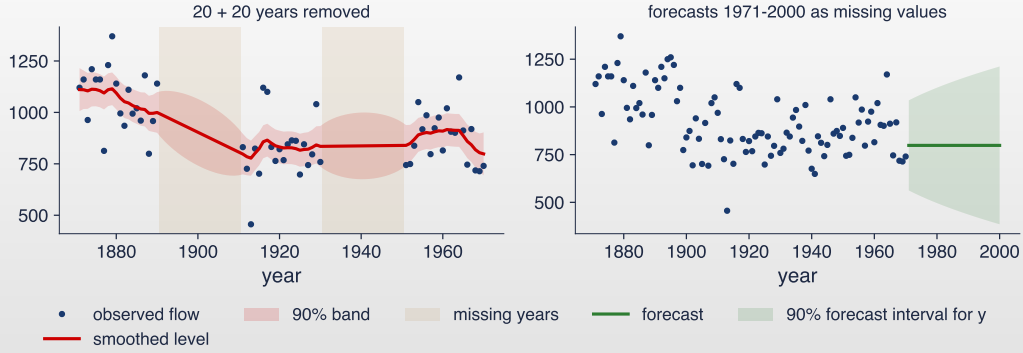
Interpretarea diagnosticării

- Erorile de predicție: Ljung–Box $Q(10) = 13{,}2$ ($p = 0{,}21$), Jarque–Bera 0,05 ($p = 0{,}98$); 4 din 99 în afara intervalului $\pm 1{,}96$
  - nicio dovadă împotriva modelului în erorile la un pas
- Reziduul nivelului are minimul în 1898 ($-3{,}23$): deplasarea nivelului între 1898 și 1899
  - reziduul observației are minimul în 1913 ($-3{,}04$): un singur an foarte secetos, o valoare extremă
- Aceeași ruptură ca în Capitolul 8 (memoria lungă aparentă a Nilului), acum localizată de model însuși

Valori lipsă și prognoză

- Un y_t lipsă: fără actualizare; $a_{t+1} = Ta_t$, $P_{t+1} = TP_t T' + RQR'$
  - verosimilitatea omite pur și simplu acel termen; nu interpolăm nimic de mînă
- Prognoza la h pași = tratarea lui $y_{n+1}, \ldots, y_{n+h}$ ca valori lipsă
  - local level: $\hat{y}_{n+h} = a_{n+1}$ pentru orice h, cu varianța $P_{n+1} + (h-1)\sigma_\eta^2 + \sigma_\varepsilon^2$
- Utilizări: date neregulate (sărbători), serii care încep la date diferite, frecvențe mixte, marginea neregulată a unui nowcast
  - netezitorul umple golurile cu $\hat{\alpha}_t$ și cu eroarea standard corespunzătoare

Ani lipsă și prognoze pentru Nil



Stînga: anii 1891–1910 și 1931–1950 eliminați (experimentul din Durbin și Koopman (2012)), nivelul netezit cu banda de 90%; dreapta: prognozele pentru 1971–2000, cu intervale de 90% pentru y

TSA_ch10_missing_data

Interpretarea valorilor lipsă

- În interiorul unui gol nivelul netezit este o dreaptă între cele două margini; eroarea standard crește la 99 în 1900, față de 48 cu toate datele
  - banda se lărgește spre mijlocul golului și se îngustează lîngă anii observați
- Prognozele sînt constante, la 798: un nivel de tip mers aleator nu are o direcție previzibilă
  - eroarea standard a lui y: 144 la un an, 251 după 30 de ani
- Același cod tratează valorile lipsă, prognozele și estimarea: unul dintre principalele avantaje practice ale modelelor în spațiul stărilor

Recapitulare: netezire, verosimilitate și valori lipsă

- Filtrat: timp real; netezit (RTS): tot eșantionul, variantă mai mică
- $\log L = -\frac{1}{2}\sum(\log 2\pi + \log F_t + v_t^2/F_t)$, maximizată numeric
- Diagnosticare pe e_t; reziduurile auxiliare găsesc valori extreme și rupturi (Nilul, 1898–1899)
- Valori lipsă și prognoze: sărim peste pasul de actualizare

Modele cu componente neobservate

- Modelul **structural de serii de timp** sau **cu componente neobservate** (UC) Harvey (1989):
  $y_t = \mu_t + \psi_t + \gamma_t + \varepsilon_t$
  - trend μ_t (local level sau local linear trend), ciclu ψ_t, sezonalitate γ_t, componenta neregulată ε_t
  - descompunerea din Capitolul 0, dar fiecare componentă este un proces stochastic cu propria varianță
- **Ciclul**: un AR(2) staționar $\psi_t = \phi_1 \psi_{t-1} + \phi_2 \psi_{t-2} + \kappa_t$ sau un ciclu stochastic amortizat cu perioada $2\pi/\lambda_c$
  - ϕ_1, ϕ_2: coeficienții AR ai ciclului; κ_t: șocul ciclului; λ_c: frecvența ciclului, în radiani
  - pentru logaritmul PIB, ψ_t este **deviația PIB** (output gap): abaterea procentuală a producției de la trend (potențial)
- În Python: `UnobservedComponents(y, level='smooth trend', autoregressive=2)`; toată starea se estimează cu filtrul și netezitorul Kalman

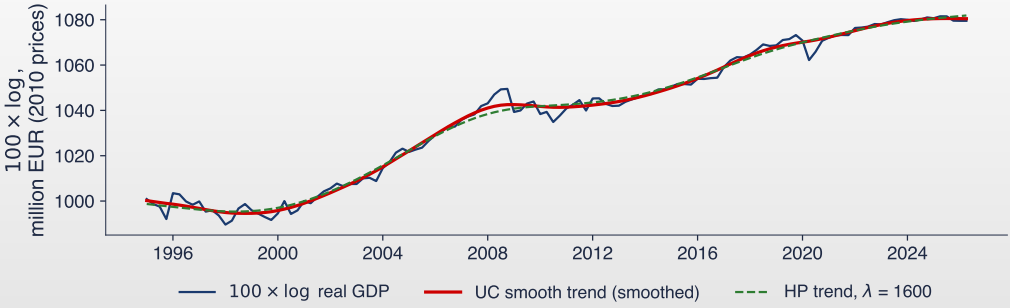
Filtrul HP este un netezitor în spațiul stărilor

- Hodrick și Prescott (1997): trendul τ_t minimizează $\sum_t (y_t - \tau_t)^2 + \lambda \sum_t (\Delta^2 \tau_t)^2$; $\lambda = 1600$ pentru date trimestriale
  - $\Delta^2 \tau_t = \tau_t - 2\tau_{t-1} + \tau_{t-2}$: variația pantei trendului; $\lambda \geq 0$: parametrul de netezire
  - λ mare: un trend liniar; $\lambda = 0$: trendul este chiar seria
- Este exact trendul **netezit** al unui model UC: trend neted ($\Delta^2 \mu_{t+1} = \zeta_{t-1}$) plus zgomot alb, cu $\lambda = \sigma_\varepsilon^2 / \sigma_\zeta^2$
  Harvey și Jaeger (1993)
  - filtrul HP impune raportul semnal–zgomot și o deviație de tip zgomot alb; modelul UC le estimează pe amîndouă
- Fiind un netezitor, HP folosește date viitoare: ultimele lui valori se revizuiesc pe măsură ce sosesc trimestre noi

Hamilton (2018): argumentele împotriva filtrului HP

- Hamilton (2018) enumeră trei probleme
  - deviația HP a unui mers aleator are cicluri care nu există în date: dinamică aparentă
  - sfîrșitul eșantionului este tratat altfel decît mijlocul: revizuiri mari, deviații înșelătoare în timp real
  - $\lambda = 1600$ este o convenție, departe de valoarea pe care ar alege-o o verosimilitate
- Alternativa lui, **filtrul de regresie**: OLS a lui y_{t+h} pe $1, y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3}$, cu $h = 8$ trimestre
  - ciclul este reziduul: ceea ce nu putea fi prezis cu doi ani înainte; unilateral prin construcție
- Nicio metodă nu dă valoarea adevărată: comparăm modelul UC, HP și filtrul Hamilton pe PIB-ul României

PIB-ul României: trendul



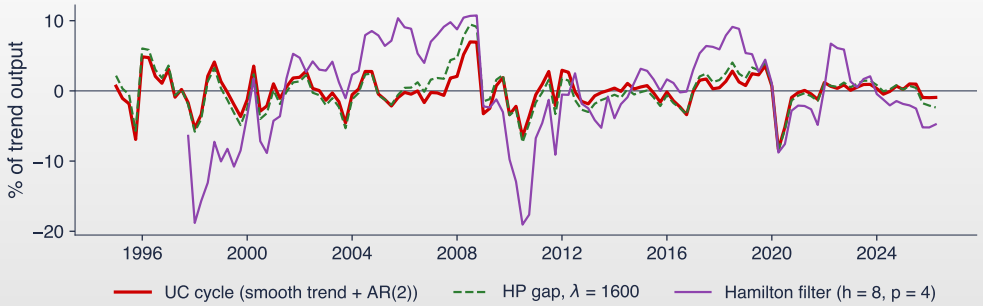
- 100 × log din PIB-ul real, trimestrial, ajustat sezonier și cu numărul de zile lucrătoare, volume înlănțuite (Eurostat namq_10_gdp), T1 1995–T2 2026 ($T = 126$); modelul UC: trend neted plus ciclu AR(2); HP cu $\lambda = 1600$

TSA_ch10_trend_cycle

Interpretarea trendului

- Creștere medie de 2,5% pe an, cu un început lent (recesiunea din 1997–1999), un boom pînă în 2008, o stagnare și o revenire după 2013
  - cele două trenduri sînt aproape identice: diferența dintre metode se află în deviație, nu în trend
- Estimările UC: $\hat{\sigma}^2_\zeta = 0{,}078$ (panta trendului), ciclul AR(2) cu $\hat{\phi}_1 = 0{,}61$, $\hat{\phi}_2 = -0{,}13$, $\hat{\sigma}^2_\kappa = 5{,}27$; varianța componentei neregulate este estimată la zero
  - raportul variațelor șocurilor, ciclu față de panta trendului, $\hat{\sigma}^2_\kappa / \hat{\sigma}^2_\zeta = 68$, este mult sub valoarea 1600 ($\sigma^2_\varepsilon / \sigma^2_\zeta$) impusă de HP: un trend mai flexibil
- Un trend flexibil absoarbe o parte din boom: deviația UC va fi mai mică decît deviația HP

Deviația PIB a României: trei metode



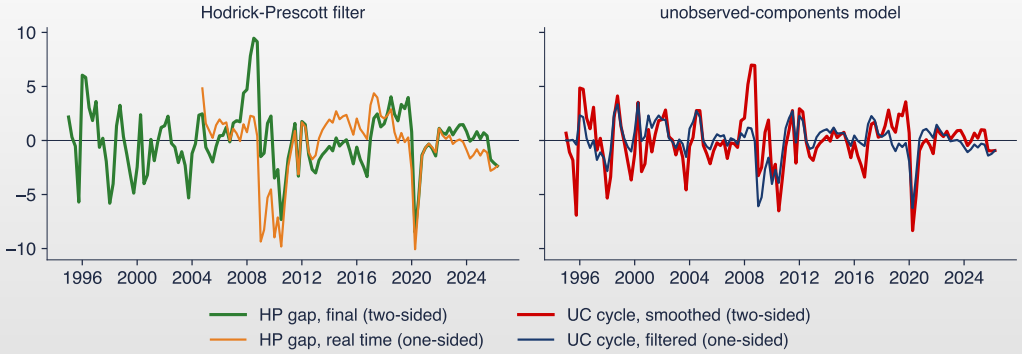
- Deviația în % din trend: ciclul UC (netezit), deviația HP ($\lambda = 1600$) și filtrul Hamilton ($h = 8$, patru laguri), primele 11 trimestre se pierd

TSA_ch10_trend_cycle

Interpretarea deviațiilor PIB

- Toate cele trei metode surprind supraîncălzirea dinainte de 2008 (maxime: UC 7,0% în T3 2008, HP 9,5%, Hamilton 10,7%) și pandemia din 2020 (UC $-8{,}3\%$, HP $-8{,}5\%$)
  - corelații: UC–HP 0,94, UC–Hamilton 0,57, HP–Hamilton 0,69
- Abaterile standard: UC 2,4, HP 2,9, Hamilton 6,5: deviația Hamilton conține și toate surprizele din doi ani
  - cei patru coeficienți ai regresiei au suma 0,97: PIB-ul este aproape de un mers aleator cu derivă
- Ultima deviație (T2 2026): UC $-0{,}9\%$, HP $-2{,}4\%$, Hamilton $-4{,}8\%$: semnul coincide, mărimea nu

Deviația PIB în timp real și pe întregul eșantion



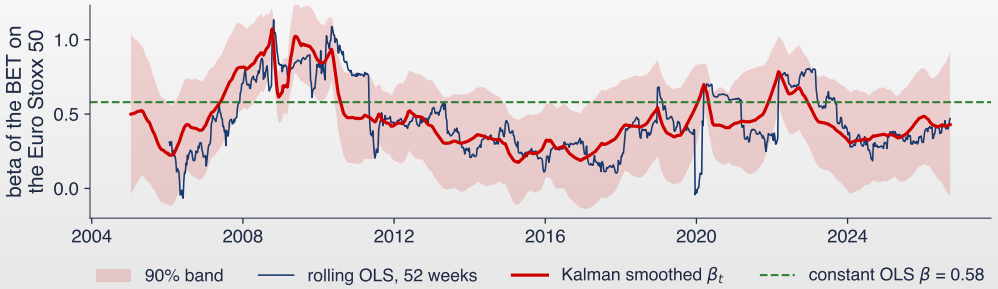
- Stînga: deviația HP calculată cu toate datele (bilaterală) și ultima valoare a deviației HP calculate cu datele disponibile la fiecare dată (unilaterală, din 2004); dreapta: ciclul UC, filtrat și netezit

TSA_ch10_trend_cycle

Interpretarea revizuirilor

- În T3 2008 deviația HP în timp real era 2,2%; retrospectiv este 9,5%: supraîncălzirea era invizibilă în timp real
  - modelul UC arată aceeași problemă: filtrat 1,1%, netezit 7,0%
- Revizuirea medie pătratică din 2004: HP 2,8 puncte, UC 1,8 puncte; corelația timp real–final: HP 0,57, UC 0,65
  - problema capătului de eșantion din Hamilton (2018); modelul UC își raportează cel puțin propria incertitudine
- Pentru politica economică în timp real folosiți estimarea filtrată (unilaterală) și eroarea ei standard, niciodată ultimul punct al unui filtru bilateral

Un beta variabil în timp: BET și zona euro



- Randamentele logaritmice săptămînale ale BET pe Euro Stoxx 50 (EODHD), 2005–2026 ($T = 1\,126$ de săptămîni)
- Beta de tip mers aleator prin verosimilitate maximă, netezit Kalman, cu bandă de 90%; OLS pe ferestre mobile de 52 de săptămîni; OLS constant

TSA_ch10_tvp_regression

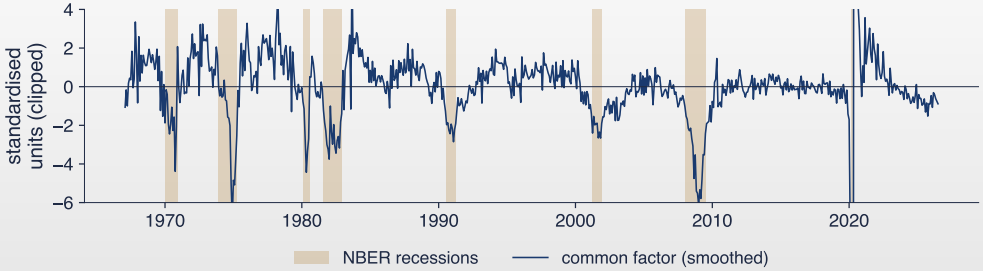
Interpretarea coeficientului beta variabil

- Beta OLS constant este 0,58; beta netezit atinge 1,07 (octombrie 2008) și coboară la 0,17 (aprilie 2015)
  - în criza din 2008 piața românească s-a mișcat aproape unu la unu cu zona euro; ulterior s-a decuplat
- Raportul de verosimilitate față de un beta constant: 46,1 (o restricție, o variantă la limită): dovezi puternice de variație
  - abaterea standard săptămînală a șocurilor lui beta 0,059; ultimul beta 0,43, cu eroarea standard 0,29
- Estimarea pe fereastră mobilă se modifică brusc cînd o singură săptămînă extremă intră sau iese din fereastră; beta Kalman se mișcă doar atît cît permite verosimilitatea

Modele cu factori dinamici și nowcasting

- **Model cu factori dinamici**: $y_{it} = \lambda_i f_t + u_{it}, \quad f_t = \phi_1 f_{t-1} + \phi_2 f_{t-2} + \eta_t$
  - multe serii $y_{1t}, \ldots, y_{Nt}$ conduse de un factor comun neobservat f_t (starea), cu încărcările λ_i
  - u_{it}: partea seriei i neexplicată de factor; ϕ_1, ϕ_2: coeficienții AR ai factorului
  - Stock și Watson (1989): un indice coincident al activității din SUA, din patru indicatori lunari
- **Nowcasting** Giannone, Reichlin și Small (2008): estimăm trimestrul curent înainte ca PIB-ul să fie publicat
  - datele lunare sosesc la date diferite: ultimele luni ale unor serii lipsesc (**marginea neregulată**)
  - filtrul Kalman le tratează ca valori lipsă și actualizează factorul cu ce a sosit deja
- Băncile centrale folosesc astfel de modele pentru nowcasting-ul PIB; `statsmodels` are `DynamicFactor` și `DynamicFactorMQ`

Un factor comun al activității din SUA



- Creșterea lunară a producției industriale, a numărului de salariați, a venitului real fără transferuri și a vînzărilor reale din industrie și comerț (FRED), standardizate
- Un factor AR(2) estimat pe 1967–2019 și rulat pînă în iulie 2026; ultimele două luni ale venitului și vînzărilor sînt tratate ca lipsă

TSA_ch10_dynamic_factor

Interpretarea factorului comun

- Încărcări: salariați 0,59, producția industrială 0,42, vînzări 0,29, venit 0,23; factorul AR(2) cu $\hat{\phi}_1 = 0{,}42$, $\hat{\phi}_2 = 0{,}41$
  - corelația cu media simplă a celor patru serii: 0,86
- Media factorului: $-3{,}5$ în lunile de recesiune NBER, 0,4 în expansiuni; negativ în 99% din lunile de recesiune
  - aprilie 2020: -74 unități standard, în afara scalei graficului
- Ultima valoare (iulie 2026): $-0{,}9$, calculată deși două dintre cele patru serii nu sînt încă disponibile

Recapitulare: trend, ciclu și factori comuni

- Modelele UC: trend + ciclu + sezonalitate + componentă neregulată, fiecare cu varianța ei
- HP = netezitorul unui model UC cu λ impus; Hamilton (2018): cicluri aparente și revizuiri la capătul eșantionului
- Deviația PIB a României: metodele coincid ca semn, nu ca mărime; deviațiile în timp real se revizuiesc puternic
- Regresia TVP și factorii dinamici sînt și ei modele în spațiul stărilor

Hamilton (1989) și datarea recesiunilor



NBER, Cambridge (Massachusetts), al cărui comitet datează recesiunile din SUA

Foto: Astrophobe (2022); CC BY-SA 4.0; Wikimedia Commons

- National Bureau of Economic Research (NBER) datează recesiunile din SUA printr-un comitet, la cîteva luni după eveniment
  - o recesiune este un regim: PIB-ul se comportă altfel cît timp durează
- Hamilton (1989): media creșterii PIB depinde de un regim neobservat $S_t \in \{1, 2\}$, care urmează un lanț Markov
  - datele ne spun apoi probabilitatea unei recesiuni în fiecare trimestru, fără comitet
- Starea este acum **discretă**; filtrul Kalman este înlocuit de filtrul Hamilton

Modelul Markov switching

- **Medie cu schimbare de regim**: $y_t = \mu_{S_t} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2_{S_t}), \quad S_t \in \{1, \ldots, k\}$
  - **Lanțul Markov**: $p_{ij} = \Pr(S_t = j \mid S_{t-1} = i)$, constante în timp; rîndurile matricei de tranziție însumează 1
- MS-AR(4) al lui Hamilton: $y_t - \mu_{S_t} = \sum_{j=1}^{4} \phi_j (y_{t-j} - \mu_{S_{t-j}}) + \varepsilon_t$
  - dinamica AR rămîne aceeași; doar media se schimbă
- Variante: varianță cu schimbare de regim (piețe calme și agitate), coeficienți AR cu schimbare de regim, $k = 3$ regimuri
  - în Python: `MarkovRegression`, `MarkovAutoregression` (`statsmodels`)
- Un model neliniar: prognoza depinde de probabilitatea fiecărui regim

Matricea de tranziție, durate și probabilități ergodice

- Două regimuri: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & 1-p_{11} \\ 1-p_{22} & p_{22} \end{pmatrix}$
  - tranzițiile în h pași: $\mathbf{P}^h$
- **Durata așteptată** a regimului i: timpul petrecut acolo este geometric, $\Pr(D = d) = p_{ii}^{d-1}(1-p_{ii})$, deci $E(D) = 1/(1-p_{ii})$
  - $p_{11} = 0{,}75$: recesiunile durează în medie $1/0{,}25 = 4$ trimestre; $p_{22} = 0{,}95$: expansiunile durează 20 de trimestre
- Probabilitățile **ergodice** (pe termen lung): $\pi_1 = \dfrac{1-p_{22}}{2-p_{11}-p_{22}}$, fracțiunea de timp petrecută în regimul 1
  - exemplu: $\pi_1 = 0{,}05/0{,}30 = 1/6$: un trimestru din șase este trimestru de recesiune

Filtrul Hamilton

- Urmărim $\xi_{t|t} = \Pr(S_t = j \mid Y_t)$, **probabilitățile filtrate**, pentru fiecare regim j
  - **predicția**: $\Pr(S_t = j \mid Y_{t-1}) = \sum_i p_{ij} \Pr(S_{t-1} = i \mid Y_{t-1})$
  - **densitățile**: $f_j(y_t) = \varphi((y_t - \mu_j)/\sigma_j)/\sigma_j$, verosimilitatea lui y_t în fiecare regim
  - φ: densitatea distribuției Normale standard; μ_j, σ_j: media și abaterea standard a regimului j
  - **actualizarea** (Bayes): $\Pr(S_t = j \mid Y_t) = \dfrac{\Pr(S_t = j \mid Y_{t-1})\, f_j(y_t)}{\sum_i \Pr(S_t = i \mid Y_{t-1})\, f_i(y_t)}$
- Numitorul este $p(y_t \mid Y_{t-1})$: log-verosimilitatea este $\sum_t \log p(y_t \mid Y_{t-1})$, ca la filtrul Kalman
  - același ciclu predicție–actualizare, cu probabilități în locul mediilor și variațelor
- Pornirea: probabilitățile ergodice π_j

Probabilități netezite și estimare

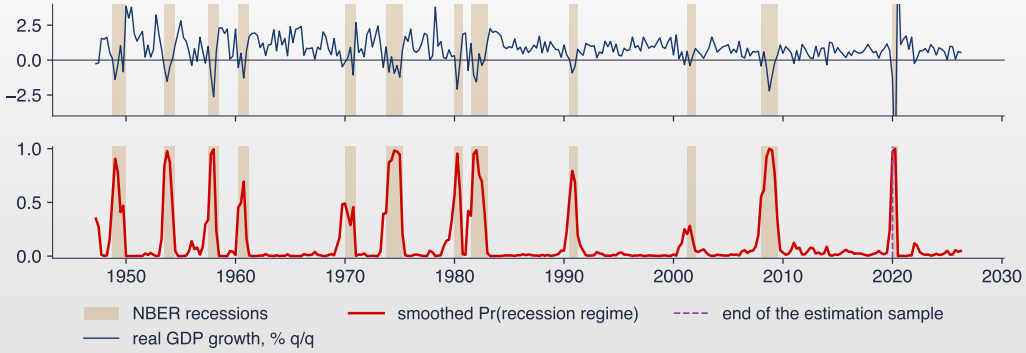
- **Probabilitățile netezite** $\Pr(S_t = j \mid Y_n)$: o trecere înapoi Kim (1994), analogul netezitorului RTS
  - folosite pentru datarea istorică a regimurilor; probabilitățile filtrate sînt ceea ce știa un prognozator la momentul t
- Estimarea: verosimilitate maximă prin optimizare numerică sau algoritmul EM Hamilton (1990)
  - EM: așteptarea (probabilitățile netezite pentru θ dat) și maximizarea (medii, variațe și numărători de tranziții ponderate), repetate
- Verosimilitatea are **mai multe maxime locale**: folosiți multe valori de pornire aleatoare și comparați soluțiile
  - schimbarea etichetelor: regimurile 1 și 2 își pot schimba locul; denumiți-le după medii sau variațe

Specificația lui Hamilton pe datele de azi

MS-AR(4), creșterea PIB real al SUA, T2 1951–T4 1984	Maximul A	Maximul B
media, regimul 1 / regimul 2 (% pe trimestru)	−0,14 / 1,32	−1,14 / 0,96
p_{11}, p_{22}	0,762; 0,892	0,128; 0,952
durata așteptată, regimul 1 / 2 (trimestre)	4,2 / 9,3	1,1 / 20,8
log-verosimilitatea	−189,47	−189,16
trimestre de recesiune NBER găsite (prob. netezită $> 0{,}5$)	94%	10%

- Maximul A este răspunsul lui Hamilton: un regim de recesiune de aproximativ patru trimestre, care se potrivește cu datările NBER
- Maximul B are o verosimilitate puțin mai mare, dar alt înțeles: trimestre izolate cu scăderi bruște
- O diferență de verosimilitate de −189,16 față de −189,47 nu poate decide; decid înțelesul economic și verificările de robustețe

Recesiunile din SUA din creșterea PIB



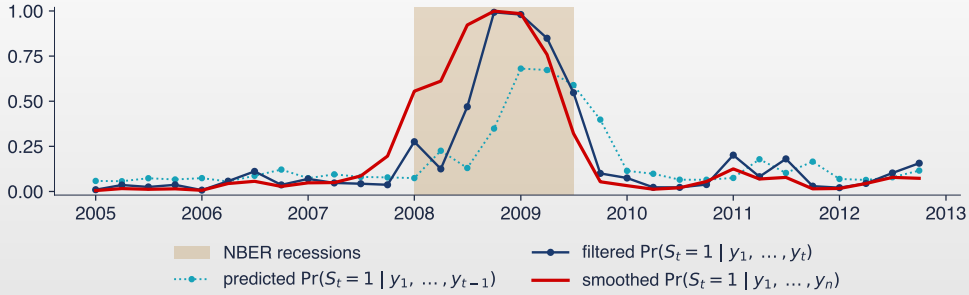
- Două regimuri cu medie variabilă și variață constantă, estimate pe T2 1947–T4 2019, eșantion cu 48 de trimestre de recesiune NBER (FRED GDPC1, USREC); probabilitățile de după 2019 sînt calculate cu aceiași parametri

TSA_ch10_markov_gdp

Interpretarea probabilităților de recesiune

- Mediile regimurilor: $-0{,}42\%$ (recesiune) și $0{,}97\%$ (expansiune) pe trimestru, $\hat{\sigma} = 0{,}79$; $\hat{p}_{11} = 0{,}685$, $\hat{p}_{22} = 0{,}949$
  - durate așteptate: 3,2 trimestre de recesiune, 19,7 trimestre de expansiune; ponderea ergodică a recesiunii 14%
- Concordanța cu NBER: 94% din trimestre; 62% din trimestrele de recesiune NBER detectate, 0% alarme false
  - modelul nu detectează recesiunile ușoare (2001), dar le detectează pe cele profunde
- T2 2020 ($-8{,}2\%$): probabilitatea 1,00, apoi revenire la expansiune; după 2021 probabilitatea nu depășește 0,12

Probabilități filtrate și netezite: 2008



- Probabilitatea prezisă, filtrată și netezită a regimului de recesiune, 2005–2012, același model ca în graficul anterior

TSA_ch10_markov_gdp

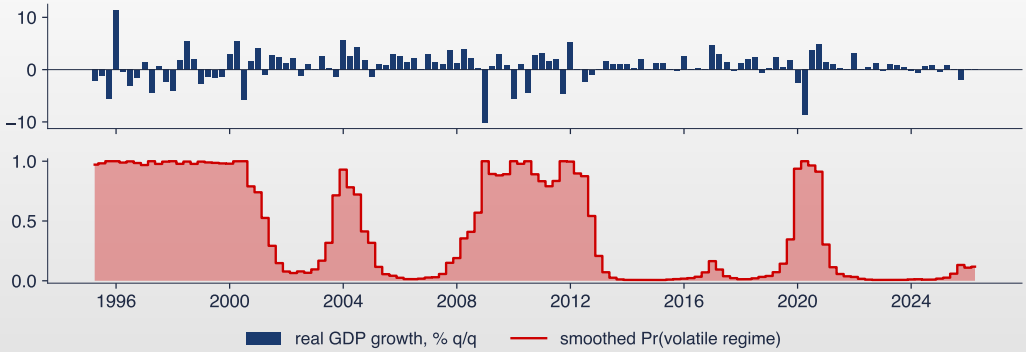
Interpretarea probabilităților în timp real

- Recesiunea NBER a început în T1 2008; probabilitatea netezită trece de 0,5 în T1 2008, cea filtrată abia în T4 2008
  - T1 2008: filtrată 0,28, netezită 0,56; T3 2008 (creștere −0,53%): filtrată 0,47, netezită 0,92
- Concordanța cu NBER folosind doar probabilitățile filtrate: 92% din trimestre, 54% din trimestrele de recesiune
  - datarea în timp real este mai grea: Chauvet și Piger (2008) compară metodele pe date în timp real
- Nu judecați niciodată capacitatea unui model în timp real după probabilitățile netezite: ele folosesc viitorul

Verificări: regimurile găsite de model

- **Variantă cu schimbare de regim** pe 1947–2019: regimurile devin volatilitate mare și volatilitate mică, nu recesiune și expansiune
  - abateri standard 1,20 și 0,44; durate de 45 și 39 de trimestre; trecerea la regimul calm în T3 1984
  - aceasta este „Marea Moderație" de la mijlocul anilor 1980; concordanța cu NBER scade la 60% (47% alarme false)
- **Includerea anului 2020** în estimare: un regim este doar trimestrul T2 2020 (media $-8{,}2\%$), celălalt durează 315 trimestre
  - o singură observație extremă poate forma singură un regim
- Lista de verificări: reprezentați probabilitățile alături de evenimente cunoscute; comparați mai multe valori de pornire și eșantioane; preferați specificația cu un înțeles economic clar

Regimuri ale creșterii PIB în România



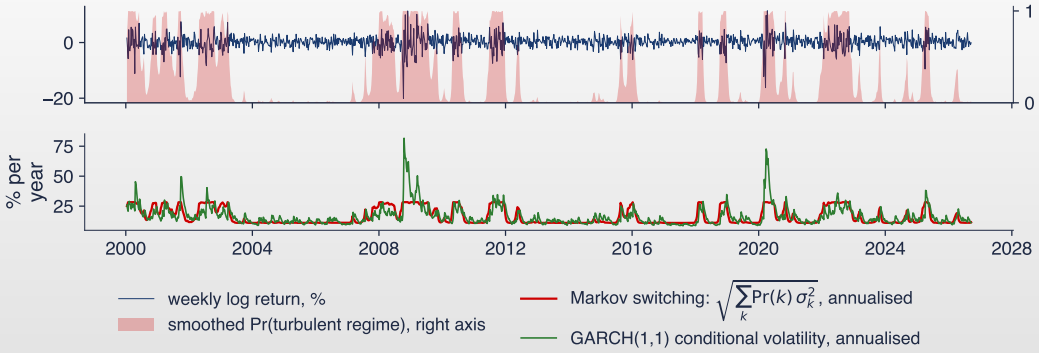
- Creșterea trimestrială a PIB-ului real al României (Eurostat), două regimuri cu medie și variață variabile; probabilitatea netezită a regimului volatil

TSA_ch10_markov_gdp

Interpretarea regimurilor din România

- Regimul stabil: media 1,03% pe trimestru, abaterea standard 1,3; regimul volatil: media 0,07%, abaterea standard 3,9
  - durate așteptate: 15,2 trimestre în regimul stabil, 11,2 trimestre în cel volatil; 40% din trimestre sînt volatile
- Episoade volatile: T2 1995–T2 2001 (tranziția și recesiunea din 1997–1999), T4 2003–T3 2004, T4 2008–T4 2012 (criza și austeritatea din 2010), T1 2020–T4 2020 (pandemia)
  - ultima probabilitate a regimului volatil: 0,12
- Cu 125 de trimestre un model doar cu medie variabilă este instabil; într-o economie emergentă regimurile de volatilitate și de creștere vin împreună

Piețe bursiere calme și agitate



Randamentele logaritmice săptămînale ale S&P 500, 2000–2026 (EODHD); două regimuri cu medie și variață variabile; jos: volatilitatea implicată de probabilitățile regimurilor comparată cu un GARCH(1,1) (Capitolul 5), ambele anualizate

TSA_ch10_volatility_regimes

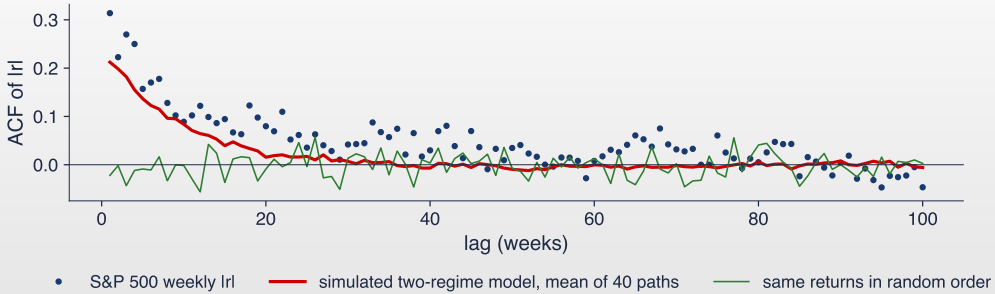
Interpretarea regimurilor de volatilitate

- Regimul calm: volatilitate de 11% pe an, media 0,32% pe săptămînă; agitat: 28% pe an, media $-0{,}39\%$ pe săptămînă
  - durate: 37 de săptămîni calme, 14 săptămîni agitate; agitat în 26% din săptămîni (ergodic 28%)
- Cei mai agitați ani: 2022 (90% din săptămîni), 2008 (79%), 2009 (69%)
  - corelația cu volatilitatea GARCH(1,1): 0,68; GARCH: $\hat{\alpha} = 0{,}26$, $\hat{\beta} = 0{,}70$
- Două perspective asupra aceluiași volatility clustering: GARCH modifică volatilitatea continuu, modelul cu regimuri trece brusc de la un nivel la altul

Regimuri, persistența GARCH și memoria lungă

- Lamoureux și Lastrapes (1990): schimbările nivelului variației fac un GARCH să pară aproape integrat ($\alpha + \beta \approx 1$)
  - estimările aproape IGARCH din Capitolul 5 pot reflecta regimuri, nu un singur proces foarte persistent
  - Hamilton și Susmel (1994): ARCH în interiorul regimurilor (SWARCH) reduce persistența
- Diebold și Inoue (2001): schimbările rare de regim produc o ACF care scade lent și $\hat{d} > 0$ (Capitolul 8, memoria lungă aparentă)
  - trei modele, un singur fapt: șocurile volatilității persistă; graficul următor simulează modelul de regimuri estimat, pentru a vedea cît explică doar regimurile

Schimbările de regim și memoria lungă aparentă



⊡ ACF a lui $|r_t|$ săptămînal pentru S&P 500; ACF medie a 40 de serii simulate din modelul cu două regimuri estimat (variață constantă în fiecare regim, fără GARCH); aceleași randamente în ordine aleatoare

TSA_ch10_volatility_regimes

Interpretarea regimurilor simulate

- Datele: ACF a lui $|r_t|$ 0,31 la lagul 1, 0,06 la 26 de săptămîni; modelul cu regimuri: 0,21 și 0,01; ordinea aleatoare: nimic
  - regimurile explică cea mai mare parte a volatility clustering-ului pe termen scurt, mai puțin din coada lungă a ACF
- Estimatorul Whittle local $\hat{d}$ pentru $|r_t|$: 0,32 în date, 0,29 (SD 0,06) în seriile simulate cu regimuri, $-0{,}05$ în ordine aleatoare
  - un GARCH(1,1) estimat pe seriile simulate dă în medie $\alpha + \beta = 0{,}91$ (15 serii), deși ele nu conțin GARCH
- Persistența și memoria lungă a volatilității sînt compatibile cu regimurile: comparați modelele după verosimilitate și prognoze, nu după o singură statistică

Recapitulare: modelele Markov switching

- $y_t = \mu_{S_t} + \varepsilon_t$, S_t un lanț Markov; durate $1/(1-p_{ii})$; ergodic $\pi_1 = (1-p_{22})/(2-p_{11}-p_{22})$
- Filtrul Hamilton: predicție cu $\mathbf{P}$, actualizare cu Bayes; netezitorul Kim pentru istorie
- PIB-ul SUA: modelul regăsește recesiunile NBER profunde; probabilitățile filtrate reacționează mai tîrziu
- Mai multe maxime, valorile extreme și rupturile de varianță pot schimba înțelesul unui „regim"
- Regimurile reproduc volatility clustering, persistența GARCH și memoria lungă aparentă

Contribuția posibilă a AI

- **Cod**: o primă versiune a unui filtru Kalman, a matricelor unui model nou, a unei estimări Markov switching cu multe valori de pornire
- **Explicații**: o a doua derivare a cîștigului, a stării de echilibru, a filtrului Hamilton
- **Explorare**: deviații PIB pentru multe țări din UE; regimuri pe multe piețe; un nowcast cu mulți indicatori
- Exemplu de prompt
  - `Write Python code that downloads Romanian quarterly real GDP from Eurostat (namq_10_gdp, Q.CLV10_MEUR.SCA.B1GQ.RO), fits UnobservedComponents with a smooth trend and an AR(2) cycle, compares the smoothed and the filtered cycle with the HP gap and with the Hamilton (2018) regression filter, and reports the revisions of the last eight quarters.`

Verificări necesare

- Simulați din parametri cunoscuți și verificați că acest cod îi regăsește (valorile pentru Nil din Durbin și Koopman (2012) sînt un test bun)
- Filtrat sau netezit? Afirmațiile despre timp real cer estimări filtrate; un răspuns AI care folosește `smoothed` pentru o „prognoză" este greșit
- Duratele: $1/(1-p_{ii})$, nu $p_{ii}/(1-p_{ii})$; verificați convenția matricei de tranziție (rînduri sau coloane) în bibliotecă
- Markov switching: mai multe valori de pornire, schimbarea etichetelor, valori extreme care formează singure un regim
- Filtrul HP la capătul eșantionului: nu interpretați ultima deviație ca o estimare în timp real
- Fiecare referință citată: trebuie să existe; verificați DOI-ul

Idei de reținut

- Forma în spațiul stărilor: o stare ascunsă α_t urmează un VAR(1) și este măsurată cu zgomot; ARMA, ETS, UC, TVP și modelele factoriale se scriu astfel
- Filtrul Kalman prezice și actualizează; cîștigul cîntărește datele în raport cu modelul; filtrul local level în starea de echilibru este SES
- Netezirea pentru istorie, filtrarea pentru timp real; verosimilitatea provine din erorile de predicție; valorile lipsă sînt ușor de tratat
- Deviațiile PIB depind de metodă și se revizuiesc puternic la capătul eșantionului
- Markov switching: probabilitățile regimurilor, durate $1/(1 - p_{ii})$; verificați ce înseamnă regimurile

Formule de reținut

Mărimea	**Formula**
Forma în spațiul stărilor	$y_t = Z_t\alpha_t + \varepsilon_t, \quad \alpha_{t+\mathbf{1}} = T\alpha_t + R\eta_t$
Actualizarea	$v_t = y_t - Z_t a_t, \quad F_t = Z_t P_t Z_t' + H, \quad K_t = P_t Z_t' F_t^{-\mathbf{1}}, \quad a_{t\mid t} = a_t + K_t v_t$
Predicția	$a_{t+\mathbf{1}} = Ta_{t\mid t}, \quad P_{t+\mathbf{1}} = TP_{t\mid t}T' + RQR'$
Starea de echilibru local level	$\bar{P} = \sigma_\varepsilon^{\mathbf{2}}(q + \sqrt{q^{\mathbf{2}} + 4q})/2, \quad \alpha_{SES} = \bar{K} = \bar{P}/(\bar{P} + \sigma_\varepsilon^{\mathbf{2}})$
Log-verosimilitatea	$-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\sum_t(\log 2\pi + \log F_t + v_t^{\mathbf{2}}/F_t)$
Filtrul HP	$\min \sum(y_t - \tau_t)^{\mathbf{2}} + \lambda \sum(\Delta^{\mathbf{2}}\tau_t)^{\mathbf{2}}, \quad \lambda = \sigma_\varepsilon^{\mathbf{2}}/\sigma_\zeta^{\mathbf{2}}$
Lanțul Markov	$E(D_i) = 1/(1 - p_{ii}), \quad \pi_{\mathbf{1}} = (1 - p_{\mathbf{22}})/(2 - p_{\mathbf{11}} - p_{\mathbf{22}})$
Filtrul Hamilton	$\Pr(S_t = j \mid Y_t) \propto f_j(y_t)\sum_i p_{ij}\Pr(S_{t-\mathbf{1}} = i \mid Y_{t-\mathbf{1}})$

Autoevaluare

- **Întrebare**: local level cu $P_t = 3$, $\sigma_\varepsilon^2 = 1$. Cît este cîștigul Kalman?
  - **Răspuns**: $K_t = 3/(3+1) = 0{,}75$: noua observație primește ponderea 0,75
- **Întrebare**: un model SES are $\alpha = 0{,}5$. Ce model local level se află în spatele lui?
  - **Răspuns**: $q = \alpha^2/(1-\alpha) = 0{,}25/0{,}5 = 0{,}5$
- **Întrebare**: $p_{11} = 0{,}9$ într-un model cu două regimuri. Cît durează în medie regimul 1?
  - **Răspuns**: $1/(1-0{,}9) = 10$ perioade
- Urmează: Capitolele 11–14, pentru studiu individual; Capitolul 15, recapitularea

Bibliografie (1/2)

- Chauvet, M., & Piger, J. (2008). A comparison of the real-time performance of business cycle dating methods. *Journal of Business & Economic Statistics*, 26(1), 42–49. doi:10.1198/073500107000000296
- Diebold, F. X., & Inoue, A. (2001). Long memory and regime switching. *Journal of Econometrics*, 105(1), 131–159. doi:10.1016/S0304-4076(01)00073-2
- Durbin, J., & Koopman, S. J. (2012). *Time Series Analysis by State Space Methods* (2nd ed.). Oxford University Press. doi:10.1093/acprof:oso/9780199641178.001.0001
- Giannone, D., Reichlin, L., & Small, D. (2008). Nowcasting: The real-time informational content of macroeconomic data. *Journal of Monetary Economics*, 55(4), 665–676. doi:10.1016/j.jmoneco.2008.05.010
- Hamilton, J. D. (1989). A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle. *Econometrica*, 57(2), 357–384. doi:10.2307/1912559
- Hamilton, J. D. (1990). Analysis of time series subject to changes in regime. *Journal of Econometrics*, 45(1–2), 39–70. doi:10.1016/0304-4076(90)90093-9
- Hamilton, J. D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press. doi:10.2307/j.ctv14jx6sm
- Hamilton, J. D. (2018). Why you should never use the Hodrick–Prescott filter. *The Review of Economics and Statistics*, 100(5), 831–843. doi:10.1162/rest_a_00706
- Hamilton, J. D., & Susmel, R. (1994). Autoregressive conditional heteroskedasticity and changes in regime. *Journal of Econometrics*, 64(1–2), 307–333. doi:10.1016/0304-4076(94)90067-1
- Harvey, A. C. (1989). *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*. Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9781107049994
- Harvey, A. C., & Jaeger, A. (1993). Detrending, stylized facts and the business cycle. *Journal of Applied Econometrics*, 8(3), 231–247. doi:10.1002/jae.3950080302

Bibliografie (2/2)

- Hodrick, R. J., & Prescott, E. C. (1997). Postwar U.S. business cycles: An empirical investigation. *Journal of Money, Credit and Banking*, 29(1), 1–16. doi:10.2307/2953682
- Huang, C., & Petukhina, A. (2022). *Applied Time Series Analysis and Forecasting with Python*. Springer. doi:10.1007/978-3-031-13584-2
- Hyndman, R. J., Koehler, A. B., Ord, J. K., & Snyder, R. D. (2008). *Forecasting with Exponential Smoothing: The State Space Approach*. Springer. doi:10.1007/978-3-540-71918-2
- Kalman, R. E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, 82(1), 35–45. doi:10.1115/1.3662552
- Kim, C.-J. (1994). Dynamic linear models with Markov-switching. *Journal of Econometrics*, 60(1–2), 1–22. doi:10.1016/0304-4076(94)90036-1
- Kim, C.-J., & Nelson, C. R. (1999). *State-Space Models with Regime Switching: Classical and Gibbs-Sampling Approaches with Applications*. MIT Press. doi:10.7551/mitpress/6444.001.0001
- Lamoureux, C. G., & Lastrapes, W. D. (1990). Persistence in variance, structural change, and the GARCH model. *Journal of Business & Economic Statistics*, 8(2), 225–234. doi:10.1080/07350015.1990.10509794
- Muth, J. F. (1960). Optimal properties of exponentially weighted forecasts. *Journal of the American Statistical Association*, 55(290), 299–306. doi:10.1080/01621459.1960.10482064
- Rauch, H. E., Tung, F., & Striebel, C. T. (1965). Maximum likelihood estimates of linear dynamic systems. *AIAA Journal*, 3(8), 1445–1450. doi:10.2514/3.3166
- Shumway, R. H., & Stoffer, D. S. (2017). *Time Series Analysis and Its Applications* (4th ed.). Springer. doi:10.1007/978-3-319-52452-8
- Stock, J. H., & Watson, M. W. (1989). New indexes of coincident and leading economic indicators. *NBER Macroeconomics Annual*, 4, 351–394. doi:10.1086/654119