

Serii de timp

Capitolul 15: Recapitulare și pregătire pentru examen



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București
IDA Institute Digital Assets
Blockchain Research Center
AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance
Academia Română, Institutul de Prognoză Economică
MSCA Digital Finance

Acronime folosite în acest material (1/4)

- **ACF**: Autocorrelation Function (funcția de autocorelație)
- **ADF**: Augmented Dickey–Fuller (test) — testul Dickey–Fuller augmentat
- **AI**: Artificial Intelligence (inteligență artificială)
- **AIC**: Akaike Information Criterion (criteriul informațional Akaike)
- **AR**: AutoRegressive (model) — model autoregresiv
- **ARCH**: AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity (heteroscedasticitate condiționată autoregresivă)
- **ARCH-LM**: ARCH Lagrange Multiplier (test) — testul multiplicatorului Lagrange pentru efecte ARCH
- **ARFIMA**: AutoRegressive Fractionally Integrated Moving Average (model) — model autoregresiv fracționar integrat cu medie mobilă
- **ARIMA**: AutoRegressive Integrated Moving Average (model) — model autoregresiv integrat cu medie mobilă
- **ARMA**: AutoRegressive Moving Average (model) — model autoregresiv cu medie mobilă
- **ASE**: Academia de Studii Economice din București
- **BEKK**: Baba–Engle–Kraft–Kroner (multivariate GARCH model) — modelul GARCH multivariat Baba–Engle–Kraft–Kroner
- **BET**: Bucharest Exchange Trading (index) — indicele de referință al Bursei de Valori București
- **BIC**: Bayesian Information Criterion (criteriul informațional bayesian al lui Schwarz)
- **BNR**: Banca Națională a României
- **BVB**: Bursa de Valori București
- **CCC**: Constant Conditional Correlation (model) — model cu corelație condiționată constantă
- **DCC**: Dynamic Conditional Correlation (corelație condiționată dinamică)

Acronime folosite în acest material (2/4)

- **DHR**: Dynamic Harmonic Regression (regresie armonică dinamică)
- **DLOG**: Difference of the LOGarithm (EViews function) — diferența logaritmului (funcție EViews); DLOG(X,1,12) $= \Delta\Delta_{12} \ln X$
- **DM**: Diebold–Mariano (test) — testul Diebold–Mariano de comparare a prognozelor
- **EC1**: Error Correction term 1 (primul termen de corecție a erorii)
- **EC2**: Error Correction term 2 (al doilea termen de corecție a erorii)
- **ECM**: Error Correction Model (model cu corecția erorii)
- **ENTSO-E**: European Network of Transmission System Operators for Electricity (rețeaua europeană a operatorilor de transport și de sistem pentru energie electrică)
- **EODHD**: EOD Historical Data (market-data provider) — furnizor de date de piață
- **FEVD**: Forecast Error Variance Decomposition (descompunerea variației erorii de prognoză)
- **FRED**: Federal Reserve Economic Data (baza de date economice a Rezervei Federale din St. Louis)
- **GARCH**: Generalised AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity (heteroscedasticitate condiționată autoregresivă generalizată)
- **GJR**: Glosten–Jagannathan–Runkle (GARCH model) — modelul GARCH asimetric Glosten–Jagannathan–Runkle
- **GPH**: Geweke–Porter-Hudak (estimator) — estimatorul Geweke–Porter-Hudak al parametrului de memorie lungă
- **HEGY**: Hylleberg–Engle–Granger–Yoo (seasonal unit-root test) — testul Hylleberg–Engle–Granger–Yoo de rădăcină unitară sezonieră

Acronime folosite în acest material (3/4)

- **HICP**: Harmonised Index of Consumer Prices (indicele armonizat al prețurilor de consum)
- **HLN**: Harvey–Leybourne–Newbold (small-sample correction of the DM test) — corecția Harvey–Leybourne–Newbold a testului DM pentru eșantioane mici
- **HP**: Hodrick–Prescott (filter) — filtrul Hodrick–Prescott
- **IAPC**: Indicele armonizat al prețurilor de consum
- **IPC**: Indicele prețurilor de consum
- **IRF**: Impulse Response Function (funcția de răspuns la impuls)
- **KPSS**: Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin (test) — testul de staționaritate Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin
- **LB**: Ljung–Box (test) — testul de autocorelație Ljung–Box
- **LPPL**: Log-Periodic Power Law (legea de putere log-periodică)
- **LPPLS**: Log-Periodic Power Law Singularity (model) — modelul singularității cu lege de putere log-periodică
- **LSTM**: Long Short-Term Memory (network) — rețea cu memorie pe termen lung și scurt
- **MA**: Moving Average (medie mobilă)
- **MAE**: Mean Absolute Error (eroarea absolută medie)
- **MAPE**: Mean Absolute Percentage Error (eroarea procentuală absolută medie)
- **MASE**: Mean Absolute Scaled Error (eroarea absolută medie scalată)
- **NBER**: National Bureau of Economic Research (biroul național de cercetare economică al SUA, care datează recesiunile)

Acronime folosite în acest material (4/4)

- **OCSB**: Osborn–Chui–Smith–Birchenhall (seasonal unit-root test) — testul Osborn–Chui–Smith–Birchenhall de rădăcină unitară sezonieră
- **OLS**: Ordinary Least Squares (metoda celor mai mici pătrate)
- **PACF**: Partial AutoCorrelation Function (funcția de autocorelație parțială)
- **PIB**: Produsul intern brut
- **PPP**: Purchasing Power Parity (paritatea puterii de cumpărare)
- **QQ**: Quantile–Quantile (plot) — graficul cuantilă–cuantilă
- **RMSE**: Root Mean Squared Error (rădăcina erorii pătratice medii)
- **ROBOR**: Romanian Interbank Offer Rate (rata dobînzii la care băncile din România oferă depozite interbancare)
- **SAR**: Seasonal AutoRegressive term (EViews) — termen autoregresiv sezonier (EViews)
- **SARIMA**: Seasonal ARIMA (model) — model ARIMA sezonier
- **SE**: Standard Error (eroare standard)
- **SES**: Simple Exponential Smoothing (netezire exponențială simplă)
- **SIGMASQ**: SIGMA SQuared, the innovation variance (EViews) — varianța inovațiilor (EViews)
- **SUA**: Statele Unite ale Americii
- **TVA**: Taxa pe valoarea adăugată
- **VAR**: Vector AutoRegression (model vector autoregresiv)
- **VEC**: Vector (half-vectorised) GARCH model (modelul GARCH vectorial, scris pe semivectorizarea vech)
- **VECM**: Vector Error Correction Model (model vectorial cu corecția erorii)

Întrebarea de azi și traseul

- **Întrebarea**: ce spune întregul curs despre o serie de timp și cum se evaluează aceste cunoștințe la examen?
  - un capitol care leagă Capitolele 0–14
- **Traseul**
  - Partea I: harta cursului, cîte două slide-uri de recapitulare pentru fiecare capitol, o sinteză a testelor și a modelelor
  - Partea a II-a: metoda Box–Jenkins de la un capăt la altul, pe inflația din România
  - Partea a III-a: examenul (format, criterii, opt probleme rezolvate), proiectul de echipă, prezența și quiz-urile
- Capitolele 11–14 sînt pentru studiu individual



Academia de Studii Economice din București

Foto: Joe Mabel (2014); CC BY 3.0; Wikimedia Commons

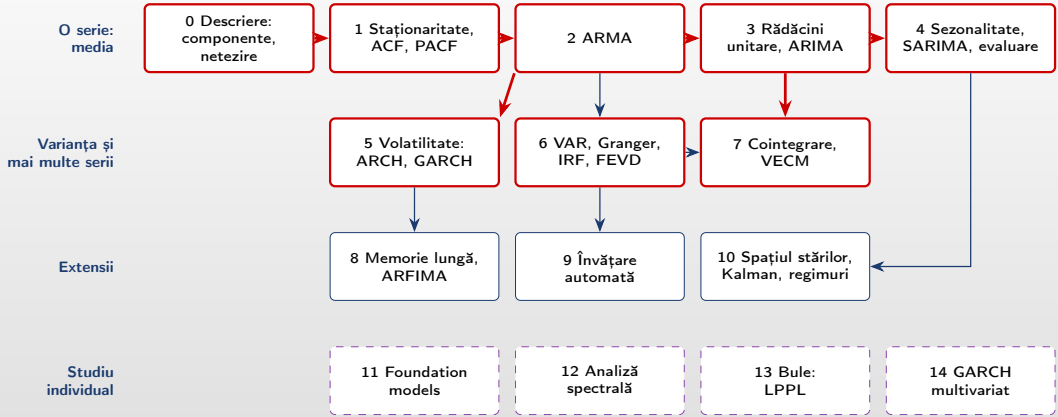
Rezultatele învățării

- Situați fiecare capitol pe drumul de la descrierea unei serii la modelarea și prognoza ei
- Reamintiți formula-cheie, faptul empiric principal și greșeala cea mai frecventă din fiecare capitol
- Alegeți testul sau modelul potrivit pentru o întrebare dată despre o serie de timp
- Aplicați metoda Box–Jenkins pe o serie reală: transformare, testare, identificare, estimare, verificare, prognoză
- Citiți rezultatele obținute cu software (estimări, teste, corelograme) și interpretați-le în trei pînă la cinci fraze
- Planificați proiectul de echipă, susținerea orală și declararea utilizării AI

Bibliografie și instrumente

- Manual: Huang și Petukhina (2022); manual însoțitor gratuit: Hyndman și Athanasopoulos (2021)
  - teorie: Brockwell și Davis (2016); Hamilton (1994); metoda: Box, Jenkins și Reinsel (2008)
- Quantlet-urile Python ale capitolului: Quantlets/Ch_15
  - cazul Box–Jenkins pe IAPC-ul României și rezultatele pentru problema 3 de examen
- Notebook-ul cursului, cursul într-un singur notebook: deschideți în Google Colab
- Autoevaluare: quiz-ul acestui capitol, 20 de întrebări extrase din toate capitolele

Harta cursului: Capitolele 0–14



- Roșu: nucleul examenului, de la descrierea unei serii la modelarea împreună a mai multor serii
- Albastru: extensii (Capitolele 8–10); linie întreruptă: studiu individual (Capitolele 11–14), fiecare construit pe un capitol de bază: 11 pe 9, 12 pe 1 și 8, 13 pe 3, 14 pe 5 și 6

Seriile cursului

Seria	Sursa	Tema ilustrată	Cap.
PIB-ul real al României (trimestrial)	Eurostat	trend, sezonalitate, rădăcină unitară, regimuri	0–4, 10
Inflația IAPC a României (lunar)	Eurostat	persistență, sezonalitate, memorie lungă	2–4, 8
ROBOR 3M, șomaj	Eurostat	un VAR pentru economia României	6
EUR/RON	BNR	un mers aleator greu de depășit	0, 3, 5
BET, S&P 500, DAX (zilnic)	EODHD	volatility clustering, spillover	1, 5, 6
consumul de electricitate (zilnic, orar)	ENTSO-E	sezonalitate multiplă, învățare automată	4, 9
Nilul, petele solare, randamentele și PIB-ul SUA	statsmodels, FRED	exemplele clasice ale manualelor	1, 2, 7, 8, 10

Capitolul 0: introducere: componente și netezire exponențială (1/2)

- **Formule-cheie**
  - aditiv $y_t = T_t + S_t + R_t$ sau multiplicativ $y_t = T_t S_t R_t$; logaritmul transformă un model în celălalt
  - SES $\ell_t = \alpha y_t + (1-\alpha)\ell_{t-\mathbf{1}}$; MASE = MAE / MAE metodei naive sezoniere în eșantion
- **Notațiile**
  - T_t, S_t, R_t: trendul, componenta sezonieră și restul (componenta neregulată)
  - ℓ_t: nivelul netezit la momentul t; $\alpha \in (0,1)$: ponderea celei mai noi observații; un α mare urmărește îndeaproape datele
  - MAE: eroarea absolută medie; MASE sub 1: mai bun decît metoda naivă sezonieră

Capitolul 0: introducere: componente și netezire exponențială (2/2)

- **Fapte empirice**
  - PIB-ul României a crescut de 2,3 ori din 1995 (2,8% pe an); trimestrul I este cu circa $-23{,}8\%$, iar trimestrul IV cu $+20{,}7\%$ față de trend
  - EUR/RON: $\hat{\alpha}_{SES} = 1{,}00$, ultima valoare este cea mai bună prognoză; electricitatea: Holt–Winters are MASE 0,51, față de 0,82 pentru metoda naivă
- **Greșeli frecvente**
  - judecarea unei prognoze pe datele folosite la estimare
  - MAPE pentru serii care trec prin zero (inflația lunară); un model aditiv pentru o oscilație sezonieră care crește odată cu nivelul

Capitolul 1: procese stochastice și staționaritate (1/2)

- **Formule-cheie**
  - staționaritate slabă: $EX_t = \mu$, $\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h)$; $\hat{\rho}(h)$ comparat cu $\pm 1{,}96/\sqrt{T}$
  - Ljung–Box $Q^*(m) = T(T+2)\sum_{h=1}^{m} \hat{\rho}(h)^2/(T-h) \sim \chi^2(m)$ Ljung și Box (1978); mers aleator $\mathrm{Var}(X_t) = t\sigma^2$
- **Notațiile**
  - μ: media constantă; $\gamma(h)$: autocovarianța la lagul h, care depinde doar de h; $\hat{\rho}(h)$: autocorelația de selecție; T: numărul de observații
  - $Q^*(m)$: statistica Ljung–Box pe primele m laguri; o valoare mare (un p-value mic) respinge zgomotul alb
  - σ^2: varianța șocurilor mersului aleator; $\mathrm{Var}(X_t) = t\sigma^2$ crește cu t, deci mersul aleator nu este staționar

Capitolul 1: procese stochastice și staționaritate (2/2)

- **Fapte empirice**
  - randamentele BET: $\hat{\rho}_{\mathbf{1}} = 0{,}11$, randamentele absolute $\hat{\rho}_{\mathbf{1}} = 0{,}40$ (banda $\pm 0{,}024$): necorelat nu înseamnă independent
  - PIB-ul României: Box–Cox $\hat{\lambda} = 0{,}02$, adică logaritmul; o diferențiere în plus dă $\hat{\rho}_{\mathbf{1}} = -0{,}54$
- **Greșeli frecvente**
  - interpretarea unei singure bare din afara benzii ca semnal (una din douăzeci iese din întîmplare)
  - diferențierea unei serii care este deja staționară

Capitolul 2: modele ARMA (1/2)

- **Formule-cheie**
  - $\phi(L)(X_t - \mu) = \theta(L)\varepsilon_t$; AR(1) $\rho(h) = \phi^h$; MA(1) $\rho(1) = \theta/(1+\theta^2)$
  - AIC $= -2\ln\hat{\mathcal{L}} + 2k$ Akaike (1974), BIC $= -2\ln\hat{\mathcal{L}} + k\ln T$ Schwarz (1978); verificarea reziduurilor $Q^*(m) \sim \chi^2(m-p-q)$
- **Notațiile**
  - L: operatorul lag, $LX_t = X_{t-1}$; $\phi(L)$, $\theta(L)$: polinoamele AR și MA, de ordinele p și q; ε_t: zgomot alb
  - $\ln\hat{\mathcal{L}}$: logaritmul verosimilității maxime; k: numărul de parametri estimați; un AIC sau un BIC mai mic este mai bun
  - BIC penalizează parametrii mai mult decît AIC, deoarece $\ln T > 2$ pentru $T \geq 8$

Capitolul 2: modele ARMA (2/2)

- **Fapte empirice**
  - creșterea anuală a PIB-ului României: MA(3) după BIC, efectul trimestrelor suprapuse; Ljung–Box pe reziduuri $p = 0{,}37$
  - inflația din România: AR(2) cu $\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2 = 0{,}976$, aproape de o rădăcină unitară; petele solare: un ciclu AR(2) de 10,6 ani
- **Greșeli frecvente**
  - citirea ordinului AR din ACF (la un AR se anulează PACF)
  - Ljung–Box pe reziduuri cu m în loc de $m - p - q$ grade de libertate; un factor comun în $\phi(L)$ și $\theta(L)$

Capitolul 3: rădăcini unitare și modele ARIMA (1/2)

- **Formule-cheie**
  - ADF: $\Delta y_t = c + bt + \gamma y_{t-\mathbf{1}} + \sum_j \delta_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t$, $H_{\mathbf{0}}$: $\gamma = 0$ Dickey și Fuller (1979); KPSS: $H_{\mathbf{0}}$ staționaritate Kwiatkowski et al. (1992)
  - ARIMA(p, d, q): $\phi(L)(1 - L)^d y_t = c + \theta(L)\varepsilon_t$; varianța prognozei crește cu h cînd $d \geq 1$
- **Notațiile**
  - $\Delta y_t = y_t - y_{t-\mathbf{1}}$; c: constanta; bt: trendul determinist; $\gamma = 0$ înseamnă rădăcină unitară
  - δ_j: coeficienții diferențelor cu lag, care elimină autocorelația erorilor
  - d: numărul de diferențieri necesare pentru staționaritate; $(1 - L)^d$: diferența de ordinul d; h: orizontul de prognoză

Capitolul 3: rădăcini unitare și modele ARIMA (2/2)

- **Fapte empirice**
  - logaritmul PIB-ului României: $\tau = -2{,}31$ ($p = 0{,}43$, valoarea critică la 5% $-3{,}45$); creșterea: $\tau = -10{,}77$; ARIMA(0,1,0) cu derivă de 0,81% pe trimestru
  - două mersuri aleatoare independente: un t semnificativ în 90% din regresii Granger și Newbold (1974); puterea ADF doar 12,5% pentru $\phi = 0{,}95$, $T = 100$
- **Greșeli frecvente**
  - valori critice Student sau Normale pentru statistica ADF
  - interpretarea nerespingerii ca dovadă a rădăcinii unitare; o regresie în niveluri între serii $I(1)$ fără test de cointegrare

Capitolul 4: sezonalitate și prognoză (1/2)

- **Formule-cheie**
  - SARIMA $\phi(L)\Phi(L^s)(1-L)^d(1-L^s)^D y_t = \theta(L)\Theta(L^s)\varepsilon_t$; airline $(0,1,1)(0,1,1)_s$
  - Diebold–Mariano $\bar{d}/\sqrt{\hat{V}/n}$, $d_t = L(e_{1t}) - L(e_{2t})$ Diebold și Mariano (1995), cu corecția HLN Harvey, Leybourne și Newbold (1997)
- **Notațiile**
  - s: lungimea sezonului (12 pentru date lunare); $\Phi(L^s)$, $\Theta(L^s)$: polinoamele AR și MA sezoniere; D: numărul de diferențe sezoniere $(1-L^s)$
  - e_{1t}, e_{2t}: erorile celor două prognoze; $L(\cdot)$: funcția de pierdere, de exemplu pătratul; d_t: diferența pierderilor; $\bar{d}$: media ei; $\hat{V}$: varianța ei pe termen lung, estimată; n: numărul de prognoze
  - sub ipoteza acurateței egale, DM are aproximativ distribuția $N(0,1)$: $|\text{DM}| > 1{,}96$ respinge la 5%

Capitolul 4: sezonalitate și prognoză (2/2)

- **Fapte empirice**
  - pasagerii aerieni: MAPE 8,5% pentru modelul airline, față de 15,5% pentru metoda naivă sezonieră
  - Paștele ortodox crește vînzările de alimente din România cu circa 5,9%; consumul zilnic: DHR are MASE 0,89, față de 1,28 (naiv sezonier)
- **Greșeli frecvente**
  - compararea AICc pentru modele cu d sau D diferite
  - judecarea prognozelor la o singură origine; date ajustate sezonier într-o prognoză SARIMA a datelor brute

Capitolul 5: volatilitate condiționată: ARCH și GARCH (1/2)

- **Formule-cheie**
  - GARCH(1,1) $\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$ Engle (1982), Bollerslev (1986); $\bar{\sigma}^2 = \omega/(1-\alpha-\beta)$, $h_{1/2} = \ln 0{,}5/\ln(\alpha+\beta)$
  - ARCH-LM $= nR^2 \sim \chi^2(q)$; VaR 1% $= -(\mu + \sigma_{t+1} q_{0{,}01}(z))$
- **Notațiile**
  - σ_t^2: varianța condiționată; ε_{t-1}: șocul de ieri; $\omega > 0$: constanta; $\alpha \geq 0$: reacția la șocuri; $\beta \geq 0$: persistența
  - $\bar{\sigma}^2$: varianța pe termen lung, definită doar dacă $\alpha + \beta < 1$; $h_{1/2}$: timpul de înjumătățire al unui șoc de volatilitate
  - ARCH-LM: R^2 al regresiei lui ε_t^2 pe q laguri ale sale, n observații; $q_{0{,}01}(z)$: cuantila de 1% a inovațiilor standardizate z_t; μ: media condiționată

Capitolul 5: volatilitate condiționată: ARCH și GARCH (2/2)

- **Fapte empirice**
  - GARCH(1,1)-t: $\alpha + \beta = 0{,}995$ pentru S&P 500 (timp de înjumătățire 131 de zile), 0,991 pentru BET (74 de zile)
  - S&P 500: GJR $\hat{\gamma} = 0{,}21$ ($t = 10{,}0$); kurtosis-ul 13,7 pentru randamente, 5,0 pentru reziduurile standardizate
- **Greșeli frecvente**
  - timpul de înjumătățire scris $1/(1 - \alpha - \beta)$; o variantă pe termen lung raportată cînd $\alpha + \beta \geq 1$
  - „VaR 99%" sau un VaR negativ: în curs scriem VaR 1%, o pierdere pozitivă

Capitolul 6: modele VAR și cauzalitate Granger (1/2)

- **Formule-cheie**
  - VAR(p): $\mathbf{Y}_t = \mathbf{c} + \mathbf{A_1}\mathbf{Y}_{t-1} + \cdots + \mathbf{A}_p\mathbf{Y}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$ Sims (1980); stabil dacă toate valorile proprii ale matricei companion sînt în interiorul cercului unitate
  - Granger $F = [(RSS_R - RSS_U)/p] \,/\, [RSS_U/(T - Kp - 1)]$ Granger (1969); IRF și FEVD cu o ordine Cholesky
- **Notațiile**
  - $\mathbf{Y}_t$: vectorul celor K variabile; $\mathbf{c}$: constantele; $\mathbf{A}_i$: matricele $K \times K$ ale coeficienților lagului i; $\boldsymbol{\varepsilon}_t$: vectorul șocurilor
  - matricea companion scrie VAR(p) ca un VAR(1) de dimensiune Kp
  - RSS_R, RSS_U: sumele pătratelor reziduurilor fără și cu lagurile variabilei testate; p: numărul de restricții

Capitolul 6: modele VAR și cauzalitate Granger (2/2)

- **Fapte empirice**
  - VAR(2) pentru România (creștere, inflație, ROBOR 3M): creșterea cauzează Granger ROBOR, $F = 7{,}26$, $p = 0{,}001$
  - spillover între S&P 500, DAX și BET: în medie 26,4%, 57,5% la 17 martie 2020
- **Greșeli frecvente**
  - interpretarea cauzalității Granger drept cauzalitate (este doar predictibilitate suplimentară)
  - IRF raportate fără ordinea care stă la baza lor; prea multe laguri pentru un eșantion scurt

Capitolul 7: cointegrare și VECM (1/2)

- **Formule-cheie**
  - Engle–Granger: OLS în niveluri, apoi ADF pe reziduuri cu valorile critice MacKinnon Engle și Granger (1987); timpul de înjumătățire al ECM $\ln 0{,}5 / \ln(1+\gamma)$
  - VECM $\Delta \mathbf{y}_t = \alpha \beta^{\top} \mathbf{y}_{t-\mathbf{1}} + \sum_i \Gamma_i \Delta \mathbf{y}_{t-i} + \mathbf{u}_t$; statistica urmei $-T \sum_{i>r} \ln(1-\hat{\lambda}_i)$ Johansen (1991)
- **Notațiile**
  - ECM: $\gamma < 0$ este viteza de ajustare spre echilibru
  - β: vectorii de cointegrare (relațiile de echilibru); α: coeficienții de ajustare; Γ_i: dinamica pe termen scurt; $\mathbf{u}_t$: șocurile
  - $\hat{\lambda}_i$: valorile proprii estimate, în ordine descrescătoare; r: rangul de cointegrare testat; o statistică a urmei peste valoarea critică respinge rangul r

Capitolul 7: cointegrare și VECM (2/2)

- **Fapte empirice**
  - randamentele SUA la 1, 5 și 10 ani: urma $54{,}6 > 29{,}8$ pentru $r = 0$, $3{,}12 < 3{,}84$ pentru $r \leq 2$: rangul 2; timpul de înjumătățire al ECM pentru dobînda lungă 20,8 luni
  - PPP pentru leu: ADF $p = 0{,}24$ pentru cursul real, nestațional; pairs trading la BVB: Sharpe 0,15 brut, 0,05 net
- **Greșeli frecvente**
  - valorile critice Dickey–Fuller pentru reziduurile Engle–Granger (trebuie să fie mai negative)
  - un VAR în diferențe pentru serii cointegrate (omite termenul de corecție a erorii)

Capitolul 8: memorie lungă și ARFIMA (1/2)

- **Formule-cheie**
  - $(1-L)^d$ cu $\pi_k = \pi_{k-1}(k-1-d)/k$ Granger și Joyeux (1980), Hosking (1981); $\rho(k) \sim Ck^{2d-1}$; $H = d + 1/2$
  - staționar pentru $d < 1/2$, cu revenire la medie pentru $d < 1$; GPH și Whittle local folosesc cele mai joase m frecvențe
- **Notațiile**
  - d: ordinul de integrare fracționară; π_k: ponderea lagului k în dezvoltarea lui $(1-L)^d$
  - $C > 0$: o constantă; $\rho(k) \sim Ck^{2d-1}$: ACF scade hiperbolic, nu exponențial
  - H: exponentul Hurst, peste 0,5 pentru memorie lungă, estimat aici cu statistica rescaled range (R/S); m: numărul de frecvențe joase folosite de GPH și Whittle local

Capitolul 8: memorie lungă și ARFIMA (2/2)

- **Fapte empirice**
  - inflația lunară din România: ARFIMA(0,d,0) cu $\hat{d} = 0{,}31$ (SE 0,05) bate ARMA după AIC și BIC
  - S&P 500: H (R/S) 0,53 pentru randamente, 0,86 pentru $|r_t|$; Nilul: $\hat{d} = 0{,}40$, dar $-0{,}17$ după ruptura din 1898
- **Greșeli frecvente**
  - o ruptură sau o schimbare de regim interpretată drept memorie lungă
  - o singură lățime de bandă m; memoria lungă a randamentelor confundată cu memoria lungă a volatilității

Capitolul 9: învățare automată pentru serii de timp (1/2)

- **Formule-cheie**
  - prognoza directă $\hat{y}_{T+h} = \hat{f}_h(y_T, \ldots, y_{T-p+\mathbf{1}}, \mathbf{z}_{T+h})$; ridge $+\lambda \sum \beta_j^{\mathbf{2}}$, lasso $+\lambda \sum |\beta_j|$
  - deplasare–varianță $E(y_{\mathbf{0}} - \hat{f})^{\mathbf{2}} = \text{deplasare}^{\mathbf{2}} + \text{Var}(\hat{f}) + \sigma^{\mathbf{2}}$; doar validare walk-forward
- **Notațiile**
  - $\hat{f}_h$: funcția estimată pentru orizontul h; p: numărul de laguri folosite; $\mathbf{z}_{T+h}$: regresori cunoscuți, de exemplu calendarul
  - $\lambda \geq 0$: intensitatea penalizării; β_j: coeficienții; ridge îi micșorează, lasso îi anulează pe unii
  - $y_{\mathbf{0}}$: o observație nouă; $\sigma^{\mathbf{2}}$: varianța zgomotului, pe care niciun model nu o poate elimina

Capitolul 9: învățare automată pentru serii de timp (2/2)

- **Fapte empirice**
  - S&P 500, același model: $R^2 = 0{,}37$ cu k-fold aleator, $-0{,}39$ walk-forward: leakage
  - semnul randamentelor: clasa majoritară 54,4%, boosting 52,5%; consumul zilnic: ridge MASE 0,90, LSTM 1,16 Makridakis, Spiliotis și Assimakopoulos (2020)
- **Greșeli frecvente**
  - validarea încrucișată aleatoare și scalarea pe tot eșantionul (look-ahead)
  - arbori pe niveluri cu trend (nu pot extrapola); comparații fără un reper simplu

Capitolul 10: spațiul stărilor, filtrul Kalman și modele Markov switching (1/2)

- **Formule-cheie**
  - $y_t = Z\alpha_t + \varepsilon_t$, $\alpha_{t+1} = T\alpha_t + R\eta_t$; $K_t = P_t Z' F_t^{-1}$, $a_{t|t} = a_t + K_t v_t$ Kalman (1960)
  - Markov switching: durate $1/(1 - p_{ii})$, ergodic $\pi_1 = (1 - p_{22})/(2 - p_{11} - p_{22})$ Hamilton (1989)
- **Notațiile**
  - α_t: starea ascunsă (de exemplu nivelul); Z, T, R: matricele cunoscute ale sistemului; ε_t, η_t: zgomotul de măsurare și cel al stării
  - a_t, P_t: starea prezisă și varianța ei; $v_t = y_t - Za_t$: eroarea de predicție, cu varianța F_t; K_t: cîștigul Kalman, ponderea surprizei
  - p_{ii}: probabilitatea de a rămîne în regimul i; π_1: ponderea pe termen lung a regimului 1

Capitolul 10: spațiul stărilor, filtrul Kalman și modele Markov switching (2/2)

- **Fapte empirice**
  - Nilul: $\hat{q} = \hat{\sigma}^2_\eta / \hat{\sigma}^2_\varepsilon = 0{,}097$, cîștigul de echilibru $\bar{K} = 0{,}267$, ponderea netezirii exponențiale
  - PIB-ul SUA: regimurile coincid cu datările NBER în 90% din trimestre; PIB-ul României: regimul stabil 15,2 trimestre, cel volatil 11,2
- **Greșeli frecvente**
  - probabilități netezite folosite ca și cum ar fi fost cunoscute în timp real
  - durate scrise $p_{ii}/(1 - p_{ii})$; ultima valoare a deviației HP interpretată ca estimare în timp real

Capitolul 11: foundation models pentru serii de timp (studiu individual)

- **Idei principale**
  - modele transformer pre-antrenate pe foarte multe serii: tokenizarea și împărțirea valorilor în segmente (patching)
  - Chronos, TimesFM, Moirai, Lag-Llama: prognoze zero-shot și fine-tuning
  - o comparație corectă: același eșantion de test, MASE, scoruri probabilistice, repere simple
- **Legătura cu nucleul cursului**
  - un model global pe multe serii (Capitolul 9); evaluat ca orice prognoză (Capitolul 4)
- Capitolele 11–14 sînt pentru studiu individual

Capitolul 12: analiză spectrală (studiu individual)

- **Idei principale**
  - transformata Fourier, periodograma $I(\nu_j)$ și densitatea spectrală
  - periodograme netezite (Welch), filtre (Hodrick–Prescott) și ciclul economic
  - coerența dintre două serii; wavelets ca instrument timp–frecvență
- **Legătura cu nucleul cursului**
  - aceeași informație ca ACF, pe frecvențe (Capitolul 1); polul spectral al memoriei lungi (Capitolul 8)
- Capitolele 11–14 sînt pentru studiu individual

Capitolul 13: bule speculative: modele LPPL (studiu individual)

- **Idei principale**
  - bulele ca o creștere superexponențială a prețurilor
  - modelul LPPLS: o lege de putere plus oscilații log-periodice; estimare și condiții de filtrare
  - indicatorul de încredere LPPLS pe bule și crahuri istorice
- **Legătura cu nucleul cursului**
  - rădăcini explozive, opusul rădăcinilor unitare (Capitolul 3); volatilitatea dinaintea crahurilor (Capitolul 5)
- Capitolele 11–14 sînt pentru studiu individual

Capitolul 14: modele GARCH multivariate (studiu individual)

- **Idei principale**
  - covariațe și corelații variabile în timp; numărul de parametri crește foarte repede
  - VEC, BEKK, CCC și DCC; estimarea DCC în doi pași
  - corelații dinamice, varianța portofoliului și VaR 1%
- **Legătura cu nucleul cursului**
  - GARCH pentru fiecare serie (Capitolul 5) și perspectiva multivariată a VAR (Capitolul 6)
- Capitolele 11–14 sînt pentru studiu individual

Teste și modele (1/2): serii univariate și media

Întrebarea	**Instrumentul**	**Decizia**	**Cap.**
Este seria staționară?	grafic, ACF; ADF și KPSS	ADF respinge, KPSS nu: staționară	1, 3
Trend: determinist sau stochastic?	ADF și KPSS cu trend	eliminarea trendului sau diferențierea	3
Există sezonalitate?	graficul sezonier, ACF la s, $2s$; OCSB, HEGY	Δ_s sau variabile dummy și termeni Fourier	4
Ce model ARMA?	ACF, PACF; AIC, BIC	cel mai mic BIC cu reziduuri zgomot alb	2
Sînt reziduurile adecvate?	Ljung–Box cu $m - k$ grade de libertate; Jarque–Bera	$p > 0{,}05$: nu mai rămîne autocorelație	2
Care prognoză este mai bună?	eșantion de test, origini mobile; MASE, DM	DM cu $p < 0{,}05$; altfel egalitate	0, 4

Teste și modele (2/2): varianța, serii multivariate și extensii

Întrebarea	**Instrumentul**	**Decizia**	**Cap.**
Se schimbă varianța?	Ljung–Box pe r_t^2, ARCH-LM	respingem: GARCH(1,1)-t, GJR	5
Ajută x la prognoza lui y?	VAR, testul Granger F	$p < 0{,}05$: cauzalitate Granger	6
Ce efect are un șoc?	IRF, FEVD (Cholesky)	benzi bootstrap; încercați alte ordini	6
Există un echilibru pe termen lung?	Engle–Granger, Johansen	VECM: β, α, timpul de înjumătățire	7
Memorie lungă?	GPH, Whittle local, ARFIMA	mai multe valori m; verificați rupturile	8
Mulți predictori, efecte neliniare?	ridge, lasso, arbori, boosting	walk-forward față de un reper	9
Un nivel sau un regim ascuns?	filtrul Kalman, Markov switching	filtrat pentru timp real, netezit pentru istorie	10

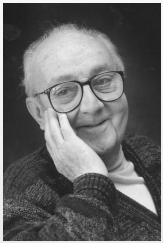
Convențiile folosite în tot cursul

- **Transformările**
  - $100 \ln y_t$
  - creșterea $100\Delta \ln y_t$
  - ratele anuale $100\Delta_{12} \ln y_t$ (lunar), $100\Delta_4 \ln y_t$ (trimestrial)
  - „DLOG(IPC,1,12)" în rezultatele EViews înseamnă $\Delta\Delta_{12} \ln$ IPC
- **Testele**
  - precizăm H_0, statistica, distribuția ei, valoarea critică sau p-value-ul, decizia la 5%
  - apoi o frază despre semnificația deciziei pentru serie
- **Alegerea modelului**
  - AIC, AICc și BIC doar pe același eșantion și cu aceleași d, D
  - prognozele se judecă în afara eșantionului, față de metodele naivă și naivă sezonieră
- **Riscul**
  - nivelul este probabilitatea cozii: VaR 1%, o pierdere pozitivă, $\text{VaR}_\alpha = -q_\alpha$, q_α: cuantila de nivel α a randamentului

Metoda în șase pași

1. **Graficul** și transformarea: logaritm, Δ, Δ_{12}
2. **Testarea**: ADF și KPSS pentru fiecare transformare
3. **Identificarea**: ACF și PACF ale seriei staționare
4. **Estimarea**: modele SARIMA candidate, prin verosimilitate maximă; AICc și BIC
5. **Verificarea**: reziduurile (Ljung–Box, Jarque–Bera, valori extreme); înapoi la pasul 3 dacă eșuează
6. **Prognoza și evaluarea**: un eșantion de test, repere, apoi intervale

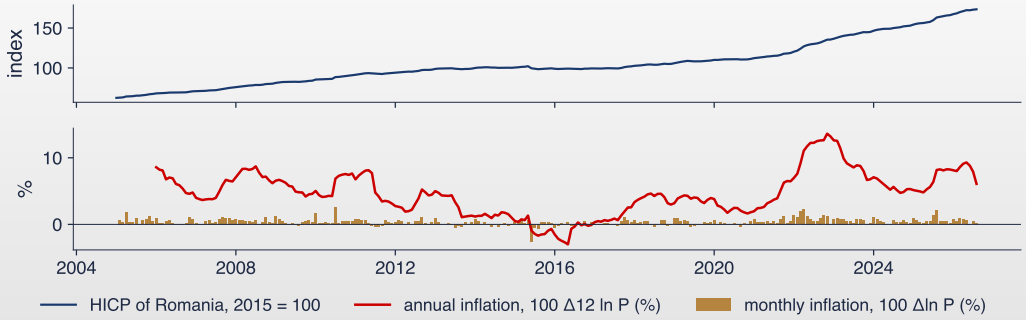
⊡ Datele: IAPC al României (Eurostat), ianuarie 2005 – august 2026, $T = 260$ de luni; Box, Jenkins și Reinsel (2008)



George E. P. Box (1919–2013)

Foto: DavidMCEddy (2011); CC BY-SA 3.0; Wikimedia Commons

Pasul 1: datele



⊡ Sus: IAPC, 2015 = 100; jos: inflația lunară $100\Delta \ln P_t$ (bare) și inflația anuală $100\Delta_{12} \ln P_t$ (linie)

TSA_ch15_box_jenkins

Interpretarea datelor

- **Trend**
  - indicele crește aproape în fiecare lună
  - logaritmul este scala firească
  - inflația lunară are media 0,39%; inflația anuală variază între $-3{,}0\%$ (mai 2016) și 13,6% (noiembrie 2022)
- **Sezonalitatea**
  - ianuarie are în medie 0,74%, iunie $-0{,}03\%$ (alimentele proaspete)
  - un tipar sezonier în $\Delta \ln P_t$: vom avea nevoie de Δ_{12} sau de termeni sezonieri
- **Șocurile**
  - modificările de taxe mută prețurile într-o singură lună
  - iulie–august 2025: încetarea plafonării prețului la electricitate și creșterea TVA; inflația anuală de la 6,4% la 8,2%

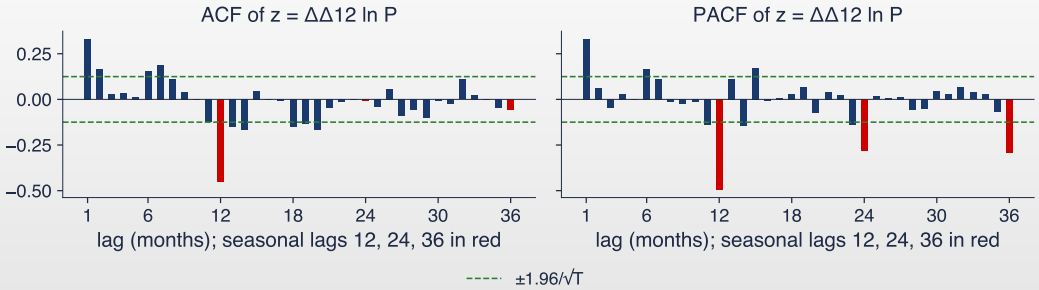
Pasul 2: teste de rădăcină unitară și de staționaritate

Seria	**Termeni**	ADF τ	p	KPSS η (5%: val. critică)	**Verdict**
$100 \ln P_t$	const., trend	$-0{,}96$	0,949	0,314 (0,146)	rădăcină unitară
$\Delta \ln P_t$	const.	$-4{,}00$	0,001	0,431 (0,463)	staționară, sezonieră
$\Delta_{12} \ln P_t$	const.	$-1{,}69$	0,435	0,424 (0,463)	neconcludent
$z_t = \Delta\Delta_{12} \ln P_t$	const.	$-4{,}83$	$< 0{,}001$	0,113 (0,463)	staționară

- ADF: H_0 rădăcină unitară, laguri după AIC Dickey și Fuller (1979); KPSS: H_0 staționaritate Kwiatkowski et al. (1992); valorile critice ADF la 5%: $-3{,}43$ (cu trend), $-2{,}87$ (cu constantă)
- Inflația anuală: nici ADF, nici KPSS nu respinge: un rezultat neconcludent, ca în Capitolul 3
- Decizia: $d = 1$, $D = 1$: modelăm z_t, iar ambele teste arată că este staționară

TSA_ch15_box_jenkins

Pasul 3: identificarea din corelograma lui z_t



⊡ ACF și PACF pentru $z_t = \Delta\Delta_{12} \ln P_t$, lagurile 1–36, $T = 247$; lagurile sezoniere în roșu; banda $\pm 0{,}125$

TSA_ch15_box_jenkins

Interpretarea corelogramei

- **Partea obișnuită**
  - $\hat{\rho}_1 = 0{,}33$, $\hat{\rho}_2 = 0{,}16$
  - PACF $\hat{\phi}_{11} = 0{,}33$, apoi mici: un AR(1)
  - este posibil și un MA(1): ACF și PACF scad amîndouă după lagul 1
- **Partea sezonieră**
  - ACF $-0{,}45$ la lagul 12, apoi $-0{,}01$ la 24
  - PACF $-0{,}50$, $-0{,}28$, $-0{,}29$ la 12, 24, 36
  - o singură valoare sezonieră mare în ACF și o PACF sezonieră care descrește: un MA(1) sezonier
- Primul candidat: SARIMA$(1,1,0)(0,1,1)_{12}$ pentru $\ln P_t$; sateliții de la lagurile 11 și 13 sînt produsul $\rho_1\rho_{12}$

Pasul 4: estimarea candidaților

Modelul	param.	AICc	BIC	LB(12) p	LB(24) p
$(1,1,0)(0,1,1)_{\mathbf{12}}$, identificat	3	295,2	305,3	0,004	0,004
$(1,1,1)(0,1,1)_{\mathbf{12}}$	4	285,4	298,9	0,029	0,088
$(2,1,1)(0,1,1)_{\mathbf{12}}$	5	282,6	299,4	0,233	0,237
$(1,1,2)(0,1,1)_{\mathbf{12}}$	5	282,8	299,6	0,233	0,217
$(1,1,1)(1,1,1)_{\mathbf{12}}$	5	287,7	304,5	0,017	0,070

- Toate cele 36 de modele SARIMA$(p,1,q)(P,1,Q)_{\mathbf{12}}$ cu $p,q \leq 2$, $P,Q \leq 1$, pe eșantionul de antrenare pînă în august 2024 ($T = 236$); primul rînd: modelul identificat, apoi celelalte patru modele cu cel mai mic BIC, în ordine
- param.: toți parametrii estimați, inclusiv varianța; Ljung–Box pe reziduuri cu $m - k$ grade de libertate, k = parametrii ARMA
- Modelul identificat nu trece verificarea reziduurilor; cel mai mic BIC, $(1,1,1)(0,1,1)$, eșuează la lagul 12; modelul ales este $(2,1,1)(0,1,1)_{\mathbf{12}}$, cel mai mic BIC dintre modelele care trec

TSA_ch15_box_jenkins

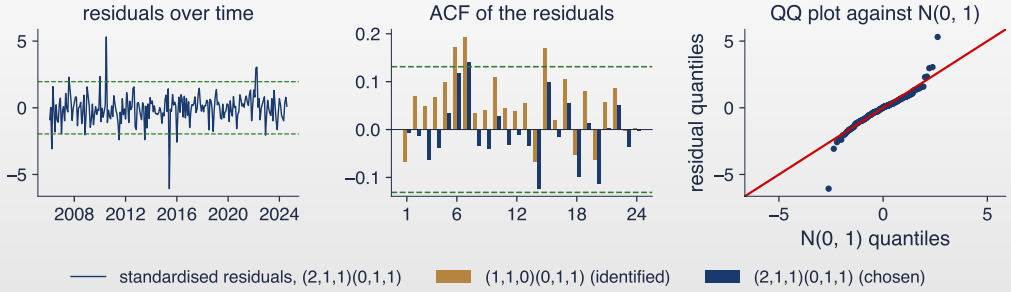
Pasul 4: modelul ales

Parametrul	**Estimarea**	SE	z	p
ϕ_1 (ar.L1)	1,156	0,149	7,76	$<0{,}001$
ϕ_2 (ar.L2)	$-0{,}183$	0,122	$-1{,}50$	0,133
θ_1 (ma.L1)	$-0{,}856$	0,099	$-8{,}61$	$<0{,}001$
Θ_1 (ma.S.L12)	$-0{,}935$	0,098	$-9{,}55$	$<0{,}001$
σ^2	0,179			

- $(1-\phi_1 L-\phi_2 L^2)\, z_t = (1+\theta_1 L)(1+\Theta_1 L^{12})\, \varepsilon_t$, $z_t = \Delta\Delta_{12}\, 100 \ln P_t$
- $\hat{\Theta}_1$ aproape de -1: tiparul sezonier este aproape fix, iar Δ_{12} aproape se anulează; variabilele dummy sezoniere ar fi o alternativă
- Cea mai mică rădăcină AR are modulul 1,034: șocurile inflației sînt foarte persistente, ca în Capitolele 2 și 8

TSA_ch15_box_jenkins

Pasul 5: verificarea reziduurilor



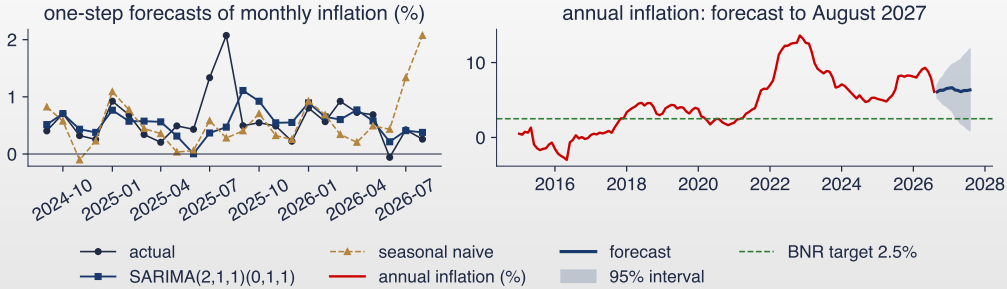
⊡ Reziduurile standardizate ale modelului ales; ACF a reziduurilor ambelor modele; QQ plot față de $N(0, 1)$

TSA_ch15_box_jenkins

Interpretarea verificării reziduurilor

- **Nu mai rămîne autocorelație**
  - Ljung–Box $Q(12) = 10{,}49$ (8 grade de libertate, $p = 0{,}233$), $Q(24) = 24{,}13$ ($p = 0{,}237$)
  - modelul identificat avea $p = 0{,}004$ și 0,004: termenii AR și MA în plus reduc autocorelația de la lagurile 6–7
- **Nu este Normal**
  - Jarque–Bera 450, kurtosis-ul 9,9
  - cele mai mari două reziduuri: iunie 2015 ($-6{,}1\sigma$, reducerea TVA la alimente) și iulie 2010 ($5{,}3\sigma$, creșterea TVA)
- Consecința: prognozele punctuale sînt bune, dar intervalele Normale sînt prea înguste cînd se schimbă taxele; variabile dummy pentru modificările de taxe cunoscute ar ajuta

Pasul 6: prognoze



- Stînga: prognoze pe un pas ale inflației lunare pe eșantionul de test (septembrie 2024 – august 2026), cu parametrii estimați pe eșantionul de antrenare
  - dreapta: prognoze ale inflației anuale pînă în august 2027, cu intervale de 95%, modelul reestimat pe toate datele

TSA_ch15_box_jenkins

Interpretarea prognozelor

Inflația lunară, eșantion de test	RMSE	MAE	MASE
SARIMA$(2,1,1)(0,1,1)_{12}$	0,45	0,28	0,66
naiv sezonier	0,64	0,42	0,99
naiv	0,51	0,38	0,88

- SARIMA are cele mai mici erori, dar testul Diebold–Mariano (HLN) nu respinge acuratețea egală: $-1{,}40$ ($p = 0{,}174$) față de naivul sezonier, $-0{,}47$ ($p = 0{,}642$) față de metoda naivă
  - 24 de luni sînt puține; cele mai mari erori: august 2025 (2,07%, față de 0,47%) și iulie 2025 (1,34%, față de 0,37%): decizii privind taxele și energia pe care niciun model univariat nu le poate anticipa
- Inflația anuală: 6,1% în august 2026; prognoza 6,1% pentru septembrie 2026 [5,3; 6,9], 6,3% pentru august 2027 [0,9; 11,8]
  - saltul TVA din august 2025 iese din fereastra de 12 luni în august 2026; intervalul la 12 luni este larg: o rădăcină aproape unitară în $\Delta \ln P_t$

TSA_ch15_box_jenkins

Recapitulare: Box–Jenkins pe inflația din România

- Grafic, transformare, testare: $\ln P_t$ are nevoie de $d = 1$ și $D = 1$
- Corelograma sugerează $(1, 1, 0)(0, 1, 1)_{12}$; verificarea reziduurilor îl respinge; modelul ales este $(2, 1, 1)(0, 1, 1)_{12}$
- În afara eșantionului, cîștigul față de metoda naivă sezonieră nu este semnificativ; șocurile fiscale domină erorile

Examenul scris: formatul

- **70% din nota finală**; scris, 2 ore
  - cinci subiecte, toate obligatorii; 9 puncte pentru subiecte plus 1 punct din oficiu
- **Trei tipuri de subiecte**
  - o derivare scurtă: momente, staționaritate, ACF sau forma unui proces
  - interpretarea rezultatelor obținute cu software: estimări, teste, corelograme, tabele VAR și VECM
  - alegerea modelului și o prognoză calculată de mînă din rezultate
- Valorile critice necesare sînt tipărite în rezultate, ca în problemele de mai jos



Institutul Național de Statistică, București: sursa multor serii de examen

Foto: Dan Mihai Pitea (2009); CC BY-SA 3.0; Wikimedia Commons

Conținutul evaluat

- **Capitolele 0–10**
  - cursuri și seminarii
  - definițiile și formulele de pe slide-urile „Noțiuni necesare azi” ale fiecărui seminar
  - calculele din Partea A a seminariilor, pe hîrtie
- **Citirea rezultatelor**
  - tabele ca în Partea B și ca în acest capitol
  - rezultate EViews sau Python: aceleași cifre sub alte nume (AR(1), ar.L1; SAR(12), ar.S.L12)
  - la examen nu se scrie cod
- **Ponderea principală**
  - ARIMA și SARIMA, rădăcini unitare, VAR și cauzalitate Granger, cointegrare și VECM, GARCH
  - Capitolele 11–14 sînt pentru studiu individual

Criterii de notare

- **Metoda**
  - formula sau ecuația, cu cifrele înlocuite
  - o metodă corectă cu o greșeală de calcul primește cea mai mare parte a punctajului
- **Rezultatul**
  - cifra, cu unitatea de măsură (%, puncte procentuale, luni) și semnul ei
  - pentru un test: H_0, statistica, valoarea critică sau p-value-ul, decizia
- **Interpretarea**
  - trei pînă la cinci fraze, statistice și economice
  - o cifră corectă cu o interpretare greșită nu primește tot punctajul
  - precizați ce nu poate arăta modelul (cauzalitatea, rupturile structurale, viitorul politicilor)

Tipuri de probleme

Tipul	Capitole	Exemplu în acest capitol
derivare: momente, staționaritate, diferențiere	1–3	Problema 1: trend plus erori AR(1)
corelogramă și test de rădăcină unitară: identificare	1–3	Problema 2: PIB-ul României
rezultate SARIMA și o prognoză de mînă	2–4	Problema 3: inflația din România
rezultate VAR și Granger	6	Problema 4: creștere, inflație, ROBOR
rezultate de cointegrare și VECM	7	Problema 5: randamentele SUA
rezultate GARCH și VaR 1%	5	Problema 6: BET
evaluarea prognozelor; spațiul stărilor și regimuri	4, 8–10	Problemele 7 și 8

- Cele opt probleme de mai jos sînt exemple de recapitulare, cu rezolvări complete; examenul are subiecte proprii
- Exerciții suplimentare: Partea A a fiecărui seminar, Seminarul 15 și setul de probleme de exercițiu (25 de probleme cu rezultatele numerice)

Problema 1: un trend cu erori AR(1)

Context

- $Y_t = 10 + 0{,}5t + u_t$, $u_t = 0{,}6u_{t-\mathbf{1}} + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim WN(0,1)$
- La $T = 100$ observăm $Y_T = 62$

Cerințe

1. Calculați $E(Y_t)$ și $\mathrm{Var}(Y_t)$ și precizați dacă Y_t este staționar.
2. Arătați că ΔY_t este un ARMA(1,1) cu $\theta = -1$ și calculați $\rho_{\Delta Y}(1)$.
3. Prognozați $Y_{T+\mathbf{1}}$ și $Y_{T+\mathbf{10}}$ cu modelul corect și dați varianța erorii pe 10 pași.
4. Explicați ce nu este în regulă dacă analistul diferențiază Y_t.

Problema 1: rezolvare

1. $E(Y_t) = 10 + 0{,}5t$ depinde de t: nestaționar; $\text{Var}(Y_t) = 1/(1 - 0{,}36) = 1{,}5625$ este constantă: **staționar în jurul trendului**
2. $\Delta Y_t = 0{,}5 + \Delta u_t$ și $(1 - 0{,}6L)\Delta u_t = (1 - L)\varepsilon_t$: ARMA(1,1), $\theta = -1$; $\gamma(0) = 1{,}25$, $\gamma(1) = -0{,}25$, $\rho(1) = -0{,}20$
3. $u_T = 62 - 10 - 50 = 2{,}0$; $\hat{Y}_{T+\mathbf{1}} = 10 + 50{,}5 + 0{,}6 \cdot 2 = 61{,}70$; $\hat{Y}_{T+\mathbf{10}} = 10 + 55 + 0{,}6^{\mathbf{10}} \cdot 2 = 65{,}01$; varianța $(1 - 0{,}6^{\mathbf{20}})/(1 - 0{,}36) = 1{,}562$
4. Rădăcina MA este 1: ΔY_t nu este invertibil; $\hat{\rho}_{\mathbf{1}} < 0$ și un coeficient MA aproape de -1 sînt semnele supradiferențierii

⊡ **Interpretare**

- Un șoc se stinge: după 10 perioade mai rămîne doar 0,012 din abatere, iar varianța erorii rămîne mărginită
- Tratamentul urmează tipul trendului: eliminăm trendul dintr-o serie staționară în jurul trendului, diferențiem o serie cu rădăcină unitară (Capitolul 3)

Problema 2: identificarea PIB-ului României

Seria	Termeni	ADF τ	p	val. critice 1%; 5%; 10%	KPSS	val. critică 5%
$100 \ln Y_t$	c, t	$-2{,}31$	0,428	$-4{,}05$; $-3{,}45$; $-3{,}15$	0,198	0,146
$100\Delta \ln Y_t$	c	$-10{,}77$	$< 0{,}001$	$-3{,}49$; $-2{,}89$; $-2{,}58$	0,263	0,463

- **Context**
  - PIB-ul real al României, ajustat sezonier (Eurostat), 2000Q1 – 2026Q2
  - Creșterea $g_t = 100\Delta \ln Y_t$: ACF $-0{,}05$; $-0{,}14$; PACF $-0{,}05$; $-0{,}14$ (lagurile 1, 2; banda $\pm 0{,}19$); Ljung–Box $Q(8) = 7{,}28$, $p = 0{,}506$; $\chi^2_{0{,}95}(8) = 15{,}51$
- **Cerințe**
  1. Descrieți testul ADF și decideți dacă $\ln Y_t$ și g_t sînt staționare.
  2. Precizați dacă testul KPSS confirmă rezultatul.
  3. Identificați procesul cu metoda Box–Jenkins.
  4. Deriva estimată este 0,81 (SE 0,30): scrieți modelul și interpretați deriva.

Problema 2: rezolvare

1. ADF: $\Delta y_t = c + bt + \gamma y_{t-\mathbf{1}} + \sum \delta_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t$, $H_\mathbf{0}$: $\gamma = 0$ (rădăcină unitară); $\ln Y_t$: $-2{,}31 > -3{,}45$: nu se respinge; g_t: $-10{,}77 < -3{,}49$: se respinge
2. KPSS ($H_\mathbf{0}$: staționaritate): $0{,}198 > 0{,}146$ respinge pentru nivel, $0{,}263 < 0{,}463$ nu respinge pentru creștere: $\ln Y_t \sim I(1)$
3. ACF și PACF ale lui g_t sînt în bandă, $Q(8) = 7{,}28 < 15{,}51$: creșterea este zgomot alb în jurul mediei
4. ARIMA(0,1,0) cu derivă: $100 \ln Y_t = 100 \ln Y_{t-\mathbf{1}} + 0{,}81 + \varepsilon_t$, $\hat{\sigma} = 2{,}47$; $t = 2{,}72$

Interpretare

- Economia crește cu circa 0,81% pe trimestru, adică aproximativ 3,2% pe an; surprizele trimestriale nu sînt previzibile
- Un șoc asupra nivelului este permanent: recesiunile din 2009 și 2020 au mutat definitiv traiectoria PIB-ului

Problema 3: rezultate SARIMA și o prognoză de mînă

Variabila dependentă: z_t	Coeficient	SE	z	p
AR(1)	0,353	0,054	6,53	$< 0{,}001$
SAR(12)	$-0{,}488$	0,035	$-13{,}90$	$< 0{,}001$
SIGMASQ	0,254			
Ljung–Box $Q(12)$	22,64			0,012

- **Context**
  - $z_t = \Delta\Delta_{\mathbf{12}}\, 100 \ln \mathrm{IAPC}_t$ („DLOG(IPC,1,12)"), România, februarie 2006 – august 2026, $T = 247$
  - Ultimele valori: $z = -1{,}814$ (august 2026), 0,090 (septembrie 2025), 1,794 (august 2025); inflația anuală în august 2026: 6,085%
- **Cerințe**
  1. Scrieți ecuația modelului și interpretați coeficienții.
  2. Testați dacă reziduurile sînt zgomot alb.
  3. Prognozați z și rata anuală a inflației pentru septembrie 2026.

Problema 3: rezolvare

1. $(1-\phi L)(1-\Phi L^{\mathbf{12}})z_t = \varepsilon_t$, deci $z_t = \phi z_{t-\mathbf{1}} + \Phi z_{t-\mathbf{12}} - \phi\Phi z_{t-\mathbf{13}} + \varepsilon_t$
2. $\hat{\phi} = 0{,}353$: o surpriză lunară continuă și luna următoare; $\hat{\Phi} = -0{,}488 < 0$: o surpriză dintr-o lună se inversează parțial în aceeași lună a anului următor; ambele semnificative; rădăcinile AR inversate 0,35 și 0,94 < 1: staționar
3. Ljung–Box $Q(12) = 22{,}64$ cu $12 - 2 = 10$ grade de libertate, $p = 0{,}012$: ipoteza de zgomot alb se respinge la 5%; modelul lasă o parte din autocorelație (comparați cu Pasul 5 de mai sus)
4. $\hat{z}_{T+\mathbf{1}} = 0{,}353(-1{,}814) + (-0{,}488)(0{,}090) - (-0{,}173)(1{,}794) = -0{,}641 + (-0{,}044) + 0{,}310 = -0{,}375$
5. Inflația anuală: $\Delta_{\mathbf{12}} \ln P_{T+\mathbf{1}} = \Delta_{\mathbf{12}} \ln P_T + z_{T+\mathbf{1}} = 6{,}085 + (-0{,}375) = 5{,}71\%$

Interpretare

- Se așteaptă ca inflația să scadă în continuare în septembrie 2026, pe măsură ce șocul fiscal de anul trecut iese din fereastra de 12 luni
- Autocorelația reziduală: un model mai bogat (ca la Pasul 4) ar schimba puțin prognoza; un interval de 95% are nevoie de $\hat{\sigma}$

Problema 4: rezultate VAR și cauzalitate Granger

Ecuația ROBOR	coef. $[t]$		coef. $[t]$
g_{t-1}	0,142 [3,49]	g_{t-2}	0,074 [1,73]
π_{t-1}	0,240 [2,78]	π_{t-2}	−0,172 [−1,89]
i_{t-1}	1,042 [10,16]	i_{t-2}	−0,119 [−1,20]
constanta	−0,109 [−0,55]	R^2	0,93

Ipoteza nulă	F	p
g nu cauzează Granger i	7,26	0,001
π nu cauzează Granger i	4,74	0,011
i nu cauzează Granger π	0,89	0,417

- **Context**
  - VAR(2) pentru România, T3 2005 – T2 2026 ($T = 84$): creșterea PIB g, inflația anuală π, ROBOR 3M i
- **Cerințe**
  1. Descrieți cauzalitatea Granger și interpretați tabelul.
  2. Scrieți ecuația ROBOR și cuantificați efectul pe termen lung al unei creșteri permanente a inflației cu 1 pp asupra ROBOR.
  3. Recalculați primul F din $RSS_R = 69{,}268$ și $RSS_U = 58{,}273$.

Problema 4: rezolvare

1. x cauzează Granger y dacă lagurile lui x îmbunătățesc prognoza lui y, dată fiind istoria lui y (test F comun) Granger (1969)
   - creșterea și inflația ajută la prognoza ROBOR ($p = 0{,}001$ și $0{,}011$); ROBOR nu ajută la prognoza inflației ($p = 0{,}417$)
2. $i_t = -0{,}109 + 0{,}142 g_{t-\mathbf{1}} + 0{,}074 g_{t-\mathbf{2}} + 0{,}240 \pi_{t-\mathbf{1}} + (-0{,}172)\pi_{t-\mathbf{2}} + 1{,}042 i_{t-\mathbf{1}} + (-0{,}119) i_{t-\mathbf{2}} + u_t$
3. Pe termen lung ($i_t = i_{t-\mathbf{1}}$, $\pi_t = \pi_{t-\mathbf{1}}$):
   $\partial i / \partial \pi = (0{,}2402 + (-0{,}1718))/(1 - 1{,}0424 - (-0{,}1186)) = 0{,}0684/0{,}0762 = 0{,}90$ pp
4. $F = \frac{(\mathbf{69{,}268} - \mathbf{58{,}273})/\mathbf{2}}{\mathbf{58{,}273}/\mathbf{77}} = 7{,}26 > F_{\mathbf{0{,}95}}(2, 77) = 3{,}12$: $H_{\mathbf{0}}$ se respinge

⊡ **Interpretare**

- Dobînda interbancară urmează economia și inflația, așa cum ar implica reacția unei bănci centrale; legătura inversă nu se vede în datele trimestriale
- Efectul pe termen lung împarte la 0,0762, un număr apropiat de zero: este imprecis; cauzalitatea Granger înseamnă predictibilitate, nu dovada unui efect de politică

Problema 5: rezultate de cointegrare și VECM

Testul urmei Johansen	$r = 0$	$r \leq 1$	$r \leq 2$
statistica	54,60	21,57	3,12
valoarea critică 5%	29,80	15,49	3,84

Ajustarea α [t]	$\Delta y^{(1)}$	$\Delta y^{(5)}$	$\Delta y^{(10)}$
EC1	−0,021 [−0,82]	0,045 [2,21]	0,040 [2,22]
EC2	0,024 [0,31]	−0,122 [−2,00]	−0,077 [−1,43]

- **Context**
  - Randamentele titlurilor de stat ale SUA la 1, 5 și 10 ani (lunar, FRED), ianuarie 1960 – septembrie 2026, VECM cu două laguri ale diferențelor
  - Ecuațiile de cointegrare: $\text{EC1} = y^{(1)}_{t-1} - 1{,}045\, y^{(10)}_{t-1} + 1{,}223$; $\text{EC2} = y^{(5)}_{t-1} - 1{,}044\, y^{(10)}_{t-1} + 0{,}587$
- **Cerințe**
  1. Definiți cointegrarea și decideți rangul.
  2. Scrieți partea de corecție a erorii din ecuația pentru $\Delta y^{(10)}_t$ și precizați care randamente se ajustează.
  3. Interpretați economic relațiile pe termen lung.

Problema 5: rezolvare

1. Seriile $I(1)$ sînt cointegrate dacă o combinație liniară a lor este $I(0)$ Engle și Granger (1987); urma: $54{,}60 > 29{,}80$, $21{,}57 > 15{,}49$, $3{,}12 < 3{,}84$: rangul $r = 2$, un singur trend stochastic comun Johansen (1991)
2. $\Delta y_t^{(\mathbf{10})} = 0{,}040\,\mathrm{EC1}_{t-\mathbf{1}} + (-0{,}077)\,\mathrm{EC2}_{t-\mathbf{1}} + \ldots$; pe EC1, randamentele la 5 și 10 ani au $|t| > 2$, iar cel la 1 an are $|t| < 1$ pe ambele relații: dobînda scurtă nu se ajustează (exogenitate slabă)
3. $\beta \approx 1$: spread-urile $y^{(\mathbf{1})} - y^{(\mathbf{10})}$ și $y^{(\mathbf{5})} - y^{(\mathbf{10})}$ sînt staționare, cum implică ipoteza așteptărilor; timpii de înjumătățire ai erorilor de echilibru: 22,1 și 9,0 luni

Interpretare

- Cele trei randamente au un singur trend comun (nivelul dobînzilor); curba se poate deforma, dar spread-urile revin la mediile lor
- Dobînzile lungi se ajustează: prețele mișcă partea lungă a curbei spre partea scurtă, determinată de politica monetară

Problema 6: rezultate GARCH și VaR 1%

BET	μ	ω	α	β	ν
estimare	0,083	0,0448	0,192	0,799	5,011
SE	0,010	0,0088	0,025	0,024	0,308

- **Context**
  - GARCH(1,1) cu inovații Student-t pentru randamentele logaritmice zilnice ale BET în %, din 2000 ($n = 6\,670$)
  - Azi: $\sigma_t^2 = 1{,}0$ și $\varepsilon_t = -3{,}0$; $t_5^{-1}(0{,}01) = -3{,}3649$; circa 250 de zile de tranzacționare pe an
- **Cerințe**
  1. Calculați persistența, timpul de înjumătățire și volatilitatea anuală pe termen lung.
  2. Calculați σ_{t+1}^2.
  3. Calculați VaR 1% pe o zi cu cuantila t_5 standardizată și comparați-l cu cel Normal.

Problema 6: rezolvare

1. $\alpha + \beta = 0{,}9907$; $h_{1/2} = \ln 0{,}5 / \ln 0{,}9907 = 74$ de zile; $\bar{\sigma}^2 = 0{,}0448/(1 - 0{,}9907) = 4{,}82$, $\sqrt{250 \times 4{,}82} = 34{,}7\%$ pe an
2. $\sigma^2_{t+1} = 0{,}0448 + 0{,}19162 \times 9 + 0{,}7991 \times 1{,}0 = 0{,}0448 + 1{,}7246 + 0{,}7991 = 2{,}5685$, $\sigma_{t+1} = 1{,}603\%$
3. $q_{0{,}01}(z) = -3{,}3649 \times \sqrt{3/5} = -3{,}3649 \times 0{,}7746 = -2{,}606$; VaR 1% $= -(0{,}083 + 1{,}603 \times (-2{,}606)) = 4{,}09\%$; Normal: 3,65%

Interpretare

- Persistență aproape de 1: un șoc al volatilității se înjumătățește abia după circa 74 de zile de tranzacționare
- Volatilitatea pe termen lung (34,7%) este mult peste cea de selecție (22,1%): cînd $\alpha + \beta \approx 1$, raportul $\omega/(1 - \alpha - \beta)$ este foarte imprecis
- Factorul $\sqrt{3/5} = \sqrt{(\nu - 2)/\nu}$ rescalează cuantila t_5 la inovații cu varianța 1
- Cozile groase ridică VaR 1% peste valoarea Normală: o pierdere mai mare de 4,09% este așteptată într-o zi din 100

Problema 7: evaluarea prognozelor

Luna de test	1	2	3	4	5	6
erori, SARIMA	0,3	−0,5	0,2	0,6	−0,4	0,1
erori, naiv sezonier	0,5	−0,7	0,6	0,4	−0,9	0,3

Context

- Prognoze ale inflației lunare pe un eșantion de test de șase luni; MAE în eșantion al metodei naive sezoniere este 0,6
- Un coleg raportează $R^2 = 0{,}37$ pentru un model boosting al randamentelor zilnice S&P 500, cu validare încrucișată aleatoare în 5 grupuri

Cerințe

1. Calculați RMSE, MAE și MASE pentru ambele metode.
2. Calculați statistica Diebold–Mariano pe erorile pătratice, $\bar{d}/(s_d/\sqrt{n})$, și decideți la 5% ($t_{0{,}975}(5) = 2{,}571$).
3. Comentați valoarea R^2 raportată de coleg.

Problema 7: rezolvare

1. SARIMA: RMSE 0,389, MAE 0,350, MASE 0,58; naiv sezonier: RMSE 0,600, MAE 0,567, MASE 0,94
2. $d_t = e_{A,t}^2 - e_{B,t}^2$ (A: SARIMA, B: naiv sezonier): $-0{,}16$; $-0{,}24$; $-0{,}32$; $0{,}20$; $-0{,}65$; $-0{,}08$; $\bar{d} = -0{,}208$, $s_d = 0{,}281$; DM $= -1{,}82$, $|-1{,}82| < 2{,}571$: acuratețea egală nu se respinge
3. Grupurile aleatoare pun zile din viitor în setul de antrenare: leakage; validarea walk-forward dă $R^2 = -0{,}39$ pentru același model (Capitolul 9)

Interpretare

- MASE sub 1: SARIMA bate în medie metoda naivă sezonieră, dar șase luni nu pot arăta că acest cîștig este real
- Doar evaluarea în afara eșantionului, în ordinea timpului, este o dovadă a capacității de prognoză

Problema 8: spațiul stărilor, regimuri și memorie lungă

- **Context**
  - Modelul local level: $\sigma_\varepsilon^2 = 4$, $\sigma_\eta^2 = 1$; predicția $a_t = 10$, $P_t = 2$; observația $y_t = 13$
  - Creșterea PIB-ului României, două regimuri: $p_{11} = 0{,}9108$ (volatil), $p_{22} = 0{,}9341$ (stabil) (Capitolul 10)
  - Inflația lunară din România: ARFIMA(0,d,0) cu $\hat{d} = 0{,}31$ (SE 0,05) (Capitolul 8)
- **Cerințe**
  1. Aplicați un pas de actualizare și de predicție Kalman; calculați cîștigul de echilibru și ponderea SES echivalentă.
  2. Calculați duratele așteptate ale celor două regimuri și ponderea pe termen lung a regimului volatil.
  3. Calculați H și $\rho(1)$ pentru modelul ARFIMA și precizați dacă inflația este staționară și cu revenire la medie.

Problema 8: rezolvare

1. $F_t = 2+4 = 6$, $K_t = 2/6 = 0{,}333$; $a_{t|t} = 10+0{,}333\times 3 = 11{,}00$, $P_{t|t} = 2(1-0{,}333) = 1{,}333$; $a_{t+\mathbf{1}} = 11{,}00$, $P_{t+\mathbf{1}} = 2{,}333$
2. $q = \sigma_\eta^{\mathbf{2}}/\sigma_\varepsilon^{\mathbf{2}} = 0{,}25$: $\bar{P}/\sigma_\varepsilon^{\mathbf{2}} = (q+\sqrt{q^{\mathbf{2}}+4q})/2 = 0{,}6404$, $\bar{K} = 0{,}6404/(1+0{,}6404) = 0{,}390 = \alpha_{SES}$
3. $E(D_{\mathbf{1}}) = 1/(1-0{,}9108) = 11{,}2$ trimestre, $E(D_{\mathbf{2}}) = 15{,}2$ trimestre; $\pi_{\mathbf{1}} = (1-0{,}9341)/(2-0{,}9108-0{,}9341) = 0{,}425$
4. $H = d+0{,}5 = 0{,}81$; $\rho(1) = d/(1-d) = 0{,}45$; $0 < d < 0{,}5$: staționar cu memorie lungă, cu revenire la medie

Interpretare

- Filtrul mută nivelul cu o treime din surpriză; pe termen lung, ponderea este cea a netezirii exponențiale
- Pe termen lung, creșterea din România se află în regimul volatil aproximativ 42% din timp: tranziția, 2009 și 2020
- Șocurile inflației se sting lent, hiperbolic: prognozele revin la medie mai încet decît cele ale unui model AR

Proiectul de echipă: conținut și livrabile

- **20% din nota finală**
  - o echipă de 2–4 studenți analizează serii reale cu metodele cursului
  - o întrebare concretă: prognoza cursului EUR/RON, modelarea inflației din România, politica monetară și dobînzile bancare
  - o serie: trend și staționaritate, netezire, ARIMA sau SARIMA, set de antrenare, set de test și orizont, prognoze punctuale și pe interval, comparația a două metode
  - mai multe serii: rădăcini unitare, cointegrare, VAR sau VECM, cauzalitate Granger, IRF și FEVD
- **Livrabile**
  - un repository al cărui cod reproduce, din date, fiecare rezultat numeric și fiecare grafic
  - un raport scurt: întrebarea și literatura, sursele de date, modelele, concluziile, bibliografia
  - o prezentare; fișierul `AI_USE.md`

Criterii de evaluare a proiectului și susținerea orală

- **Întrebarea**
  - clară, cu răspuns posibil pe baza datelor, utilă cuiva
  - „Poate un SARIMA să prognozeze inflația din România mai bine decît metoda naivă sezonieră?" este o întrebare; „o analiză a inflației" nu este
- **Metode, verificări, interpretare, reproductibilitate**
  - testul potrivit pentru întrebare (sinteza testelor și a modelelor); diagnosticarea reziduurilor; evaluare în afara eșantionului, față de un reper
  - ce înseamnă cifrele și ce nu pot arăta datele; repository-ul rulează de la date pînă la fiecare grafic
- **Susținerea orală**
  - proiectul se notează numai după prezentarea lui
  - fiecare membru explică codul și rezultatele: ce calculează această linie? de ce acest test și nu altul?
  - o linie de cod pe care nu o puteți explica nu este considerată muncă proprie, cu sau fără AI

Fișierul AI_USE.md

- **Instrumentele AI sînt permise și trebuie declarate**
  - pentru fiecare utilizare: instrumentul, promptul, ce s-a păstrat și ce s-a corectat
  - erorile instrumentului AI pe care le-ați găsit și modul în care le-ați găsit
- **Răspundeți pentru fiecare cifră și pentru fiecare referință**
  - fiecare cifră: recalculată cu propriul cod, din date
  - fiecare referință: DOI-ul deschis și titlul verificat
- Erorile AI tipice din acest curs: slide-ul „Verificări necesare” din secțiunea despre AI

Nota finală

Componenta	Pondere	Cînd	Criterii
examenul scris	70%	sesiunea	metodă, rezultat, interpretare
proiectul de echipă	20%	finalul semestrului	întrebare, metode, verificări, susținere orală
prezența și quiz-urile	10%	în fiecare săptămînă	prezența la cursuri și seminarii; quiz-urile capitolelor

- Seminariile au rol de exerciții și nu se notează; studenții nu predau nimic de la seminarii
- Quiz-urile de pe site-ul cursului se rezolvă cu contul ASE; numele și scorul se înregistrează pentru notă

Contribuția posibilă a AI

- **Exercițiu**
  - probleme noi în stilul examenului, cu rezultate generate din date reale de propriul cod
- **Explicații**
  - o a doua explicație pentru un tabel de rezultate, o derivare sau un test pe care nu l-ați înțeles
- **Proiect**
  - o primă versiune a codului pentru pașii Box–Jenkins, pentru o evaluare cu origini mobile, pentru un VECM
- Exemplu de prompt
  - `Write Python code that downloads the Romanian HICP from Eurostat (prc_hicp_minr, M.I15.TOTAL.RO), fits every SARIMA(p,1,q)(P,1,Q)12 with p, q <= 2 and P, Q <= 1 to 100 log HICP up to August 2024, reports AICc, BIC and Ljung-Box p-values with m - k degrees of freedom, and compares one-step forecasts with the seasonal naive method by MASE and the Diebold-Mariano test.`

Verificări necesare

- Ipotezele nule: la ADF, H_0 este rădăcina unitară, la KPSS staționaritatea; un răspuns care le inversează este greșit
- Gradele de libertate: Ljung–Box pe reziduuri folosește $m - k$; testul Granger F folosește $(p, T - Kp - 1)$
- Semnele: convențiile EViews și Python pentru termenii MA și pentru coeficientul de corecție a erorii
- Convențiile: AIC și BIC doar pentru aceleași d și D; VaR 1%, niciodată „VaR 99%"
- Ordinea timpului: nicio informație din eșantionul de test în estimare, în scalare sau în alegerea modelului
- Fiecare cifră recalculată cu propriul cod; fiecare referință verificată prin DOI

Idei de reținut

- Întîi priviți datele: componente, transformări, corelogramă
- Decideți d și D cu ADF și KPSS împreună; identificați cu ACF și PACF; alegeți cu BIC; verificați reziduurile
- Modelați varianța cînd se grupează (GARCH); modelați mai multe serii împreună cu VAR sau VECM
- Judecați prognozele în afara eșantionului, față de repere simple; o potrivire mai bună în eșantion nu înseamnă o prognoză mai bună
- Examenul răsplătește metoda, rezultatul și interpretarea; proiectul răsplătește o întrebare clară, cu un răspuns onest

Autoevaluare

- **Întrebare**: ADF nu respinge, iar KPSS respinge. Ce concluzie trageți?
  - **Răspuns**: ambele indică o rădăcină unitară: diferențiem seria
- **Întrebare**: reziduurile unui ARMA(1,1) dau Ljung–Box $Q(10) = 16$. Este modelul adecvat la 5%?
  - **Răspuns**: cu $10 - 2 = 8$ grade de libertate valoarea critică este 15,51: nu, rămîne autocorelație
- **Întrebare**: două serii $I(1)$ sînt cointegrate. De ce nu un VAR în diferențe?
  - **Răspuns**: omite termenul de corecție a erorii și pierde informația pe termen lung

Bibliografie (1/3)

- Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(6), 716–723. doi:10.1109/TAC.1974.1100705
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3), 307–327. doi:10.1016/0304-4076(86)90063-1
- Box, G. E. P., Jenkins, G. M., & Reinsel, G. C. (2008). *Time Series Analysis: Forecasting and Control* (4th ed.). Wiley. doi:10.1002/9781118619193
- Brockwell, P. J., & Davis, R. A. (2016). *Introduction to Time Series and Forecasting* (3rd ed.). Springer. doi:10.1007/978-3-319-29854-2
- Dickey, D. A., & Fuller, W. A. (1979). Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. *Journal of the American Statistical Association*, 74(366), 427–431. doi:10.1080/01621459.1979.10482531
- Diebold, F. X., & Mariano, R. S. (1995). Comparing predictive accuracy. *Journal of Business & Economic Statistics*, 13(3), 253–263. doi:10.1080/07350015.1995.10524599
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, 50(4), 987–1007. doi:10.2307/1912773
- Engle, R. F., & Granger, C. W. J. (1987). Co-integration and error correction: Representation, estimation, and testing. *Econometrica*, 55(2), 251–276. doi:10.2307/1913236

Bibliografie (2/3)

- Granger, C. W. J. (1969). Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods. *Econometrica*, 37(3), 424–438. doi:10.2307/1912791
- Granger, C. W. J., & Joyeux, R. (1980). An introduction to long-memory time series models and fractional differencing. *Journal of Time Series Analysis*, 1(1), 15–29. doi:10.1111/j.1467-9892.1980.tb00297.x
- Granger, C. W. J., & Newbold, P. (1974). Spurious regressions in econometrics. *Journal of Econometrics*, 2(2), 111–120. doi:10.1016/0304-4076(74)90034-7
- Hamilton, J. D. (1989). A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle. *Econometrica*, 57(2), 357–384. doi:10.2307/1912559
- Hamilton, J. D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press. doi:10.2307/j.ctv14jx6sm
- Harvey, D., Leybourne, S., & Newbold, P. (1997). Testing the equality of prediction mean squared errors. *International Journal of Forecasting*, 13(2), 281–291. doi:10.1016/S0169-2070(96)00719-4
- Hosking, J. R. M. (1981). Fractional differencing. *Biometrika*, 68(1), 165–176. doi:10.1093/biomet/68.1.165
- Huang, C., & Petukhina, A. (2022). *Applied Time Series Analysis and Forecasting with Python*. Springer. doi:10.1007/978-3-031-13584-2

Bibliografie (3/3)

- Hyndman, R. J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice* (3rd ed.). OTexts. otexts.com/fpp3
- Johansen, S. (1991). Estimation and hypothesis testing of cointegration vectors in Gaussian vector autoregressive models. *Econometrica*, 59(6), 1551–1580. doi:10.2307/2938278
- Kalman, R. E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, 82(1), 35–45. doi:10.1115/1.3662552
- Kwiatkowski, D., Phillips, P. C. B., Schmidt, P., & Shin, Y. (1992). Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root. *Journal of Econometrics*, 54(1–3), 159–178. doi:10.1016/0304-4076(92)90104-Y
- Ljung, G. M., & Box, G. E. P. (1978). On a measure of lack of fit in time series models. *Biometrika*, 65(2), 297–303. doi:10.1093/biomet/65.2.297
- Makridakis, S., Spiliotis, E., & Assimakopoulos, V. (2020). The M4 Competition: 100,000 time series and 61 forecasting methods. *International Journal of Forecasting*, 36(1), 54–74. doi:10.1016/j.ijforecast.2019.04.014
- Schwarz, G. (1978). Estimating the dimension of a model. *The Annals of Statistics*, 6(2), 461–464. doi:10.1214/aos/1176344136
- Sims, C. A. (1980). Macroeconomics and reality. *Econometrica*, 48(1), 1–48. doi:10.2307/1912017