







Serii de timp

Capitolul 14: Modele GARCH multivariate



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București
IDA Institute Digital Assets
Blockchain Research Center
AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance
Academia Română, Institutul de Prognoză Economică
MSCA Digital Finance

Acronime folosite în acest material (1/2)

- **AI**: Artificial Intelligence (inteligență artificială)
- **BEKK**: Baba–Engle–Kraft–Kroner (multivariate GARCH model) — modelul GARCH multivariat Baba–Engle–Kraft–Kroner
- **BET**: Bucharest Exchange Trading (index) — indicele de referință al Bursei de Valori București
- **BNR**: Banca Națională a României
- **CCC**: Constant Conditional Correlation (model) — model cu corelație condiționată constantă
- **CET**: Central European Time (ora Europei Centrale)
- **COVID-19**: COronaVIrus Disease 2019 (boala provocată de coronavirus, 2019)
- **DCC**: Dynamic Conditional Correlation (corelație condiționată dinamică)
- **EODHD**: EOD Historical Data (market-data provider) — furnizor de date de piață
- **FHS**: Filtered Historical Simulation (simularea istorică filtrată)

Acronime folosite în acest material (2/2)

- **GARCH**: Generalised AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity (heteroscedasticitate condiționată autoregresivă generalizată)
- **LR**: Likelihood Ratio (test) — testul raportului de verosimilitate
- **MGARCH**: Multivariate GARCH (GARCH multivariat)
- **OLS**: Ordinary Least Squares (metoda celor mai mici pătrate)
- **QML**: Quasi-Maximum Likelihood (cvasi-verosimilitate maximă)
- **SE**: Standard Error (eroare standard)
- **SUA**: Statele Unite ale Americii
- **UE**: Uniunea Europeană
- **UTC**: Coordinated Universal Time (Temps Universel Coordonné) — timpul universal coordonat
- **VAR**: Vector AutoRegression (model vector autoregresiv)
- **VEC**: Vector (half-vectorised) GARCH model (modelul GARCH vectorial, scris pe semivectorizarea vech)
- **VECM**: Vector Error Correction Model (model vectorial cu corecția erorii)

Motivația capitolului

- **Întrebarea**: cum se mișcă **împreună** riscurile mai multor active? Capitolul 5 a modelat volatilitatea cîte unei singure serii
  - riscul unui portofoliu, al unei acoperiri sau al propagării unei crize depinde de **covariațe și corelații**, care se schimbă în timp
- **Traseul** capitolului
  - matricea de covariață condiționată $\mathbf{H}_t$ și condițiile ei
  - modelele VEC și BEKK; numărul de parametri
  - CCC și DCC: volatilități și corelații estimate în doi pași
  - aplicații: corelațiile în crize, VaR 1% al unui portofoliu, rapoarte de acoperire
- **Capitol de studiu individual**
  - parcurgeți slide-urile în ordine, refaceți exemplele rezolvate, rulați notebook-ul, apoi răspundeți la autoevaluare și la quiz
  - cunoștințe necesare: Capitolul 5 (GARCH), Capitolul 6 (modele VAR), Capitolul 7 (cointegrare)

Rezultatele învățării

- Explicați de ce riscul unui portofoliu, acoperirea riscului și contagiunea cer un model pentru covariațe variabile în timp
- Scrieți modelele VEC, BEKK, CCC și DCC și numărați-le parametrii
- Calculați de mînă un pas al recurenței DCC și interpretați a, b și $a + b$
- Estimați un model DCC în doi pași și testați-l față de corelațiile constante
- Calculați VaR 1% al unui portofoliu pe baza lui $\mathbf{H}_t$ și verificați-l prin backtesting
- Calculați rapoarte dinamice de acoperire cu varianță minimă și eficiența acoperirii

Bibliografie și instrumente

- Manual: Huang și Petukhina (2022) (modelele GARCH); sinteze: Bauwens, Laurent și Rombouts (2006), Silvennoinen și Teräsvirta (2009)
  - lucrările originale: Bollerslev, Engle și Wooldridge (1988) (VEC), Engle și Kroner (1995) (BEKK), Bollerslev (1990) (CCC), Engle (2002) (DCC)
- Quantlet-urile Python ale capitolului: Quantlets/Ch_14
  - pasul 1 (GARCH univariat) folosește pachetul `arch`; pasul 2 (DCC) este scris explicit în circa 40 de linii `numpy`, deoarece `arch` nu are DCC
- Notebook-ul cursului: deschideți în Google Colab
- Curs video: Applied Time Series Analysis with Python

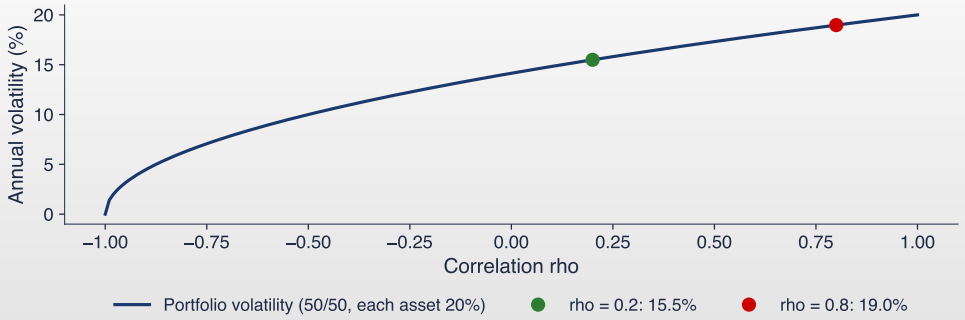
Trei întrebări care cer covariațe

- **Riscul portofoliului**
  - varianța unui portofoliu cu ponderile $\mathbf{w}$ este $\sigma_p^2 = \mathbf{w}^\top \mathbf{H}\mathbf{w}$ Markowitz (1952)
  - $\mathbf{w}$: vectorul ponderilor din portofoliu; $\mathbf{H}$: matricea de covarianță a randamentelor; σ_p^2: varianța portofoliului
  - două active: $\sigma_p^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\rho\sigma_1\sigma_2$, cu volatilitățile σ_1, σ_2 și corelația ρ
  - corelația ρ decide cît ajută diversificarea
- **Acoperirea riscului** (hedging)
  - cîte unități dintr-un activ trebuie vîndute pentru a compensa riscul altuia
  - răspunsul este raportul dintre o covarianță și o varianță (secțiunea 7)
- **Contagiunea**
  - se mișcă piețele mai strîns împreună într-o criză?
  - dacă corelațiile cresc tocmai cînd crește volatilitatea, diversificarea dispare cînd este mai necesară Longin și Solnik (2001)
- Un GARCH univariat (Capitolul 5) dă $\sigma_{1,t}$ și $\sigma_{2,t}$; acest capitol adaugă corelația variabilă ρ_t

Exemplu rezolvat: corelația și riscul portofoliului

- Două active, fiecare cu volatilitatea anuală de 20%, ponderi 50% și 50%
- $\rho = 0{,}2$: $\sigma_p^2 = 0{,}25 \cdot 400 + 0{,}25 \cdot 400 + 2 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}2 \cdot 400 = 240$, deci $\sigma_p = 15{,}5\%$
- $\rho = 0{,}8$: $\sigma_p^2 = 200 + 2 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}8 \cdot 400 = 360$, deci $\sigma_p = 19{,}0\%$
- Aceleași active și aceleași ponderi: riscul portofoliului crește cu mai mult de o cincime doar pentru că a crescut corelația
  - un model de risc care ține ρ fix la valoarea din perioadele calme subestimează riscul într-o criză

Volatilitatea portofoliului în funcție de corelație



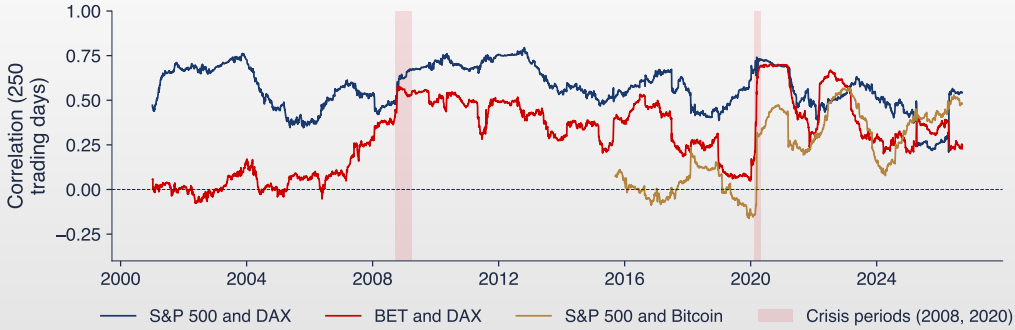
⊡ Un portofoliu 50/50 din două active cu volatilitatea de 20% fiecare; punctele sînt cele două cazuri din exemplul rezolvat

TSA_ch14_correlations

Interpretarea curbei de diversificare

- $\rho = 1$: nicio diversificare, $\sigma_p = 20\%$; $\rho = 0$: $\sigma_p = 20/\sqrt{2} \approx 14{,}1\%$; $\rho = -1$: riscul dispare
- Curba este concavă: aceeași creștere a lui ρ adaugă mai multă volatilitate la corelații mici decît la corelații mari
- Întrebarea capitolului: rămîne ρ constant pe pieţele reale sau se mișcă odată cu starea pieței?

Corelațiile se schimbă în timp



- Corelația randamentelor logaritmice zilnice pe ferestre mobile de 250 de zile de tranzacționare (aproximativ un an), datată la sfîrșitul ferestrei
  - randamente în zilele în care se tranzacționează ambele piețe; zonele colorate: septembrie 2008–martie 2009 și februarie–aprilie 2020

TSA_ch14_correlations

Interpretarea corelațiilor pe ferestre mobile

- S&P 500 și DAX: între 0,21 (aprilie 2026) și 0,80 (octombrie 2012); valoarea pe tot eșantionul 0,60
  - criza datoriilor din zona euro din 2010–2012 a legat cele două piețe chiar mai strîns decît 2008
- BET și DAX: aproape de zero înainte de 2007 (minimum $-0{,}08$), pînă la 0,70 în august 2020: piața românească s-a integrat cu Europa după aderarea la UE
- S&P 500 și Bitcoin: de la $-0{,}16$ (decembrie 2019) la 0,57 (februarie 2023); Bitcoin a devenit după 2020 un activ riscant, corelat cu acțiunile
- Corelațiile se îndepărtează mult de orice valoare constantă: modelul trebuie să le permită să se miște

Tranzacționarea asincronă și deplasarea corelațiilor zilnice

- Piețele se închid la ore diferite: București la 16:45 CET (17:45, ora locală), Frankfurt la 17:30 CET, New York la 22:00 CET; Bitcoin se tranzacționează non-stop
  - o știre care apare după închiderea piețelor europene intră în prețurile europene abia a doua zi
- Exemplu: 9 aprilie 2025, suspendarea tarifelor vamale ale SUA, anunțată după-amiaza la New York
  - 9 aprilie: S&P 500 $+9{,}1\%$, DAX $-3{,}1\%$; 10 aprilie: S&P 500 $-3{,}5\%$, DAX $+4{,}4\%$
  - aceeași știre, în două zile diferite: corelația zilnică este deplasată spre zero
- Corelațiile randamentelor zilnice și săptămînale din 2015: S&P 500 și BET 0,32 față de 0,46; S&P 500 și DAX 0,56 față de 0,68; BET și DAX 0,42 față de 0,47
  - diferența este mică pentru BET și DAX, care se închid aproape simultan; remedii: randamente săptămînale sau randamente între momente sincrone

Recapitulare: rolul volatilității multivariate

- Varianța portofoliului $\mathbf{w}^\top \mathbf{H}\mathbf{w}$, rapoartele de acoperire și contagiunea depind toate de covariațe
- Corelațiile pe ferestre mobile se mișcă mult pe piețele reale: integrare, crize, clase noi de active
- Verificați orele de tranzacționare: închiderile asincrone deplasează corelațiile zilnice spre zero

Modelul pentru N serii de randamente

- $\mathbf{r}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{H}_t^{1/2}\boldsymbol{\eta}_t, \quad \boldsymbol{\eta}_t$ i.i.d. cu media $\mathbf{0}$ și covarianța $\mathbf{I}_N$
  - $\mathbf{r}_t$: vectorul celor N randamente din ziua t; $\boldsymbol{\mu}$: mediile (sau un model VAR pentru medie, Capitolul 6)
  - $\mathbf{H}_t^{1/2}$: o rădăcină pătrată a lui $\mathbf{H}_t$, de exemplu factorul Cholesky $\mathbf{L}_t$, cu $\mathbf{L}_t\mathbf{L}_t^\top = \mathbf{H}_t$
- $\mathbf{H}_t = \mathrm{Var}(\mathbf{r}_t \mid \mathcal{F}_{t-1})$: **matricea de covarianță condiționată**, dată fiind informația $\mathcal{F}_{t-1}$ până în ziua $t-1$
  - diagonala: variațele condiționate $h_{ii,t} = \sigma_{i,t}^2$ (Capitolul 5)
  - în afara diagonalei: covariațele condiționate $h_{ij,t}$; corelația condiționată este $\rho_{ij,t} = h_{ij,t}/\sqrt{h_{ii,t}h_{jj,t}}$
- Un model **GARCH multivariat** (MGARCH) este o regulă care calculează $\mathbf{H}_t$ din șocurile trecute $\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}$ și din $\mathbf{H}_{t-1}$

Două condiții pentru $\mathbf{H}_t$

- **Simetria**
  - $h_{ij,t} = h_{ji,t}$, deci doar $N(N+1)/2$ elemente sînt distincte
  - operatorul vech așază triunghiul inferior într-un vector: $\operatorname{vech}\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix} = (h_{11}, h_{12}, h_{22})^\top$
  - $N = 2$: 3 elemente; $N = 10$: 55; $N = 50$: 1 275
- **Caracterul pozitiv definit**
  - $\mathbf{w}^\top \mathbf{H}_t \mathbf{w} > 0$ pentru orice $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, adică orice portofoliu are variantă pozitivă
  - $N = 2$: $h_{11,t} > 0$ și $h_{11,t} h_{22,t} - h_{12,t}^2 > 0$, adică $|\rho_{12,t}| < 1$
  - exemplu: $h_{11} = 4$, $h_{22} = 1$, $h_{12} = 2{,}5$ dau $4 - 6{,}25 < 0$: o „corelație” imposibilă, de 1,25
- Un model MGARCH bun garantează ambele condiții pentru **orice** t, cu puțini parametri

Estimarea prin verosimilitate maximă

- Dacă $\boldsymbol{\eta}_t$ urmează distribuția Normală multivariată, logaritmul verosimilității este
  - $\ell(\theta) = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left(N\log 2\pi + \log|\mathbf{H}_t| + \boldsymbol{\varepsilon}_t^\top \mathbf{H}_t^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t\right)$
  - $|\mathbf{H}_t|$ este determinantul; pentru $N = 1$ regăsim verosimilitatea GARCH din Capitolul 5
- Randamentele au cozi groase, deci verosimilitatea Normală este folosită ca **cvasi-verosimilitate maximă** (QML)
  - estimatorii rămîn consistenți; erorile standard au nevoie de o corecție robustă (sandwich)
- Fiecare evaluare a lui $\ell(\theta)$ cere $\mathbf{H}_t^{-1}$ și $|\mathbf{H}_t|$ pentru toți t: costul crește repede cu N și cu numărul de parametri

Recapitulare: cadrul GARCH multivariat

- $\mathbf{H}_t$: variațele condiționate pe diagonală, covariațele în afara ei; $\rho_{ij,t} = h_{ij,t}/\sqrt{h_{ii,t}h_{jj,t}}$
- Condiții: simetria ($N(N+1)/2$ elemente distincte) și caracterul pozitiv definit
- Estimare prin (cvasi-)verosimilitate maximă cu densitatea Normală multivariată

Modelul VEC

- Bollerslev, Engle și Wooldridge (1988): fiecare element al lui $\mathbf{H}_t$ depinde de toate pătratele și produsele încrucișate ale șocurilor trecute și de toate elementele lui $\mathbf{H}_{t-\mathbf{1}}$
  - VEC(1,1): $\operatorname{vech}(\mathbf{H}_t) = \mathbf{c} + \mathbf{A}\operatorname{vech}(\boldsymbol{\varepsilon}_{t-\mathbf{1}}\boldsymbol{\varepsilon}_{t-\mathbf{1}}^{\top}) + \mathbf{B}\operatorname{vech}(\mathbf{H}_{t-\mathbf{1}})$
  - $\boldsymbol{\varepsilon}_{t-\mathbf{1}}\boldsymbol{\varepsilon}_{t-\mathbf{1}}^{\top}$: matricea pătratelor și a produselor încrucișate ale șocurilor de ieri; $\mathbf{c}$: un vector de constante; $\mathbf{A}$: reacția la șocuri; $\mathbf{B}$: persistența
  - cu $k = N(N+1)/2$: $\mathbf{c}$ are k elemente, $\mathbf{A}$ și $\mathbf{B}$ sînt $k \times k$: în total $k + 2k^{\mathbf{2}}$ parametri
- $N = 2$: $k = 3$ și 21 de parametri; $N = 10$: 6 105
  - iar caracterul pozitiv definit al lui $\mathbf{H}_t$ **nu** este garantat: cere restricții complicate
- **VEC diagonal**
  - $h_{ij,t} = c_{ij} + a_{ij}\varepsilon_{i,t-\mathbf{1}}\varepsilon_{j,t-\mathbf{1}} + b_{ij}h_{ij,t-\mathbf{1}}$
  - fiecare element este un GARCH(1,1) separat; $3k$ parametri (9 pentru $N = 2$); tot fără garanția caracterului pozitiv definit

Modelul BEKK

- Engle și Kroner (1995): $\mathbf{H}_t = \mathbf{C}\mathbf{C}^\top + \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}^\top \mathbf{A} + \mathbf{B}^\top \mathbf{H}_{t-1}\mathbf{B}$
  - BEKK: Baba, Engle, Kraft și Kroner; $\mathbf{C}$ inferior triunghiulară, $\mathbf{A}$ și $\mathbf{B}$ de dimensiune $N \times N$
  - $\mathbf{A}$: reacția la șocurile de ieri; $\mathbf{B}$: persistența lui $\mathbf{H}_{t-1}$; c_{ij}^*: elementele matricei $\mathbf{C}\mathbf{C}^\top$
- **Pozitiv definită prin construcție**
  - fiecare termen este un „pătrat" $\mathbf{X}^\top \mathbf{M}\mathbf{X}$ al unei matrice $\mathbf{M}$ pozitiv (semi)definite
  - $\mathbf{M}$: $\mathbf{I}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}^\top$ sau $\mathbf{H}_{t-1}$; $\mathbf{X}$: $\mathbf{C}^\top$, $\mathbf{A}$ sau $\mathbf{B}$
  - parametri: $N(N+1)/2 + 2N^2$, adică 11 pentru $N = 2$ și 255 pentru $N = 10$
- **BEKK diagonal** ($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ diagonale)
  - $h_{12,t} = c_{12}^* + a_{11}a_{22}\,\varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} + b_{11}b_{22}\,h_{12,t-1}$
  - **BEKK scalar**: $\mathbf{A} = a\mathbf{I}$, $\mathbf{B} = b\mathbf{I}$, aceeași dinamică pentru toate elementele
- Elementele din afara diagonalei ale unei matrice $\mathbf{A}$ complete măsoară **transmiterea volatilității**: un șoc al activului 1 crește varianța activului 2

Exemplu rezolvat: un pas al unui BEKK diagonal

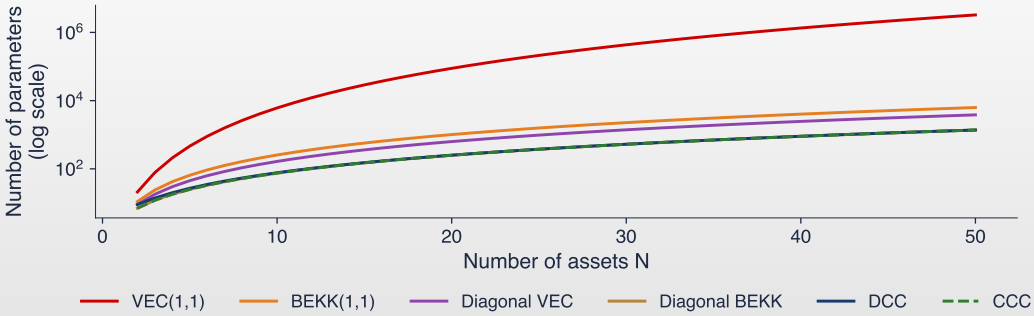
- Date: $c_{12}^{*} = 0{,}02$, $a_{11} = 0{,}30$, $a_{22} = 0{,}25$, $b_{11} = 0{,}94$, $b_{22} = 0{,}95$, $h_{12,t-1} = 0{,}5$; șocurile de ieri $\varepsilon_{1,t-1} = -2$, $\varepsilon_{2,t-1} = -1{,}5$
- Pasul 1: coeficienții $a_{11}a_{22} = 0{,}075$ și $b_{11}b_{22} = 0{,}893$
- Pasul 2: produsul șocurilor $\varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} = 3{,}000$ (ambele negative: o scădere comună)
- Pasul 3: $h_{12,t} = 0{,}020 + 0{,}075 \cdot 3{,}000 + 0{,}893 \cdot 0{,}5 = 0{,}020 + 0{,}225 + 0{,}4465 = 0{,}6915$
- O scădere comună crește covarianța de la 0,5 la 0,6915; un șoc cu semne opuse ar fi scăzut-o
  - observație: un BEKK diagonal nu are transmitere a volatilității, deoarece $a_{12} = a_{21} = 0$

Problema dimensionalității

Model	$N = 2$	$N = 5$	$N = 10$	$N = 50$
VEC(1,1)	21	465	6 105	3 252 525
VEC diagonal	9	45	165	3 825
BEKK(1,1)	11	65	255	6 275
BEKK diagonal	7	25	75	1 375
BEKK scalar	5	17	57	1 277
CCC	7	25	75	1 375
DCC	9	27	77	1 377

- Numărul de parametri ai ecuației de variață (mediile μ nu sînt numărate); CCC și DCC: 3 parametri GARCH pe activ, plus cele $N(N-1)/2$ corelații, iar DCC încă 2
- Un VEC complet pentru 50 de active are mai mulți parametri decît numărul de observații al oricărui eșantion

Numărul de parametri în funcție de numărul de active



- Numărul de parametri ai ecuației de variață pentru $N = 2, \ldots, 50$ de active, scară logaritmică

TSA_ch14_parameters

Interpretarea numărului de parametri

- VEC crește ca $N^4/2$, BEKK complet ca $2N^2$: ambele devin imposibil de estimat dincolo de cîteva active
- CCC și DCC cresc ca $N^2/2$, dar corelațiile **nu** se obțin prin optimizare numerică: ele sînt corelații de selecție (secțiunea 4)
  - optimizarea DCC lucrează doar cu 2 parametri, a și b, oricare ar fi N

Recapitulare: VEC și BEKK

- VEC: cel mai general model liniar; $k + 2k^2$ parametri, fără garanția caracterului pozitiv definit
- BEKK: pozitiv definit prin construcție; elementele a_{ij} din afara diagonalei măsoară transmiterea volatilității
- Versiunile diagonală și scalară reduc numărul de parametri, dar elimină transmiterea volatilității

Separarea volatilităților de corelații

- Descompunerea: $\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{R}_t \mathbf{D}_t, \quad \mathbf{D}_t = \text{diag}(\sigma_{1,t}, \ldots, \sigma_{N,t})$
  - $\mathbf{R}_t$: matricea corelațiilor condiționate (cu 1 pe diagonală); element cu element: $h_{ij,t} = \rho_{ij,t}\, \sigma_{i,t}\sigma_{j,t}$
  - fiecare $\sigma_{i,t}$ este un GARCH(1,1) univariat Bollerslev (1986): $\sigma^2_{i,t} = \omega_i + \alpha_i \varepsilon^2_{i,t-1} + \beta_i \sigma^2_{i,t-1}$
- **Reziduurile standardizate**
  - $z_{i,t} = \varepsilon_{i,t}/\sigma_{i,t}$
  - matricea lor de covarianță condiționată este chiar $\mathbf{R}_t$
- **CCC** (corelație condiționată constantă, Bollerslev (1990))
  - $\mathbf{R}_t = \mathbf{R}$ pentru orice t
  - $\mathbf{H}_t$ este pozitiv definită ori de cîte ori $\mathbf{R}$ este; $\mathbf{R}$ se estimează prin corelația de selecție a lui $z_{i,t}$
  - covariațele se mișcă totuși, dar numai prin volatilități; corelațiile pe ferestre mobile din secțiunea 1 contrazic această ipoteză

Robert Engle și modelul DCC



Robert F. Engle (n. 1942), Premiul Nobel 2003

Foto: Jon Demske (2022); CC BY-SA 4.0; Wikimedia Commons

- Engle (2002): corelațiile urmează o recurență de tip GARCH
  - $\mathbf{Q}_t = (1 - a - b)\,\bar{\mathbf{Q}} + a\,\mathbf{z}_{t-\mathbf{1}}\mathbf{z}_{t-\mathbf{1}}^{\top} + b\,\mathbf{Q}_{t-\mathbf{1}}$
  - $\mathbf{Q}_t$: o matrice auxiliară, cu elementele $q_{ij,t}$; $\mathbf{z}_{t-\mathbf{1}}$: vectorul reziduurilor standardizate de ieri
  - $\rho_{ij,t} = q_{ij,t} / \sqrt{q_{ii,t}\, q_{jj,t}}$: rescalarea pune 1 pe diagonală
- $\bar{\mathbf{Q}}$: corelația necondiționată a lui $\mathbf{z}_t$, fixată la valoarea de selecție (**țintirea corelației**)
  - $a \geq 0$: reacția la șocul comun de ieri; $b \geq 0$: persistența; $a + b < 1$: revenire la $\bar{\mathbf{Q}}$
- $a = b = 0$ readuce modelul CCC

Estimarea în doi pași

- Logaritmul verosimilității se descompune într-o parte de volatilitate și o parte de corelație: $\ell = \ell_V(\theta_\mathbf{1}) + \ell_C(\theta_\mathbf{1}, a, b)$
  - $\theta_\mathbf{1}$: parametrii GARCH ai tuturor seriilor; ℓ_V depinde doar de ei, ℓ_C și de a și b
- **Pasul 1**
  - estimați cîte un GARCH(1,1) pentru fiecare serie separat (Capitolul 5)
  - păstrați $\hat{\sigma}_{i,t}$ și $\hat{z}_{i,t} = \hat{\varepsilon}_{i,t}/\hat{\sigma}_{i,t}$
- **Pasul 2**
  - fixați $\bar{\mathbf{Q}}$ la corelația de selecție a lui $\hat{\mathbf{z}}_t$ și maximizați doar după (a, b)
  - $\ell_C(a, b) = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \sum_t \left(\log |\mathbf{R}_t| + \hat{\mathbf{z}}_t^\top \mathbf{R}_t^{-\mathbf{1}} \hat{\mathbf{z}}_t - \hat{\mathbf{z}}_t^\top \hat{\mathbf{z}}_t \right)$
- Estimatorul este consistent, rapid și funcționează pentru N mare; erorile standard din pasul 2 ignoră eroarea de estimare din pasul 1 (sînt prea mici)
- **Test față de CCC**
  - raportul de verosimilitate $LR = 2(\ell_C^{DCC} - \ell_C^{CCC})$, comparat cu $\chi^\mathbf{2}(2)$ (valoarea critică la 5%: 5,99)
  - vezi și Tse (2000)
  - ℓ_C^{DCC}, ℓ_C^{CCC}: logaritmii maximizați ai verosimilității de corelație pentru cele două modele; un LR mare respinge corelația constantă
  - $a = b = 0$ se află pe frontiera spațiului parametrilor, deci valoarea critică $\chi^\mathbf{2}(2)$ este conservatoare

Exemplu rezolvat: un pas al recurenței DCC

- Date: $a = 0{,}05$, $b = 0{,}93$, $\bar{q}_{\mathbf{12}} = 0{,}5$ (și $\bar{q}_{\mathbf{11}} = \bar{q}_{\mathbf{22}} = 1$), $\mathbf{Q}_{t-\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$, ieri $z_{\mathbf{1},t-\mathbf{1}} = -2$, $z_{\mathbf{2},t-\mathbf{1}} = -2{,}5$
- Pasul 1: $1 - a - b = 0{,}020$
- Pasul 2: $q_{\mathbf{12},t} = 0{,}020 \cdot 0{,}5 + 0{,}05 \cdot (-2)(-2{,}5) + 0{,}93 \cdot 0{,}5 = 0{,}010 + 0{,}250 + 0{,}465 = 0{,}725$
- Pasul 3: $q_{\mathbf{11},t} = 0{,}020 + 0{,}05 \cdot 4 + 0{,}93 = 1{,}150$; $\quad q_{\mathbf{22},t} = 0{,}020 + 0{,}05 \cdot 6{,}25 + 0{,}93 = 1{,}2625$
- Pasul 4: $\rho_{\mathbf{12},t} = 0{,}725/\sqrt{1{,}150 \cdot 1{,}2625} = 0{,}602$
  - o scădere comună mare crește corelația de mîine de la 0,50 la 0,602; fără pasul 3, „corelația” $q_{\mathbf{12},t}$ ar fi 0,725

Interpretarea parametrilor *a* și *b*

- *a* este coeficientul de **știri**
  - cît mișcă un șoc comun de o zi corelația
  - valori zilnice tipice: 0,01–0,05
- $a + b$ este **persistența**
  - o abatere a lui $q_{ij,t}$ de la $\bar{q}_{ij}$ se reduce zilnic cu factorul $a + b$
  - timpul de înjumătățire: $\ln 0{,}5 / \ln(a + b)$ zile; $a + b = 0{,}98$ dă 34 de zile, 0,99 dă 69 de zile
- Aceeași interpretare ca pentru α și $\alpha + \beta$ într-un GARCH(1,1) (Capitolul 5)
- Variante: DCC asimetric (scăderile comune mișcă mai mult corelațiile decît creșterile comune) Cappiello, Engle și Sheppard (2006); DCC corectat Aielli (2013)

Recapitulare: CCC și DCC

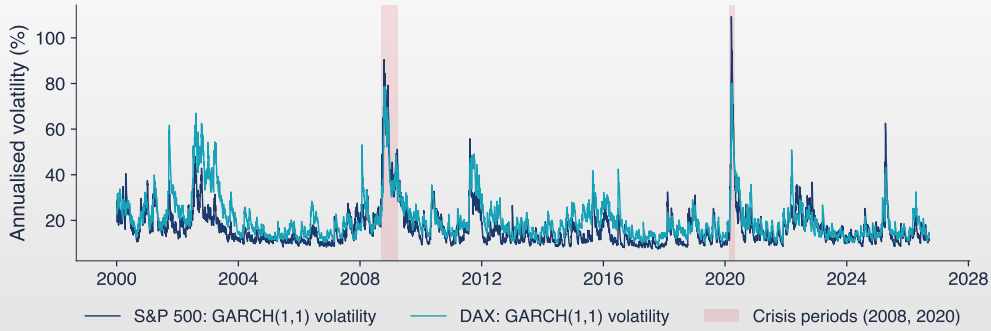
- $\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{R}_t \mathbf{D}_t$: volatilități GARCH combinate cu o matrice de corelații
- CCC: $\mathbf{R}$ constantă; DCC: $\mathbf{Q}_t$ urmează o recurență de tip GARCH, cu parametrii a, b
- Doi pași: GARCH univariat, apoi (a, b) cu țintirea corelației; testul LR față de CCC

Pasul 1: două modele GARCH univariate

Indice	μ	ω	α	β	$\alpha+\beta$	kurtosis r_t	kurtosis z_t
S&P 500	0,063	0,027	0,122	0,857	0,980	10,5	1,8
DAX	0,067	0,030	0,098	0,886	0,984	6,2	1,4

- Randamente logaritmice zilnice în %, 6 605 zile comune de tranzacționare, 4 ianuarie 2000–18 septembrie 2026 (EODHD); GARCH(1,1) cu medie constantă, QML gaussian; kurtosis: excesul de kurtosis
- Standardizarea cu $\hat{\sigma}_{i,t}$ elimină cea mai mare parte a excesului de kurtosis, dar nu tot: cozile lui z_t rămîn mai groase decît la distribuția Normală
- Corelația randamentelor 0,599; corelația reziduurilor $\bar{q}_{\mathbf{12}} = 0{,}575$, estimația CCC

Pasul 1: volatilitățile condiționate



⊡ Volatilitatea GARCH(1,1) prognozată cu un pas înainte, $\hat{\sigma}_{i,t}\sqrt{252}$, anualizată, în %; zonele colorate: crizele din 2008 și 2020

TSA_ch14_dcc_estimation

Interpretarea volatilităților

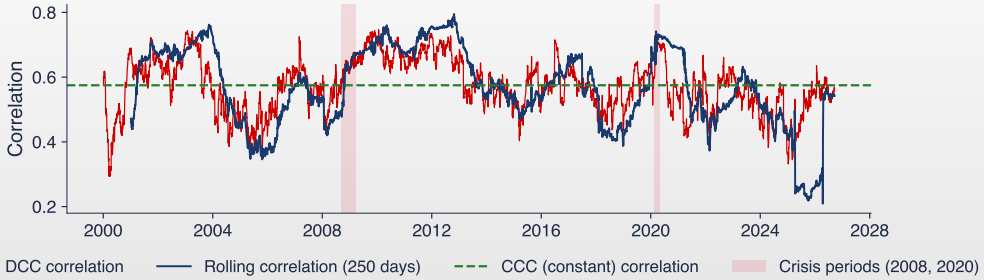
- Ambele volatilități ating maximul în aceleași săptămîni: S&P 500 109% pe 17 martie 2020, DAX 80% pe 25 martie 2020
  - volatility clustering apare **simultan**: covarianța crește chiar și cu o corelație constantă
- Persistența 0,980 și 0,984: șocurile de volatilitate se sting lent, ca în Capitolul 5
- Pasul 2 pune o altă întrebare: după eliminarea volatilităților, este corelația rămasă constantă?

Pasul 2: modelul DCC estimat

Mărimea	**Estimație**	**SE**
a	0,0152	0,0035
b	0,9766	0,0065
$a + b$	0,9918	
Timpul de înjumătățire al unui șoc de corelație (zile)	85	
LR față de CCC	131,8	
Valoarea critică $\chi^2(2)$, 5%	5,99	

- a este mic, dar bine determinat; $a + b$ este aproape de 1: șocurile de corelație durează luni
- LR = 131,8 este mult peste 5,99: corelația constantă este respinsă
- SE: erori standard din hessiana pasului 2 (prea mici, ignoră pasul 1)

Corelația DCC dintre S&P 500 și DAX



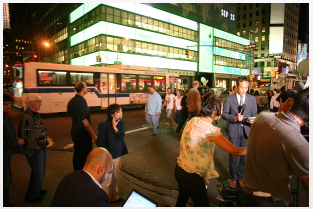
- Corelația DCC prognozată cu un pas înainte, $\hat{\rho}_{\mathbf{12},t}$, corelația pe ferestre mobile de 250 de zile și valoarea CCC $\bar{q}_{\mathbf{12}}$; date zilnice, 4 ianuarie 2000–18 septembrie 2026

TSA_ch14_dcc_estimation

Interpretarea corelației DCC

- Corelația DCC variază între 0,29 (martie 2000) și 0,75 (ianuarie 2010), în jurul unei medii de 0,57
- Urmează corelația pe ferestre mobile, dar reacționează în cîteva zile, nu într-un an, și nu cere alegerea unei ferestre
  - estimarea pe ferestre mobile este mai instabilă (abaterea standard 0,122 față de 0,083) și sare cînd o zi extremă intră în fereastră sau iese din ea
- Estimarea pe ferestre mobile scade brusc în 2025–2026: zilele asincrone din aprilie 2025 (secțiunea 1) o trag în jos exact 250 de zile

Corelațiile în crize



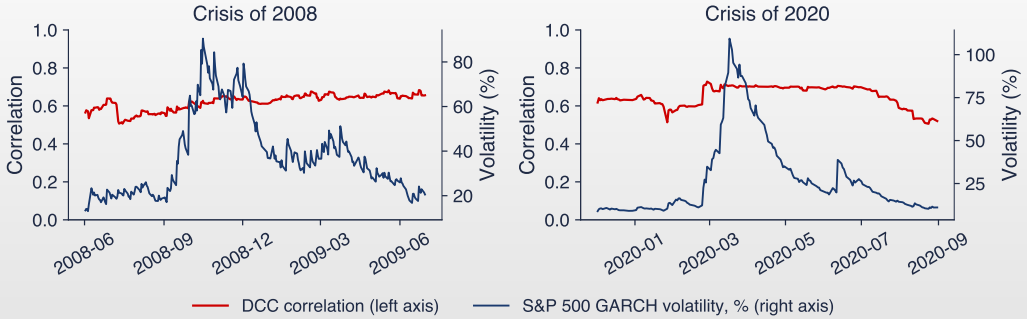
Lehman Brothers, New York, 15 septembrie 2008

Foto: Robert Scoble (2008); CC BY 2.0; Wikimedia Commons

Perioada	$\bar{\rho}^{DCC}$	$\bar{\sigma}^{S\&P}$ (%)
Calmă, 2017–2019	0,56	13
sept. 2008–martie 2009	0,63	51
febr.–aprilie 2020	0,70	58

- Corelația DCC medie și volatilitatea anualizată medie a S&P 500 în fiecare perioadă
- Corelațiile sînt mai mari în crize, dar volatilitatea crește mult mai mult
- Atenție Forbes și Rigobon (2002): corelația de selecție crește mecanic cînd crește volatilitatea, chiar dacă legătura nu s-a schimbat; DCC reduce acest efect, deoarece lucrează cu z_t, nu cu r_t

Corelația DCC în crizele din 2008 și 2020



- Corelația DCC dintre S&P 500 și DAX (axa din stînga) și volatilitatea GARCH a S&P 500 (axa din dreapta)

TSA_ch14_dcc_estimation

Interpretarea celor două crize

- 2008: volatilitatea atinge 90% pe 16 octombrie 2008, iar corelația urcă lent de la 0,57 la 0,68 abia pe 23 iunie 2009
- 2020: corelația sare la 0,73 pe 28 februarie 2020, înaintea maximului volatilității (109% pe 17 martie 2020)
  - un șoc global a lovit ambele piețe în aceleași zile: scăderile comune alimentează recurența DCC
- Corelațiile și volatilitățile nu ating neapărat maximul în același timp: modelarea lor separată, ca în DCC, arată diferența

Recapitulare: S&P 500 și DAX

- Pasul 1: volatilități GARCH persistente, cu maxime simultane
- Pasul 2: $a + b = 0{,}9918$; LR 131,8: corelația nu este constantă
- Corelații mai mari în 2008 și 2020, dar cea mai mare schimbare apare în volatilitate

Un model DCC cu cinci active

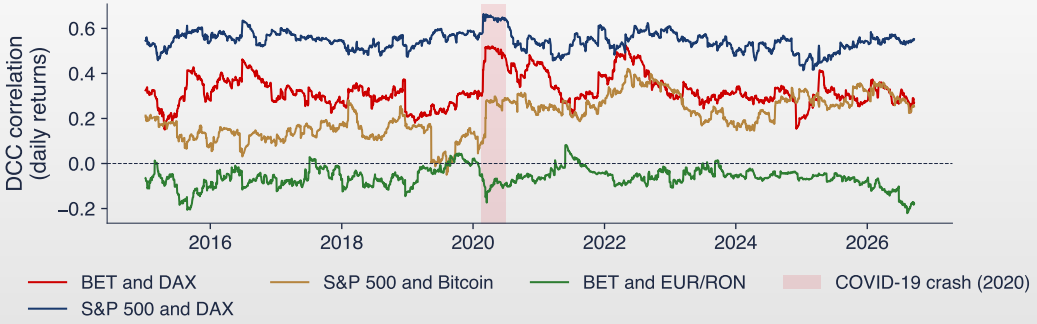


Bursa de Valori București

Foto: Corina Chitu (2024); CC BY-SA 4.0; Wikimedia Commons

- Randamente logaritmice zilnice în cele 2 815 zile în care se tranzacționează toate cele cinci piețe, din 6 ianuarie 2015
  - EUR/RON: cursul de referință BNR (stabilit la ora 13:00, ora Bucureștiului); BET: Bursa de Valori București; Bitcoin: închiderea zilei (UTC)
- Pasul 1: persistența GARCH S&P 500 0,961, DAX 0,965, BET 0,941, EUR/RON 0,985, Bitcoin 0,958
- Pasul 2: $\hat{a} = 0{,}0088$ (SE 0,0019), $\hat{b} = 0{,}9782$ (SE 0,0062); timpul de înjumătățire 53 de zile; LR față de CCC 88,5
  - 10 perechi de corelații, o singură pereche de parametri de dinamică (a, b) pentru toate

Corelațiile dinamice a patru perechi



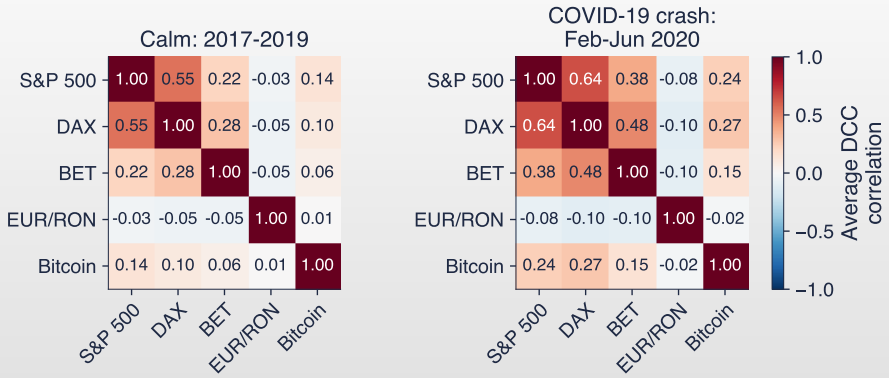
⊡ Corelațiile DCC prognozate cu un pas înainte din modelul cu cinci active; zona colorată: crahul COVID-19, jumătatea lui februarie–iunie 2020

TSA_ch14_dcc_panel

Interpretarea celor patru perechi

- S&P 500 și DAX: legătura cea mai puternică, media 0,54; BET și DAX: media 0,32, între 0,15 și 0,53 (aprilie 2022)
- S&P 500 și Bitcoin: de la $-0{,}05$ la 0,42 (mai 2022); media 0,21
  - beneficiul de diversificare al lui Bitcoin s-a redus după 2020
- BET și EUR/RON: aproape de zero (media $-0{,}06$); un leu mai slab tinde să însoțească un BET mai slab, o legătură negativă mică
- Un singur (a, b) pentru toate perechile: perechi cu viteze diferite sînt forțate la același ritm, prețul parcimoniei DCC

Corelațiile medii: perioadă calmă și criză



⊡ Matricea medie a corelațiilor DCC prognozate cu un pas înainte: 2017–2019 și jumătatea lui februarie–iunie 2020 (89 de zile comune de tranzacționare)

TSA_ch14_dcc_panel

Interpretarea celor două matrice

- Corelația medie dintre perechi crește de la 0,12 la 0,19
  - BET și DAX: 0,28 → 0,48; S&P 500 și BET: 0,22 → 0,38; DAX și Bitcoin: 0,10 → 0,27
- Cele mai mari creșteri apar pentru BET și pentru Bitcoin, slab legate de piețele mari în perioadele calme: tocmai activele care ar fi trebuit să diversifice riscul
- EUR/RON rămîne aproape de zero sau ușor negativ față de toate piețele de acțiuni: singurul element de diversificare din acest set

Recapitulare: cinci piețe

- Un singur DCC pentru 5 active: 2 parametri de dinamică pentru 10 corelații
- Corelațiile pieței românești cu Europa și ale lui Bitcoin cu acțiunile se mișcă mult
- În crahul din 2020 legăturile slabe s-au întărit cel mai mult: diversificarea slăbește în crize

De la $\mathbf{H}_t$ la VaR-ul unui portofoliu

- Randamentul portofoliului $r_{p,t} = \mathbf{w}^\top \mathbf{r}_t$; media condiționată $\mu_p = \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\mu}$ și volatilitatea $\sigma_{p,t} = \sqrt{\mathbf{w}^\top \mathbf{H}_t \mathbf{w}}$
- **VaR 1%**
  - pierderea depășită cu probabilitatea 1%, $\text{VaR}_{0,01,t} = -q_{0,01}(r_{p,t}) = -(\mu_p + q\,\sigma_{p,t})$
  - distribuția Normală: $q = z_{0,01} = -2{,}326$
  - **simularea istorică filtrată** (FHS): q = cuantila empirică de 1% a randamentelor standardizate trecute ale portofoliului, $(r_{p,t} - \mu_p)/\sigma_{p,t}$
- Trei variante pentru $\mathbf{H}_t$: DCC; CCC (volatilități GARCH cu o corelație constantă); **statică** (o singură matrice de covarianță de selecție pentru toate zilele)

Exemplu rezolvat: VaR 1% pentru două active

- Prognozele de azi: $\sigma_1 = 1{,}5\%$, $\sigma_2 = 1{,}2\%$ (zilnic), ponderi 50% și 50%, media 0
- Calm, $\rho_t = 0{,}3$: $\sigma_p^2 = 0{,}25 \cdot 2{,}25 + 0{,}25 \cdot 1{,}44 + 2 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}3 \cdot 1{,}8$, deci $\sigma_p = 1{,}092\%$ și VaR 1% $= 2{,}326 \cdot 1{,}092 = 2{,}54\%$
- Criză, $\rho_t = 0{,}9$ (aceleași volatilități): $\sigma_p = 1{,}316\%$ și VaR 1% $= 3{,}06\%$
  - doar saltul corelației adaugă o cincime la VaR; într-o criză reală cresc și volatilitățile
- Pentru un portofoliu de 1 milion de lei: VaR 1% de aproximativ 25,4 mii de lei în perioada calmă și 30,6 mii de lei în cazul de criză

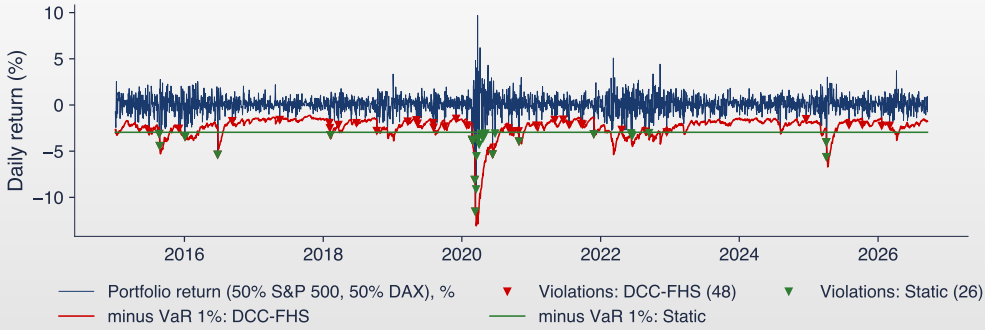
Backtesting pentru VaR (1/2): frecvența

- O **încălcare** în ziua t
  - $r_{p,t} < -\text{VaR}_{\mathbf{0,01},t}$
  - un VaR 1% corect are încălcări în 1% din zile, la momente aleatoare
- **Testul Kupiec** Kupiec (1995) (frecvența)
  - x încălcări în n zile, $\hat{p} = x/n$
  - $LR_{uc} = -2 \log \frac{(1-0{,}01)^{n-x}\, 0{,}01^{x}}{(1-\hat{p})^{n-x}\, \hat{p}^{x}} \sim \chi^{\mathbf{2}}(1)$; respingem la 5% dacă $LR_{uc} > 3{,}84$
  - *uc*: unconditional coverage (acoperirea necondiționată); raportul compară verosimilitatea încălcărilor la rata de 1% cu cea la rata observată $\hat{p}$

Backtesting pentru VaR (2/2): independența

- **Testul Christoffersen** Christoffersen (1998) (independența)
  - este o încălcare mai probabilă în ziua de după o încălcare?
  - compară $\pi_{11} = P(\text{încălcare} \mid \text{încălcare ieri})$ cu $\pi_{01} = P(\text{încălcare} \mid \text{fără încălcare ieri})$
- Statistica
  - $LR_{ind} = -2 \log \dfrac{(1-\hat{\pi})^{n_{00}+n_{10}}\, \hat{\pi}^{\,n_{01}+n_{11}}}{(1-\hat{\pi}_{01})^{n_{00}}\, \hat{\pi}_{01}^{n_{01}}\, (1-\hat{\pi}_{11})^{n_{10}}\, \hat{\pi}_{11}^{n_{11}}} \sim \chi^2(1)$
  - n_{ij}: numărul de zile în starea j după o zi în starea i (1: încălcare, 0: fără); $\hat{\pi}_{01} = n_{01}/(n_{00}+n_{01})$, $\hat{\pi}_{11} = n_{11}/(n_{10}+n_{11})$
  - $\hat{\pi}$: rata totală a încălcărilor; numărătorul presupune $\pi_{01} = \pi_{11}$ (fără grupare); un p-value mic respinge independența
- **Schema de evaluare în afara eșantionului**
  - estimați toți parametrii pe 2000–2014 (3 712 zile), apoi rulați filtrele mai departe pe 2015–2026 (2 893 de zile), fără reestimare

VaR 1% al unui portofoliu S&P 500 și DAX, 2015–2026



Randamentul zilnic al unui portofoliu 50/50 și minus VaR 1% din DCC cu simulare istorică filtrată și dintr-o matrice de covarianță statică; triunghiuri: încălcări

TSA_ch14_portfolio_var

Interpretarea backtesting-ului

Model	Încălcări	Rata	LR_{uc}	p	p indep.	febr.–apr. 2020
DCC, Normală	65	2,25%	33,6	$<0{,}001$	0,003	4
DCC, FHS	48	1,66%	10,6	0,001	0,008	4
CCC, Normală	57	1,97%	21,4	$<0{,}001$	0,030	4
Statică, Normală	26	0,90%	0,3	0,577	0,001	10

- Așteptat: aproximativ 29 de încălcări în 2 893 de zile
- Modelele dinamice cu cuantilele distribuției Normale au prea multe încălcări: reziduurile au cozi groase (Capitolul 5); FHS ($q = -2{,}59$) reduce rata la 1,66%
- VaR-ul static trece testul de frecvență, dar încălcările lui se grupează: 10 doar în februarie–aprilie 2020, iar după o încălcare ziua următoare este tot o încălcare cu probabilitatea 11,5%
- VaR-ul static este prea mare în anii calmi (2,95% în fiecare zi) și mult prea mic într-un crah; un VaR dinamic se adaptează în ambele sensuri

Recapitulare: VaR-ul portofoliului

- $\sigma_{p,t} = \sqrt{\mathbf{w}^\top \mathbf{H}_t \mathbf{w}}$; VaR 1% $= -(\mu_p + q\,\sigma_{p,t})$
- Backtesting în afara eșantionului: Kupiec (frecvența) și Christoffersen (independența)
- Covariațele dinamice corectează gruparea încălcărilor; cozile groase cer o cuantilă mai bună decît cea a distribuției Normale

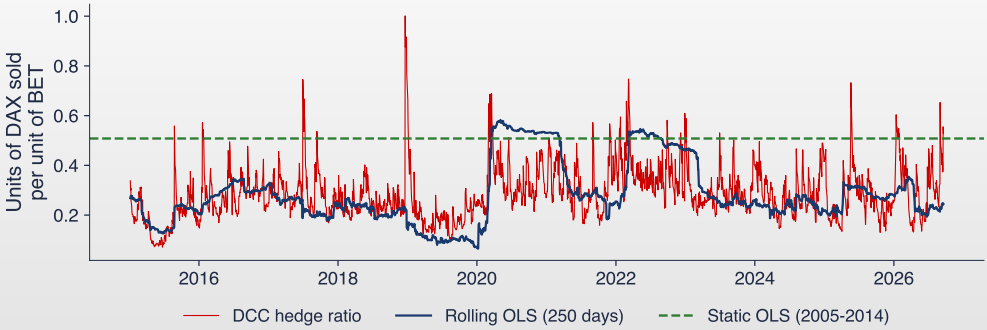
Raportul de acoperire cu variantă minimă

- Deținеți o unitate din activul s (de exemplu acțiuni românești, BET) și vindeți h unități dintr-un activ de acoperire f (de exemplu un contract futures pe DAX)
  - randamentul acoperit $r_{s,t} - h\, r_{f,t}$, cu varianța $\sigma_s^2 - 2h\,\sigma_{sf} + h^2\sigma_f^2$
  - σ_s^2, σ_f^2: variațele celor două randamente; σ_{sf}: covarianța lor
- Anulînd derivata în raport cu h: $h^* = \dfrac{\sigma_{sf}}{\sigma_f^2} = \rho\,\dfrac{\sigma_s}{\sigma_f}$ Ederington (1979)
  - h^* static: panta OLS a regresiei lui r_s pe r_f
  - **dinamic**: $h_t^* = h_{sf,t}/h_{ff,t}$ dintr-un model MGARCH Kroner și Sultan (1993); $h_{sf,t}$, $h_{ff,t}$: elemente ale lui $\mathbf{H}_t$
- **Eficiența acoperirii**
  - $HE = 1 - \mathrm{Var}(r_s - h\, r_f)/\mathrm{Var}(r_s)$, ponderea variației eliminate
  - cu $h = h^*$ constant: $HE = \rho^2$; o acoperire este atît de bună cît este corelația

Exemplu rezolvat: un raport de acoperire

- Date: $\sigma_s = 1{,}2\%$, $\sigma_f = 1{,}0\%$ (zilnic), $\rho = 0{,}8$
- Pasul 1: $\sigma_{sf} = \rho\,\sigma_s\sigma_f = 0{,}8 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}0 = 0{,}96$
- Pasul 2: $h^* = \sigma_{sf}/\sigma_f^2 = 0{,}96/1 = 0{,}96$: vindeți 0,96 unități din f pentru fiecare unitate din s
- Pasul 3: $HE = \rho^2 = 0{,}64$; volatilitatea poziției acoperite este $\sigma_s\sqrt{1-\rho^2} = 0{,}72\%$ în loc de $1{,}2\%$
- Dacă mîine DCC prognozează $\rho_t = 0{,}5$ și $\sigma_{f,t} = 2\%$, raportul de acoperire devine $0{,}5 \cdot 1{,}2/2 = 0{,}3$: poziția trebuie ajustată

Acoperirea BET cu DAX, 2015–2026



- Randamente zilnice în zilele comune de tranzacționare din 2005; toți parametrii estimați pe 2005–2014; DCC: $h_t = \hat{\rho}_t \hat{\sigma}_{BET,t} / \hat{\sigma}_{DAX,t}$; OLS pe ferestre mobile: panta din ultimele 250 de zile

TSA_ch14_hedging

Interpretarea rapoartelor de acoperire

- Raportul static 0,51 reflectă perioada 2005–2014, care include criza din 2008; după 2015 raportul DCC are media 0,29, între 0,07 și 1,00 (20 decembrie 2018)
- Eficiența acoperirii în afara eșantionului (2 893 de zile): statică 13,6%, OLS pe ferestre mobile 18,0%, DCC 19,1%
  - rapoartele dinamice elimină mai mult risc, iar DCC face acest lucru fără alegerea unei ferestre
- Toate valorile eficienței sînt modeste: corelația DCC dintre BET și DAX are media 0,32 din 2015, deci ρ^2 este mic
  - un raport DCC zilnic implică și costuri zilnice de tranzacționare, care nu sînt incluse aici

Recapitulare: acoperirea riscului

- $h_t^* = h_{sf,t}/h_{ff,t} = \rho_t \sigma_{s,t}/\sigma_{f,t}$; $HE = 1 - \text{Var(acoperit)}/\text{Var(neacoperit)}$
- BET cu DAX: DCC 19,1% față de static 13,6% în afara eșantionului
- Evaluați o acoperire în afara eșantionului și după costurile de tranzacționare

Legături cu Capitolele 5, 6 și 7

- **Capitolul 5**
  - orice model MGARCH conține modele GARCH univariate
  - în DCC ele sînt chiar pasul 1
- **Capitolul 6**
  - un VAR modelează transmiterea în **medie** (de exemplu, dacă randamentul DAX de ieri ajută la prognoza randamentului BET de azi)
  - BEKK cu **A** complet modelează transmiterea în **varianță**
  - cele două se combină: un VAR pentru $\boldsymbol{\mu}_t$ și un MGARCH pentru $\mathbf{H}_t$; indicii de transmitere din descompunerea variației Diebold și Yilmaz (2009)
- **Capitolul 7**
  - cointegrarea este o legătură pe **termen lung** între nivelurile prețurilor
  - corelația este o legătură pe **termen scurt** între randamente
  - două prețuri pot fi puternic corelate de la o zi la alta și să se îndepărteze definitiv, sau pot fi cointegrate cu o corelație zilnică mică
  - un VECM poate avea erori de tip DCC: echilibru în medie, corelație dinamică în șocuri

Limite și extensii



Bursa din Frankfurt

Foto: Ank Kumar (2015); CC BY-SA 4.0; Wikimedia Commons

- Un singur (a, b) pentru toate perechile; DCC nu are transmitere între volatilități
- QML cu distribuția Normală subestimează cozile: pentru risc folosiți inovații Student t sau FHS
- Asimetria: corelațiile reacționează mai mult la scăderile comune (DCC asimetric, Cappiello, Engle și Sheppard (2006))
- Sute de active: modele factoriale, verosimilitate compusă și shrinkage aplicat lui $\bar{\mathbf{Q}}$
- Corelația măsoară dependența liniară; pentru extreme comune vedeți copulele și dependența în cozi Longin și Solnik (2001)

Contribuția posibilă a AI

- **Cod**
  - o primă versiune a verosimilității DCC, a unui filtru BEKK, a testului Kupiec
- **Explicații**
  - o a doua explicație a descompunerii $\mathbf{D}_t\mathbf{R}_t\mathbf{D}_t$, a țintirii corelației, a formulei raportului de acoperire
- **Explorare**
  - DCC pentru multe perechi (piețe din Europa Centrală și de Est, sectoare, valute) și comportamentul lor în criză
- Exemplu de prompt
  - `Write Python code that fits a GARCH(1,1) to daily BET and DAX log returns on common trading days, estimates a DCC(1,1) model by two-step maximum likelihood with correlation targeting, plots the dynamic hedge ratio and compares its out-of-sample hedging effectiveness with static OLS.`

Verificări necesare

- Biblioteca: `arch` nu are model DCC; un răspuns AI care apelează `arch_model(..., vol='DCC')` l-a inventat
- Momentul: $\mathbf{Q}_t$ trebuie să folosească $\mathbf{z}_{t-1}$, nu $\mathbf{z}_t$; altfel VaR-ul și acoperirea folosesc informația de mîine
- Rescalarea: $\rho_{ij,t} = q_{ij,t}/\sqrt{q_{ii,t}q_{jj,t}}$, iar fiecare $\mathbf{R}_t$ trebuie să aibă 1 pe diagonală și $|\rho| < 1$
- Calendarele: aliniați prețurile pe zilele comune de tranzacționare înainte de a calcula randamentele; atenție la închiderile asincrone
- Evaluarea: estimați pe o perioadă și testați pe alta; simulați un DCC cu (a, b) cunoscuți și verificați că programul îi regăsește
- Fiecare referință citată: trebuie să existe; verificați DOI-ul

Idei de reținut

- Riscul portofoliului, acoperirea și contagiunea depind de covariațele variabile în timp $\mathbf{H}_t$
- VEC este general, dar are prea mulți parametri; BEKK este pozitiv definit prin construcție și măsoară transmiterea volatilității
- CCC și DCC descompun $\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{R}_t \mathbf{D}_t$ și se estimează în doi pași; DCC are nevoie în pasul 2 doar de (a, b)
- Corelațiile reale se mișcă: integrare, crize, active noi; corelația constantă este respinsă
- Aplicații: VaR 1% al portofoliului, cu backtesting; rapoarte dinamice de acoperire evaluate în afara eșantionului

Formule de reținut

Mărimea	**Formula**
Corelația	$\rho_{ij,t} = h_{ij,t}/\sqrt{h_{ii,t}h_{jj,t}}$
BEKK(1,1)	$\mathbf{H}_t = \mathbf{C}\mathbf{C}^\top + \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\varepsilon}_{t-\mathbf{1}}\boldsymbol{\varepsilon}_{t-\mathbf{1}}^\top \mathbf{A} + \mathbf{B}^\top \mathbf{H}_{t-\mathbf{1}}\mathbf{B}$
CCC, DCC	$\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t\mathbf{R}_t\mathbf{D}_t, \quad \mathbf{D}_t = \mathrm{diag}(\sigma_{i,t})$
DCC	$\mathbf{Q}_t = (1-a-b)\bar{\mathbf{Q}} + a\,\mathbf{z}_{t-\mathbf{1}}\mathbf{z}_{t-\mathbf{1}}^\top + b\,\mathbf{Q}_{t-\mathbf{1}}, \quad \rho_{ij,t} = q_{ij,t}/\sqrt{q_{ii,t}q_{jj,t}}$
Timpul de înjumătățire	$\ln 0{,}5/\ln(a+b)$
VaR 1% al portofoliului	$-(\mathbf{w}^\top\boldsymbol{\mu} + q_{\mathbf{0,01}}\sqrt{\mathbf{w}^\top\mathbf{H}_t\mathbf{w}})$
Raportul de acoperire	$h_t^* = h_{sf,t}/h_{ff,t}, \quad HE = 1 - \mathrm{Var}(r_s - hr_f)/\mathrm{Var}(r_s)$

Autoevaluare (1/2)

- **Întrebare**: cîți parametri are un BEKK(1,1) diagonal pentru $N = 3$?
  - **Răspuns**: $N(N+1)/2 + 2N = 6 + 6 = 12$
- **Întrebare**: $h_{\mathbf{11}} = 1$, $h_{\mathbf{22}} = 4$, $h_{\mathbf{12}} = 1{,}2$. Cît este corelația și este matricea pozitiv definită?
  - **Răspuns**: $\rho = 1{,}2/\sqrt{4} = 0{,}6$; da, $1 \cdot 4 - 1{,}44 > 0$
- **Întrebare**: DCC cu $a = 0{,}02$, $b = 0{,}97$, $\bar{q}_{\mathbf{12}} = 0{,}4$, $q_{\mathbf{11},t-\mathbf{1}} = q_{\mathbf{22},t-\mathbf{1}} = 1$, $q_{\mathbf{12},t-\mathbf{1}} = 0{,}4$ și $z_{t-\mathbf{1}} = (1, -1)$. Cît este $q_{\mathbf{12},t}$?
  - **Răspuns**: $0{,}01 \cdot 0{,}4 + 0{,}02 \cdot (-1) + 0{,}97 \cdot 0{,}4 = 0{,}372$; mișcările în sens opus reduc corelația
- **Întrebare**: cît este timpul de înjumătățire al șocurilor de corelație cînd $a + b = 0{,}95$?
  - **Răspuns**: $\ln 0{,}5 / \ln 0{,}95 \approx 13{,}5$ zile

Autoevaluare (2/2)

- **Întrebare**: $\sigma_s = 2\%$, $\sigma_f = 1\%$, $\rho = 0{,}5$. Cît sînt raportul de acoperire și eficiența acoperirii?
  - **Răspuns**: $h^* = 0{,}5 \cdot 2/1 = 1$; $HE = 0{,}25$
- **Întrebare**: un VaR 1% are 26 de încălcări în 2 500 de zile, dintre care 10 într-o singură lună. Este un VaR bun?
  - **Răspuns**: frecvența este corectă (25 așteptate), dar încălcările se grupează: VaR-ul nu trece testul de independență și nu se adaptează crizelor
- **Întrebare**: de ce poate fi corelația zilnică dintre S&P 500 și BET mai mică decît cea săptămînală?
  - **Răspuns**: tranzacționarea asincronă: știrile de la New York ajung la București a doua zi, deci randamentele zilnice din aceeași zi nu se potrivesc
- **Întrebare**: dovedește o corelație mai mare într-o criză existența contagiunii?
  - **Răspuns**: nu, prin ea însăși: volatilitatea mai mare crește mecanic corelația de selecție Forbes și Rigobon (2002); comparați corelațiile reziduurilor standardizate
- Urmează: Capitolul 15, recapitulare și pregătire pentru examen; verificați-vă cu quiz-ul acestui capitol

Bibliografie (1/2)

- Aielli, G. P. (2013). Dynamic conditional correlation: On properties and estimation. *Journal of Business & Economic Statistics*, 31(3), 282–299. doi:10.1080/07350015.2013.771027
- Bauwens, L., Laurent, S., & Rombouts, J. V. K. (2006). Multivariate GARCH models: A survey. *Journal of Applied Econometrics*, 21(1), 79–109. doi:10.1002/jae.842
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3), 307–327. doi:10.1016/0304-4076(86)90063-1
- Bollerslev, T. (1990). Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: A multivariate generalized ARCH model. *The Review of Economics and Statistics*, 72(3), 498–505. doi:10.2307/2109358
- Bollerslev, T., Engle, R. F., & Wooldridge, J. M. (1988). A capital asset pricing model with time-varying covariances. *Journal of Political Economy*, 96(1), 116–131. doi:10.1086/261527
- Cappiello, L., Engle, R. F., & Sheppard, K. (2006). Asymmetric dynamics in the correlations of global equity and bond returns. *Journal of Financial Econometrics*, 4(4), 537–572. doi:10.1093/jjfinec/nbl005
- Christoffersen, P. F. (1998). Evaluating interval forecasts. *International Economic Review*, 39(4), 841–862. doi:10.2307/2527341
- Diebold, F. X., & Yilmaz, K. (2009). Measuring financial asset return and volatility spillovers, with application to global equity markets. *The Economic Journal*, 119(534), 158–171. doi:10.1111/j.1468-0297.2008.02208.x
- Ederington, L. H. (1979). The hedging performance of the new futures markets. *The Journal of Finance*, 34(1), 157–170. doi:10.1111/j.1540-6261.1979.tb02077.x
- Engle, R. F. (2002). Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models. *Journal of Business & Economic Statistics*, 20(3), 339–350. doi:10.1198/073500102288618487

Bibliografie (2/2)

- Engle, R. F., & Kroner, K. F. (1995). Multivariate simultaneous generalized ARCH. *Econometric Theory*, 11(1), 122–150. doi:10.1017/S0266466600009063
- Forbes, K. J., & Rigobon, R. (2002). No contagion, only interdependence: Measuring stock market comovements. *The Journal of Finance*, 57(5), 2223–2261. doi:10.1111/0022-1082.00494
- Huang, C., & Petukhina, A. (2022). *Applied Time Series Analysis and Forecasting with Python*. Springer. doi:10.1007/978-3-031-13584-2
- Kroner, K. F., & Sultan, J. (1993). Time-varying distributions and dynamic hedging with foreign currency futures. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28(4), 535–551. doi:10.2307/2331164
- Kupiec, P. H. (1995). Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. *The Journal of Derivatives*, 3(2), 73–84. doi:10.3905/jod.1995.407942
- Longin, F., & Solnik, B. (2001). Extreme correlation of international equity markets. *The Journal of Finance*, 56(2), 649–676. doi:10.1111/0022-1082.00340
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77–91. doi:10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x
- Silvennoinen, A., & Teräsvirta, T. (2009). Multivariate GARCH models. In T. G. Andersen et al. (Eds.), *Handbook of Financial Time Series* (pp. 201–229). Springer. doi:10.1007/978-3-540-71297-8_9
- Tse, Y. K. (2000). A test for constant correlations in a multivariate GARCH model. *Journal of Econometrics*, 98(1), 107–127. doi:10.1016/S0304-4076(99)00080-9