








Serii de timp

Capitolul 3: Rădăcini unitare și modele ARIMA



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București
IDA Institute Digital Assets
Blockchain Research Center
AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance
Academia Română, Institutul de Prognoză Economică
MSCA Digital Finance

Acronime folosite în acest material (1/2)

- **ACF**: Autocorrelation Function (funcția de autocorelație)
- **ADF**: Augmented Dickey–Fuller (test) — testul Dickey–Fuller augmentat
- **AI**: Artificial Intelligence (inteligență artificială)
- **AIC**: Akaike Information Criterion (criteriul informațional Akaike)
- **AR**: AutoRegressive (model) — model autoregresiv
- **ARIMA**: AutoRegressive Integrated Moving Average (model) — model autoregresiv integrat cu medie mobilă
- **ARMA**: AutoRegressive Moving Average (model) — model autoregresiv cu medie mobilă
- **BET**: Bucharest Exchange Trading (index) — indicele de referință al Bursei de Valori București
- **BIC**: Bayesian Information Criterion (criteriul informațional bayesian al lui Schwarz)
- **BNR**: Banca Națională a României
- **CUSUM**: CUmulative SUM (control chart) — graficul sumelor cumulate
- **DF**: Dickey–Fuller (test) — testul Dickey–Fuller
- **DF-GLS**: Dickey–Fuller test with GLS detrending (testul Dickey–Fuller cu eliminarea trendului prin GLS)
- **DW**: Durbin–Watson (statistic) — statistica Durbin–Watson
- **FRED**: Federal Reserve Economic Data (baza de date economice a Rezervei Federale din St. Louis)
- **GDP**: Gross Domestic Product (produsul intern brut)
- **GLS**: Generalised Least Squares (metoda generalizată a celor mai mici pătrate)
- **IAPC**: Indicele armonizat al prețurilor de consum

Acronime folosite în acest material (2/2)

- **KPSS**: Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin (test) — testul de staționaritate Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin
- **MA**: Moving Average (medie mobilă)
- **MAIC**: Modified Akaike Information Criterion (criteriul informațional Akaike modificat)
- **OLS**: Ordinary Least Squares (metoda celor mai mici pătrate)
- **PACF**: Partial AutoCorrelation Function (funcția de autocorelație parțială)
- **PIB**: Produsul intern brut
- **PNB**: Produsul național brut
- **PP**: Phillips–Perron (test) — testul Phillips–Perron de rădăcină unitară
- **RMSE**: Root Mean Squared Error (rădăcina erorii pătratice medii)
- **SARIMA**: Seasonal ARIMA (model) — model ARIMA sezonier
- **SE**: Standard Error (eroare standard)
- **SUA**: Statele Unite ale Americii
- **TBATS**: Trigonometric seasonality, Box–Cox, ARMA errors, Trend, Seasonal components (model) — model cu sezonalitate trigonometrică, transformare Box–Cox, erori ARMA, trend și componente sezoniere
- **UE**: Uniunea Europeană
- **VAR**: Vector AutoRegression (model vector autoregresiv)
- **ZA**: Zivot–Andrews (test) — testul Zivot–Andrews cu o ruptură structurală

Întrebarea de azi și traseul

- **Întrebarea**: cînd o serie urcă în timp, este șocul de azi temporar sau permanent și cum trebuie prognozată seria?
  - răspunsul decide dacă eliminăm trendul sau diferențiem seria și cît de largi sînt intervalele de prognoză
- **Traseul** capitolului
  - trend determinist și trend stochastic; procese integrate $I(d)$; regresia falsă
  - teste de rădăcină unitară: Dickey–Fuller, ADF, Phillips–Perron; testul de staționaritate KPSS; rupturi structurale
  - modele ARIMA(p, d, q): identificare, estimare, diagnosticare, prognoze cu intervale tot mai largi
- Pornim de la Capitolul 1 (staționaritate, mers aleator, diferențiere) și de la Capitolul 2 (modele ARMA); Seminarul 3 are loc înaintea acestui curs

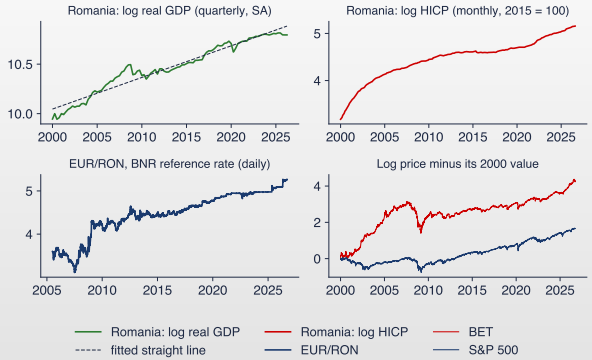
Rezultatele învățării

- Deosebiți seriile staționare în jurul trendului de cele staționare în diferențe și explicați de ce contează deosebirea
- Recunoașteți o regresie falsă și explicați de ce apare
- Aplicați și interpretați testele ADF, Phillips–Perron și KPSS, cu termenii deterministi și numărul de laguri potrivite
- Explicați cum poate o ruptură structurală să imite o rădăcină unitară
- Identificați, estimați, verificați și folosiți pentru prognoză un model ARIMA(p, d, q) și explicați de ce intervalele lui cresc cu orizontul
- Folosiți critic selecția automată a modelelor ARIMA

Bibliografie și instrumente

- Manual: Huang și Petukhina (2022), cap. 4–5 (modele ARIMA și nestaționaritate)
  - manual însoțitor, gratuit online: Hyndman și Athanasopoulos (2021), cap. 9 (modele ARIMA)
- Teorie: Hamilton (1994), cap. 15–17 (trenduri, rădăcini unitare); Box, Jenkins și Reinsel (2008) pentru metodologia ARIMA
- Quantlet-urile Python ale capitolului: Quantlets/Ch_03
  - `adfuller`, `kpss`, `zivot_andrews` și `ARIMA` din `statsmodels`; testul Phillips–Perron scris în cîteva rînduri
- Notebook-ul cursului: deschideți în Google Colab
- Curs video: Applied Time Series Analysis with Python

Patru serii care urcă în timp



- PIB-ul real (Eurostat, ajustat sezonier) și IAPC ale României (Eurostat); cursul EUR/RON, cursul de referință BNR; logaritmii prețurilor BET și S&P 500, zilnic din 2000
- Niciuna nu are o medie constantă: în Capitolul 1 le-am numit nestaționare

TSA_ch3_trends

Interpretarea celor patru serii

- PIB-ul crește în medie cu 0,80% pe trimestru (circa 3,2% pe an), dar se abate de la dreaptă cu pînă la 18%
  - recesiunea din 2009: a revenit PIB-ul la vechea dreaptă sau a pornit pe una nouă?
- Prețurile de consum: $\times$7,2 din 2000; EUR/RON: de la 3,60 la 5,26 lei; BET: +426 puncte logaritmice, S&P 500: +166 puncte logaritmice (pînă la 18 septembrie 2026)
- Două modele pot produce asemenea grafice
  - o dreaptă fixă plus zgomot staționar (**trend determinist**)
  - un mers aleator cu derivă (**trend stochastic**)

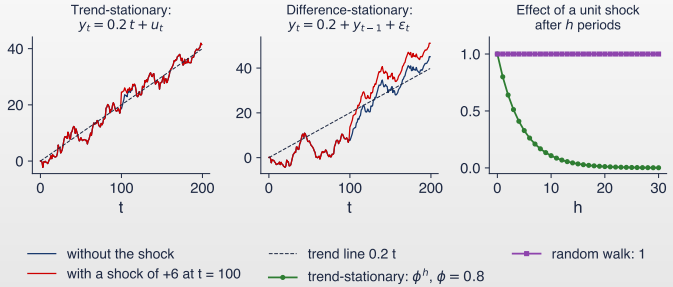
Serii staționare în jurul trendului

- **Definiție**: $y_t = \alpha + \beta t + u_t$, unde u_t este un proces staționar (de exemplu un AR(1) staționar, Capitolul 2)
  - α: termenul liber; β: panta, adică variația medie pe perioadă; t: indicele de timp
  - y_t este **staționar în jurul trendului**: staționar după ce scădem dreapta $\alpha + \beta t$
- Proprietăți
  - $E[y_t] = \alpha + \beta t$; $\text{Var}(y_t) = \text{Var}(u_t)$, constantă
  - un șoc îndepărtează y_t de dreaptă doar temporar: cu $u_t = \phi u_{t-1} + \varepsilon_t$, efectul lui după h perioade este ϕ^h
  - prognozele pe termen lung revin la dreaptă; intervalele lor au o lățime mărginită
- Tratamentul corect: estimăm trendul prin OLS (ordinary least squares, metoda celor mai mici pătrate) și modelăm reziduurile ca ARMA

Serii staționare în diferențe

- **Definiție**: $y_t = \beta + y_{t-1} + u_t$, u_t staționar; prin substituție, $y_t = y_0 + \beta t + \sum_{i=1}^{t} u_i$
  - β: deriva, adică variația medie pe perioadă; y_0: valoarea inițială
  - y_t este **staționar în diferențe**: $\Delta y_t = \beta + u_t$ este staționar
  - $\sum_{i \leq t} u_i$ este **trendul stochastic**; βt provine din derivă
- Proprietăți
  - aceeași medie $y_0 + \beta t$ ca la o serie staționară în jurul trendului, dar $\text{Var}(y_t)$ crește cu t (Capitolul 1: $t\sigma^2$ pentru un mers aleator)
  - fiecare șoc rămîne pentru totdeauna în nivel: nu există o dreaptă la care seria să revină
  - intervalele de prognoză se lărgesc fără limită pe măsură ce orizontul crește
- Tratamentul corect: diferențiem seria și modelăm Δy_t ca ARMA: modelul ARIMA din acest capitol

Serii staționare în jurul trendului și serii staționare în diferențe: efectul unui șoc



- Stînga și centru: aceleași șocuri generează o serie staționară în jurul trendului (u_t AR(1), $\phi = 0{,}8$) și un mers aleator cu deriva 0,2; traiectoriile roșii adaugă un șoc de $+6$ la $t = 100$
- Dreapta: efectul unui șoc unitar după h perioade

TSA_ch3_trends

Interpretarea celor două trenduri

- Seria staționară în jurul trendului: șocul se stinge; efectul lui este $0{,}8^{10} = 0{,}107$ după 10 perioade și 0,012 după 20
  - la $t = 200$ traiectoriile roșie și albastră coincid
- Mersul aleator: întreaga traiectorie urcă cu 6 și rămîne acolo
  - o recesiune într-o economie de tip staționar în diferențe este o pierdere permanentă de producție, nu o scădere temporară sub trend
- Cu ochiul liber, cele două serii fără șoc arată la fel: avem nevoie de un test formal (secțiunile 3–4)

Procese integrate

- **Definiție**: y_t este **integrat de ordinul** d, $y_t \sim I(d)$, dacă $\Delta^d y_t$ este staționar, iar $\Delta^{d-1} y_t$ nu este
  - $I(0)$: staționar (cu o reprezentare ARMA inversabilă, Capitolul 2); $I(1)$: staționar după o diferențiere; $I(2)$: după două
  - $\Delta^2 y_t = \Delta y_t - \Delta y_{t-1} = y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2}$
- Ordine tipice în economie și finanțe
  - logaritmii prețurilor acțiunilor, cursurile de schimb, logaritmul PIB: $I(1)$; randamentele și ratele de creștere: $I(0)$
  - nivelul prețurilor în perioade cu inflație ridicată: posibil $I(2)$, deci inflația însăși ar fi $I(1)$
- Reguli
  - $I(0) + I(1) = I(1)$: trendul stochastic domină; o serie staționară în jurul trendului este $I(0)$ după eliminarea trendului, nu după diferențiere

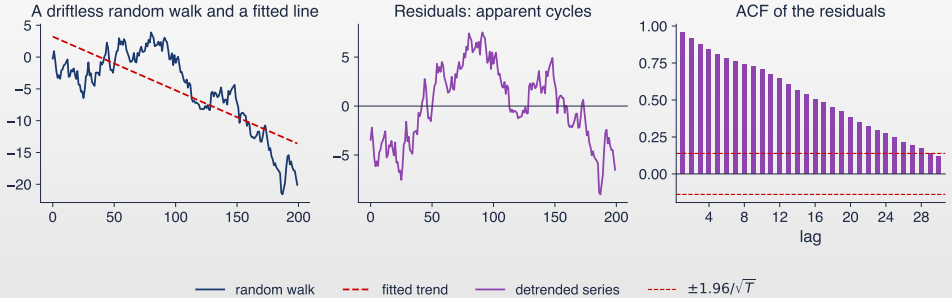
Rădăcina unitară

- Scriem un AR(p) cu operatorul lag L (Capitolul 1): $\phi(L)y_t = \varepsilon_t$, $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p$
  - Capitolul 2: staționar dacă toate rădăcinile ecuației $\phi(z) = 0$ sînt în afara cercului unitate, $|z| > 1$
- **Rădăcină unitară**: o rădăcină este $z = 1$, deci $\phi(z) = (1 - z)\,\phi^*(z)$, iar rădăcinile lui ϕ^* sînt în afara cercului
  - atunci $\phi^*(L)\,\Delta y_t = \varepsilon_t$: Δy_t este un AR($p - 1$) staționar, iar $y_t \sim I(1)$
  - AR(1): $\phi(z) = 1 - \phi z$ are rădăcina $1/\phi$, unitară cînd $\phi = 1$: mersul aleator
- **Exemplu**: $y_t = 1{,}5y_{t-1} - 0{,}5y_{t-2} + \varepsilon_t$; $1 - 1{,}5z + 0{,}5z^2 = (1 - z)(1 - 0{,}5z)$
  - rădăcinile 1 și 2: $\Delta y_t = 0{,}5\,\Delta y_{t-1} + \varepsilon_t$, un AR(1) în diferențe

Studiu de caz: Nelson și Plosser (1982)

- **Întrebarea**: sînt seriile macroeconomice ale SUA staționare în jurul unui trend, cum presupuneau modelele ciclului economic din anii 1970?
  - Nelson și Plosser (1982): 14 serii anuale lungi (PNB real, ocuparea, prețurile, salariile, ratele dobînzii, prețurile acțiunilor), unele din 1860
- **Metoda**: testul Dickey–Fuller din secțiunea 3, cu constantă și trend
  - rădăcina unitară a fost respinsă pentru o singură serie, rata șomajului
- **Consecința**: șocurile asupra producției par permanente, nu temporare
  - o dezbatere amplă despre natura recesiunilor și un avertisment împotriva eliminării trendului printr-o dreaptă (slide-ul următor)
  - concluzia a fost contestată ulterior prin rupturi structurale (secțiunea 5)

Eliminarea trendului dintr-un mers aleator



- Stînga: un mers aleator fără derivă ($T = 200$) și dreapta OLS $\hat{a} + \hat{b}t$; centru: reziduurile; dreapta: ACF a reziduurilor

TSA_ch3_trends

Interpretarea mersului aleator fără trend

- Dreapta se potrivește: $R^2 = 0{,}61$, $t = -17{,}7$ pentru pantă, deși panta adevărată este 0
  - pe 2 000 de mersuri aleatoare: $|t| > 1{,}96$ în 90% din cazuri, R^2 median $= 0{,}44$
- Reziduurile par cicluri lungi: $\hat{\rho}(1) = 0{,}96$ și o descreștere lentă
  - Nelson și Kang (1981): eliminarea trendului dintr-o serie staționară în diferențe creează **cicluri false**; un ciclu economic poate fi un artefact al metodei
- Eroarea inversă (diferențierea unei serii staționare în jurul trendului) este supradiferențierea (Capitolul 1 și secțiunea 6)

Recapitulare: trend determinist și trend stochastic

- Staționară în jurul trendului: $y_t = \alpha + \beta t + u_t$, șocurile se sting; staționară în diferențe: $\Delta y_t = \beta + u_t$, șocurile sînt permanente
- $I(d)$: staționar după d diferențieri; o rădăcină unitară a lui $\phi(z)$ înseamnă $I(1)$
- Tratamentul greșit creează artefacte: cicluri false (eliminarea trendului dintr-o serie staționară în diferențe) sau supradiferențiere (diferențierea unei serii staționare în jurul trendului)

1926: corelații fără sens

- Yule (1926) a întrebat: *Why do we sometimes get nonsense-correlations between time-series?* (De ce obținem uneori corelații fără sens între serii de timp?)
  - exemplul lui: în Anglia și Țara Galilor, 1866–1911, ponderea căsătoriilor oficiate de Biserica Angliei și rata mortalității aveau o corelație de circa 0,95
  - nicio legătură cauzală: ambele serii au scăzut în perioada respectivă
- Explicația lui: pentru seriile care evoluează ca sumele de termeni aleatori, corelația de selecție nu se stabilizează în jurul lui 0
  - valorile mari apar des din întîmplare; eroarea standard obișnuită nu se aplică
- Cincizeci de ani mai tîrziu, aceeași problemă a reapărut în modelele econometrice estimate pe niveluri

1974: Granger și Newbold

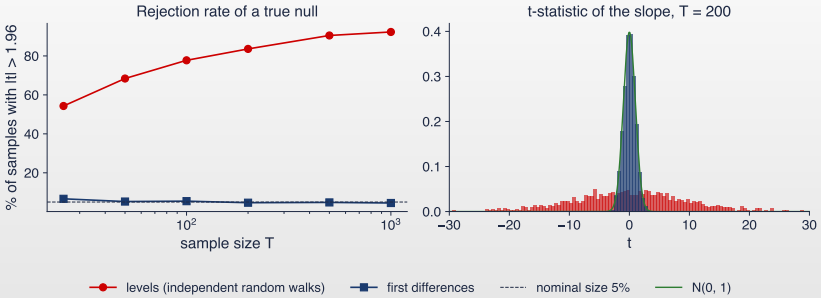


Clive Granger (1934–2009), Premiul Nobel pentru economie 2003

Foto: Olaf Storbeck (2008); CC BY-SA 2.0; Wikimedia Commons

- Granger și Newbold (1974): regresia unui mers aleator pe un alt mers aleator, **independent**
  - $y_t = a + bx_t + e_t$, cu y_t, x_t serii $I(1)$ independente
  - testul t pentru $b = 0$ respinge mult prea des; R^2 este mare; statistica Durbin–Watson este apropiată de 0
- Regula lor practică: suspectați o regresie falsă cînd $R^2 > \text{DW}$
  - DW (Durbin–Watson) $\approx 2(1 - \hat{\rho}_1)$ al reziduurilor: aproape de 0 indică reziduuri de tip $I(1)$
- Granger și Newbold lucrau atunci la Universitatea din Nottingham; Granger a primit ulterior Premiul Nobel pentru cointegrare (Capitolul 7)

Regresia falsă prin simulare



- 2 000 de perechi de mersuri aleatoare gaussiene independente pentru fiecare T; OLS a lui y pe o constantă și pe x, în niveluri și în diferențe
- Stînga: proporția eșantioanelor cu $|t| > 1{,}96$; dreapta: distribuția lui t pentru $T = 200$

TSA_ch3_spurious_regression

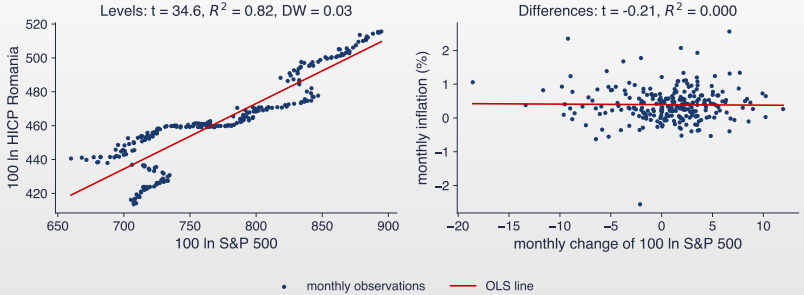
Interpretarea simulării

- Niveluri: ipoteza adevărată $b = 0$ este respinsă în 68% din eșantioane cu $T = 50$ și în 92% cu $T = 1000$
  - mai multe date înrăutățesc situația: $|t|$ median crește de la 3,2 ($T = 50$) la 14,2 ($T = 1000$)
  - R^2 median de circa 0,17 pentru orice T; DW median 0,08 la $T = 200$
- Diferențe: 4,7% la $T = 200$, aproape de nivelul nominal de 5%
  - testul t funcționează din nou, deoarece Δy_t și Δx_t sînt staționare

Motivul pentru care testul t eșuează

- În ipoteza $b = 0$, eroarea $e_t = y_t - a$ este ea însăși un mers aleator: ipotezele OLS (erori staționare, necorelate) nu sînt îndeplinite
  - eroarea standard obișnuită este mult prea mică
- Phillips (1986) a dedus comportamentul în eșantioane mari
  - $\hat{b}$ nu converge la 0: converge la o variabilă aleatoare
  - $t_{\hat{b}}$ crește ca $\sqrt{T}$, deci rata de respingere tinde la 100%
  - R^2 are o distribuție limită nedegenerată; DW $\to 0$
- Excepția: dacă $y_t - bx_t$ este staționar pentru un anumit b, seriile sînt **cointegrate**, iar regresia în niveluri are sens Engle și Granger (1987) (Capitolul 7)

O regresie falsă pe date reale



- IAPC al României (Eurostat) față de S&P 500 (închiderea de la sfîrșitul lunii), 260 de luni din ianuarie 2005, ambele ca 100 ln
- Stînga: niveluri; dreapta: variații lunare

TSA_ch3_spurious_regression

Interpretarea regresiei IAPC

- Niveluri: panta 0,39, $t = 34{,}6$, $R^2 = 0{,}82$, DW $= 0{,}03$
  - „Acțiunile americane explică prețurile de consum din România": $R^2 >$ DW, o regresie falsă tipică
- Diferențe: $t = -0{,}21$ (p $= 0{,}83$), $R^2 = 0{,}0002$
  - inflația lunară și randamentul lunar al acțiunilor nu sînt legate
- Ambele niveluri conțin un trend; regresia spune doar că ambele au crescut

Recapitulare: regresia falsă

- Regresia unei serii $I(1)$ pe o altă serie $I(1)$ fără legătură cu ea dă un t mare, un R^2 mare și un DW apropiat de 0
- Mai multe observații nu ajută: t crește ca $\sqrt{T}$
- Remedii: testăm întîi ordinul de integrare; estimăm regresia pe diferențe; sau testăm cointegrarea (Capitolul 7)

Testarea ipotezei $\phi = 1$

- AR(1): $y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$; scădem y_{t-1}: $\Delta y_t = \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t$, cu $\gamma = \phi - 1$
  - H_0: $\gamma = 0$ (rădăcină unitară, $I(1)$); H_1: $\gamma < 0$ (staționar); un test unilateral, la stînga
  - statistica: $\tau = \hat{\gamma}/\mathrm{SE}(\hat{\gamma})$, raportul t obișnuit din OLS; SE: eroarea standard; un τ foarte negativ este un argument împotriva rădăcinii unitare
- În ipoteza H_0, τ **nu** urmează legea Student sau distribuția Normală Dickey și Fuller (1979)
  - y_{t-1} este un mers aleator, deci regresorul nu este staționar; $\hat{\phi}$ converge cu viteza T, nu $\sqrt{T}$ (**superconsistență**)
  - limita lui τ este o funcțională a mișcării browniene, asimetrică la stînga Hamilton (1994), cap. 17
  - valorile critice provin din simulare: Fuller (1996); astăzi, din suprafețe de răspuns MacKinnon (2010)

Dickey și Fuller la Iowa State University



Snedecor Hall, Iowa State University: departamentul de statistică și laboratorul său de statistică (1933)

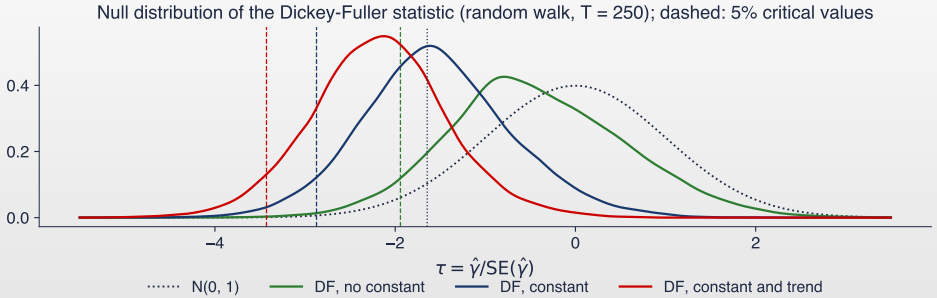
Foto: Maitra (2023); CC BY-SA 4.0; Wikimedia Commons

- **Wayne A. Fuller**: statistician la Iowa State, autorul lucrării *Introduction to Statistical Time Series* Fuller (1996)
- **David A. Dickey**: doctorandul lui la Iowa State (1976), apoi la North Carolina State University
- Dickey și Fuller (1979): distribuția lui $\hat{\phi}$ și τ în cazul unei rădăcini unitare; Dickey și Fuller (1981): teste comune pentru rădăcina unitară și termenii determiniști
- Said și Dickey (1984): testul augmentat pentru erori ARMA (în această secțiune)

Trei regresii Dickey–Fuller

- **Fără constantă**: $\Delta y_t = \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t$
  - H_1: staționar cu media 0; rareori realist
- **Constantă**: $\Delta y_t = c + \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t$
  - H_0: mers aleator (cu derivă dacă $c \neq 0$); H_1: staționar în jurul unei medii nenule
  - pentru serii fără trend: rate ale dobînzii, inflație, cursuri de schimb, randamente
- **Constantă și trend**: $\Delta y_t = c + bt + \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t$
  - c: constanta; bt: un trend liniar cu panta b
  - H_0: mers aleator cu derivă; H_1: staționar în jurul trendului: exact întrebarea din secțiunea 1
  - pentru serii cu trend: logaritmul PIB, logaritmii prețurilor, logaritmii indicilor de preț
- Fiecare caz are propria distribuție a lui τ și propriile valori critice

Distribuțiile Dickey–Fuller



- 20 000 de mersuri aleatoare cu $T = 250$: densitatea lui τ în cele trei regresii, față de $N(0, 1)$; liniile întrerupte: valorile critice de 5% MacKinnon (2010)

TSA_ch3_dickey_fuller

Interpretarea celor trei distribuții

- Toate trei sînt la stînga lui $N(0,1)$; cu cît sînt mai mulți termeni determiniști, cu atît mai la stînga
  - cuantilele de 5% simulate: $-1{,}95$ (fără constantă), $-2{,}86$ (constantă) și $-3{,}42$ (constantă și trend); valorile din tabele: $-1{,}94$; $-2{,}87$ și $-3{,}43$
- Cu valoarea critică a distribuției Normale, $-1{,}645$, o rădăcină unitară adevărată este „respinsă” în 46% din eșantioane (constantă) și în 77% (constantă și trend)
  - tabelul greșit transformă mersurile aleatoare în serii „staționare”

Valorile critice ale testului Dickey–Fuller

	fără constantă			constantă			constantă și trend		
T	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
50	−2,61	−1,95	−1,61	−3,57	−2,92	−2,60	−4,15	−3,50	−3,18
100	−2,59	−1,94	−1,61	−3,50	−2,89	−2,58	−4,05	−3,46	−3,15
250	−2,57	−1,94	−1,62	−3,46	−2,87	−2,57	−4,00	−3,43	−3,14
∞	−2,57	−1,94	−1,62	−3,43	−2,86	−2,57	−3,96	−3,41	−3,13

- Sursa: suprafețele de răspuns din MacKinnon (2010), folosite de `statsmodels`; p-value-urile din MacKinnon (1994)
- Decizia: respingem rădăcina unitară la 5% dacă τ este **sub** (mai negativ decît) valoarea de 5%
- Valorile depind puțin de T; se aplică neschimbate testului ADF

Exemplu rezolvat: PIB-ul real al României

- $y_t = 100 \ln$ PIB real, T1 2000–T2 2026; regresia cu constantă și trend, fără laguri ($T = 105$ diferențe)
  - OLS: $\hat{\gamma} = -0{,}0961$, SE($\hat{\gamma}$) $= 0{,}0416$, deci $\hat{\phi} = 1 + \hat{\gamma} = 0{,}904$
- $\tau = -0{,}0961/0{,}0416 = -2{,}31$; valoarea critică de 5% cu constantă și trend: $-3{,}45$
  - $-2{,}31 > -3{,}45$: nu respingem rădăcina unitară (p = 0,43)
  - cu valoarea distribuției Normale, $-1{,}645$, am fi respins-o: tabelul greșit dă răspunsul greșit
- Interpretarea: „nerespins" nu înseamnă „demonstrat"
  - dacă $\phi = 0{,}904$ ar fi adevărat, un șoc s-ar înjumătăți în $\ln 0{,}5 / \ln 0{,}904 \approx 6{,}9$ trimestre; cu 106 observații, testul abia poate deosebi această situație de $\phi = 1$

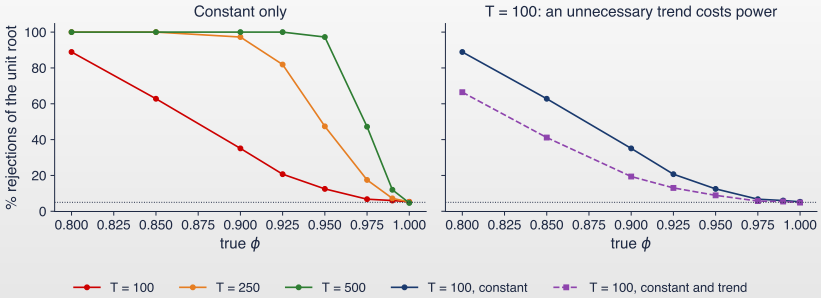
Testul Dickey–Fuller augmentat

- Dacă Δy_t este autocorelat, ε_t din regresia DF nu este zgomot alb, iar mărimea testului este greșită
  - remediul: adăugăm diferențele trecute Δy_{t-j}
- Regresia **ADF** (augmented Dickey–Fuller, Dickey–Fuller augmentat):
  - $\Delta y_t = c + bt + \gamma y_{t-1} + \sum_{j=1}^{k} \delta_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t$; același τ, aceleași valori critice
  - δ_j: coeficienții diferențelor trecute; k: numărul de diferențe trecute incluse (lagurile)
  - un AR(p) în niveluri devine exact această regresie, cu $k = p - 1$ și $\gamma = -\phi(1)$
- Said și Dickey (1984): cu erori ARMA, testul rămîne valid dacă k crește încet odată cu T
  - lagurile aproximează partea MA printr-un AR lung
- Testul ADF este testul implicit de rădăcină unitară în programe: `adfuller` în `statsmodels`

Alegerea numărului de laguri k

- Maximul: $k_{\max} = 12\,(T/100)^{1/4}$ Schwert (1989); pentru $T = 105$, $k_{\max} = 13$
  - apoi alegem $k \leq k_{\max}$ după un criteriu informațional, AIC sau BIC (Capitolul 2), pe același eșantion pentru fiecare k
- Prea puține laguri: erori autocorelate, mărime greșită (cu o componentă MA negativă, mult prea multe respingeri)
  - prea multe laguri: putere mai mică
- Ng și Perron (2001): un AIC modificat (MAIC) dă o mărime mai bună; eliminarea trendului prin GLS Elliott, Rothenberg și Stock (1996) dă mai multă putere
  - MAIC: modified Akaike information criterion (criteriul Akaike modificat); GLS: generalised least squares (metoda generalizată a celor mai mici pătrate); ambele apar în testul DF-GLS
- Verificăm rezultatul: testul Ljung–Box pe reziduurile ADF Ljung și Box (1978); raportăm k împreună cu τ

Mărimea și puterea testului Dickey–Fuller



- 2 000 de traiectorii AR(1) $y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$ pentru fiecare ϕ; proporția respingerilor la 5%; la $\phi = 1$ aceasta este mărimea testului

TSA_ch3_dickey_fuller

Interpretarea curbelor de putere

- Mărimea: 5,30%, 5,20% și 4,65% la $\phi = 1$ (cu constantă): testul își respectă nivelul de 5%
- Puterea la $\phi = 0{,}95$: 12% cu $T = 100$, 47% cu $T = 250$, 97% cu $T = 500$
  - o serie trimestrială de 25 de ani ($T = 100$) aproape niciodată nu deosebește $\phi = 0{,}95$ de o rădăcină unitară
  - contează lungimea perioadei, nu frecvența: datele zilnice pe doi ani nu ajută
- Un trend inutil costă putere: la $T = 100$ și $\phi = 0{,}9$, 35% cu constantă, 19% cu constantă și trend

Alegerea termenilor deterministi

- Ipoteza alternativă trebuie să fie o descriere plauzibilă a datelor
  - serii cu trend (logaritmul PIB, logaritmii prețurilor): constantă și trend
  - serii care fluctuează în jurul unui nivel (rate ale dobînzii, inflație, cursuri de schimb, randamente): constantă
- Omiterea unui trend necesar: o serie staționară în jurul trendului pare să aibă rădăcină unitară; testul aproape niciodată nu respinge
  - adăugarea unui trend inutil: putere mai mică (graficul anterior)
- Ne uităm întîi la grafic, apoi alegem; Dickey și Fuller (1981) propun teste comune de tip F pentru rădăcina unitară și trend

Cîte diferențieri: $I(1)$ sau $I(2)$?

- Dickey și Pantula (1987): testăm de la cel mai mare ordin plauzibil în jos
  - pasul 1: ADF pe Δy_t; dacă nu respinge, y_t poate fi $I(2)$
  - pasul 2: dacă respinge, ADF pe y_t; respingere: $I(0)$; nerespingere: $I(1)$
- Motivul ordinii descendente: dacă $y_t \sim I(2)$, testul pe y_t presupune cel mult o rădăcină unitară și nu este valid
- Exemplu: prețurile de consum din România după 2005 (tabelul din secțiunea 4)
  - $\ln P$: rădăcină unitară; inflația π: ADF p = 0,32, KPSS 0,404; variația inflației: clar staționară
  - deci $\ln P$ este $I(1)$ sau $I(2)$, în funcție de cît de persistentă este inflația: secțiunea 7 revine asupra acestei întrebări

Recapitulare: testul Dickey–Fuller

- $\Delta y_t = c + bt + \gamma y_{t-1} + \sum_j \delta_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t$; H_0: $\gamma = 0$; τ comparat cu valorile critice Dickey–Fuller
- Termenii deterministi urmează graficul; lagurile se aleg după AIC sau BIC, pînă la $12(T/100)^{1/4}$
- Putere mică în apropierea lui $\phi = 1$: nerespingerea este o dovadă slabă în favoarea rădăcinii unitare
- Ordinul de integrare: testăm de sus în jos (întîi Δy_t)

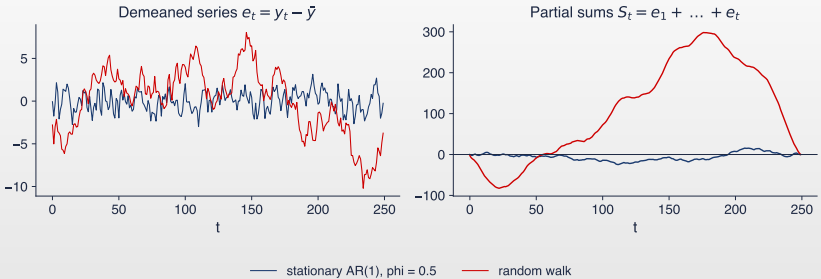
Testul Phillips–Perron

- Phillips și Perron (1988): păstrăm regresia DF simplă (fără diferențele trecute) și corectăm în schimb statistica τ
  - $Z_\tau = \sqrt{\hat{\gamma}_0 / \hat{\lambda}^2}\, \tau - \dfrac{(\hat{\lambda}^2 - \hat{\gamma}_0)\, T\, \mathrm{SE}(\hat{\gamma})}{2\hat{\lambda}\, s}$
  - $\hat{\gamma}_0$: varianța reziduurilor; s^2: varianța lor OLS; $\hat{\lambda}^2$: **varianța lor pe termen lung**
- Varianța pe termen lung (Newey–West, ponderi Bartlett): $\hat{\lambda}^2 = \hat{\gamma}_0 + 2\sum_{j=1}^{L}(1 - \frac{j}{L+1})\hat{\gamma}_j$
  - $\hat{\gamma}_j$: autocovariațele reziduurilor; L: numărul de autocovariațe incluse (lățimea de bandă)
  - dacă reziduurile sînt zgomot alb, $\hat{\lambda}^2 = \hat{\gamma}_0$ și $Z_\tau = \tau$: corecția contează doar cînd ele sînt autocorelate
- Aceeași H_0 și aceleași valori critice ca ADF; robust la heteroscedasticitate; nu alegem laguri, ci o lățime de bandă L
  - punctul slab: distorsiuni mari ale mărimii cînd există o componentă MA negativă Schwert (1989)

Testul KPSS: staționaritatea ca ipoteză nulă

- Kwiatkowski et al. (1992) (KPSS: Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin): $y_t = \xi t + r_t + \varepsilon_t$, $r_t = r_{t-1} + u_t$, $u_t \sim \text{WN}(0, \sigma_u^2)$
  - ξt: un trend determinist; r_t: un mers aleator, adică nivelul care se deplasează; ε_t: zgomot staționar
  - H_0: $\sigma_u^2 = 0$ (mersul aleator este o constantă: y_t staționar în jurul unui nivel sau al unui trend); H_1: $\sigma_u^2 > 0$, o rădăcină unitară
- Statistica: regresia lui y_t pe o constantă (și un trend); reziduurile e_t; sumele parțiale $S_t = e_1 + \cdots + e_t$
  - $\eta = \dfrac{1}{T^2 \hat{\lambda}^2} \sum_{t=1}^{T} S_t^2$, unde $\hat{\lambda}^2$ este varianța pe termen lung a lui e_t
  - respingem staționaritatea pentru valori **mari** ale lui η: valorile critice de 5% sînt 0,463 (nivel) și 0,146 (trend); la 1%: 0,739 și 0,216
- Un test al staționarității, nu al rădăcinii unitare: inversează sarcina probei

KPSS: rolul sumelor parțiale



- Un AR(1) staționar ($\phi = 0{,}5$) și un mers aleator, $T = 250$: seriile centrate și sumele lor parțiale S_t
- KPSS (nivel): 0,16 pentru AR(1), 0,73 pentru mersul aleator; valoarea critică de 5% este 0,463

TSA_ch3_unit_root_tests

Interpretarea sumelor parțiale

- Seria staționară: abaterile se compensează, S_t rămîne aproape de 0
  - $\sum S_t^2$ crește ca T^2, deci η rămîne mărginit
- Mersul aleator: perioade lungi de o parte a mediei, S_t se abate mult de la 0
  - $\sum S_t^2$ crește ca T^4: η crește cu T, iar testul respinge
- Aceeași idee ca în graficele CUSUM din controlul calității: abaterile cumulate dezvăluie un nivel care se deplasează

ADF și KPSS împreună

	KPSS nu respinge	**KPSS respinge**
ADF respinge	$I(0)$: ambele concordă	conflict: ruptură, memorie lungă, valori extreme?
ADF nu respinge	neconcludent: datele nu pot decide	$I(1)$: ambele concordă

- Cele două teste au ipoteze nule opuse: concordanța lor este o dovadă mai puternică decît oricare test singur
- Situația neconcludentă este frecventă în eșantioane scurte: putere mică de ambele părți
  - atunci decidem după scop: pentru prognoză, $d = 1$ este alegerea prudentă (intervale mai largi)
- Conflict: căutăm rupturi (secțiunea 5) sau integrare fracționară (Capitolul 8)

Teste de rădăcină unitară pe serii reale

Seria	det.	T	ADF (p)	k	PP	KPSS	ADF+KPSS
România, PIB real, $100 \ln Y$	c, t	106	$-2{,}31$ (0,428)	0	$-2{,}19$	0,198	$I(1)$
creșterea Δ	c	105	$-10{,}77$ ($<0{,}001$)	0	$-10{,}88$	0,263	$I(0)$
România, IAPC, $100 \ln P$	c, t	260	$-0{,}96$ (0,949)	6	$-0{,}88$	0,314	$I(1)$
România, inflația anuală π	c	260	$-1{,}94$ (0,315)	15	$-2{,}31$	0,404	neconcludent
variația $\Delta\pi$	c	259	$-4{,}83$ ($<0{,}001$)	14	$-11{,}31$	0,105	$I(0)$
SUA, PIB real, $100 \ln Y$	c, t	318	$-1{,}54$ (0,816)	1	$-1{,}20$	0,581	$I(1)$
creșterea Δ	c	317	$-15{,}51$ ($<0{,}001$)	0	$-15{,}44$	0,456	$I(0)$
EUR/RON, $100 \ln S$	c	5 353	$-1{,}22$ (0,664)	7	$-1{,}15$	10,255	$I(1)$
randamente zilnice	c	5 352	$-27{,}42$ ($<0{,}001$)	6	$-60{,}82$	0,055	$I(0)$
BET, $100 \ln P$	c, t	6 671	$-1{,}90$ (0,653)	19	$-2{,}35$	1,143	$I(1)$
randamente zilnice	c	6 670	$-16{,}50$ ($<0{,}001$)	18	$-74{,}55$	0,360	$I(0)$
S&P 500, $100 \ln P$	c, t	6 715	$-2{,}08$ (0,557)	34	$-2{,}36$	2,281	$I(1)$
randamente zilnice	c	6 714	$-14{,}26$ ($<0{,}001$)	35	$-91{,}41$	0,449	$I(0)$
Nilul, debitul anual	c	100	$-4{,}05$ (0,001)	1	$-6{,}38$	0,869	conflict

- det.: termenii deterministi (c: constantă; t: trend); k: lagurile ADF (AIC); valori critice de 5%: ADF și PP circa $-2{,}86$ (c), $-3{,}41$ (c, t); KPSS 0,463 (c), 0,146 (c, t)

TSA_ch3_unit_root_tests

Interpretarea tabelului testelor

- Logaritmii prețurilor, cursul de schimb, logaritmul PIB și al IAPC: $I(1)$; diferențele lor: $I(0)$
  - PIB-ul României: ADF p $= 0{,}43$ și KPSS $0{,}198 > 0{,}146$: rădăcină unitară, cum au găsit Nelson și Plosser (1982) pentru SUA
- Inflația anuală din România: niciun test nu respinge (KPSS $0{,}404 < 0{,}463$): neconcludent
  - o serie foarte persistentă, posibil cu rupturi; secțiunile 5 și 7
- Nilul: ambele resping: un conflict
  - Capitolul 1 a arătat o schimbare de nivel în 1898: secțiunea următoare explică acest conflict
- Randamentele zilnice: PP dă valori mult mai negative decît ADF (BET: $-74{,}6$ față de $-16{,}5$), dar ambele resping; verdictul este același

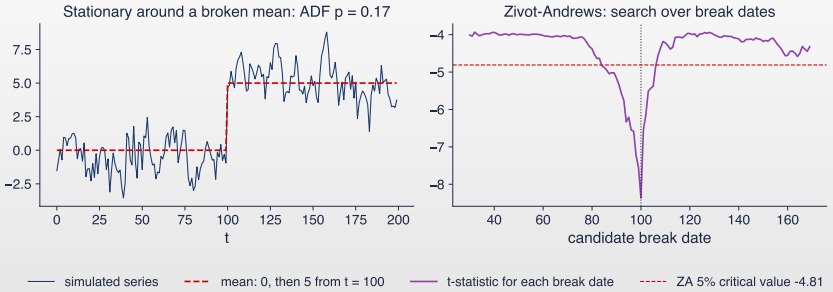
Recapitulare: Phillips–Perron și KPSS

- PP: regresia DF plus o corecție prin varianța pe termen lung; aceeași H_0 și aceleași valori critice ca ADF
- KPSS: H_0 este staționaritatea; sumele parțiale mari o resping
- Interpretăm ADF și KPSS împreună: concordanță, rezultat neconcludent sau conflict

Perron (1989): o ruptură poate semăna cu o rădăcină unitară

- Perron (1989): o serie staționară în jurul unei medii sau al unui trend care **se schimbă o dată** pare persistentă
  - regresia DF explică schimbarea printr-un $\hat{\phi}$ apropiat de 1; testul își pierde puterea
- A reexaminat seriile Nelson și Plosser cu două rupturi cunoscute: crahul din 1929 (nivel) și șocul petrolier din 1973 (pantă)
  - cu variabile dummy pentru ruptură, rădăcina unitară a fost respinsă pentru majoritatea seriilor
  - interpretarea: majoritatea șocurilor sînt temporare; doar cîteva evenimente rare sînt permanente
- Critica: data rupturii a fost aleasă după ce s-au văzut datele

O schimbare de nivel înșală testul ADF



- Stînga: zgomot AR(1) ($\phi = 0{,}6$) în jurul unei medii care sare de la 0 la 5 la $t = 100$; dreapta: statistica t a lui y_{t-1} pentru fiecare dată posibilă a rupturii, cu o variabilă dummy de nivel

TSA_ch3_structural_breaks

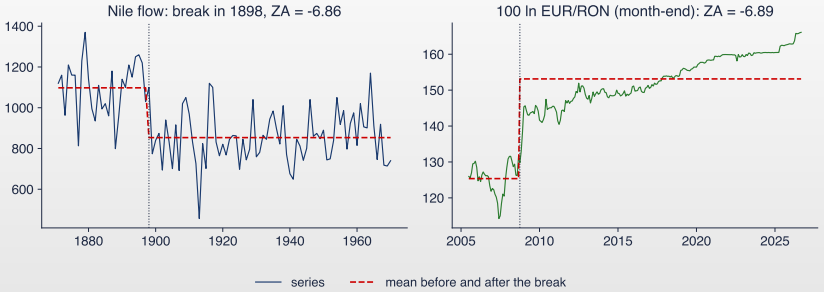
Interpretarea rupturii simulate

- ADF cu constantă: p = 0,17: seria staționară „are rădăcină unitară"
  - pe 2 000 de asemenea serii, testul DF respinge în 72% din cazuri; fără ruptură: 100%
- Cînd ruptura este modelată, statistica Zivot–Andrews scade la $-7{,}47$, mult sub valoarea de 5%, $-4{,}81$
  - curba din dreapta își atinge minimul, $-8{,}37$, la data adevărată, $t = 100$

Zivot și Andrews (1992): data rupturii necunoscută

- Zivot și Andrews (1992): lăsăm datele să aleagă data rupturii T_B
  - pentru fiecare T_B din cele 70% centrale ale eșantionului, estimăm regresia ADF cu o variabilă dummy pentru ruptură:
  - $\Delta y_t = c + \theta DU_t + bt + \gamma y_{t-1} + \sum_j \delta_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t$, $DU_t = 1$ pentru $t > T_B$
  - DU_t: o variabilă dummy, 0 înainte și 1 după ruptură; θ: mărimea saltului de nivel
  - statistica este raportul t **minim** al lui γ pe toate datele
- Trei variante: ruptură în nivel, în pantă sau în ambele
  - valori critice mai negative decît la ADF: circa $-4{,}81$ (nivel) și $-5{,}07$ (ambele) la 5%
- H_0: rădăcină unitară fără ruptură; H_1: staționar cu o ruptură
  - mai multe rupturi: Bai și Perron (1998); o respingere nu demonstrează că ruptura este explicația corectă

Zivot–Andrews pe două serii reale



- Stînga: debitul Nilului (setul de date statsmodels, 1871–1970); dreapta: 100 ln EUR/RON, cursul de referință BNR de la sfîrșitul lunii
- Linia punctată: data rupturii aleasă de test (ruptură în nivel)

TSA_ch3_structural_breaks

Interpretarea celor două rupturi

- Nilul: ZA $= -6{,}86$, ruptură în 1898, media scade de la 1098 la 853
  - data corespunde istoriei: primul baraj de la Aswan (construit în 1898–1902) și un climat mai secetos; conflictul ADF–KPSS este explicat
- EUR/RON (sfîrșit de lună): ADF p $= 0{,}55$, dar ZA $= -6{,}89$, ruptură în octombrie 2008: deprecierea din 2008 (media 3,50 lei înainte, 4,62 după)
  - un curs în regim de managed float: perioade lungi de stabilitate și ajustări rare, nu un mers aleator pur
  - dar după 2008 cursul continuă să urce: „staționar în jurul unei rupturi" este și el o simplificare

Recapitulare: rupturi structurale

- O schimbare unică a mediei sau a trendului face ca testele de rădăcină unitară să respingă mai rar
- Zivot–Andrews caută data rupturii; valorile lui critice sînt mai negative
- Rădăcină unitară sau ruptură: comparăm datele cu evenimente cunoscute

Modelul ARIMA

- **Definiție**: $y_t \sim$ ARIMA(p, d, q) (autoregressive integrated moving average, model autoregresiv integrat cu medie mobilă) dacă $\Delta^d y_t$ este un ARMA(p, q) staționar și inversabil:
  - $\phi(L)\,(1-L)^d\, y_t = c + \theta(L)\,\varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$
  - p: ordinul AR; d: numărul de diferențieri (rădăcini unitare); q: ordinul MA; $\phi(L)$, $\theta(L)$ ca în Capitolul 2
- Polinomul AR al nivelurilor este $\phi(z)(1-z)^d$: d rădăcini exact pe cercul unitate
  - „integrat": y_t este o sumă cumulată de d ori a unui proces ARMA
- Box, Jenkins și Reinsel (2008) au popularizat modelul; în practică $d \leq 2$, cel mai des $d = 1$

Cazuri particulare și constanta

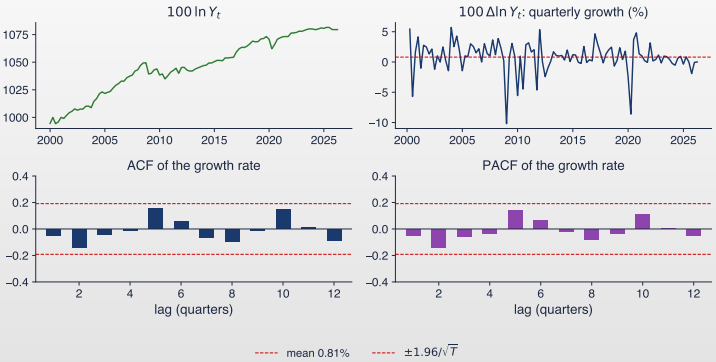
Model	Ecuația și semnificația
ARIMA(0,1,0)	$\Delta y_t = c + \varepsilon_t$: mers aleator (cu deriva c)
ARIMA(1,1,0)	$\Delta y_t = c + \phi \Delta y_{t-\mathbf{1}} + \varepsilon_t$: creștere cu inerție
ARIMA(0,1,1)	$\Delta y_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-\mathbf{1}}$: netezirea exponențială simplă cu $\alpha = 1 + \theta$ (Capitolul 0)
ARIMA(0,2,2)	$\Delta^{\mathbf{2}} y_t = \varepsilon_t + \theta_{\mathbf{1}} \varepsilon_{t-\mathbf{1}} + \theta_{\mathbf{2}} \varepsilon_{t-\mathbf{2}}$: modelul din spatele metodei liniare Holt

- Constanta c schimbă prognoza pe termen lung Hyndman și Athanasopoulos (2021), cap. 9.7
  - $d = 0$: prognozele tind spre medie; $d = 1$: $c \neq 0$ dă o dreaptă (derivă), $c = 0$ o linie orizontală
  - $d = 2$: $c \neq 0$ dă un trend pătratic, rareori rezonabil; folosim $c = 0$

Ciclul Box–Jenkins cu rădăcini unitare

- **1. Transformarea**: logaritm sau Box–Cox dacă varianța crește cu nivelul (Capitolul 1)
- **2. Alegem** d: grafic, ACF, ADF și KPSS; testăm întîi Δy_t; ne oprim la prima diferență staționară
- **3. Alegem** p, q: ACF și PACF ale lui $\Delta^d y_t$ (Capitolul 2), apoi comparăm candidații după AICc, cu același d
- **4. Estimăm** prin verosimilitate maximă; decidem asupra constantei
- **5. Verificăm** reziduurile: ACF, Ljung–Box cu $m - p - q$ grade de libertate, valori extreme
- **6. Prognozăm** nivelurile cu intervale; revenim la pasul 2 sau 3 dacă verificările eșuează

PIB-ul României: identificarea



- PIB-ul real ajustat sezonier (Eurostat), T1 2000–T2 2026, $T = 106$; sus: $100 \ln Y_t$ și creșterea trimestrială; jos: ACF și PACF ale creșterii

TSA_ch3_arima_gdp

Interpretarea graficelor de identificare

- $d = 1$: nivelul este $I(1)$ (secțiunea 4); rata de creștere este staționară, cu media 0,81% pe trimestru (circa 3,2% pe an)
  - două scăderi mari: $-10{,}2\%$ în T1 2009 (criza financiară globală) și $-8{,}6\%$ în T2 2020 (pandemia)
- p și q: nicio valoare ACF sau PACF în afara benzii $\pm 0{,}19$; $\hat{\rho}(1) = -0{,}05$, $\hat{\rho}(2) = -0{,}14$
  - Ljung–Box $Q^*(8) = 7{,}3$ (p $= 0{,}51$): rata de creștere seamănă cu un zgomot alb în jurul mediei
- Graficele sugerează ARIMA(0,1,0) cu derivă; slide-ul următor verifică alternativele

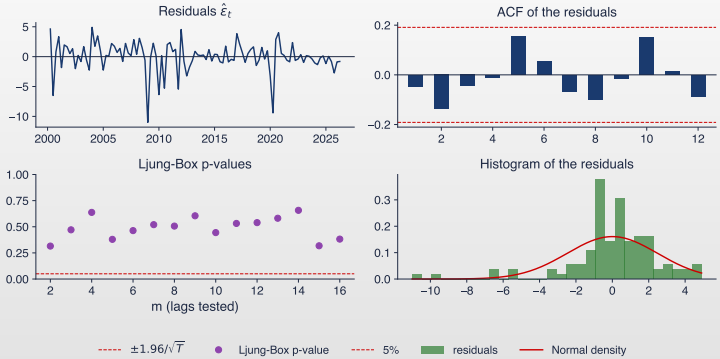
Alegerea modelului după AICc

	$q = 0$	$q = 1$	$q = 2$
$p = 0$	491,9	493,7	493,6
$p = 1$	493,8	494,9	495,8
$p = 2$	493,7	495,7	495,4†

- ARIMA$(p, 1, q)$ cu derivă pentru $100 \ln Y_t$, estimat prin verosimilitate maximă; AICc: AIC cu corecția pentru eșantioane mici (Capitolul 2); †: optimizarea nu a convers
- Cel mai mic AICc: ARIMA(0,1,0); următorul model este cu 1,7 puncte mai slab
  - diferențele sub 2 puncte nu sînt relevante: păstrăm cel mai simplu model
- Estimarea: deriva $\hat{c} = 0{,}81$ (SE 0,30, $t = 2{,}72$), $\hat{\sigma} = 2{,}47$: $100\,\Delta \ln Y_t = 0{,}81 + \hat{\varepsilon}_t$

TSA_ch3_arima_gdp

PIB-ul României: verificarea reziduurilor



- Reziduurile modelului ARIMA(0,1,0) cu derivă: graficul în timp, ACF, p-value-urile Ljung–Box pentru $m = 2, \ldots, 16$, histograma cu densitatea Normală

TSA_ch3_arima_gdp

Interpretarea verificării reziduurilor

- Nu a rămas autocorelație: $Q^*(8) = 7{,}3$ (p $= 0{,}51$), $Q^*(12)$ p $= 0{,}54$; toate p-value-urile sînt peste 5%
- Nu sînt normale: kurtosis-ul 7,9, Jarque–Bera 145; cel mai mare reziduu este $-11{,}0$ în T1 2009
  - două crize domină cozile; intervalele normale din slide-urile următoare sînt prea înguste într-o criză și ușor prea largi în perioadele calme
  - opțiuni: variabile dummy pentru 2009 și 2020 sau un bootstrap al reziduurilor pentru intervale

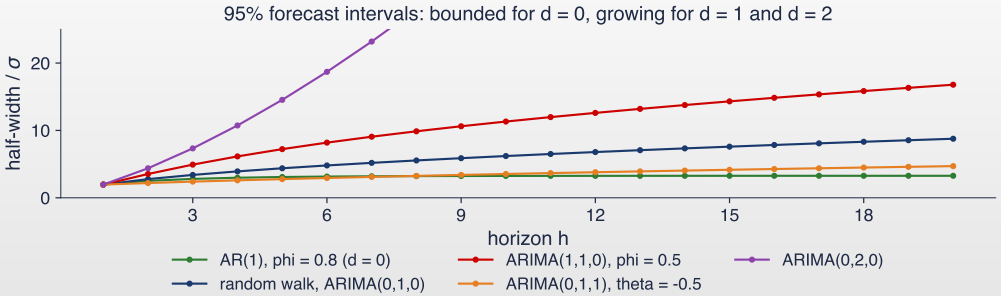
Prognoza cu modele ARIMA

- **Prognozele punctuale**: scriem modelul pentru niveluri și îl aplicăm recursiv, cu $\hat{\varepsilon}_{T+j} = 0$ pentru $j \geq 1$
  - ARIMA(1,1,0): $y_t = (1+\phi)y_{t-1} - \phi y_{t-2} + \varepsilon_t$
- **Eroarea de prognoză**: $y_{T+h} - \hat{y}_{T+h} = \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j \varepsilon_{T+h-j}$, cu $\psi(z) = \theta(z)/[\phi(z)(1-z)^d]$
  - varianța $\sigma^2 \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2$; intervalul de 95%: $\hat{y}_{T+h} \pm 1{,}96\,\sigma\sqrt{\sum_{j<h} \psi_j^2}$
  - pentru $d \geq 1$, ψ_j nu tind la 0: varianța crește nelimitat
- Două formule explicite
  - mersul aleator: $\psi_j = 1$, varianța $h\sigma^2$: intervalul crește ca $\sqrt{h}$
  - ARIMA(0,1,1): $\psi_j = 1 + \theta$ pentru $j \geq 1$, varianța $\sigma^2[1 + (h-1)(1+\theta)^2]$

Exemplu rezolvat: prognoze ARIMA(1,1,0)

- $\Delta y_t = 0{,}6\,\Delta y_{t-1} + \varepsilon_t$, $\sigma = 2$; ultimele date: $y_T = 108$, $\Delta y_T = 5$
- **Prognozele punctuale**: prognozăm variația, apoi o adunăm
  - $\widehat{\Delta y}_{T+1} = 0{,}6 \cdot 5 = 3$, $\hat{y}_{T+1} = 111{,}00$; $\widehat{\Delta y}_{T+2} = 1{,}8$, $\hat{y}_{T+2} = 112{,}80$; $\hat{y}_{T+3} = 113{,}88$
- **Ponderile** ψ: $\psi_0 = 1$, $\psi_1 = 1 + \phi = 1{,}60$, $\psi_2 = 1 + \phi + \phi^2 = 1{,}96$
  - varianțele: 4, $4(1 + 1{,}60^2) = 14{,}24$, $4(1 + 1{,}60^2 + 1{,}96^2) = 29{,}61$
  - semilățimile de 95%: 3,92; 7,40; 10,66: intervalul aproape se triplează în trei pași
- Inerția $\phi = 0{,}6$ face ca incertitudinea să crească mai repede decît la un mers aleator ($\sqrt{3} = 1{,}73$ ori în trei pași)

Viteza de creștere a intervalelor



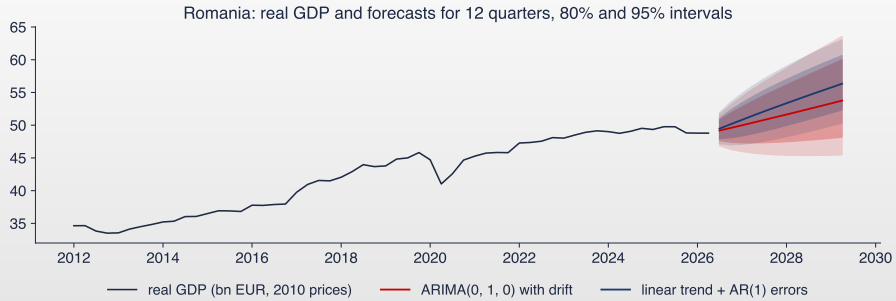
Semilățimea intervalului de prognoză de 95%, în unități σ, pentru orizonturile 1–20, din ponderile ψ ale a cinci modele

TSA_ch3_forecast_intervals

Interpretarea lățimii intervalelor

- $d = 0$, AR(1) cu $\phi = 0{,}8$: lățimea se stabilizează la $1{,}96\sigma/\sqrt{1-\phi^2}$ ($3{,}27\sigma$ la $h = 20$)
- $d = 1$: creștere ca $\sqrt{h}$; la $h = 20$: $8{,}77\sigma$ (mers aleator), $16{,}78\sigma$ (ARIMA(1,1,0), $\phi = 0{,}5$), $4{,}70\sigma$ (ARIMA(0,1,1), $\theta = -0{,}5$)
  - o componentă MA negativă compensează o parte din fiecare șoc: intervale mai înguste
- $d = 2$: creștere ca $h^{3/2}$ ($105{,}00\sigma$ la $h = 20$): supradiferențierea face prognozele pe termen lung inutilizabile

PIB-ul României: două prognoze



- ARIMA(0,1,0) cu derivă (roșu) și un trend liniar cu erori AR(1) (albastru), ambele estimate pe T1 2000–T2 2026; prognoze pînă în T2 2029, transformate înapoi în mld. EUR (prețuri 2010)

TSA_ch3_arima_gdp

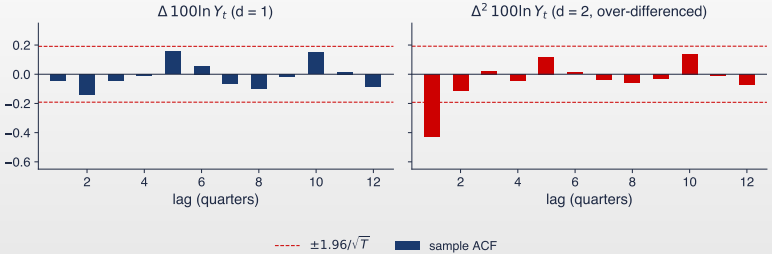
Interpretarea prognozelor PIB

- Mersul aleator cu derivă crește cu 0,81% pe trimestru de la ultima valoare (48,8 mld. EUR, în prețurile din 2010, în T2 2026): 53,8 mld. după 12 trimestre
  - semilățimea de 95% (în % din PIB): 4,8 după 1 trimestru, 9,7 după 4, 16,8 după 12, adică $\times 3{,}46 = \sqrt{12}$
- Modelul staționar în jurul trendului readuce PIB-ul spre vechea dreaptă ($\hat{\phi} = 0{,}92$): 56,3 mld. după 12 trimestre, semilățimea 11,2%
  - mai optimist și cu intervale mai înguste, pentru că presupune că încetinirea recentă este temporară
- Testele favorizează modelul staționar în diferențe la 5% (ADF p = 0,428; KPSS 0,198 $>$ 0,146), dar sînt neconcludente la 1% (KPSS $<$ 0,216): alegerea lui d este o decizie de prognoză cu consecințe

Supradiferențierea

- Diferențierea unei serii $I(0)$ creează o rădăcină unitară MA: $\Delta\varepsilon_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$, $\theta = -1$ (Capitolul 1)
  - rezultatul nu este inversabil: nu are reprezentare AR(∞), iar estimarea este dificilă Plosser și Schwert (1977)
- Simptome
  - $\hat{\rho}(1)$ al seriei diferențiate apropiat de $-0{,}5$
  - varianța crește după diferențiere, în loc să scadă
  - un coeficient MA estimat apropiat de -1
- Regula: diferențiem doar cît timp varianța scade și testele o cer

Supradiferențierea PIB-ului României



- ACF a creșterii trimestriale $\Delta\, 100 \ln Y_t$ $(d = 1)$ și a diferenței ei $\Delta^2\, 100 \ln Y_t$ $(d = 2)$

TSA_ch3_arima_gdp

Interpretarea supradiferențierii

- $d = 1$: $\hat{\rho}(1) = -0{,}05$, varianța 6,16; $d = 2$: $\hat{\rho}(1) = -0{,}43$, varianța 12,80: toate cele trei simptome
- Un MA(1) estimat pe $\Delta^2 100 \ln Y_t$ dă $\hat{\theta} = -0{,}987$ (SE 0,080): practic -1, diferența în plus este anulată de partea MA
- Alegerea corectă: $d = 1$

Recapitulare: modele ARIMA

- ARIMA(p, d, q): un ARMA(p, q) pentru $\Delta^d y_t$; constanta decide panta pe termen lung
- PIB-ul României din 2000: ARIMA(0,1,0) cu derivă, 0,81% pe trimestru; reziduuri necorelate, dar cu cozi groase
- Varianța prognozei $\sigma^2 \sum_{j<h} \psi_j^2$: mărginită pentru $d = 0$, crescătoare pentru $d \geq 1$
- Supradiferențierea: $\hat{\rho}(1) \approx -0{,}5$, variață mai mare, coeficient MA apropiat de -1

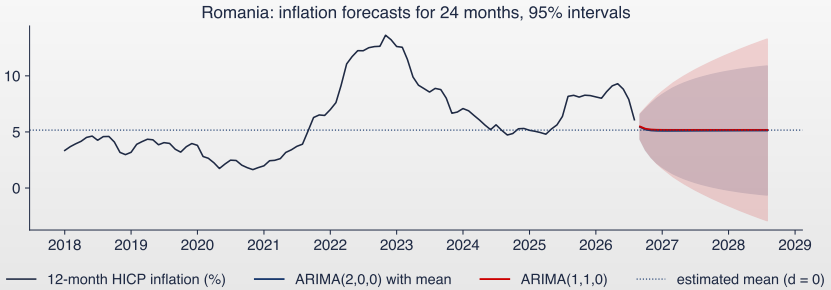
Selecția automată ARIMA

- Hyndman și Khandakar (2008) (`auto.arima` în R; `pmdarima` și `statsforecast` în Python):
  - d: teste KPSS repetate la 5%: diferențiem cît timp KPSS respinge
  - p, q: o căutare pas cu pas pornind de la cîteva modele inițiale, după AICc, cu d ales; constantă sau derivă dacă $d \leq 1$
  - elimină modelele cu rădăcini prea apropiate de cercul unitate și estimările care eșuează
- Util pentru multe serii deodată și ca punct de plecare
  - evaluată de autori pe cele 3 003 serii ale competiției de prognoză M3, metoda a fost competitivă cu cele mai bune metode din competiție
- Dar fiecare pas conține o alegere pe care trebuie să o puteți justifica (slide-ul următor)

Selecția automată ARIMA: verificări

- **AICc nu este comparabil între valori diferite ale lui** d: cu $d = 1$, verosimilitatea se calculează pentru Δy_t, o altă serie
  - alegem d prin teste și judecată, apoi comparăm p și q
- **Rădăcini care aproape se anulează**: PIB-ul României din T1 1995: cel mai mic AICc, 607,5 (ARIMA(0,1,0): 611,1), aparține modelului ARIMA(2,1,2), a cărui estimare nu a convers
  - rădăcini MA de modul 1,0002, rădăcini AR 1,014: AR și MA aproape se anulează; $\hat{\theta}_2 = 1{,}000$ cu SE 6,96
  - un model ajustat pe zgomotul datelor din anii 1990, nu o descriere a economiei
- **Întotdeauna**: reprezentăm grafic datele, verificăm convergența și rădăcinile, aplicăm testele pe reziduuri, comparăm cu o metodă simplă de referință (mersul aleator, Capitolul 0)

Inflația din România: $d = 0$ sau $d = 1$?



- Inflația anuală IAPC (Eurostat), ianuarie 2005–august 2026; cel mai bun model după AICc pentru $d = 0$ (cu medie) și pentru $d = 1$, $p \leq 3$, $q \leq 2$; prognoze pentru 24 de luni

TSA_ch3_arima_in_practice

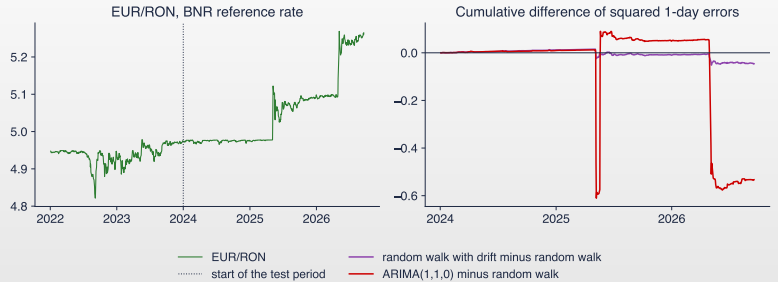
Interpretarea celor două modele ale inflației

- $d = 0$: ARIMA(2,0,0), $\hat{\phi}_1 = 1{,}32$, $\hat{\phi}_2 = -0{,}34$, suma 0,976: staționar, dar la limită; media 5,2%
  - $d = 1$: ARIMA(1,1,0), $\hat{\phi} = 0{,}33$: aproape aceeași dinamică pe termen scurt
- După 24 de luni: 5,1% în $[-0{,}6; 10{,}9]$, față de 5,2% în $[-2{,}9; 13{,}3]$
  - prognoze punctuale similare, intervale diferite: d decide cîtă incertitudine raportăm
- KPSS (0,404) păstrează $d = 0$, ca selecția automată; ADF (p = 0,32) sugerează $d = 1$
  - ambele modele lasă reziduuri autocorelate: ratele anuale se suprapun și moștenesc sezonalitatea; Capitolul 4 modelează inflația lunară

Studiu de caz: Meese și Rogoff (1983)

- **Întrebarea**: pot modelele cursului de schimb să prognozeze mai bine decît un mers aleator?
  - Meese și Rogoff (1983): modelele monetare din anii 1970, modele de serii de timp (ARIMA, VAR) și mersul aleator; cursuri ale dolarului, orizonturi de 1–12 luni
- **Rezultatul**: în afara eșantionului, niciun model nu a depășit mersul aleator ca RMSE (root mean squared error, rădăcina erorii pătratice medii)
  - nici măcar atunci cînd au folosit valorile viitoare efective ale variabilelor fundamentale
- **Moștenirea**: „enigma Meese–Rogoff" și mersul aleator ca reper pentru orice prognoză a cursului de schimb
  - graficul următor: aceeași comparație pentru EUR/RON

EUR/RON: ARIMA față de mersul aleator



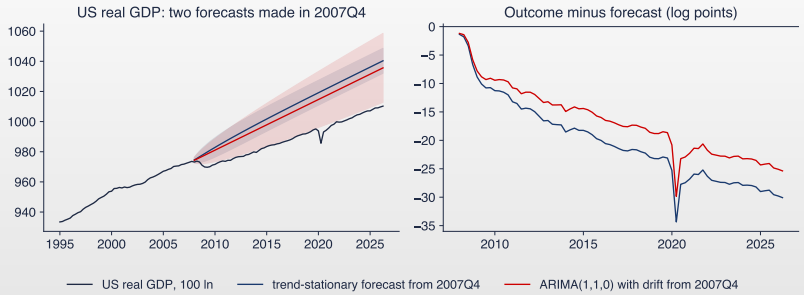
- Parametrii estimați pe 4 673 de variații zilnice pînă în decembrie 2023; 679 de prognoze cu o zi înainte din ianuarie 2024; dreapta: diferența cumulată a erorilor pătratice (sub 0: modelul este mai precis decît mersul aleator)

TSA_ch3_arima_in_practice

Interpretarea comparației EUR/RON

- RMSE al variației zilnice (100 ln): mers aleator 0,1330, cu derivă 0,1327, ARIMA(1,1,0) 0,1300 ($\hat{\phi} = 0{,}169$)
  - un cîștig de 2,2%; pe 20 de zile (33 de ferestre fără suprapunere): 0,667 față de 0,638, un cîștig de 4,3%
- Cîștigul provine din cîteva zile: două salturi ale cursului (de la 4,9746 la 5,2644 lei în perioada analizată) au continuat și a doua zi
  - în zilele calme, mersul aleator este la fel de bun; o comparație formală cere testul Diebold–Mariano (Capitolul 4)
- Lecția Meese–Rogoff: raportăm mersul aleator alături de orice prognoză a cursului de schimb

O serie clasică: PIB-ul real al SUA după 2007



- Seria FRED GDPC1 din 1947; un model staționar în jurul trendului (trend liniar, erori AR(2)) și unul staționar în diferențe (ARIMA(1,1,0) cu derivă), estimate pînă în T4 2007 și prognozate pînă în T2 2026; intervale de 95%

TSA_ch3_us_gdp

Interpretarea prognozelor PIB-ului SUA

- Modelul staționar în jurul trendului aștepta o revenire la dreapta de dinainte de 2008; abaterea s-a mărit continuu: -30 puncte logaritmice la final (semilățimea intervalului: 8)
  - pierderea din 2008–2009 nu a fost recuperată niciodată: o dovadă a unui șoc permanent, cum implică viziunea Nelson și Plosser (1982)
- Și modelul staționar în diferențe greșește (-25), dar intervalul lui (semilățimea 23) avertizează măcar asupra incertitudinii mari
  - ambele presupun aceeași derivă ca înainte de 2008; creșterea de după 2008 a fost mai lentă: o ruptură în derivă (secțiunea 5)
- Testele de rădăcină unitară pe întreaga serie: ADF p = 0,82, KPSS 0,58: $I(1)$

Recapitulare: ARIMA în practică

- Selecția automată ARIMA: KPSS pentru d, AICc pentru p și q; verificăm convergența, rădăcinile și reziduurile
- AICc compară doar modele cu același d
- Cursurile de schimb: mersul aleator este un reper greu de depășit Meese și Rogoff (1983)
- Alegerea între staționaritate în jurul trendului și în diferențe schimbă prognoza pe termen lung și intervalul ei: PIB-ul SUA după 2008

Contribuția posibilă a AI

- **Cod**: o primă versiune a unui script care aplică ADF, PP și KPSS pe multe serii și tabelează verdictele
- **Explicații**: o a doua explicație a motivului pentru care distribuția Dickey–Fuller nu este Normală sau a unui rezultat ZA
- **Explorare**: rădăcini unitare și rupturi în toate ratele inflației din UE sau modele ARIMA de referință pentru multe serii românești
- Exemplu de prompt
  - `Write Python code that loads Romanian quarterly real GDP (Eurostat namq_10_gdp, seasonally adjusted), runs ADF with constant and trend and KPSS on 100*log GDP and on its difference, fits ARIMA(p,1,q) with drift for p, q <= 2, and plots 8-quarter forecasts with 95% intervals.`

Verificări necesare

- Sensul fiecărui test: ADF și PP au rădăcina unitară ca H_0, KPSS are staționaritatea ca H_0
- Termenii deterministi, numărul de laguri și valorile critice folosite efectiv (Dickey–Fuller, nu ale distribuției Normale)
- Că „nerespins" nu este raportat ca „demonstrat"
- Că regresiile între serii cu trend nu sînt prezentate drept dovezi de cauzalitate
- Avertismentele de convergență, rădăcinile apropiate de cercul unitate, testele pe reziduuri și compararea AICc doar pentru același d
- Fiecare referință citată: trebuie să existe; verificați DOI-ul

Idei de reținut

- Seriile cu trend sînt staționare în jurul trendului (șocurile se sting) sau staționare în diferențe (șocurile sînt permanente); tratamentul diferă: eliminăm trendul sau diferențiem
- Regresiile între serii $I(1)$ fără legătură sînt false: t și R^2 mari, DW apropiat de 0
- ADF și PP testează H_0: rădăcină unitară, cu valori critice Dickey–Fuller; KPSS testează H_0: staționaritate; le folosim împreună
- Testele au putere mică în apropierea lui $\phi = 1$ și sînt înșelate de rupturi; Zivot–Andrews permite o ruptură
- ARIMA(p, d, q) = ARMA pe $\Delta^d y_t$; intervalele de prognoză cresc cu orizontul cînd $d \geq 1$
- Selecția automată este un punct de plecare: verificăm d, convergența, rădăcinile, reziduurile și comparația cu mersul aleator

Formule de reținut

Mărimea	Formula
Cele două tipuri de trend	$y_t = \alpha + \beta t + u_t, \quad \Delta y_t = \beta + u_t, \quad u_t \sim I(0)$
ADF	$\Delta y_t = c + bt + \gamma y_{t-\mathbf{1}} + \sum_{j=\mathbf{1}}^{k} \delta_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t, \quad H_{\mathbf{0}}$: $\gamma = 0, \quad \tau = \hat{\gamma}/\mathrm{SE}(\hat{\gamma})$
Laguri	$k_{\max} = 12\,(T/100)^{\mathbf{1}/\mathbf{4}}$, apoi AIC sau BIC
KPSS	$\eta = \sum_{t=\mathbf{1}}^{T} S_t^{\mathbf{2}}/(T^{\mathbf{2}}\hat{\lambda}^{\mathbf{2}}), \quad S_t = \sum_{s \le t} e_s, \quad$ 5%: 0,463 (c); 0,146 (c, t)
ARIMA(p, d, q)	$\phi(L)(1-L)^d y_t = c + \theta(L)\varepsilon_t$
Varianța prognozei	$\sigma^{\mathbf{2}} \sum_{j=\mathbf{0}}^{h-\mathbf{1}} \psi_j^{\mathbf{2}}, \quad \psi(z) = \theta(z)/[\phi(z)(1-z)^d]$; mers aleator: $h\sigma^{\mathbf{2}}$
ARIMA(0,1,1)	$\sigma^{\mathbf{2}}[1 + (h-1)(1+\theta)^{\mathbf{2}}], \quad \alpha_{\mathbf{SES}} = 1 + \theta$

Autoevaluare

- **Întrebare**: un test ADF cu constantă și trend dă $\tau = -2{,}9$ pentru $T = 200$. Respingeți rădăcina unitară la 5%?
  - **Răspuns**: nu: $-2{,}9 > -3{,}43$; cu tabelul distribuției Normale ați respinge greșit
- **Întrebare**: ADF nu respinge, iar KPSS nu respinge. Ce concluzie trageți?
  - **Răspuns**: neconcludent: eșantionul este prea scurt pentru o decizie; raportăm ambele modele sau alegem d după scop
- **Întrebare**: pentru ARIMA(0,1,1) cu $\theta = -0{,}6$ și $\sigma = 1$, cît este varianța erorii de prognoză la 5 pași?
  - **Răspuns**: $1 + 4 \cdot 0{,}4^2 = 1{,}64$
- Urmează: Capitolul 4, sezonalitatea: diferențe sezoniere, SARIMA, TBATS și Prophet

Bibliografie (1/3)

- Bai, J., & Perron, P. (1998). Estimating and testing linear models with multiple structural changes. *Econometrica*, 66(1), 47–78. doi:10.2307/2998540
- Box, G. E. P., Jenkins, G. M., & Reinsel, G. C. (2008). *Time Series Analysis: Forecasting and Control* (4th ed.). Wiley. doi:10.1002/9781118619193
- Brockwell, P. J., & Davis, R. A. (2016). *Introduction to Time Series and Forecasting* (3rd ed.). Springer. doi:10.1007/978-3-319-29854-2
- Dickey, D. A., & Fuller, W. A. (1979). Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. *Journal of the American Statistical Association*, 74(366), 427–431. doi:10.1080/01621459.1979.10482531
- Dickey, D. A., & Fuller, W. A. (1981). Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root. *Econometrica*, 49(4), 1057–1072. doi:10.2307/1912517
- Dickey, D. A., & Pantula, S. G. (1987). Determining the order of differencing in autoregressive processes. *Journal of Business & Economic Statistics*, 5(4), 455–461. doi:10.1080/07350015.1987.10509614
- Elliott, G., Rothenberg, T. J., & Stock, J. H. (1996). Efficient tests for an autoregressive unit root. *Econometrica*, 64(4), 813–836. doi:10.2307/2171846
- Engle, R. F., & Granger, C. W. J. (1987). Co-integration and error correction: Representation, estimation, and testing. *Econometrica*, 55(2), 251–276. doi:10.2307/1913236
- Fuller, W. A. (1996). *Introduction to Statistical Time Series* (2nd ed.). Wiley. doi:10.1002/9780470316917
- Granger, C. W. J., & Newbold, P. (1974). Spurious regressions in econometrics. *Journal of Econometrics*, 2(2), 111–120. doi:10.1016/0304-4076(74)90034-7

Bibliografie (2/3)

- Hamilton, J. D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press. doi:10.2307/j.ctv14jx6sm
- Huang, C., & Petukhina, A. (2022). *Applied Time Series Analysis and Forecasting with Python*. Springer. doi:10.1007/978-3-031-13584-2
- Hyndman, R. J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice* (3rd ed.). OTexts. otexts.com/fpp3
- Hyndman, R. J., & Khandakar, Y. (2008). Automatic time series forecasting: The forecast package for R. *Journal of Statistical Software*, 27(3), 1–22. doi:10.18637/jss.v027.i03
- Kwiatkowski, D., Phillips, P. C. B., Schmidt, P., & Shin, Y. (1992). Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root. *Journal of Econometrics*, 54(1–3), 159–178. doi:10.1016/0304-4076(92)90104-Y
- Ljung, G. M., & Box, G. E. P. (1978). On a measure of lack of fit in time series models. *Biometrika*, 65(2), 297–303. doi:10.1093/biomet/65.2.297
- MacKinnon, J. G. (1994). Approximate asymptotic distribution functions for unit-root and cointegration tests. *Journal of Business & Economic Statistics*, 12(2), 167–176. doi:10.1080/07350015.1994.10510005
- MacKinnon, J. G. (2010). Critical values for cointegration tests. Queen's Economics Department Working Paper No. 1227, Queen's University. ideas.repec.org/p/qed/wpaper/1227
- Meese, R. A., & Rogoff, K. (1983). Empirical exchange rate models of the seventies: Do they fit out of sample? *Journal of International Economics*, 14(1–2), 3–24. doi:10.1016/0022-1996(83)90017-X
- Nelson, C. R., & Kang, H. (1981). Spurious periodicity in inappropriately detrended time series. *Econometrica*, 49(3), 741–751. doi:10.2307/1911520

Bibliografie (3/3)

- Nelson, C. R., & Plosser, C. I. (1982). Trends and random walks in macroeconomic time series: Some evidence and implications. *Journal of Monetary Economics*, 10(2), 139–162. doi:10.1016/0304-3932(82)90012-5
- Ng, S., & Perron, P. (2001). Lag length selection and the construction of unit root tests with good size and power. *Econometrica*, 69(6), 1519–1554. doi:10.1111/1468-0262.00256
- Perron, P. (1989). The Great Crash, the oil price shock, and the unit root hypothesis. *Econometrica*, 57(6), 1361–1401. doi:10.2307/1913712
- Phillips, P. C. B. (1986). Understanding spurious regressions in econometrics. *Journal of Econometrics*, 33(3), 311–340. doi:10.1016/0304-4076(86)90001-1
- Phillips, P. C. B., & Perron, P. (1988). Testing for a unit root in time series regression. *Biometrika*, 75(2), 335–346. doi:10.1093/biomet/75.2.335
- Plosser, C. I., & Schwert, G. W. (1977). Estimation of a non-invertible moving average process: The case of overdifferencing. *Journal of Econometrics*, 6(2), 199–224. doi:10.1016/0304-4076(77)90015-x
- Said, S. E., & Dickey, D. A. (1984). Testing for unit roots in autoregressive-moving average models of unknown order. *Biometrika*, 71(3), 599–607. doi:10.1093/biomet/71.3.599
- Schwert, G. W. (1989). Tests for unit roots: A Monte Carlo investigation. *Journal of Business & Economic Statistics*, 7(2), 147–159. doi:10.1080/07350015.1989.10509723
- Yule, G. U. (1926). Why do we sometimes get nonsense-correlations between time-series? A study in sampling and the nature of time-series. *Journal of the Royal Statistical Society*, 89(1), 1–63. doi:10.2307/2341482
- Zivot, E., & Andrews, D. W. K. (1992). Further evidence on the Great Crash, the oil-price shock, and the unit-root hypothesis. *Journal of Business & Economic Statistics*, 10(3), 251–270. doi:10.1080/07350015.1992.10509904