








Serii de timp

Capitolul 13: Bule speculative: modele LPPL



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București
IDA Institute Digital Assets
Blockchain Research Center
AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance
Academia Română, Institutul de Prognoză Economică
MSCA Digital Finance

Acronime folosite în acest material

- **ADF**: Augmented Dickey–Fuller (test) — testul Dickey–Fuller augmentat
- **AI**: Artificial Intelligence (inteligență artificială)
- **AR**: AutoRegressive (model) — model autoregresiv
- **BET**: Bucharest Exchange Trading (index) — indicele de referință al Bursei de Valori București
- **BET-TR**: BET Total Return (index) — indicele BET cu dividendele reinvestite
- **BSADF**: Backward Supremum Augmented Dickey–Fuller (statistic) — statistica ADF supremum pe ferestre înapoi
- **EODHD**: EOD Historical Data (market-data provider) — furnizor de date de piață
- **GARCH**: Generalised AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity (heteroscedasticitate condiționată autoregresivă generalizată)
- **GSADF**: Generalised Supremum Augmented Dickey–Fuller (test) — testul ADF supremum generalizat
- **JLS**: Johansen–Ledoit–Sornette (model) — modelul Johansen–Ledoit–Sornette
- **LPPL**: Log-Periodic Power Law (legea de putere log-periodică)
- **LPPLS**: Log-Periodic Power Law Singularity (model) — modelul singularității cu lege de putere log-periodică
- **OLS**: Ordinary Least Squares (metoda celor mai mici pătrate)
- **SADF**: Supremum Augmented Dickey–Fuller (test) — testul ADF supremum, pe ferestre care se extind
- **SE**: Standard Error (eroare standard)
- **SSR**: Sum of Squared Residuals (suma pătratelor reziduurilor)

Întrebarea capitolului

- **Întrebarea**: poate fi recunoscută o bulă speculativă într-o serie de prețuri înainte să se spargă?
  - o **bulă speculativă**: un preț care crește mult peste valoarea justificată de fluxurile de numerar așteptate ale activului, susținut de așteptarea de a-l vinde mai târziu la un preț mai mare
  - un **crah**: o scădere mare a prețului într-un timp scurt (aici: cel puțin 20% față de maximum)
- **Traseul** capitolului
  - bulele din istorie și semnăturile statistice ale unei bule
  - bulele raționale și rădăcinile explozive: testele de rădăcină unitară la dreapta ale lui Phillips, Shi și Yu (legătura cu Capitolul 3)
  - modelul LPPL al lui Johansen, Ledoit și Sornette: creștere superexponențială, oscilații log-periodice, timpul critic
  - estimarea, încrederea obținută din multe ferestre și evaluarea prognozelor de crah

Ghid de studiu individual

- Acest capitol este pentru **studiu individual**
  - nu are seminar
  - fiecare secțiune se încheie cu o recapitulare
  - citiți o secțiune, apoi refaceți pe hîrtie exemplul rezolvat, înainte să vă uitați la soluție
  - după fiecare grafic, citiți slide-ul de interpretare și comparați-l cu propria lectură a graficului
- Rulați notebook-ul cursului: fiecare grafic și fiecare cifră din slide-uri sînt produse acolo
  - modificați o setare (fereastra, filtrul, pragul) și urmăriți cum se schimbă concluzia
- Verificați-vă cu autoevaluarea de la final și cu quiz-ul Capitolului 13 de pe site-ul cursului
- Cunoștințe necesare: randamentele și prețurile logaritmice (Capitolul 1), testul Dickey–Fuller (Capitolul 3), regresia OLS

Rezultatele învățării

- Descrieți o bulă prin valoarea fundamentală și prin semnăturile ei statistice
- Explicați de ce o bulă rațională trebuie să crească exploziv și testați rădăcinile explozive cu SADF și GSADF
- Scrieți ecuația LPPL și interpretați fiecare dintre cei șapte parametri
- Estimați LPPL cu metoda în doi pași a lui Filimonov și Sornette și verificați condițiile de filtrare
- Construiți un indicator de încredere din multe ferestre și evaluați riguros alarmele lui, cu alarme false și frecvențe de bază

Bibliografie și instrumente

- Manual: Huang și Petukhina (2022) (rădăcini unitare și cele mai mici pătrate neliniare, instrumentele acestui capitol)
  - modelul LPPL: Johansen, Ledoit și Sornette (2000); Sornette (2017); calibrarea: Filimonov și Sornette (2013)
  - rădăcini explozive: Phillips, Wu și Yu (2011); Phillips, Shi și Yu (2015a); sinteză: Phillips și Shi (2020)
  - istoria bulelor: Kindleberger și Aliber (2005); Shiller (2015); Garber (1990)
- Quantlet-urile Python ale capitolului: Quantlets/Ch_13
  - statisticile SADF/GSADF și calibrarea LPPL sînt scrise explicit în cod (fără un pachet special)
- Notebook-ul cursului: deschideți în Google Colab
- Date: închiderile zilnice ale indicilor S&P 500, Nasdaq 100, BET, Shanghai Composite și ale Bitcoin (EODHD)

Bule speculative, 1636–2021



Carul nebunilor al Florei, c. 1637

Pictură: Hendrik Gerritsz Pot (c. 1637); domeniu public; Wikimedia Commons

- **Mania lalelelor**, Olanda, 1636–1637
  - contracte pe bulbi rari tranzacționate la prețuri extreme, apoi prăbușite în februarie 1637
  - Garber (1990): o parte din poveste este mit; bulbii rari erau scumpi din motive întemeiate, bulbii obișnuiți arată mania
- **South Sea** (1720), **Wall Street** (1929), **Japonia** (1989), **dot-com** (2000), **imobiliare** (2007), **cripto** (2017, 2021)
- Tiparul comun Kindleberger și Aliber (2005): o poveste nouă, credit ieftin, prețuri în creștere care atrag noi cumpărători, apoi panică

1929 și 1987



Mulțime în fața Bursei din New York, 29 octombrie 1929

Foto: US government (1929); domeniu public; Wikimedia Commons



Bursa din Amsterdam, 21 octombrie 1987

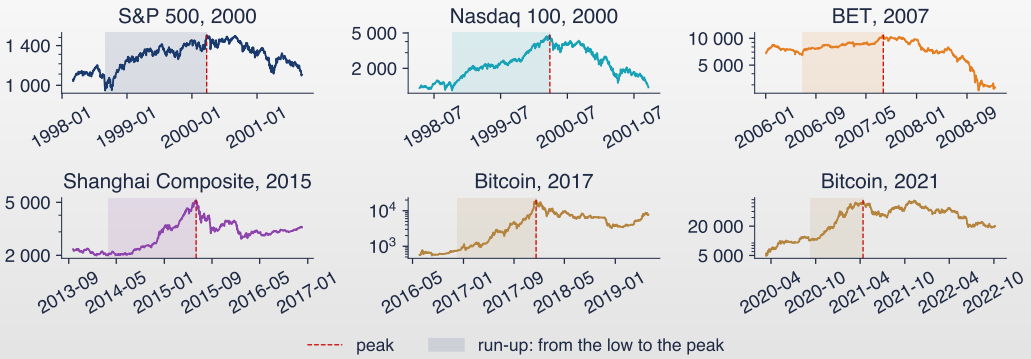
Foto: Bart Molendijk / Anefo, Nationaal Archief (1987); CC0; Wikimedia Commons

- **Octombrie 1929**
  - sfîrșitul boom-ului anilor 1920 și începutul Marii Crize
- **19 octombrie 1987** (Black Monday)
  - cea mai mare scădere într-o singură zi a indicelui Dow Jones, fără vreo știre majoră în acea zi
  - Sornette, Johansen și Bouchaud (1996) au găsit oscilații log-periodice, tot mai rapide, în anii dinaintea lui 1987; această observație a pornit literatura LPPL
  - datele zilnice ale cursului încep în 1990: studiem 1987 prin literatură, iar bulele de mai tîrziu cu datele noastre
- Un crah fără știri sugerează o cauză **endogenă**: piața însăși devenise fragilă

Valoarea fundamentală și bula

- **Valoarea fundamentală F_t**
  - valoarea actualizată a fluxurilor de numerar viitoare așteptate (dividendele D), actualizate cu rata r
  - $F_t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E_t[D_{t+k}]}{(1+r)^k}$
  - D_{t+k}: dividendul plătit peste k perioade; $E_t[\cdot]$: media condiționată de informația disponibilă la momentul t; r: rata de actualizare pe perioadă
- **Componenta de bulă**
  - $B_t = P_t - F_t$, partea din prețul P_t neexplicată de fundamente
  - F_t nu este observată: putem testa doar **implicațiile** unei bule asupra traiectoriei prețului
- Două puncte de vedere
  - piețe eficiente: prețurile reflectă informația; „bulele" se văd doar retrospectiv Fama (2014)
  - finanțe comportamentale: comportamentul de turmă și extrapolarea îndepărtează prețurile de valoare Shiller (2015); creșterile mari ridică probabilitatea unui crah Greenwood, Shleifer și You (2019)

Șase creșteri și crahuri în datele cursului



⊡ Închideri zilnice, scară logaritmică, de la șase luni înainte de minimul creșterii pînă la optsprezece luni după maximum; zona colorată: creșterea de la minim la maximum

TSA_ch13_episodes

Interpretarea celor șase episoade

Episodul	Minim	Maxim	Creștere	Ritm anual	Scădere în 1 an
S&P 500, 2000	31 august 1998	24 martie 2000	60%	30%	27%
Nasdaq 100, 2000	8 octombrie 1998	27 martie 2000	317%	97%	66%
BET, 2007	27 iunie 2006	24 iulie 2007	68%	48%	50%
Shanghai Composite, 2015	20 martie 2014	12 iunie 2015	159%	77%	49%
Bitcoin, 2017	1 decembrie 2016	16 decembrie 2017	2476%	312%	83%
Bitcoin, 2021	8 septembrie 2020	13 aprilie 2021	527%	309%	53%

- Ritmul anual: $\ln(P_{\mathbf{maxim}}/P_{\mathbf{minim}})$ împărțit la durata creșterii în ani; scăderea: cea mai mică închidere din anul de după maximum, față de maximum
- Bitcoin și-a înmulțit prețul de 26 de ori în aproximativ un an; S&P 500 a crescut mult mai puțin: nu orice maximum este o bulă de aceeași intensitate

Recapitulare: bule în istorie

- O bulă este un preț peste valoarea fundamentală F_t; F_t nu este observată
- Șase episoade în datele noastre: creșteri între 60% și 2476%, urmate de scăderi între 27% și 83% într-un an
- Semnături: creștere explozivă și superexponențială, oscilații tot mai rapide, apoi un sfîrșit

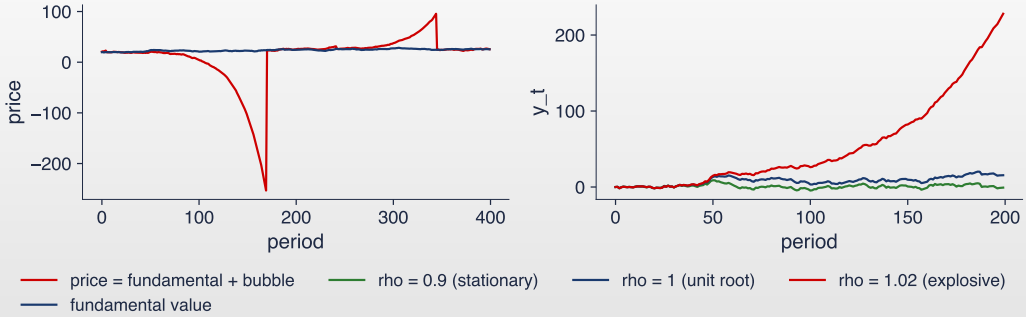
Bula rațională și explozia ei inevitabilă

- Evaluarea fără arbitraj: $P_t = \dfrac{E_t[P_{t+\mathbf{1}} + D_{t+\mathbf{1}}]}{1+r}$; valoarea fundamentală F_t este o soluție
  - în cuvinte: prețul de azi este valoarea actualizată a sumei așteptate dintre prețul și dividendul de mîine
  - orice $P_t = F_t + B_t$ cu $E_t[B_{t+\mathbf{1}}] = (1+r)\,B_t$ este tot o soluție
- Bula trebuie să crească, în medie, cu rata r: $E_t[B_{t+k}] = (1+r)^k B_t$
  - un investitor deține un activ peste valoarea lui doar dacă se așteaptă ca supraevaluarea să crească
  - $1 + r > 1$: componenta de bulă este un proces **exploziv**
- Consecință: dacă dividendele sînt $I(1)$ (Capitolul 3), prețul este $I(1)$ fără bulă și exploziv cu bulă

Exemplu rezolvat: o bulă care se poate sparge

- Blanchard și Watson (1982): în fiecare perioadă bula supraviețuiește cu probabilitatea π și crește atunci la $\frac{1+r}{\pi} B_t$; altfel se sparge ($B_{t+1} \approx 0$)
  - verificare: $E_t[B_{t+1}] = \pi \cdot \frac{1+r}{\pi} B_t + (1-\pi) \cdot 0 = (1+r) B_t$
- Cu $r = 2\%$ și $\pi = 0{,}98$ pe perioadă:
  - cît supraviețuiește, bula crește cu $1{,}02/0{,}98 - 1 = 4{,}08\%$ pe perioadă, mai mult decît r: creșterea suplimentară plătește riscul spargerii
  - durata medie de viață $1/(1-\pi) = 50$ de perioade; supraviețuiește peste 34 de perioade cu probabilitatea $1/2$ ($0{,}98^k = 0{,}5$)
- Cu cît bula durează mai mult, cu atît trebuie să crească mai repede și cu atît este mai mare căderea la spargere

O bulă rațională simulată și trei rădăcini AR(1)



- Stînga: valoarea fundamentală (mers aleator) plus o bulă Blanchard–Watson ($r = 2\%$, $\pi = 0{,}98$), 400 de perioade; dreapta: $y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$ cu aceleași șocuri și $\rho = 0{,}9,\ 1,\ 1{,}02$

TSA_ch13_rational_bubble

Interpretarea simulării

- Bula crește, se sparge, reîncepe: pe această traiectorie atinge 71 și se sparge de 2 ori după ce a devenit mare
  - prețul preia episoadele explozive; între ele urmează valoarea fundamentală
  - prima bulă a acestei traiectorii este negativă și duce prețul sub zero: pentru un activ real acest lucru este exclus (prețul nu poate fi negativ), deci o bulă rațională trebuie să fie nenegativă
- Rădăcinile AR(1) (Capitolul 3): $\rho = 0{,}9$ revine la medie, $\rho = 1$ rătăcește (rădăcină unitară), $\rho = 1{,}02$ explodează
  - cu $\rho = 1{,}02$ un șoc se dublează în aproximativ 35 de perioade și se înmulțește cu 7,24 după 100
- Ideea testelor: o rădăcină explozivă ($\rho > 1$) în prețul logaritmic în timpul unei creșteri este urma statistică a unei bule raționale

Teste de rădăcină unitară la dreapta

- Regresia din Capitolul 3 pe o fereastră a prețului logaritmic $y_t = \ln P_t$: $\Delta y_t = a + \delta\, y_{t-\mathbf{1}} + \varepsilon_t$, cu $\delta = \rho - 1$
  - Capitolul 3 (Dickey și Fuller (1979)): $H_\mathbf{0}$: $\delta = 0$ față de $H_\mathbf{1}$: $\delta < 0$ (staționar), coada din **stînga**
  - bule: $H_\mathbf{0}$: $\delta = 0$ (rădăcină unitară) față de $H_\mathbf{1}$: $\delta > 0$ (exploziv), coada din **dreapta**: respingem pentru statistici t mari
- Problema: o bulă ocupă doar o parte din eșantion, iar crahul de după ea seamănă cu revenirea la medie
  - un singur test ADF pe tot eșantionul nu are aproape nicio putere: trebuie să calculăm testul pe multe **ferestre**
- Notațiile
  - $\Delta y_t = y_t - y_{t-\mathbf{1}}$; a: termenul liber; ε_t: eroarea; ρ: coeficientul AR(1) al lui y_t
  - $r_\mathbf{1}, r_\mathbf{2} \in [0,1]$: fracțiuni din eșantion; $\mathrm{ADF}_{r_\mathbf{1}}^{r_\mathbf{2}}$: statistica t a lui $\hat{\delta}$ pe fereastra de la $r_\mathbf{1} T$ la $r_\mathbf{2} T$; $r_\mathbf{0}$: cea mai mică fereastră

SADF, GSADF și BSADF (1/2)

- sup: cea mai mare valoare a statisticii ADF pe toate ferestrele considerate
  - o singură valoare mare, în oricare fereastră, este suficientă pentru a semnala un episod exploziv
- **SADF** Phillips, Wu și Yu (2011)
  - începutul fixat la 0, sfîrșitul r_2 înaintează
  - SADF $= \sup_{r_2 \in [r_0, 1]} \mathrm{ADF}_0^{r_2}$
  - bun pentru o singură bulă; după un prim crah își pierde puterea
- **GSADF** Phillips, Shi și Yu (2015a)
  - se mișcă și începutul r_1, și sfîrșitul r_2
  - GSADF $= \sup_{r_2 \in [r_0, 1]} \sup_{r_1 \in [0, r_2 - r_0]} \mathrm{ADF}_{r_1}^{r_2}$
  - detectează mai multe bule într-un eșantion; fereastra minimă $r_0 = 0{,}01 + 1{,}8/\sqrt{T}$

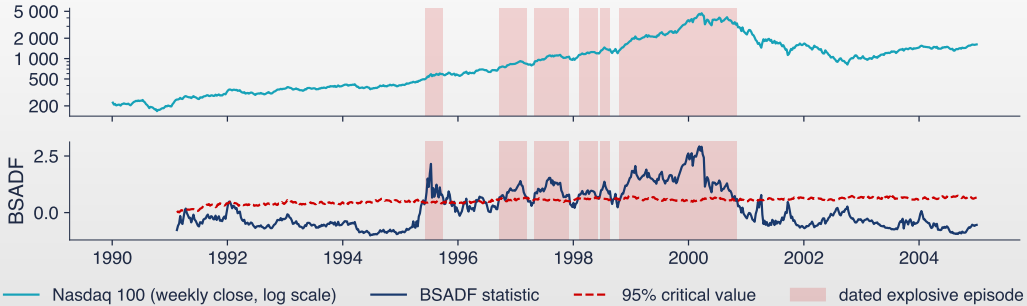
SADF, GSADF și BSADF (2/2)

- **BSADF** (datarea)
  - o statistică pentru fiecare dată r_2, folosind doar datele pînă la r_2
  - $\text{BSADF}(r_2) = \sup_{r_1} \text{ADF}_{r_1}^{r_2}$: cea mai mare statistică pe toate începuturile r_1 ale ferestrelor care se încheie la r_2
  - un episod începe cînd BSADF depășește valoarea critică și durează cel puțin $\log T$ observații Phillips, Shi și Yu (2015b) (log: logaritmul natural)
- Distribuțiile nu sînt standard: valorile critice se obțin prin Monte Carlo
  - simulate sub un mers aleator cu drift slab, $y_t = T^{-1} + y_{t-1} + \varepsilon_t$
  - driftul T^{-1} este foarte mic: sub H_0 există o rădăcină unitară, nu una explozivă
- Interpretarea: o statistică ADF, SADF sau GSADF peste valoarea critică de 95% respinge rădăcina unitară în favoarea unei rădăcini explozive

Exemplu rezolvat: o fereastră din Nasdaq 100

- Închideri săptămînale logaritmice ale Nasdaq 100, $T = 782$ de săptămîni; $r_0 = 0{,}074$, adică o fereastră minimă de 58 de săptămîni
  - sfîrșitul ferestrei: 24 martie 2000, săptămîna maximului; dintre toate punctele de început, cea mai mare statistică provine din începutul 17 ianuarie 1992
- OLS pe această fereastră ($n = 427$ de variații săptămînale): $\widehat{\Delta y_t} = -0{,}0336 + 0{,}0060\, y_{t-1}$
  - $t = \hat{\delta}/\mathrm{SE}(\hat{\delta}) = 0{,}006030/0{,}002072 = 2{,}91$
  - deci BSADF la maximum este 2,91, peste valoarea critică de 95%, egală cu 0,54
- Interpretarea: $\hat{\delta} > 0$ înseamnă $\hat{\rho} = 1 + \hat{\delta} > 1$: cu cît prețul este mai mare, cu atît creșterea săptămînală următoare este mai mare, semnul unei faze explozive

Episoadele explozive ale Nasdaq 100, 1990–2004



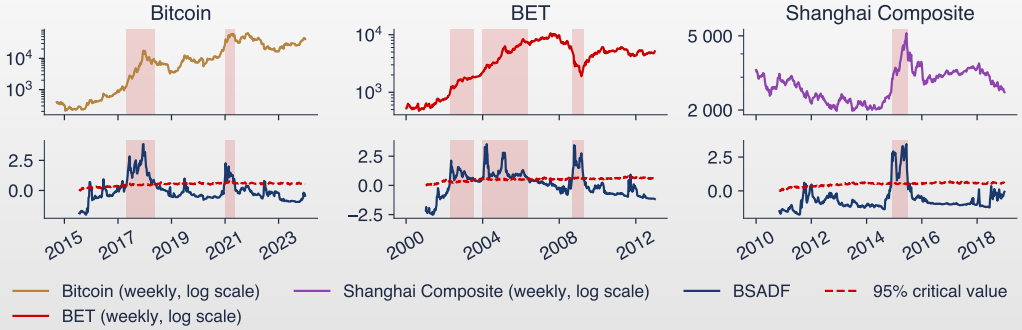
Sus: închiderea săptămînală, scară logaritmică; jos: BSADF și valorile critice de 95% (Monte Carlo, 1000 de mersuri aleatoare); zone colorate: episoadele datate (cel puțin 7 săptămîni peste valoarea critică)

TSA_ch13_explosive_roots

Interpretarea testelor pentru Nasdaq 100

- ADF pe tot eșantionul $-1{,}27$ (valoarea critică de 95%: $-0{,}13$): nicio dovadă
  - SADF 2,72 (valoarea critică 1,48) și GSADF 2,92 (valoarea critică 2,28): comportament exploziv
  - crahul din 2000–2002 ascunde bula de un test unic pe tot eșantionul
- BSADF datează 6 episoade; cel mai lung ține de la 23 octombrie 1998 pînă la 3 noiembrie 2000 (107 săptămîni)
  - episoade explozive scurte încă din iunie 1995: boom-ul anilor 1990 a venit în valuri, cum au găsit Phillips, Wu și Yu (2011)
- Data de sfîrșit este tîrzie: statistica rămîne mare luni de zile după maximum; testul datează exuberanța, nu anunță crahul

Bitcoin, BET și Shanghai: episoade datate



⊡ Închideri săptămînale logaritmice; sus: prețul cu episoadele datate; jos: BSADF și valorile critice de 95%; Bitcoin 2014–2023, BET 2000–2012, Shanghai Composite 2010–2018

TSA_ch13_explosive_roots

Interpretarea celor trei piețe

- GSADF: Bitcoin 3,85, BET 3,53, Shanghai 3,46; peste valorile critice de 95% (2,18; 2,29; 2,15)
  - Bitcoin: aprilie 2017 – mai 2018 și ianuarie 2021 – mai 2021; Shanghai: noiembrie 2014 – iunie 2015
- BET: faza explozivă este decembrie 2003 – mai 2006, nu creșterea pînă în iulie 2007, care a fost puternică, dar nu explozivă; un episod anterior este datat aprilie 2002 – iulie 2003
  - semnalul BET din septembrie 2008 – aprilie 2009 este prăbușirea: o **scădere care se accelerează** dă tot $\hat{\delta} > 0$; citiți întotdeauna datele alături de graficul prețului
- Episodul Bitcoin din 2017 ține pînă în mai 2018, din nou mult după maximum

Limitele testelor de rădăcini explozive

- **Fundamentele**
  - un preț exploziv este bulă doar dacă fundamentele nu sînt explozive
  - mai bine: testați raportul preț–dividend (Phillips, Shi și Yu (2015a) pentru S&P 500); pentru Bitcoin nu există deloc dividende
- **Volatilitatea**
  - volatilitatea variabilă distorsionează nivelul testului
  - un wild bootstrap dă valori critice robuste Phillips și Shi (2020)
- **Momentul**
  - BSADF folosește doar date trecute, deci poate rula în timp real
  - dar semnalează o bulă deja în desfășurare și nu spune nimic despre momentul în care se termină
  - modelul LPPL din secțiunea următoare încearcă să răspundă exact la această întrebare: cînd?

Recapitulare: bule raționale și rădăcini explozive

- O bulă rațională crește în medie cu rata r: $E_t[B_{t+1}] = (1+r)B_t$, un proces exploziv
- ADF la dreapta: H_1: $\delta > 0$; SADF și GSADF iau supremumul pe ferestre; BSADF datează episoadele
- Nasdaq 100, Bitcoin, BET și Shanghai au episoade explozive; testele datează creșterea, nu crahul

Crahurile ca puncte critice



Didier Sornette (n. 1957)

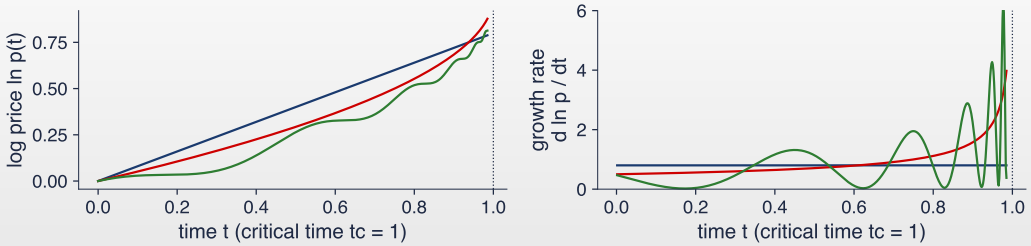
Foto: Didier Sornette (2012); CC BY-SA 3.0 DE; Wikimedia Commons

- Fizician, ETH Zürich; împreună cu Anders Johansen și Olivier Ledoit a propus **modelul JLS** Johansen, Ledoit și Sornette (2000)
- Ideea: investitorii își imită vecinii; imitația creează o reacție pozitivă (positive feedback)
  - prețurile în creștere atrag cumpărători, care urcă prețurile și mai mult: creșterea se accelerează
  - piața devine tot mai fragilă, ca un sistem fizic aproape de un **punct critic** (apa aproape de fierbere)
- **Timpul critic** t_c
  - momentul cel mai probabil al sfîrșitului bulei
  - un crah este probabil aproape de t_c, dar nu sigur: bula se poate încheia și cu o scădere lentă

Creșterea superexponențială

- Creșterea **exponențială**
  - ritm de creștere constant, $\ln P(t) = a + g\,t$
  - $d \ln P/dt = g$
  - a: prețul logaritmic inițial; g: ritmul constant de creștere; $d \ln P/dt$: ritmul de creștere al prețului la momentul t
  - o dreaptă pe scară logaritmică
- Creșterea **superexponențială**
  - ritmul de creștere crește în timp
  - pe scară logaritmică curba se îndoaie în sus
  - singularitate de tip lege de putere: $\ln P(t) = A + B\,(t_c - t)^m$, cu $B < 0$ și $0 < m < 1$
  - t_c: timpul critic; $t_c - t$: timpul rămas pînă la el; A: prețul logaritmic atins la t_c; B: mărimea creșterii; m: exponentul
  - ritmul de creștere $d \ln P/dt = -Bm\,(t_c - t)^{m-\mathbf{1}} \to \infty$ cînd $t \to t_c$, în timp ce $\ln P(t_c) = A$ rămîne finit
- O astfel de creștere nu poate dura: trebuie să se încheie la t_c sau înainte, o **singularitate în timp finit**

Creștere exponențială și creștere superexponențială



- Stînga: prețul logaritmic; dreapta: ritmul lui de creștere $d \ln P/dt$; exponențială ($g = 0{,}8$), singularitate de tip lege de putere ($A = 1$, $B = -1$, $m = 0{,}5$, $t_c = 1$) și aceeași cu oscilații log-periodice

TSA_ch13_lppl_model

Interpretarea traiectoriilor de creștere

- Toate trei încep cu ritmuri de creștere asemănătoare: la începutul unei bule traiectoriile se disting greu
- Ritmul exponențial rămîne 0,8; ritmul singular crește de la 0,50 la 0,70 la jumătatea drumului și la 3,98 chiar înainte de t_c
- Oscilațiile se suprapun peste trendul accelerat și devin mai rapide aproape de t_c: slide-urile următoare explică de ce

De la riscul de crah la ecuația LPPL (1/2)

- JLS: variația relativă a prețului înainte de crah are trei componente
  - $dP/P = \mu(t)\,dt + \sigma\,dW - \kappa\,dj$
  - $\mu(t)\,dt$: creșterea așteptată pe un interval scurt dt; $\mu(t)$: driftul, care se poate schimba în timp
  - $\sigma\,dW$: zgomotul obișnuit; W: o mișcare browniană (un mers aleator în timp continuu); σ: volatilitatea
  - $\kappa\,dj$: crahul; j sare de la 0 la 1 la crah, care elimină o fracțiune κ din preț
- **Rata de hazard** $h(t)$
  - probabilitatea pe unitatea de timp ca crahul să aibă loc acum, știind că nu a avut loc pînă acum

De la riscul de crah la ecuația LPPL (2/2)

- Fără arbitraj: $E[dP] = 0 \Rightarrow \mu(t) = \kappa\, h(t)$
  - $E[dj] = h(t)\, dt$, deci variația așteptată este zero doar dacă driftul compensează pierderea așteptată din crah
  - cu cît hazardul este mai mare, cu atît prețul trebuie să crească mai repede: riscul și creșterea cresc împreună
- Imitația aproape de un punct critic dă un hazard care crește spre t_c, cu oscilații
  - $h(t) \approx \alpha(t_c - t)^{m-\mathbf{1}}[1 + \beta\cos(\omega \ln(t_c - t) - \phi')]$
  - $\alpha > 0$: nivelul hazardului; $(t_c - t)^{m-\mathbf{1}}$ crește nelimitat cînd $t \to t_c$, deoarece $m < 1$
  - β: mărimea relativă a oscilațiilor; ω: frecvența lor logaritmică; ϕ': faza lor
- Integrînd $\mu(t) = \kappa h(t)$ în timp obținem prețul logaritmic de pe slide-ul următor

Ecuația LPPL

- **Legea de putere log-periodică** (LPPL), pentru $t < t_c$
  - $\ln P(t) = A + B\,(t_c - t)^m + C\,(t_c - t)^m \cos\big(\omega \ln(t_c - t) - \phi\big)$

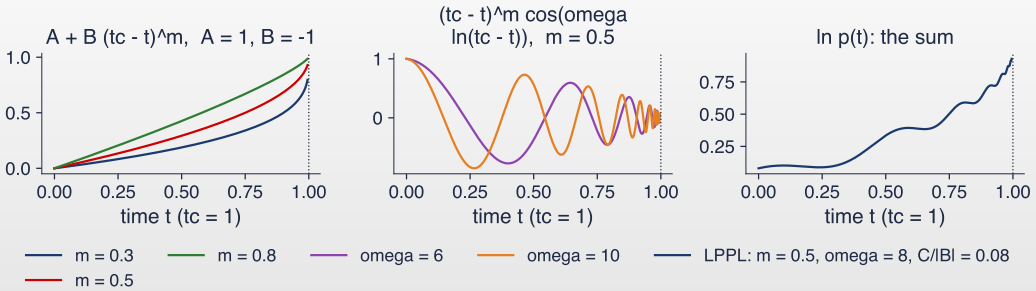
Parametrul	Semnificația	Interval uzual
t_c	timpul critic: sfîrșitul cel mai probabil al bulei	după ultima observație
A	prețul logaritmic la t_c (dacă bula ar atinge t_c)	$A > 0$
B	mărimea creșterii de tip lege de putere	$B < 0$ (preț în creștere)
m	exponentul: cît de repede se accelerează creșterea	$0 < m < 1$
C	mărimea relativă a oscilațiilor	$\lvert C\rvert < \lvert B\rvert$
ω	frecvența unghiulară logaritmică a oscilațiilor	$2 \leq \omega \leq 25$
ϕ	faza oscilațiilor	$[0, 2\pi)$

- Șapte parametri: trei dintre ei (t_c, m, ω) intră neliniar; ϕ dispare la estimare (Secțiunea 5)

Oscilațiile log-periodice

- $\cos(\omega \ln(t_c - t) - \phi)$ este periodic în $\ln(t_c - t)$, nu în t: un ciclu complet de fiecare dată cînd $\ln(t_c - t)$ se schimbă cu $2\pi/\omega$
  - maximele succesive t_n verifică $\dfrac{t_c - t_n}{t_c - t_{n+1}} = \lambda = e^{2\pi/\omega}$: timpul rămas pînă la t_c se micșorează cu același factor la fiecare ciclu
- **Invarianța discretă la scală**
  - tiparul arată la fel cînd timpul pînă la t_c se rescalează cu λ (ca într-o ierarhie de investitori, grupuri, instituții)
- Exemplu rezolvat: pentru $\omega = 8$, $\lambda = e^{2\pi/8} = 2{,}19$
  - dacă o corecție are loc cu 200 de zile înainte de t_c, următoarea vine cu aproximativ $200/2{,}19 \approx 91$ de zile înainte de t_c, apoi cu aproximativ 42, apoi 19
  - $\omega = 6{,}28$ dă $\lambda = 2{,}72$; $\omega = 10$ dă $\lambda = 1{,}87$; literatura empirică raportează λ în jur de 2 Sornette (2017)

Componentele ecuației LPPL



- Stînga: $A + B(t_c - t)^m$ pentru $m = 0{,}3;\ 0{,}5;\ 0{,}8$; mijloc: oscilația $(t_c - t)^m \cos(\omega \ln(t_c - t))$ pentru $\omega = 6$ și 10; dreapta: traiectoria LPPL completă ($m = 0{,}5$, $\omega = 8$, $C/|B| = 0{,}08$), care nu îndeplinește condiția de amortizare: $m|B|/(\omega|C|) = 0{,}78 < 1$; $t_c = 1$

TSA_ch13_lppl_model

Interpretarea componentelor

- Un m mai mic concentrează creșterea aproape de t_c: curba este plată multă vreme, apoi urcă brusc
  - m apropiat de 1 este aproape o dreaptă: cu greu o bulă; m apropiat de 0 este un salt la t_c
- Termenul oscilant se micșorează cu $(t_c - t)^m$ și se accelerează: ciclurile se scurtează cu factorul λ
  - un ω mai mare dă mai multe cicluri înainte de t_c
- Creșterile reale (Secțiunea 5) arată acest amestec: un trend accelerat cu corecții tot mai dese

Exemplu rezolvat: o valoare LPPL calculată de mînă

- Parametri: $A = 8$, $B = -1{,}2$, $C = 0{,}08$, $m = 0{,}5$, $\omega = 8$, $\phi = 0$, $t_c = 2$ (ani); calculați $\ln P(t)$
  - $t = 1$: $t_c - t = 1$, $(t_c - t)^m = 1$, $\ln 1 = 0$, $\cos 0 = 1$: $\ln P = 8 - 1{,}2 + 0{,}08 = 6{,}880$, $P = 973$
  - $t = 1{,}75$: $(0{,}25)^{\mathbf{0.5}} = 0{,}500$, $\ln 0{,}25 = -1{,}386$, $\cos(8 \cdot (-1{,}386)) = 0{,}095$: $\ln P = 8 - 1{,}2 \cdot 0{,}500 + 0{,}08 \cdot 0{,}500 \cdot 0{,}095 = 7{,}404$, $P = 1642$
  - $t = 1{,}99$: $(0{,}01)^{\mathbf{0.5}} = 0{,}100$, $\cos(8 \cdot (-4{,}605)) = 0{,}654$: $\ln P = 7{,}885$, $P = 2658$
- Prețul crește de la 973 la 2658 cînd t trece de la 1 la 1,99 și ar atinge $e^A = 2981$ la t_c; cea mai mare parte a creșterii vine în ultimele luni

Restricțiile parametrilor: filtrul

- O ajustare este **calificată** doar dacă descrie o bulă credibilă (Shu și Zhu (2020), după Sornette et al. (2015)):
  - $B < 0$: preț în creștere; $0{,}01 \leq m \leq 0{,}99$: creștere accelerată, cu preț finit la t_c
  - $2 \leq \omega \leq 25$: oscilații nici prea lente, nici prea rapide; cel puțin 2,5 oscilații în fereastră, $\frac{\omega}{\pi} \ln \frac{t_c - t_1}{t_c - t_2} \geq 2{,}5$
  - $t_2 \leq t_c \leq t_2 + 0{,}2\,(t_2 - t_1)$: sfîrșitul este aproape, raportat la lungimea ferestrei $[t_1, t_2]$
  - amortizarea $\dfrac{m|B|}{\omega|C|} \geq 1$: rata de hazard rămîne pozitivă
- Condiții asupra reziduurilor
  - fiecare preț ajustat la cel mult 15% de prețul observat; periodograma Lomb Lomb (1976) confirmă ciclul log-periodic (nivel 10%)
  - periodograma Lomb: o periodogramă pentru puncte neuniform distanțate, aici a reziduurilor în funcție de $\ln(t_c - t)$
  - reziduurile sînt staționare: testele Dickey–Fuller și Phillips–Perron din Capitolul 3 resping rădăcina unitară (nivel 10%)

Recapitulare: modelul LPPL

- Imitația creează o rată de hazard care crește spre t_c; lipsa arbitrajului o transformă în creștere superexponențială
- $\ln P(t) = A + B(t_c - t)^m + C(t_c - t)^m \cos(\omega \ln(t_c - t) - \phi)$, șapte parametri
- Log-periodic: ciclurile se scurtează cu $\lambda = e^{2\pi/\omega}$; o ajustare contează doar dacă trece de filtru

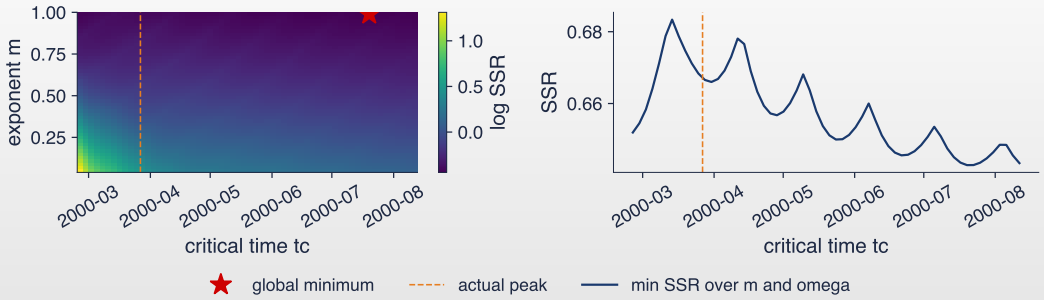
Metoda în doi pași a lui Filimonov și Sornette (1/2)

- Cele mai mici pătrate după șapte parametri au multe minime locale; Filimonov și Sornette (2013) reduc căutarea la trei parametri
  - $\min \mathrm{SSR} = \sum_{t=t_1}^{t_2} [\ln P_t - \mathrm{LPPL}(t)]^2$; SSR: suma pătratelor reziduurilor pe fereastra $[t_1, t_2]$
  - $\mathrm{LPPL}(t)$: membrul drept al ecuației LPPL
- Desfacem cosinusul, cu $\tau = t_c - t$
  - $C \cos(\omega \ln \tau - \phi) = C_1 \cos(\omega \ln \tau) + C_2 \sin(\omega \ln \tau)$, unde $C_1 = C \cos \phi$, $C_2 = C \sin \phi$
- Ecuația LPPL devine liniară în A, B, C_1, C_2
  - $\ln P(t) = A + B\, f_t + C_1\, g_t + C_2\, h_t$
  - $f_t = \tau^m$, $g_t = \tau^m \cos(\omega \ln \tau)$, $h_t = \tau^m \sin(\omega \ln \tau)$: numere cunoscute odată ce t_c, m, ω sînt fixați

Metoda în doi pași a lui Filimonov și Sornette (2/2)

- **Pasul 1** (liniar)
  - pentru (t_c, m, ω) dați, regresăm $\ln P_t$ pe $(1, f_t, g_t, h_t)$ prin OLS
  - $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}_1, \hat{C}_2) = (X'X)^{-1}X'y$; X: matricea cu coloanele $1, f_t, g_t, h_t$; y: vectorul valorilor $\ln P_t$
  - obținem astfel costul concentrat $\mathrm{SSR}(t_c, m, \omega)$, o funcție de doar trei parametri
- **Pasul 2** (neliniar)
  - minimizăm $\mathrm{SSR}(t_c, m, \omega)$ în spațiul de căutare
  - $t_c \in [t_2, t_2 + (t_2 - t_1)/3]$, $m \in [0, 1]$, $\omega \in [1, 50]$
  - în cod: o grilă de $8 \times 8 \times 16$ puncte, apoi simplexul Nelder–Mead pornind din cel mai bun punct al grilei
- La final: $C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ și $\phi = \mathrm{atan2}(C_2, C_1)$
  - $\mathrm{atan2}(C_2, C_1)$: unghiul punctului (C_1, C_2), în $(-\pi, \pi]$

Peisajul funcției de cost



- Nasdaq 100, fereastra de la minimul din octombrie 1998 pînă la 30 de zile înainte de maximum
  - stînga: $\log \mathrm{SSR}$ după (t_c, m), minimizat după $\omega \in [2, 25]$ (135 360 de puncte de grilă, cu pasul liniar rezolvat în fiecare punct)
  - dreapta: minimul după m și ω, ca funcție de t_c

TSA_ch13_estimation

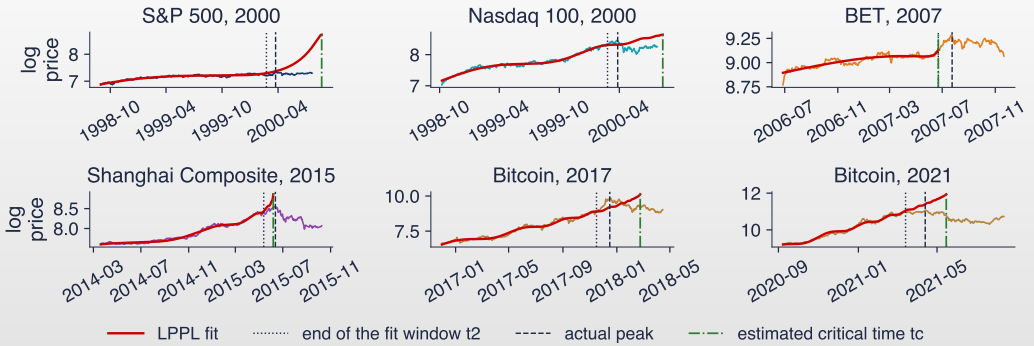
Interpretarea peisajului funcției de cost

- Profilul după t_c are 5 minime locale: un optimizator pornit de la alt t_c poate ajunge în altă vale
  - valurile provin din termenul oscilant: mutarea lui t_c mută faza ciclurilor
- Peisajul este plat: cel mai prost și cel mai bun t_c diferă cu doar 6,3% în SSR
  - minimul global este la m aproape de 1 și $t_c = 19$ iulie 2000, mult după maximul real: datele abia identifică t_c
- Lecția: o singură ajustare LPPL nu este niciodată suficientă; avem nevoie de multe ferestre și de filtru (Secțiunea 6)

Exemplu rezolvat: ajustarea pentru Shanghai la sfîrșitul ferestrei

- Shanghai Composite, fereastra 20 martie 2014 – 13 mai 2015 (281 de zile); estimări: $t_c = 2015{,}428$ (6 iunie 2015), $m = 0{,}392$, $\omega = 5{,}50$
  - pasul 1 dă $\hat{A} = 8{,}893$, $\hat{B} = -1{,}270$, $\hat{C}_1 = 0{,}020$, $\hat{C}_2 = 0{,}074$, deci $\hat{C} = 0{,}076$
- La $t_2 = 2015{,}361$ (ani): $\tau = t_c - t_2 = 0{,}067$, $\tau^m = 0{,}347$, $\ln \tau = -2{,}702$
  - $\cos(\omega \ln \tau) = -0{,}656$, $\sin(\omega \ln \tau) = -0{,}754$
  - $\widehat{\ln P} = 8{,}893 + (-0{,}440) + (-0{,}024) = 8{,}429$; observat $\ln P = 8{,}384$
- În niveluri: ajustat 4579 față de observat 4376, o eroare de 4,7%; cei trei termeni sînt nivelul A, creșterea de tip lege de putere și oscilația

Ajustări LPPL cu 30 de zile înainte de maximum



- Fereastra: de la minimul dinaintea creșterii pînă la 30 de zile calendaristice înainte de maximum; traiectoria ajustată este prelungită pînă la t_c estimat; datele de după fereastră sînt arătate doar pentru comparație

TSA_ch13_estimation

Interpretarea celor șase ajustări

Episodul	t_2	$\hat{t}_c$	Zile față de maxim	$\hat{m}$	$\hat{\omega}$	Param.	Toate
S&P 500, 2000	23 februarie 2000	21 august 2000	+150	1,00	1,0	nu	nu
Nasdaq 100, 2000	25 februarie 2000	11 august 2000	+137	1,00	5,9	nu	nu
BET, 2007	22 iunie 2007	22 iunie 2007	−32	0,69	1,0	nu	nu
Shanghai Composite, 2015	13 mai 2015	6 iunie 2015	−6	0,39	5,5	da	da
Bitcoin, 2017	16 noiembrie 2017	22 februarie 2018	+68	0,71	14,1	nu	nu
Bitcoin, 2021	14 martie 2021	15 mai 2021	+32	0,82	17,4	nu	nu

- Zile față de maxim: $\hat{t}_c$ minus maximul real; Param.: ajustarea trece de condițiile asupra parametrilor; Toate: trece și de condițiile asupra reziduurilor
- Doar Shanghai trece de tot filtrul, cu $\hat{t}_c$ la mai puțin de o săptămînă de maximum; S&P 500 și Nasdaq 100 ating limita $m = 1$: nicio creștere superexponențială în aceste ferestre
- Bitcoin nu trece de condiția erorii de 15% (variațiile lui zilnice sînt prea mari pentru o singură traiectorie netedă) și nici de condiția asupra lui t_c ($\hat{t}_c$ prea departe după t_2)

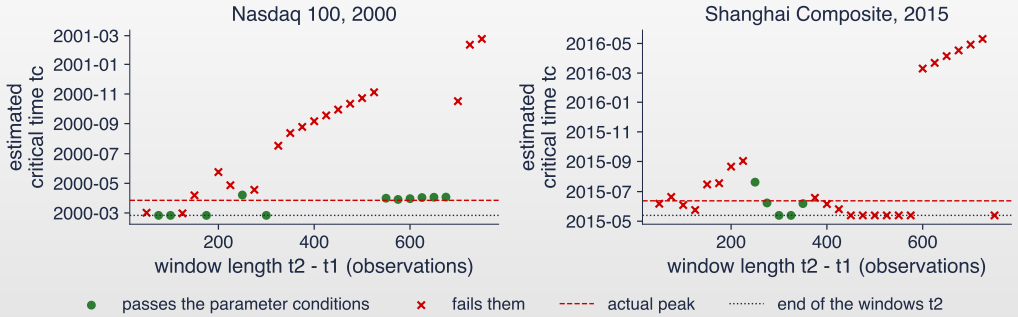
Recapitulare: estimarea

- Patru parametri liniari prin OLS, trei neliniari (t_c, m, ω) prin căutare: metoda Filimonov și Sornette (2013)
- Suprafața de cost este accidentată și plată după t_c: timpul critic este slab identificat
- O fereastră, o ajustare: doar unul dintre cele șase episoade dă o ajustare complet calificată cu 30 de zile înainte de maximum

Indicatorul de încredere LPPLS

- Pînă acum t_1 a fost minimul dinaintea creșterii, o dată cunoscută doar **după** bulă; în timp real începutul nu este cunoscut
  - remediul: pentru fiecare dată de sfîrșit t_2 (azi), ajustăm LPPL pe 29 de ferestre $[t_2 - L, t_2]$, $L = 750, 725, \ldots, 50$ de zile de tranzacționare Shu și Zhu (2020)
- Indicatorul = ponderea ferestrelor care se încheie la t_2 și au o ajustare calificată Sornette et al. (2015); 0: nicio fereastră nu vede o bulă, 1: toate văd
  - LPPLS (singularitatea LPPL) este numele folosit pentru acest indicator; ecuația este aceeași
- Două versiuni în acest capitol
  - **condițiile asupra parametrilor**: B, m, ω, t_c, oscilații, amortizare
  - **toate condițiile**: și eroarea de 15%, testul Lomb și reziduurile staționare (Shu și Zhu (2020))
- Se calculează doar cu date pînă la t_2: un indicator în timp real; o alarmă cînd depășește un prag fixat dinainte (aici 0,2)

Timpul critic estimat pe mai multe ferestre de estimare



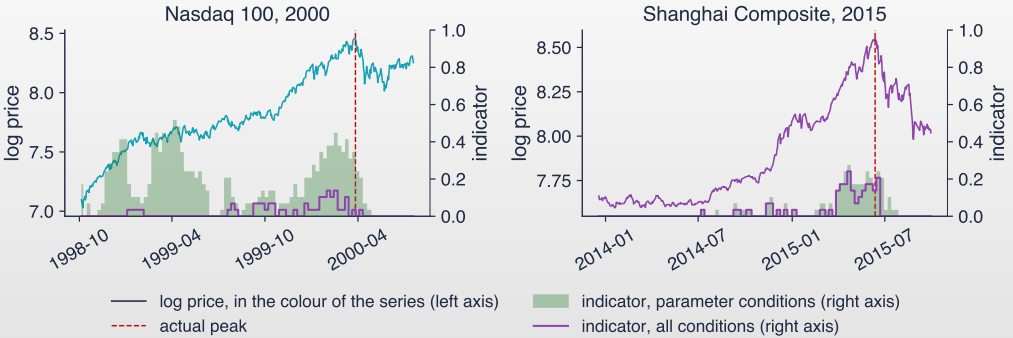
- t_c estimat pentru fiecare dintre cele 29 de ferestre care se încheie cu 30 de zile înainte de maximum; puncte verzi: ajustarea trece de condițiile asupra parametrilor; cruci roșii: nu trece

TSA_ch13_confidence

Interpretarea ferestrelor

- Nasdaq 100 (sfîrșit 25 februarie 2000): 11 din 29 de ferestre trec de condițiile asupra parametrilor, 1 de tot filtrul
  - $\hat{t}_c$ calificat: mediana 30 martie 2000, intervalul 10%–90% 25 februarie 2000 – 2 aprilie 2000; maximul real 27 martie 2000
- Shanghai (sfîrșit 13 mai 2015): 5 din 29 trec de condițiile asupra parametrilor; mediana $\hat{t}_c$ 6 iunie 2015, maximul real 12 iunie 2015
  - condiția asupra lui m cade cel mai des: doar 41% dintre ferestrele Shanghai au $0{,}01 \leq m \leq 0{,}99$
- Ferestrele scurte pun t_c imediat după t_2; ferestrele lungi îl împrăștie: lungimea ferestrei este o alegere de modelare ascunsă

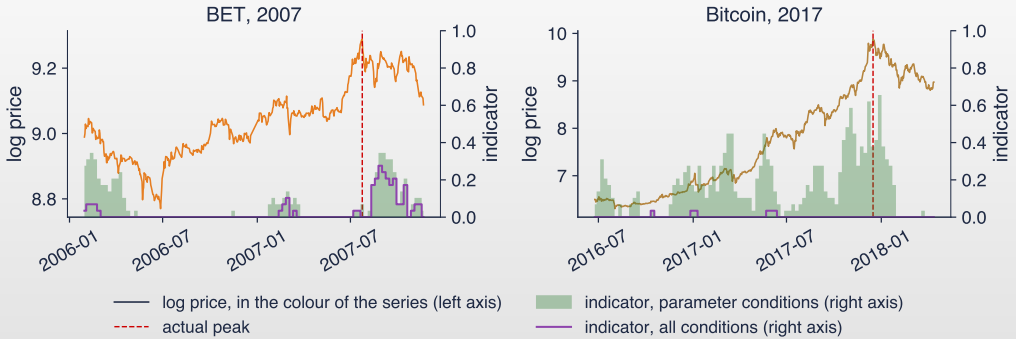
Indicatorul în jurul a patru maxime (1/2)



- Prețul logaritmic (axa din stînga) și indicatorul (axa din dreapta) la fiecare 5 zile de tranzacționare, de la 18 luni înainte pînă la 4 luni după maximum
  - zona verde: condițiile asupra parametrilor; linia mov: toate condițiile

TSA_ch13_confidence

Indicatorul în jurul a patru maxime (2/2)



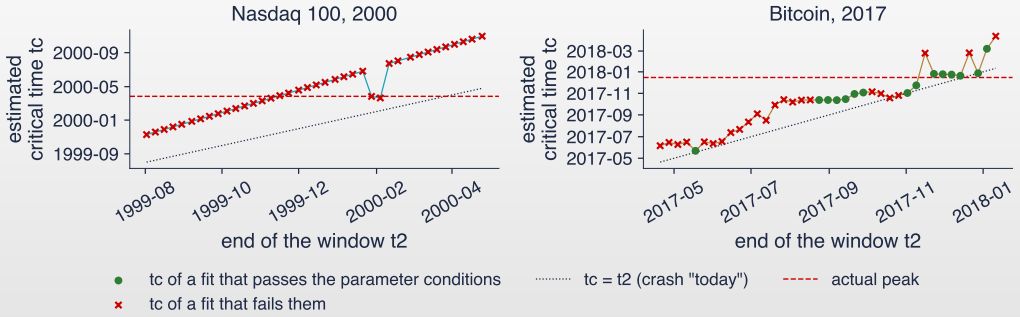
⊡ Aceeași structură și aceleași culori ca în (1/2), pentru BET (2007) și Bitcoin (2017); Bitcoin: o valoare la fiecare 7 zile

TSA_ch13_confidence

Interpretarea indicatorului

- Nasdaq 100: versiunea pe parametri atinge 0,52 la 7 aprilie 1999, cu un an înainte de maximum, și crește din nou în ultimele luni; versiunea completă rămîne sub 0,14
  - Shanghai: ambele versiuni cresc în cele două luni dinaintea maximului (maximum la 22 aprilie 2015: 0,24 cu filtrul complet, 0,28 doar cu condițiile asupra parametrilor)
- BET: cel mai puternic semnal cu filtrul complet, 0,28, vine la 28 august 2007, după maximum: ajustările descriu atunci ultima parte a creșterii, nu viitorul
  - Bitcoin 2017: versiunea pe parametri ajunge la 0,66 la 29 decembrie 2017; versiunea completă este aproape mereu 0 (condiția erorii de 15%)
- Indicatorul se aprinde în bule, dar devreme, tîrziu și cu întreruperi; alegerea filtrului schimbă imaginea

Timpul critic se mută odată cu datele



- Începutul ferestrei fixat la minimul dinaintea creșterii; sfîrșitul t_2 se mută de la 8 luni înainte pînă la o lună după maximum (săptămînal); fiecare punct: $\hat{t}_c$ al ajustării care se încheie la t_2

TSA_ch13_confidence

Interpretarea timpului critic care se mută

- Nasdaq 100: pe 38 de date de sfîrșit, $\hat{t}_c$ variază de la 9 noiembrie 1999 la 30 octombrie 2000 (356 de zile); niciuna dintre aceste ajustări nu trece de condițiile asupra parametrilor
  - Bitcoin 2017: intervalul 21 mai 2017 – 12 aprilie 2018; 38% dintre ajustări trec; eroarea mediană 65 de zile
- Bitcoin: 4 dintre cele 39 de ajustări pun $\hat{t}_c$ exact în t_2, iar 11 la cel mult 20 de zile de t_2: atunci ajustarea spune „sfîrșitul este acum"; Nasdaq 100: $\hat{t}_c$ stă mai ales la limita superioară a spațiului de căutare
  - o prognoză care se tot mută odată cu datele este o descriere a trecutului, nu o predicție
- Alegerea, după crah, a singurei ferestre al cărei $\hat{t}_c$ a fost corect înseamnă **look-ahead bias** (folosirea informației din viitor)

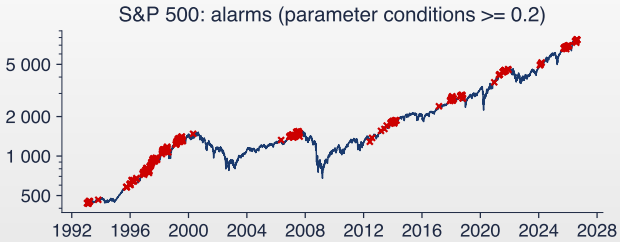
Recapitulare: încrederea obținută din multe ferestre

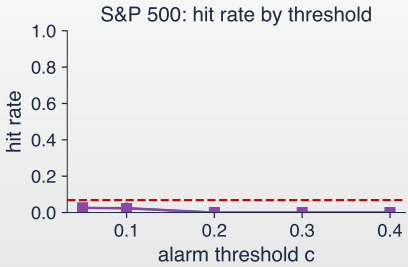
- Începutul unei bule nu este cunoscut: ajustăm 29 de ferestre pentru fiecare dată de sfîrșit
- Indicatorul = ponderea ferestrelor calificate; depinde puternic de filtru
- $\hat{t}_c$ se mută odată cu sfîrșitul datelor: raportați dispersia lui pe ferestre, niciodată o singură valoare

Erori frecvente în evaluarea prognozelor de crah

- **Look-ahead bias**
  - folosirea informației de după t_2
  - alegerea lui t_1 la minimul creșterii, a episoadelor după crah sau a filtrului după ce am văzut rezultatele
- **Selecția**
  - studierea doar a bulelor care s-au spart
  - creșterile care nu s-au încheiat cu un crah sînt uitate
- **Alarmele false și frecvențele de bază**
  - o alarmă este utilă doar dacă un crah este **mai probabil după o alarmă** decît într-o zi obișnuită
  - comparația: $P(\text{crah} \mid \text{alarmă})$ față de $P(\text{crah})$, frecvența necondiționată
- Un test corect fixează totul dinainte (ferestre, filtru, prag, definiția crahului) și rulează pe tot eșantionul

Alarmele pe tot eșantionul (1/2)



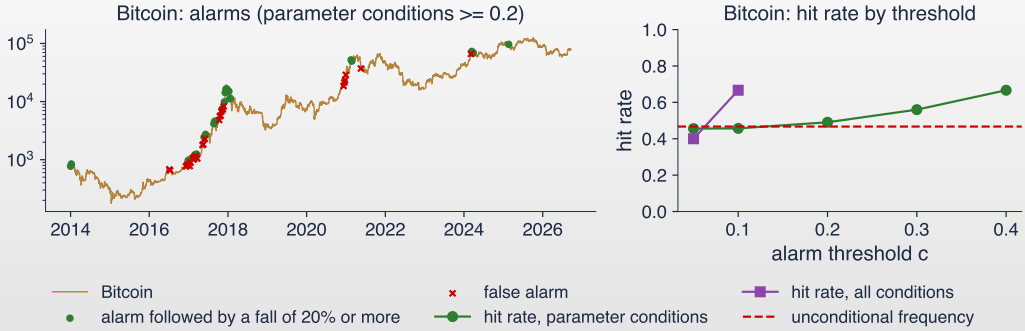


S&P 500 · alarm followed by a fall of 20% or more · false alarm · hit rate, parameter conditions · hit rate, all conditions · unconditional frequency

- S&P 500: indicatorul la fiecare 5 zile de tranzacționare, ianuarie 1993 – septembrie 2026
  - un crah: o scădere de cel puțin 20% în cele 182 de zile de după alarmă; dreapta: rata de reușită în funcție de prag

TSA_ch13_evaluation

Alarmele pe tot eșantionul (2/2)



- Bitcoin: indicatorul la fiecare 7 zile, ianuarie 2014 – septembrie 2026
  - rata de reușită: ponderea datelor cu alarmă urmate de un crah; linia punctată: frecvența necondiționată

TSA_ch13_evaluation

Interpretarea evaluării

- S&P 500: o scădere de 20% în șase luni urmează după 7% dintre toate datele, dar după 0% dintre datele cu alarmă (pragul 0,2, condițiile asupra parametrilor)
  - 20 de grupuri de alarme, niciunul urmat de o astfel de scădere în șase luni; alarmele apar în creșteri calme și constante
  - dintre cele 4 scăderi de 20% sau mai mult din ianuarie 1993, 2 au avut o alarmă în cele șase luni dinaintea maximului (2007 și 2022), dar scăderile au venit mai tîrziu
- Bitcoin: frecvența de bază 47%, după o alarmă 49%: aproape niciun cîștig; 12 dintre cele 14 scăderi de 20% au avut o alarmă înainte de maximum
  - scăderile de 20% sînt atît de frecvente la Bitcoin încît aproape orice alarmă pare „corectă”; pragurile mai mari ajută puțin, pe foarte puține date (56% la 0,3, pe 4% dintre date)
- Indicatorul spune „aceasta seamănă cu un regim de bulă”, nu „crahul vine în următoarele șase luni”

Literatura despre prognoza crahurilor

- Reușite raportate de autorii metodei
  - Jiang et al. (2010): bulele chinezești din 2007 și 2009 diagnosticate dinainte; Sornette et al. (2015): maximul Shanghai din 2015 anunțat înainte să aibă loc
  - Gerlach, Demos și Sornette (2019): bulele Bitcoin din 2012–2018 analizate cu indicatorul de încredere
- Evaluări critice
  - Feigenbaum (2001): termenul log-periodic adaugă puțin odată ce se ține cont de eroarea de estimare
  - Brée și Joseph (2013): pe multe crahuri, condițiile LPPL sînt rareori toate îndeplinite înainte de crah; parametrii sînt instabili
- Propriile noastre cifre arată același lucru: indicatorul reacționează la creșterile puternice, dar momentul lui este imprecis și alarmele lui sînt adesea false

Posibilitățile și limitele modelului LPPL

- **Poate**
  - descrie o creștere cu ritm accelerat și corecții tot mai scurte prin cîțiva parametri interpretabili
  - măsura cît de mult seamănă azi o piață cu o bulă, pe multe ferestre (indicatorul)
- **Nu poate**
  - da data unui crah: t_c marchează sfîrșitul regimului
  - garanta un crah: regimul se poate încheia și cu o scădere lentă
  - spune dacă prețul este peste valoarea fundamentală: pentru aceasta sînt necesare fundamentele
- Folosiți-l împreună cu testele de rădăcini explozive, cu fundamentele (rapoarte de evaluare) și cu măsuri de risc precum VaR 1% (Capitolul 5), nu singur

Recapitulare: evaluarea prognozelor de crah

- Fixați ferestrele, filtrul, pragul și definiția crahului înainte de a vă uita la rezultate
- Comparați rata de reușită după alarme cu frecvența de bază; numărați alarmele false
- LPPL descrie bine bulele; ca instrument de datare a crahurilor, rezultatele lui sînt slabe

Contribuția posibilă a AI

- **Cod**
  - o primă versiune a recursiei BSADF, a ajustării în doi pași Filimonov–Sornette, a indicatorului pe multe ferestre
- **Explicații**
  - o a doua explicație a argumentului ratei de hazard sau a log-periodicității, cu cifrele dumneavoastră
- **Explorare**
  - indicatorul pe multe piețe și perioade, cu filtre diferite, după un protocol fixat dinainte
- Exemplu de prompt
  - `Write Python code that fits the LPPL model to the daily log price of the Shanghai Composite between two dates with the Filimonov-Sornette method (OLS for A, B, C1, C2; grid search plus Nelder-Mead for tc, m, omega), checks the filter conditions of Shu and Zhu (2020) and plots the fit.`

Verificări necesare

- Simulați o traiectorie LPPL cu parametri cunoscuți plus zgomot și verificați că codul regăsește t_c, m și ω
- Convențiile de semn: $B < 0$ pentru o bulă în creștere; testul de rădăcini explozive folosește coada din dreapta, nu coada din stînga din Capitolul 3
- Valorile critice: SADF și GSADF au nevoie de propriile valori critice simulate, nu de tabelul Dickey–Fuller
- Fără look-ahead: orice mărime la data t_2 trebuie să folosească doar date pînă la t_2
- Un crah „prezis” de un răspuns AI după ce a avut loc nu este o predicție; cereți lista completă a alarmelor și a alarmelor false
- Fiecare referință citată: trebuie să existe; verificați DOI-ul

Idei de reținut

- O bulă este un preț peste valoarea fundamentală; o bulă rațională trebuie să crească exploziv
- Testele ADF la dreapta (SADF, GSADF, BSADF) detectează și datează episoadele explozive cu datele disponibile la fiecare dată
- LPPL: creștere superexponențială cu oscilații log-periodice, care se încheie la un timp critic t_c
- Estimați în doi pași (OLS + căutare după t_c, m, ω), filtrați ajustările, folosiți multe ferestre
- Judecați prognozele prin rata de reușită față de frecvența de bază, cu toate alarmele false: datarea crahurilor rămîne dificilă

Formule de reținut

Mărimea	Formula
Bulă rațională	$P_t = F_t + B_t, \quad E_t[B_{t+\mathbf{1}}] = (1+r)B_t$
ADF la dreapta	$\Delta y_t = a + \delta y_{t-\mathbf{1}} + \varepsilon_t, \quad H_{\mathbf{1}}\colon \delta > 0$
GSADF, BSADF	$\sup_{r_{\mathbf{2}}} \sup_{r_{\mathbf{1}}} \mathrm{ADF}_{r_{\mathbf{1}}}^{r_{\mathbf{2}}}, \quad \mathrm{BSADF}(r_{\mathbf{2}}) = \sup_{r_{\mathbf{1}}} \mathrm{ADF}_{r_{\mathbf{1}}}^{r_{\mathbf{2}}}, \quad r_{\mathbf{0}} = 0{,}01 + 1{,}8/\sqrt{T}$
LPPL	$\ln P(t) = A + B(t_c - t)^m + C(t_c - t)^m \cos(\omega \ln(t_c - t) - \phi)$
Forma liniară	$\ln P(t) = A + Bf_t + C_{\mathbf{1}} g_t + C_{\mathbf{2}} h_t, \quad C = \sqrt{C_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}} + C_{\mathbf{2}}^{\mathbf{2}}}$
Raportul de scală	$\lambda = e^{\mathbf{2}\pi/\omega}$
Amortizarea	$m\lvert B\rvert/(\omega\lvert C\rvert) \geq 1$
Indicatorul	ponderea ferestrelor calificate care se încheie la $t_{\mathbf{2}}$

Autoevaluare (1/2)

- **Întrebare**: într-o bulă Blanchard–Watson cu $r = 1\%$ și $\pi = 0{,}95$, cu cît crește bula într-o perioadă în care supraviețuiește?
  - **Răspuns**: cu $1{,}01/0{,}95 - 1 \approx 6{,}3\%$; durata medie de viață $1/(1 - 0{,}95) = 20$ de perioade
- **Întrebare**: un ADF la dreapta pe o fereastră dă $\hat{\delta} = 0{,}004$ cu SE 0,002. Este fereastra explozivă la 5%, dacă valoarea critică este 1,5?
  - **Răspuns**: da: $t = 0{,}004/0{,}002 = 2 > 1{,}5$; respingem rădăcina unitară în favoarea unei rădăcini explozive
- **Întrebare**: de ce folosim coada din dreapta și nu coada din stînga din Capitolul 3?
  - **Răspuns**: alternativa este $\rho > 1$ (exploziv), nu $\rho < 1$ (staționar); dovada pentru ea este un t pozitiv mare

Autoevaluare (2/2)

- **Întrebare**: o ajustare LPPL dă $\omega = 6{,}28$. Cu ce factor se micșorează timpul rămas pînă la t_c între două corecții?
  - **Răspuns**: $\lambda = e^{2\pi/6{,}28} \approx e \approx 2{,}72$
- **Întrebare**: o ajustare are $m = 1{,}0$, la marginea spațiului de căutare. Este o ajustare calificată de bulă?
  - **Răspuns**: nu: filtrul cere $m \leq 0{,}99$; $m = 1$ este un trend liniar în t, nu unul accelerat
- **Întrebare**: un indicator dă alarme înainte de 8 din 10 crahuri. Este un predictor bun?
  - **Răspuns**: încă nu: avem nevoie și de alarmele false și de frecvența de bază; dacă alarmele apar aproape în fiecare zi, este ușor să prinzi 8 crahuri

Idee de proiect

- **Este BET azi într-o bulă?** Un protocol în timp real, fixat înainte de a vedea rezultatul
  - BSADF pe BET și BET-TR săptămînal; indicatorul din acest capitol pe BET zilnic
  - evaluarea din Secțiunea 7 pe BET din 2000: alarme, alarme false, frecvența de bază
- Extensii
  - raportul preț–profit în locul prețului; Bitcoin și Ethereum împreună
  - comparați cu modelele cu schimbare de regim din Capitolul 10
- Lecturi suplimentare despre Bursa de Valori București: Pele și Mazurencu-Marinescu (2012)
- Urmează: Capitolul 14, modele GARCH multivariate

Bibliografie (1/3)

- Blanchard, O. J., & Watson, M. W. (1982). Bubbles, rational expectations and financial markets. NBER Working Paper 945. doi:10.3386/w0945
- Brée, D. S., & Joseph, N. L. (2013). Testing for financial crashes using the log periodic power law model. *International Review of Financial Analysis*, 30, 287–297. doi:10.1016/j.irfa.2013.05.005
- Dickey, D. A., & Fuller, W. A. (1979). Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. *Journal of the American Statistical Association*, 74(366), 427–431. doi:10.1080/01621459.1979.10482531
- Fama, E. F. (2014). Two pillars of asset pricing. *American Economic Review*, 104(6), 1467–1485. doi:10.1257/aer.104.6.1467
- Feigenbaum, J. A. (2001). A statistical analysis of log-periodic precursors to financial crashes. *Quantitative Finance*, 1(3), 346–360. doi:10.1088/1469-7688/1/3/306
- Filimonov, V., & Sornette, D. (2013). A stable and robust calibration scheme of the log-periodic power law model. *Physica A*, 392(17), 3698–3707. doi:10.1016/j.physa.2013.04.012
- Garber, P. M. (1990). Famous first bubbles. *Journal of Economic Perspectives*, 4(2), 35–54. doi:10.1257/jep.4.2.35
- Gerlach, J.-C., Demos, G., & Sornette, D. (2019). Dissection of Bitcoin's multiscale bubble history from January 2012 to February 2018. *Royal Society Open Science*, 6(7), 180643. doi:10.1098/rsos.180643

Bibliografie (2/3)

- Greenwood, R., Shleifer, A., & You, Y. (2019). Bubbles for Fama. *Journal of Financial Economics*, 131(1), 20–43. doi:10.1016/j.jfineco.2018.09.002
- Huang, C., & Petukhina, A. (2022). *Applied Time Series Analysis and Forecasting with Python*. Springer. doi:10.1007/978-3-031-13584-2
- Jiang, Z.-Q., Zhou, W.-X., Sornette, D., Woodard, R., Bastiaensen, K., & Cauwels, P. (2010). Bubble diagnosis and prediction of the 2005–2007 and 2008–2009 Chinese stock market bubbles. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 74(3), 149–162. doi:10.1016/j.jebo.2010.02.007
- Johansen, A., Ledoit, O., & Sornette, D. (2000). Crashes as critical points. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 3(2), 219–255. doi:10.1142/S0219024900000115
- Kindleberger, C. P., & Aliber, R. Z. (2005). *Manias, Panics and Crashes: A History of Financial Crises* (5th ed.). Palgrave Macmillan. doi:10.1057/9780230628045
- Lomb, N. R. (1976). Least-squares frequency analysis of unequally spaced data. *Astrophysics and Space Science*, 39(2), 447–462. doi:10.1007/BF00648343
- Pele, D. T., & Mazurencu-Marinescu, M. (2012). Modelling stock market crashes: The case of Bucharest Stock Exchange. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 58, 533–542. doi:10.1016/j.sbspro.2012.09.1030
- Phillips, P. C. B., & Shi, S. (2020). Real time monitoring of asset markets: Bubbles and crises. In *Handbook of Statistics: Financial, Macro and Micro Econometrics Using R*, 61–80. Elsevier. doi:10.1016/bs.host.2018.12.002

Bibliografie (3/3)

- Phillips, P. C. B., Shi, S., & Yu, J. (2015a). Testing for multiple bubbles: Historical episodes of exuberance and collapse in the S&P 500. *International Economic Review*, 56(4), 1043–1078. doi:10.1111/iere.12132
- Phillips, P. C. B., Shi, S., & Yu, J. (2015b). Testing for multiple bubbles: Limit theory of real-time detectors. *International Economic Review*, 56(4), 1079–1134. doi:10.1111/iere.12131
- Phillips, P. C. B., Wu, Y., & Yu, J. (2011). Explosive behavior in the 1990s Nasdaq: When did exuberance escalate asset values? *International Economic Review*, 52(1), 201–226. doi:10.1111/j.1468-2354.2010.00625.x
- Shiller, R. J. (2015). *Irrational Exuberance* (3rd ed.). Princeton University Press. doi:10.1515/9781400865536
- Shu, M., & Zhu, W. (2020). Detection of Chinese stock market bubbles with LPPLS confidence indicator. *Physica A*, 557, 124892. doi:10.1016/j.physa.2020.124892
- Sornette, D. (2017). *Why Stock Markets Crash: Critical Events in Complex Financial Systems*. Princeton University Press. doi:10.23943/princeton/9780691175959.001.0001
- Sornette, D., Demos, G., Zhang, Q., Cauwels, P., & Zhang, Q. (2015). Real-time prediction and post-mortem analysis of the Shanghai 2015 stock market bubble and crash. *Journal of Investment Strategies*, 4(4), 77–95. doi:10.21314/JOIS.2015.063
- Sornette, D., Johansen, A., & Bouchaud, J.-P. (1996). Stock market crashes, precursors and replicas. *Journal de Physique I*, 6(1), 167–175. doi:10.1051/jp1:1996135