








Serii de timp

Capitolul 5: Volatilitate condiționată: ARCH și GARCH



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București
IDA Institute Digital Assets
Blockchain Research Center
AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance
Academia Română, Institutul de Prognoză Economică
MSCA Digital Finance

Acronime folosite în acest material (1/2)

- **ACF**: Autocorrelation Function (funcția de autocorelație)
- **AI**: Artificial Intelligence (inteligență artificială)
- **AIC**: Akaike Information Criterion (criteriul informațional Akaike)
- **AR**: AutoRegressive (model) — model autoregresiv
- **AR-GARCH**: AR model for the mean with GARCH errors (model AR pentru medie cu erori GARCH)
- **ARCH**: AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity (heteroscedasticitate condiționată autoregresivă)
- **ARCH-LM**: ARCH Lagrange Multiplier (test) — testul multiplicatorului Lagrange pentru efecte ARCH
- **ARMA**: AutoRegressive Moving Average (model) — model autoregresiv cu medie mobilă
- **ARMA-GARCH**: ARMA model for the mean with GARCH errors (model ARMA pentru medie cu erori GARCH)
- **BET**: Bucharest Exchange Trading (index) — indicele de referință al Bursei de Valori București
- **BIC**: Bayesian Information Criterion (criteriul informațional bayesian al lui Schwarz)
- **BNR**: Banca Națională a României
- **BVB**: Bursa de Valori București
- **COVID-19**: COronaVIrus Disease 2019 (boala provocată de coronavirus, 2019)
- **DM**: Diebold–Mariano (test) — testul Diebold–Mariano de comparare a prognozelor
- **EGARCH**: Exponential GARCH (GARCH exponențial)
- **EWMA**: Exponentially Weighted Moving Average (medie mobilă ponderată exponențial)
- **GARCH**: Generalised AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity (heteroscedasticitate condiționată autoregresivă generalizată)

Acronime folosite în acest material (2/2)

- **GARCH-N**: GARCH with Normal innovations (GARCH cu inovații Normale)
- **GJR**: Glosten–Jagannathan–Runkle (GARCH model) — modelul GARCH asimetric Glosten–Jagannathan–Runkle
- **GJR-GARCH**: Glosten–Jagannathan–Runkle GARCH (GARCH asimetric Glosten–Jagannathan–Runkle)
- **HAC**: Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent (standard errors) — erori standard robuste la heteroscedasticitate și autocorelație
- **IGARCH**: Integrated GARCH (GARCH integrat)
- **LM**: Lagrange Multiplier (multiplicatorul Lagrange)
- **LR**: Likelihood Ratio (test) — testul raportului de verosimilitate
- **MA**: Moving Average (medie mobilă)
- **MLE**: Maximum Likelihood Estimation (estimarea prin metoda verosimilității maxime)
- **NIC**: News Impact Curve (curba de impact a știrilor)
- **OLS**: Ordinary Least Squares (metoda celor mai mici pătrate)
- **PACF**: Partial AutoCorrelation Function (funcția de autocorelație parțială)
- **QLIKE**: Quasi-LIKElihood (loss function) — funcția de pierdere de tip cvasi-verosimilitate
- **QMLE**: Quasi-Maximum Likelihood Estimation (estimarea prin cvasi-verosimilitate maximă)
- **QQ**: Quantile–Quantile (plot) — graficul cuantilă–cuantilă
- **SE**: Standard Error (eroare standard)
- **VAR**: Vector AutoRegression (model vector autoregresiv)

Întrebarea de azi și traseul

- **Întrebarea**: dacă randamentul de mîine nu poate fi anticipat, poate fi anticipat **riscul** de mîine?
  - Capitolele 1–3 au modelat **media** condiționată a unei serii; acest capitol modelează **varianța** ei condiționată
- **Traseul** capitolului
  - faptele stilizate ale randamentelor; ACF a pătratelor randamentelor și testul ARCH-LM
  - media și varianța condiționată; ARCH(q) și GARCH(1,1); persistența, IGARCH și EWMA
  - estimarea prin verosimilitate maximă cu pachetul `arch`; inovații Student-t; modele ARMA-GARCH
  - asimetria (GJR, EGARCH), diagnosticarea, prognoza varianței și evaluarea ei, VaR 1%
- Date: S&P 500, BET, EUR/RON (cursul de referință BNR) și Bitcoin, zilnic; Seminarul 5 are loc înaintea acestui curs

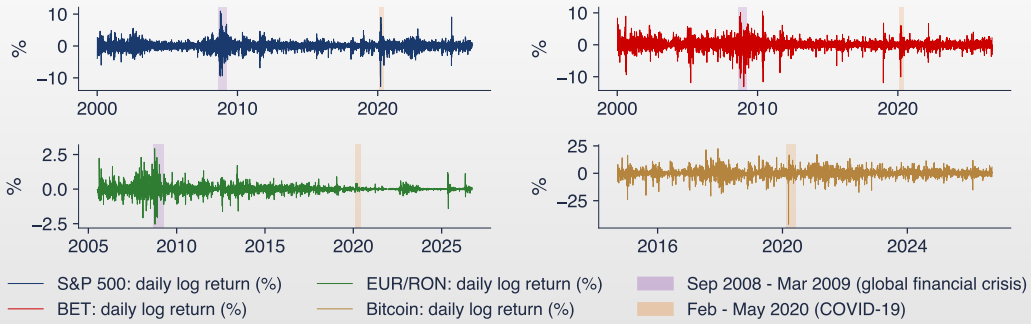
Rezultatele învățării

- Enumerați faptele stilizate ale randamentelor financiare și testați efectele ARCH cu ACF a pătratelor și testul ARCH-LM
- Deosebiți varianța condiționată de cea necondiționată și explicați de ce randamentele pot fi necorelate, dar dependente
- Scrieți modelele ARCH(q), GARCH(1,1) și ARMA-GARCH; calculați persistența, varianța de lungă durată și timpul de înjumătățire
- Estimați modele GARCH prin verosimilitate maximă în Python, alegeți distribuția inovațiilor și verificați reziduurile standardizate
- Măsurați asimetria cu GJR-GARCH, EGARCH și curba de impact a știrilor
- Prognozați varianța pe mai multe orizonturi, evaluați prognozele cu QLIKE și calculați un VaR 1% pe o zi

Bibliografie și instrumente

- Manual: Huang și Petukhina (2022), cap. 6 (serii de timp financiare: modele ARCH și GARCH)
  - lectură suplimentară: Tsay (2010), cap. 3; Franke, Härdle și Hafner (2019), cap. 13
- Teorie: Hamilton (1994), cap. 21 (modele de serii de timp cu heteroscedasticitate)
- Quantlet-urile Python ale capitolului: Quantlets/Ch_05
  - estimarea cu pachetul `arch` (în Colab se instalează cu `pip install arch`); testele cu `statsmodels`
- Notebook-ul cursului: deschideți în Google Colab
- Curs video: Applied Time Series Analysis with Python

Randamentele logaritmice zilnice pe patru piețe



- Randamente logaritmice zilnice $r_t = 100(\ln P_t - \ln P_{t-1})$, în %, pînă la 18 septembrie 2026: S&P 500 și BET din 2000, EUR/RON (cursul de referință BNR) din iulie 2005, Bitcoin din septembrie 2014
- Zonele colorate: criza financiară globală (septembrie 2008 – martie 2009) și crahul COVID-19 (februarie – mai 2020)

TSA_ch5_stylised_facts

Interpretarea celor patru serii

- Anii liniștiți alternează cu furtunile: variațiile mari urmează după variații mari, de orice semn
  - este fenomenul de **volatility clustering**, descris prima dată de Mandelbrot (1963)
- S&P 500: abaterea standard zilnică 0,42% în 2017, 3,52% din septembrie 2008 pînă în martie 2009 ($\times$8,3) și 3,70% în februarie–mai 2020 ($\times$8,8)
- EUR/RON: 0,78% în criza din 2008, doar 0,10% în 2020: BNR a menținut leul aproape fix
- Un model cu variață constantă (zgomot alb, Capitolul 1) nu descrie niciuna dintre aceste serii

Crizele din 2008 și 2020



Sediul Lehman Brothers, New York, 15 septembrie 2008

Foto: Robert Scoble (2008); CC BY 2.0; Wikimedia Commons



Districtul financiar din New York, 25 martie 2020

Foto: Billie Grace Ward (2020); CC BY 2.0; Wikimedia Commons

- 15 septembrie 2008: Lehman Brothers intră în faliment; martie 2020: pandemia COVID-19 închide economiile
- În ambele episoade calmul a revenit abia după cîteva luni: un șoc de volatilitate este persistent

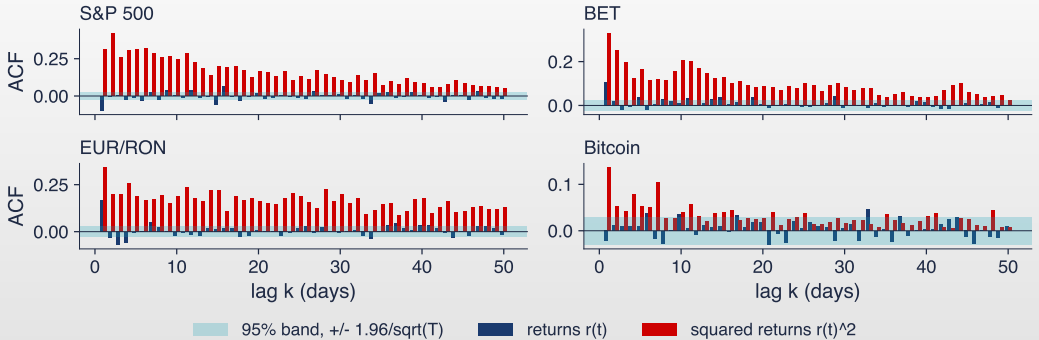
Faptele stilizate în cifre

	T	ab. std.	asim.	kurtosis	$\hat{\rho}_1(r)$	$\hat{\rho}_1(r^2)$	$Q(10)$, r	$Q(10)$, r^2	LM(5)
S&P 500	6 714	1,21	−0,35	13,7	−0,10	0,31	96	6133	1684
BET	6 670	1,40	−0,65	14,1	0,11	0,33	108	2440	982
EUR/RON	5 352	0,28	0,73	18,1	0,17	0,34	222	2420	871
Bitcoin	4 384	3,49	−0,70	15,0	−0,02	0,14	20	213	115

- **Cozi groase**: kurtosis-ul între 13,7 și 18,1, mult peste 3, valoarea distribuției Normale
  - kurtosis-ul $K = E[(r-\mu)^4]/\sigma^4$; asimetria $E[(r-\mu)^3]/\sigma^3$ (Capitolul 1)
- **Autocorelație mică în** r_t, autocorelație puternică în r_t^2: $Q(10)$ al pătratelor este de 11–64 de ori mai mare
- $Q(10)$: statistica lui Ljung și Box (1978) (Capitolul 1), $\chi^2(10)$, valoarea de 5%: 18,31; LM(5): testul ARCH-LM (peste două slide-uri), $\chi^2(5)$, valoarea de 5%: 11,07

TSA_ch5_stylised_facts

Autocorelația randamentelor și a pătratelor lor



- ACF de selecție (autocorrelation function, funcția de autocorelație, Capitolul 1) a lui r_t și a lui r_t^2, lagurile 1–50, cu banda $\pm 1{,}96/\sqrt{T}$ a unei serii i.i.d. (independente și identic distribuite)

TSA_ch5_stylised_facts

Interpretarea celor două ACF

- Randamentele: aproape toate autocorelațiile sînt în bandă (BET: $\hat{\rho}_1 = 0{,}11$, o piață mai puțin lichidă; Capitolul 2)
  - direcția variației de mîine este aproape imprevizibilă
- Pătratele randamentelor: S&P 500 0,31 la lagul 1 și încă 0,05 la lagul 50; 50 din 50 de laguri în afara benzii
  - mărimea variației de mîine este previzibilă: o variație mare azi face mai probabilă o variație mare mîine
- Necorelat nu înseamnă independent: r_t este apropiat de zgomotul alb, dar nu este i.i.d. (Capitolul 1)
- Bitcoin: mai slab, dar semnificativ ($\hat{\rho}_1(r_t^2) = 0{,}14$): cîteva zile extreme domină pătratele

Testarea efectelor ARCH

- **Efecte ARCH**: varianța condiționată depinde de trecut (numele vine de la modelul ARCH, secțiunea 3)
- **Ljung–Box pe pătrate** (testul lui McLeod și Li (1983)): $Q(m) = T(T+2)\sum_{k=1}^{m} \hat{\rho}_k^2(\hat{\varepsilon}^2)/(T-k)$
  - $\hat{\rho}_k(\hat{\varepsilon}^2)$: autocorelația de selecție a pătratelor reziduurilor la lagul k; m: numărul de laguri; T: numărul de observații
  - $\hat{\varepsilon}_t$: reziduurile modelului pentru medie (pentru randamente, $r_t - \bar{r}$); în ipoteza H_0 (fără efecte ARCH), $Q(m) \sim \chi^2(m)$
- **Testul ARCH-LM** Engle (1982): test LM (Lagrange multiplier, multiplicatorul Lagrange) din regresia auxiliară
  - $\hat{\varepsilon}_t^2 = b_0 + b_1\hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \cdots + b_q\hat{\varepsilon}_{t-q}^2 + u_t$, estimată prin OLS (ordinary least squares, metoda celor mai mici pătrate)
  - $b_0, \ldots, b_q$: coeficienții; q: numărul de pătrate trecute incluse; R^2: coeficientul de determinare al acestei regresii
  - H_0: $b_1 = \cdots = b_q = 0$; LM $= nR^2 \sim \chi^2(q)$, $n =$ numărul de observații din regresie
- Ambele teste se aplică reziduurilor modelului pentru medie, înainte și după estimarea unui model de volatilitate

Exemplu rezolvat: ARCH-LM pentru BET

- Modelul pentru medie: AR(1) pentru randamentele BET (Capitolul 2), $\hat{\phi} = 0{,}109$; reziduurile $\hat{\varepsilon}_t$; $q = 5$
- Regresia auxiliară (OLS)
  - $\hat{\varepsilon}_t^2 = 0{,}862 + 0{,}276\,\hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + 0{,}099\,\hat{\varepsilon}_{t-2}^2 + 0{,}088\,\hat{\varepsilon}_{t-3}^2 + (-0{,}015)\,\hat{\varepsilon}_{t-4}^2 + 0{,}102\,\hat{\varepsilon}_{t-5}^2$
  - $R^2 = 0{,}1526$, $n = 6\,664$
- Pas cu pas: $\text{LM} = nR^2 = 6\,664 \times 0{,}1526 = 1017$; valoarea critică de 5% $\chi^2_{0{,}95}(5) = 11{,}07$
  - $1017 \gg 11{,}07$: respingem H_0; varianța BET depinde de pătratele ultimelor cinci șocuri
- Interpretare: $R^2 = 0{,}1526$ este mic, dar pentru pătratele randamentelor este un semnal puternic; următorul pas este un model pentru varianță

TSA_ch5_mean_model

Recapitulare: faptele stilizate

- Cozi groase, volatility clustering, autocorelație mică în r_t, autocorelație puternică în r_t^2
- Efectele ARCH: Ljung–Box pe pătratele reziduurilor, ARCH-LM $= nR^2 \sim \chi^2(q)$
- Toate cele patru serii resping H_0 la mare distanță de pragul critic

Condiționarea pe trecut

- $\mathcal{F}_{t-1}$: informația disponibilă la sfîrșitul zilei $t-1$ (toate valorile trecute)
  - media condiționată $E[X \mid \mathcal{F}_{t-1}]$: cea mai bună prognoză a lui X, dat fiind trecutul (Capitolul 2)
- **Media condiționată**: $\mu_t = E[r_t \mid \mathcal{F}_{t-1}]$
  - un model ARMA (Capitolul 2) este un model pentru μ_t; pentru randamentele zilnice, μ_t este mică și aproape constantă
- **Varianța condiționată**: $\sigma_t^2 = \mathrm{Var}(r_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = E[(r_t - \mu_t)^2 \mid \mathcal{F}_{t-1}]$
  - σ_t este **volatilitatea condiționată**: cunoscută la $t-1$, se schimbă de la o zi la alta
  - **heteroscedasticitate condiționată**: o varianță condiționată care nu este constantă
- **Varianța necondiționată** $\mathrm{Var}(r_t)$: un singur număr pentru tot eșantionul; poate fi constantă în timp ce σ_t^2 se schimbă

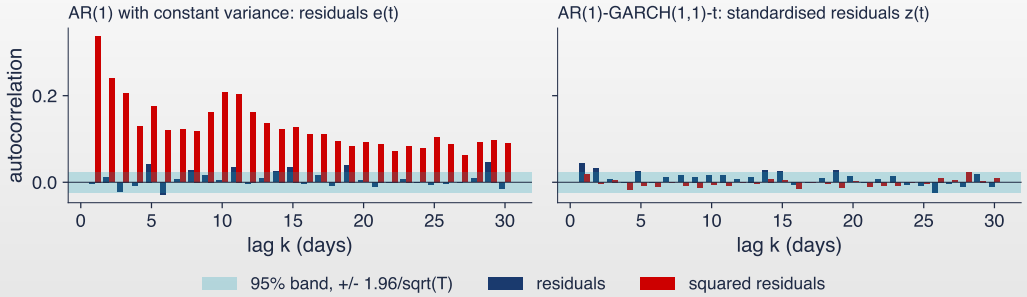
Descompunerea de bază

- Toate modelele din acest capitol: $r_t = \mu_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sigma_t z_t$
  - z_t: **inovațiile**, i.i.d., cu media 0 și varianța 1 (Normale, Student-t, ...)
  - ε_t: **șocul**; μ_t și σ_t depind doar de trecut
- Consecințe
  - $E[\varepsilon_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] = \sigma_t E[z_t] = 0$: șocurile sînt o **diferență de martingal**, deci sînt necorelate (zgomot alb)
  - $\mathrm{Var}(\varepsilon_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t^2$: varianța este previzibilă
  - ε_t sînt necorelate, dar nu independente: ε_t^2 este corelat cu ε_{t-1}^2
- Două modele, cîte unul pentru fiecare moment: ARMA pentru μ_t (Capitolul 2), GARCH pentru σ_t^2 (acest capitol); împreună: **ARMA-GARCH**

Exemplu rezolvat: varianța condiționată și varianța necondiționată

- O piață are zile liniștite ($\sigma_t^2 = 0{,}5$) și zile agitate ($\sigma_t^2 = 4{,}5$), fiecare cu probabilitatea $1/2$; media este 0
  - legea varianței totale: $\mathrm{Var}(r_t) = E[\mathrm{Var}(r_t \mid \mathcal{F}_{t-1})] + \mathrm{Var}(E[r_t \mid \mathcal{F}_{t-1}])$
  - pas cu pas: $0{,}5 \times 0{,}5 + 0{,}5 \times 4{,}5 + 0 = 2{,}50$; abaterea standard necondiționată 1,58%
- Varianța necondiționată este o medie; varianța condiționată ne spune în ce fel de zi ne aflăm
  - o zi liniștită: $\sigma_t = 0{,}71\%$; o zi agitată: $\sigma_t = 2{,}12\%$; media de 1,58% nu descrie niciuna dintre ele
- Cu z_t Normale, amestecul are kurtosis-ul $3E[\sigma_t^4]/(E[\sigma_t^2])^2 = 4{,}92$: o varianță variabilă în timp creează cozi groase

Modelul pentru medie lasă efecte ARCH



- BET: stînga, un AR(1) pentru medie (ordinul ales după BIC dintre AR(0)–AR(5): $p = 1$), cu varianță constantă; dreapta, același AR(1) cu o varianță GARCH(1,1)-t (secțiunea 6)

TSA_ch5_mean_model

Interpretarea ACF ale reziduurilor

- Stînga: reziduurile arată aproape ca un zgomot alb; verificarea Box–Jenkins din Capitolul 2 ar fi aproape trecută
  - dar pătratele lor: $\hat{\rho}_1 = 0{,}34$, $Q(10) = 2496$: efecte ARCH puternice
- Dreapta: după împărțirea la $\hat{\sigma}_t$, pătratele sînt curate: $\hat{\rho}_1 = 0{,}018$, $Q(10) = 7{,}2$ (p = 0,705), ARCH-LM 4,8 (p = 0,446)
  - rămîne puțină autocorelație în nivel ($Q(10) = 28{,}6$): media BET are mai multă structură decît un AR(1)
- Lecția: verificăm atît $\hat{\varepsilon}_t$, cît și $\hat{\varepsilon}_t^2$; o verificare de zgomot alb doar pe $\hat{\varepsilon}_t$ nu vede varianța

Recapitulare: media și varianța condiționată

- $r_t = \mu_t + \sigma_t z_t$: μ_t dintr-un model ARMA, σ_t^2 dintr-un model de volatilitate
- Șocurile sînt necorelate, dar dependente prin pătratele lor
- Varianța necondiționată = media variațelor condiționate; amestecul are cozi groase

1982: Robert Engle și modelul ARCH

- Engle (1982): **ARCH** (autoregressive conditional heteroskedasticity, heteroscedasticitate condiționată autoregresivă): varianța de azi depinde de pătratele șocurilor de ieri
  - prima aplicație: varianța inflației din Regatul Unit, nu o piață financiară
- Premiul Nobel 2003: „pentru metode de analiză a seriilor de timp economice cu volatilitate variabilă în timp (ARCH)"
  - împărțit cu Clive Granger (Capitolul 3: regresia falsă; Capitolul 7: cointegrarea); prelegerea Nobel: Engle (2004)



Robert F. Engle (2022)

Foto: Jon Demske (2022); CC BY-SA 4.0; Wikimedia Commons



Sala de concerte din Stockholm, unde se decernează Premiile Nobel

Foto: Karen Zhou (2025); CC BY-SA 4.0; Wikimedia Commons

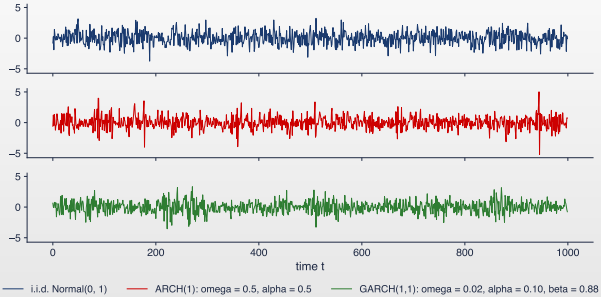
ARCH(1): definiție

- $\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2, \quad \omega > 0,\ \alpha \geq 0$
  - ω: nivelul minim al variației; α: cît de puternic reacționează varianța la pătratul șocului de ieri
  - $\omega > 0$ și $\alpha \geq 0$ asigură o varianță pozitivă
  - un șoc mare ieri, indiferent de semn, crește varianța de azi
- „Autoregresiv": ε_t^2 urmează un model AR(1) (Capitolul 2)
  - scriem $\varepsilon_t^2 = \sigma_t^2 + v_t$, cu $v_t = \sigma_t^2(z_t^2 - 1)$ și $E[v_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] = 0$
  - atunci $\varepsilon_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + v_t$: un AR(1) pentru pătratele șocurilor, cu erori v_t de tip zgomot alb
- De aici, ACF a lui ε_t^2 este $\rho_k = \alpha^k$ (cînd momentul de ordinul patru există): clustering, dar o scădere rapidă

ARCH(1): proprietăți

- $E[\varepsilon_t] = 0$ și $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = 0$ pentru $k \neq 0$: zgomot alb
- **Varianța necondiționată** (staționar dacă $\alpha < 1$): aplicăm media în $\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2$
  - $\bar{\sigma}^2 = E[\varepsilon_t^2] = \omega + \alpha\bar{\sigma}^2$, deci $\bar{\sigma}^2 = \omega/(1-\alpha)$
- **Kurtosis-ul** cu z_t Normale (dacă $3\alpha^2 < 1$): $K = 3\,\dfrac{1-\alpha^2}{1-3\alpha^2} > 3$
  - inovații Normale, dar șocuri cu cozi groase; dacă $\alpha \geq 1/\sqrt{3} = 0{,}577$, momentul de ordinul patru este infinit
- **Exemplu rezolvat**: $\omega = 0{,}5$, $\alpha = 0{,}5$
  - $\bar{\sigma}^2 = 0{,}5/0{,}5 = 1{,}00$; $K = 3 \times 0{,}75/0{,}25 = 9{,}0$
  - după un șoc $\varepsilon_{t-1} = 2$: $\sigma_t^2 = 0{,}5 + 0{,}5 \times 4 = 2{,}50$, $\sigma_t = 1{,}58$: varianța se dublează și mai mult

Traiectorii simulate: i.i.d., ARCH(1) și GARCH(1,1)



- Trei serii de 1000 de valori cu varianța necondiționată 1: i.i.d. Normale; ARCH(1) cu $\omega = \alpha = 0{,}5$; GARCH(1,1) cu $\omega = 0{,}02$, $\alpha = 0{,}10$, $\beta = 0{,}88$ (secțiunea următoare)
- Kurtosis-ul de selecție: i.i.d. 3,12, ARCH 4,91, GARCH 3,74 (teoretic: 3, 9,0, 6,06): momentul de ordinul patru converge lent
- Interpretare: ARCH(1) produce vîrfuri izolate; GARCH(1,1) produce perioade lungi liniștite și perioade lungi agitate, ca randamentele reale

TSA_ch5_simulation_likelihood

ARCH(q) și limitele lui

- **ARCH(q)**: $\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2$, $\alpha_i \geq 0$; staționar dacă $\sum_i \alpha_i < 1$
  - un șoc influențează varianța exact q zile; clustering-ul real durează luni

S&P 500, z_t Normale	parametri	log-verosimilitate	AIC	BIC	$\sum \alpha_i$ $(+\beta)$
ARCH(1)	3	−10305,5	20617,0	20637,5	0,394
ARCH(5)	7	−9340,5	18695,1	18742,7	0,816
ARCH(10)	12	−9227,6	18479,3	18561,0	0,849
GARCH(1,1)	4	−9218,0	**18444,0**	**18471,2**	0,980

- AIC (Akaike) și BIC (Bayesian information criterion, criteriul informațional bayesian): AIC $= -2\ell + 2k$, BIC $= -2\ell + k \ln T$ (Capitolul 2), ℓ: log-verosimilitatea maximizată, k: numărul de parametri; valoarea mai mică este mai bună
- Interpretare: ARCH are nevoie de zece laguri și tot pierde în fața GARCH(1,1), care are patru parametri: motivația pentru GARCH

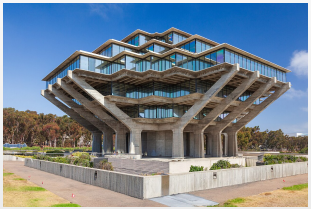
TSA_ch5_garch_estimation

Recapitulare: modelul ARCH

- $\sigma_t^2 = \omega + \sum_i \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$: un model AR pentru pătratele șocurilor
- Varianța necondiționată $\omega/(1 - \sum \alpha_i)$; kurtosis peste 3 chiar cu inovații Normale
- Clustering-ul real cere multe laguri: GARCH le înlocuiește cu un singur parametru în plus

1986: Tim Bollerslev și modelul GARCH

- Bollerslev (1986), doctorand al lui Engle la University of California, San Diego: adaugă în ecuație varianța de ieri
  - **GARCH** (generalised ARCH, ARCH generalizat): cîțiva parametri înlocuiesc un ARCH(q) lung
- Inovații Student-t pentru randamente: Bollerslev (1987)
- Rămîne modelul de referință: Hansen și Lunde (2005) au comparat 330 de modele de volatilitate și au găsit că GARCH(1,1) este greu de depășit la cursurile de schimb



Biblioteca Geisel, University of California, San Diego

Foto: Stephen Bay (2010); CC BY 4.0; Wikimedia Commons

GARCH(1,1): definiție

- $\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t^2 = \omega + \alpha\,\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\,\sigma_{t-1}^2, \quad \omega > 0,\ \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0$
  - GARCH(p,q) adaugă mai multe laguri de ambele tipuri; în practică, (1,1) este aproape întotdeauna suficient
- Interpretarea parametrilor
  - α: **reacția** la știrile de ieri; β: **memoria** variației
  - $\alpha + \beta$: **persistența**; ω fixează nivelul de lungă durată
- Prin recurență: un ARCH(∞) cu ponderi geometrice
  - $\sigma_t^2 = \dfrac{\omega}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j\, \varepsilon_{t-1-j}^2$: toate șocurile trecute contează, cu ponderi care scad ca β^j

GARCH(1,1) ca ARMA(1,1) pentru pătratele șocurilor

- Ca la ARCH, scriem $\varepsilon_t^2 = \sigma_t^2 + v_t$ și înlocuim $\sigma_t^2 = \varepsilon_t^2 - v_t$ în ecuație
  - $\varepsilon_t^2 = \omega + (\alpha + \beta)\,\varepsilon_{t-1}^2 + v_t - \beta\, v_{t-1}$
  - un ARMA(1,1) (Capitolul 2) cu coeficientul AR $\alpha + \beta$ și coeficientul MA $-\beta$
- Consecințe
  - **staționar în covarianță** dacă $\alpha + \beta < 1$ (rădăcina AR în afara cercului unitate)
  - ACF a lui ε_t^2 scade ca $(\alpha + \beta)^k$: lent cînd persistența este aproape de 1, ca în ACF a pătratelor randamentelor reale
  - identificarea prin ACF și PACF (partial autocorrelation function, funcția de autocorelație parțială) a lui ε_t^2 este posibilă în principiu, dar în practică folosim verosimilitatea maximă (secțiunea 5)

Varianța de lungă durată, kurtosis-ul, persistența și timpul de înjumătățire

- **Varianța de lungă durată (necondiționată)**: $\bar{\sigma}^2 = \omega/(1-\alpha-\beta)$; volatilitatea anualizată $\sqrt{252\,\bar{\sigma}^2}$ pentru 252 de zile de tranzacționare
  - kurtosis-ul cu z_t Normale: $K = 3\,\dfrac{1-(\alpha+\beta)^2}{1-(\alpha+\beta)^2-2\alpha^2} > 3$; $\alpha = 0{,}10$, $\beta = 0{,}88$: $K = 6{,}06$
- O abatere de la $\bar{\sigma}^2$ se micșorează cu factorul $\alpha+\beta$ în fiecare zi (secțiunea 9):
  $E_t[\sigma^2_{t+h}] - \bar{\sigma}^2 = (\alpha+\beta)^{h-1}(\sigma^2_{t+1} - \bar{\sigma}^2)$
  - $E_t[\cdot]$: media condiționată de informația din ziua t; σ^2_{t+1}: varianța de mîine, cunoscută deja la momentul t
  - **timpul de înjumătățire**: numărul de zile după care a dispărut jumătate dintr-un șoc de varianță, $h_{1/2} = \ln 0{,}5 / \ln(\alpha+\beta)$
  - $\alpha+\beta = 0{,}90$: 6,6 zile; 0,98: 34,3 zile; 0,99: 69,0 zile: schimbările mici în apropiere de 1 contează mult

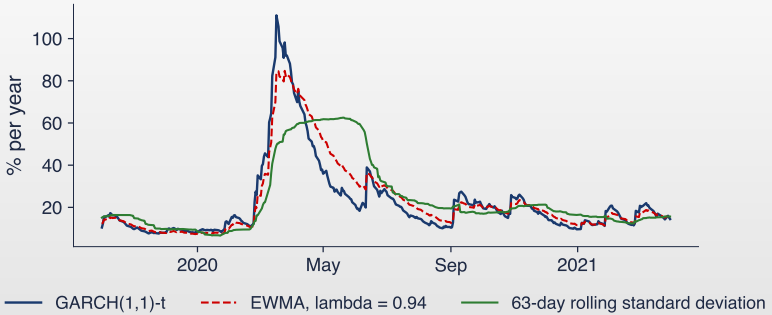
Exemplu rezolvat: un pas GARCH(1,1)

- Randamente zilnice în %: $\omega = 0{,}02$, $\alpha = 0{,}10$, $\beta = 0{,}88$, $\mu = 0$
- Mărimile de lungă durată
  - persistența $\alpha + \beta = 0{,}98$; $\bar{\sigma}^2 = 0{,}02/(1 - 0{,}98) = 1{,}00$; volatilitatea anualizată $\sqrt{252 \times 1{,}00} = 15{,}9\%$
  - timpul de înjumătățire $\ln 0{,}5 / \ln 0{,}98 = 34{,}3$ zile
- Azi: $\sigma_t^2 = 1{,}2$, iar randamentul este $r_t = -3\%$
  - mîine: $\sigma_{t+1}^2 = 0{,}02 + 0{,}10 \times 9 + 0{,}88 \times 1{,}2 = 1{,}976$, $\sigma_{t+1} = 1{,}41\%$
  - șocul a crescut varianța de la 1,2 la aproape 2; apoi ea scade spre 1,00 cu factorul 0,98 pe zi

IGARCH și legătura cu EWMA

- **IGARCH** (integrated GARCH, GARCH integrat) Engle și Bollerslev (1986): $\alpha + \beta = 1$: o rădăcină unitară în ARMA(1,1) pentru ε_t^2 (Capitolul 3)
  - șocurile variației nu se sting niciodată: nu există timp de înjumătățire și nici variață necondiționată finită
- **EWMA** (exponentially weighted moving average, media mobilă ponderată exponențial) a J.P. Morgan/Reuters (1996): $\sigma_t^2 = \lambda\sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda)r_{t-1}^2$
  - $\lambda \in (0,1)$: ponderea variației de ieri; $1-\lambda$: ponderea pătratului randamentului de ieri
  - netezirea exponențială simplă (Capitolul 0) aplicată lui r_t^2, cu constanta de netezire $1-\lambda$
  - un IGARCH cu $\omega = 0$, $\alpha = 1-\lambda$, $\beta = \lambda$; RiskMetrics folosește $\lambda = 0{,}94$ pentru date zilnice (timpul de înjumătățire al ponderilor: 11,2 zile)
- **Întrebare pentru sală**: imediat după un crah, un analist prognozează volatilitatea peste un an cu EWMA. Unde greșește?
  - **Răspuns**: EWMA păstrează nivelul de criză de azi pentru tot anul; GARCH îl lasă să scadă spre nivelul de lungă durată

GARCH, EWMA și o fereastră mobilă în 2020



- S&P 500, volatilitatea anualizată: GARCH(1,1)-t estimat pe toate datele, EWMA cu $\lambda = 0{,}94$ și abaterea standard a ultimelor 63 de zile (Capitolul 0: o medie mobilă)

TSA_ch5_volatility_markets

Interpretarea celor trei estimări

- Vîrfuri: GARCH 111% (17 martie 2020), EWMA 85% (25 martie 2020), fereastra de 63 de zile 63% (20 mai 2020)
- Fereastra mobilă reacționează tîrziu și scade brusc cînd crahul iese din fereastră („fantoma" crahului)
  - la 30 iunie 2020: GARCH 28%, EWMA 30%, fereastra 32%
- GARCH reacționează cel mai repede (α mai mare decît $1-\lambda$) și scade cel mai repede (revenire la medie); EWMA este între ele

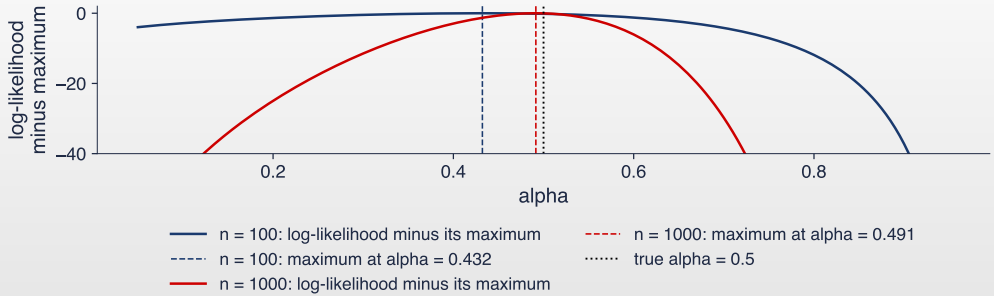
Recapitulare: modelul GARCH(1,1)

- $\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$: reacția α, memoria β; un ARMA(1,1) pentru ε_t^2
- $\alpha + \beta < 1$: varianța de lungă durată $\omega/(1-\alpha-\beta)$, timpul de înjumătățire $\ln 0{,}5/\ln(\alpha+\beta)$
- $\alpha + \beta = 1$: IGARCH; EWMA este un IGARCH fără ω

Verosimilitatea unui model GARCH

- Randamentele sînt dependente, deci densitatea comună este un produs de densități condiționate
  - $f(r_1, \ldots, r_T) = f(r_1) \prod_{t=2}^{T} f(r_t \mid \mathcal{F}_{t-1})$, cu $r_t \mid \mathcal{F}_{t-1} \sim N(\mu, \sigma_t^2)$ pentru inovații Normale
- **Log-verosimilitatea condiționată**, $\theta = (\mu, \omega, \alpha, \beta)$:
  - $\ell(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=2}^{T} \left[\ln(2\pi) + \ln \sigma_t^2(\theta) + \frac{(r_t - \mu)^2}{\sigma_t^2(\theta)} \right]$
  - $\sigma_t^2(\theta)$ se calculează recursiv, pornind de la o valoare inițială σ_1^2 (de exemplu, varianța de selecție)
- **MLE** (maximum likelihood estimation, estimarea prin verosimilitate maximă): $\hat{\theta} = \arg\max_\theta \ell(\theta)$, cu $\omega > 0$, $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta < 1$
  - nu există o formulă explicită: un algoritm numeric caută maximul; OLS nu este posibil, deoarece σ_t^2 nu este observat

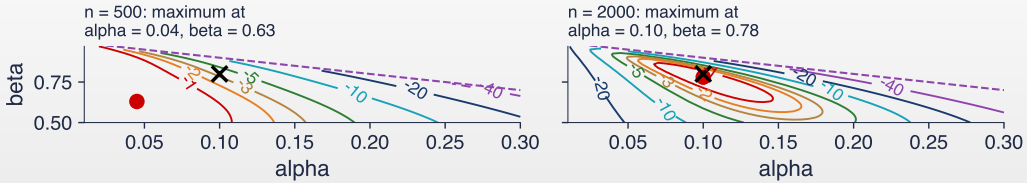
Verosimilitatea modelului ARCH(1)



- ARCH(1) simulat cu $\omega = \alpha = 0{,}5$; $\ell(\alpha)$ cu $\omega = 1 - \alpha$; fiecare curbă minus maximul ei
- $n = 100$: $\hat{\alpha} = 0{,}432$ (eroarea standard 0,127); $n = 1000$: $\hat{\alpha} = 0{,}491$ (0,035)
- Interpretare: mai multe date fac curba mai ascuțită; curbura ei în punctul de maxim dă eroarea standard

TSA_ch5_simulation_likelihood

Verosimilitatea modelului GARCH(1,1)



- GARCH(1,1) simulat cu $\omega = 0{,}1$, $\alpha = 0{,}1$, $\beta = 0{,}8$; ω fixat astfel încît varianța necondiționată să fie egală cu varianța de selecție; contururi: log-verosimilitatea minus maximul ei
- $n = 500$: maximul în $(0{,}045; 0{,}63)$, departe de valorile adevărate; $n = 2000$: $(0{,}100; 0{,}78)$
- Interpretare: o creastă lungă și plată, de-a lungul căreia α și β se compensează: GARCH are nevoie de eșantioane lungi

TSA_ch5_simulation_likelihood

Estimarea pas cu pas și cu pachetul `arch`

S&P 500, GARCH(1,1)-N	pas cu pas (SE)	`arch`	SE clasică	SE robustă
μ	0,0614 (0,0098)	0,0615	0,0098	0,0100
ω	0,0253 (0,0030)	0,0254	0,0030	0,0048
α	0,1205 (0,0086)	0,1206	0,0086	0,0118
β	0,8600 (0,0091)	0,8599	0,0091	0,0125

- Pas cu pas: $-\ell(\theta)$ scrisă în Python și minimizată cu `scipy.optimize.minimize`, cu restricția $\alpha + \beta < 1$
  - cu pachetul: `arch_model(r, mean='Constant', vol='GARCH', p=1, q=1, dist='normal').fit()`
- SE (standard error, eroarea standard) clasică: din inversa matricei hessiene (curbura lui ℓ); robustă: validă și cînd z_t nu este Normal Bollerslev și Wooldridge (1992)
- Interpretare: aceleași estimări pe ambele căi; SE robuste sînt de circa 1,4 ori mai mari: cînd z_t are cozi groase, SE clasice supraestimează precizia

TSA_ch5_garch_estimation

Cvasi-verosimilitatea maximă și reguli practice

- **QMLE** (quasi-maximum likelihood estimation, estimarea prin cvasi-verosimilitate maximă): maximizăm verosimilitatea Normală chiar dacă z_t nu este Normal
  - estimările rămîn consistente dacă μ_t și σ_t^2 sînt corect specificate, dar doar SE robuste (de tip „sandwich") sînt valide Bollerslev și Wooldridge (1992)
- Reguli practice
  - randamente în % (nu în zecimale): algoritmul de optimizare eșuează cînd ω este foarte mic; `arch` avertizează în cazul datelor prost scalate
  - EUR/RON variază cu circa 0,3% pe zi: estimăm pe $10\,r_t$ și convertim înapoi ω (împărțim la 100)
  - folosim cel puțin 1000–2000 de observații zilnice; verificăm indicatorul de convergență al algoritmului
  - o estimare pe frontieră ($\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 1$ sau $\hat{\alpha} = 0$) nu are o eroare standard obișnuită: o raportăm ca atare

Inovații Student-t și t asimetrice

- GARCH cu z_t Normale explică doar o parte din kurtosis: randamentele S&P 500 au 13,7, reziduurile standardizate $\hat{z}_t = \hat{\varepsilon}_t/\hat{\sigma}_t$ încă 4,7
  - cozile groase rămase trebuie să vină din distribuția lui z_t
- **Student-t standardizată** cu $\nu > 2$ grade de libertate Bollerslev (1987)
  - $z_t = t_\nu \sqrt{(\nu-2)/\nu}$ are varianța 1; kurtosis-ul $3 + 6/(\nu - 4)$ pentru $\nu > 4$; $\nu \to \infty$: distribuția Normală
  - ν se estimează împreună cu $(\mu, \omega, \alpha, \beta)$: `dist='t'` în `arch`
- **t asimetrică** Hansen (1994): încă un parametru $\lambda \in (-1, 1)$; $\lambda < 0$: o coadă stîngă mai lungă (`dist='skewt'`)
  - modele incluse unul în altul: Normal $\subset$ t $\subset$ t asimetrică; le comparăm prin teste LR (likelihood ratio, raportul de verosimilitate) sau prin AIC/BIC

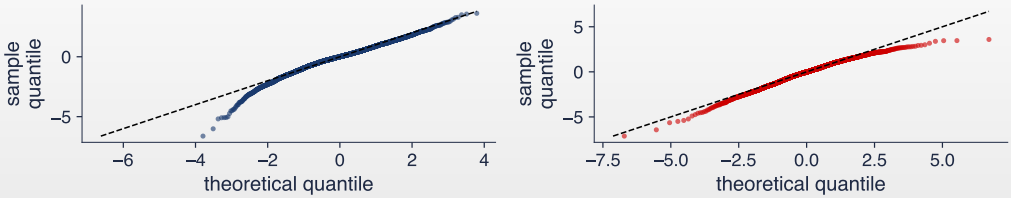
S&P 500: trei distribuții ale inovațiilor

GARCH(1,1)	ω	α	β	ν	λ	log-verosim.	$\alpha+\beta$
Normală	0,0254	0,121	0,860	–	–	−9218,0	0,980
Student-t	0,0157	0,123	0,872	6,26	–	−9062,5	0,995
t asimetrică	0,0153	0,120	0,872	6,92	−0,114	−9038,4	0,993

- Statistica LR $2(\ell_{\mathbf{1}} - \ell_{\mathbf{0}})$, $\ell_{\mathbf{1}}$ și $\ell_{\mathbf{0}}$: log-verosimilitățile modelului mai mare și ale celui mai mic: t față de Normal 311,0 (o restricție, $\chi^2_{\mathbf{0,95}}(1) = 3{,}84$); t asimetrică față de t 48,1: ambele resping modelul mai mic
- $\hat{\nu} = 6{,}26$: cozi mult mai groase decît la distribuția Normală; $\hat{\lambda} = -0{,}114$: scăderile mari sînt mai frecvente decît creșterile mari
- Interpretare: α și β aproape nu se schimbă; distribuția inovațiilor contează pentru cuantilele din coadă (VaR), mai puțin pentru σ_t

TSA_ch5_garch_estimation

Graficele QQ ale reziduurilor standardizate



- Graficul QQ (quantile–quantile): cuantilele de selecție ale lui $\hat{z}_t$ față de cuantilele distribuției presupuse; o dreaptă înseamnă o potrivire bună
- Stînga, GARCH-N față de distribuția Normală: cuantila de 0,1% este $-4{,}81$, față de $-3{,}09$ teoretic; dreapta, GARCH-t față de t standardizată ($\hat{\nu} = 6{,}3$): $-4{,}79$ față de $-4{,}19$
- Interpretare: distribuția t se potrivește mult mai bine, dar cele mai mari scăderi sînt tot mai adînci: problema este coada stîngă (asimetria, secțiunea 7)

TSA_ch5_garch_estimation

Recapitulare: estimarea prin verosimilitate maximă

- $\ell(\theta)$ = suma log-densităților condiționate; $\sigma_t^2(\theta)$ calculat recursiv; maximizare numerică
- Verosimilitatea are o creastă în (α, β): eșantioane lungi; raportăm SE robuste
- Inovații Student-t sau t asimetrice pentru cozile groase rămase

Estimările GARCH(1,1)-t

	din	ω	α	β	ν	$\alpha+\beta$	înjumătățire	vol. lungă durată	vol. selecție
S&P 500	2000	0,0157	0,123	0,872	6,26	0,9947	131	27,3	19,2
BET	2000	0,0448	0,192	0,799	5,01	0,9907	74	34,7	22,1
EUR/RON	2005	0,0000	0,123	0,877	4,20	1,000	–	–	4,4
Bitcoin	2014	0,1937	0,109	0,891	3,18	1,000	–	–	66,6

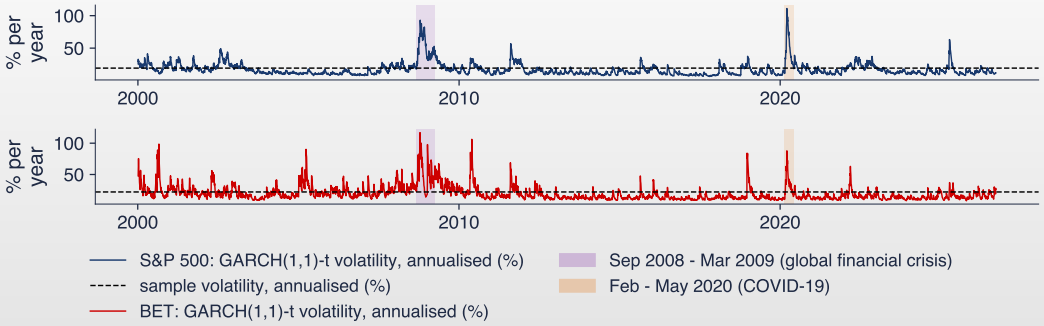
- Randamente logaritmice zilnice în % pînă la 18 septembrie 2026; timpul de înjumătățire în zile; volatilitățile anualizate cu numărul efectiv de observații pe an (Bitcoin: 365), în %
- S&P 500 și BET: $\alpha+\beta$ egal cu 0,9947 și 0,9907, timpi de înjumătățire de 131 și 74 de zile de tranzacționare; BET reacționează mai puternic la știri ($\alpha = 0{,}192$)
- EUR/RON și Bitcoin: $\hat{\alpha}+\hat{\beta}=1$, pe frontieră: IGARCH; toate valorile $\hat{\nu}$ între 3,18 și 6,26: cozi groase peste tot

TSA_ch5_volatility_markets

Interpretarea IGARCH și a volatilității de lungă durată

- EUR/RON: $\hat{\omega} \approx 0$ și $\hat{\beta} = 0{,}88$: un EWMA cu $\lambda \approx 0{,}88$; Bitcoin: $\hat{\beta} = 0{,}89$
  - nu există timp de înjumătățire și nici volatilitate de lungă durată: nivelul volatilității se deplasează ca un mers aleator (Capitolul 3)
  - EUR/RON: un curs în regim de managed float, a cărui volatilitate a scăzut de la un regim la altul (politica BNR se schimbă în timp)
- **Întrebare pentru sală**: S&P 500: volatilitatea de lungă durată 27,3%, volatilitatea de selecție 19,2%. Este greșit modelul?
  - **Răspuns**: nu neapărat: $\bar{\sigma}^2 = \omega/(1-\alpha-\beta)$ se împarte la $1-\alpha-\beta = 0{,}0053$, un număr mic și imprecis
  - GARCH cu inovații Normale dă 18,1%: nivelul de lungă durată este cel mai puțin sigur rezultat al unui GARCH persistent

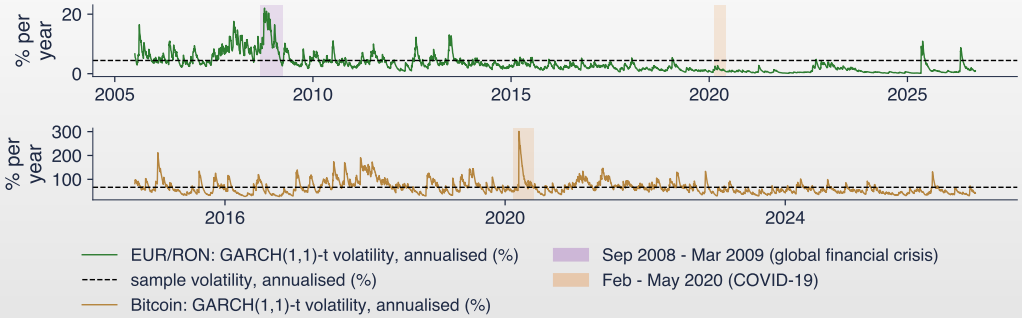
Volatilitatea condiționată: S&P 500 și BET



- Volatilitatea GARCH(1,1)-t $\hat{\sigma}_t$, anualizată; linia întreruptă: volatilitatea de selecție
- S&P 500: vîrfuri de 93% (16 octombrie 2008) și 111% (17 martie 2020); BET: 117% (15 octombrie 2008) și 88% (18 martie 2020); medianele 14,3% și 15,6%

TSA_ch5_volatility_markets

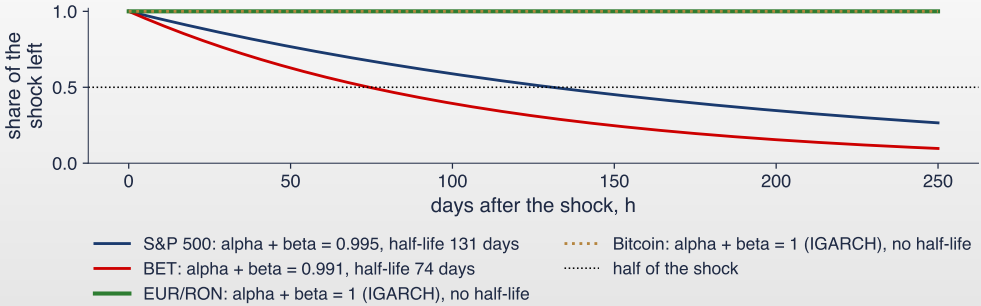
Volatilitatea condiționată: EUR/RON și Bitcoin



- EUR/RON: 22% în vîrful crizei din 2008 (13 octombrie 2008), doar 3% în 2020; la 18 septembrie 2026: 1,0%
- Bitcoin: 301% pe 13 martie 2020; mediana 58,7%, de 4,1 ori mai mare decît mediana S&P 500
- Interpretare: cele două serii IGARCH au niveluri de volatilitate care se deplasează: nu există un singur nivel „normal”

TSA_ch5_volatility_markets

Durata unui șoc de volatilitate



- Ponderea unui șoc de varianță rămasă după h zile: $(\alpha + \beta)^h$; timpul de înjumătățire este punctul în care curba trece de 1/2
- Interpretare: după o criză, S&P 500 are nevoie de circa jumătate de an ca să înjumătățească varianța în exces, BET de circa trei luni; EUR/RON și Bitcoin, niciodată

TSA_ch5_volatility_markets

ARMA-GARCH: un model pentru medie și variață

- **ARMA(p,q)-GARCH(1,1)**: $r_t = c + \sum_{i=1}^{p} \phi_i r_{t-i} + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j}, \quad \varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$
  - partea ARMA este modelul din Capitolul 2; erorile lui nu mai sînt i.i.d., ci urmează un GARCH
- Estimarea: ambele părți simultan, prin verosimilitate maximă
  - în `arch`: `arch_model(r, mean='AR', lags=1, vol='GARCH', dist='t')` (doar medii AR; pentru termeni MA, două etape sau alt pachet)
- Limitele estimării în doi pași (OLS pentru medie, apoi GARCH)
  - coeficienții OLS rămîn consistenți, dar SE obișnuite presupun o variață constantă: testele t din Capitolul 2 sînt greșite
  - estimarea comună prin verosimilitate maximă dă o pondere mai mică zilelor agitate, deci un $\hat{\phi}$ mai precis și intervale valide

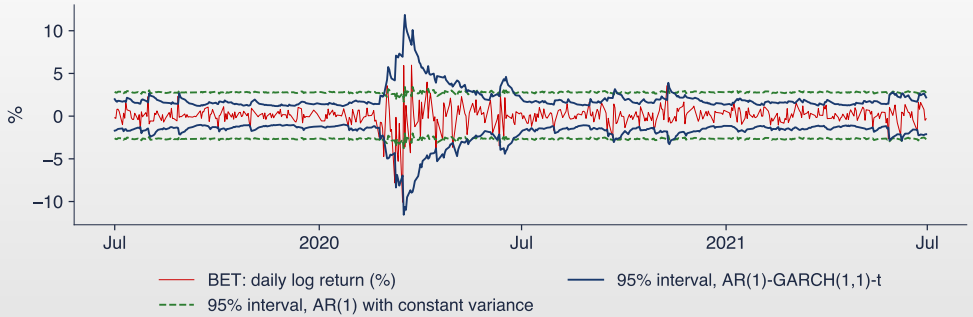
AR(1)-GARCH(1,1)-t pe patru serii

	p (BIC)	$\hat{\phi}$, OLS (SE)	$\hat{\phi}$, AR-GARCH (SE)	$Q(10)$ al $\hat{z}_t$, medie const.	$Q(10)$ al $\hat{z}_t$, AR(1)	ΔBIC
S&P 500	1	−0,099 (0,012)	−0,054 (0,012)	21,9 (0,016)	15,1 (0,087)	−19,5
BET	1	0,109 (0,012)	0,091 (0,013)	114,6 (< 0,001)	28,6 (< 0,001)	−46,9
EUR/RON	3	0,170 (0,013)	0,031 (0,016)	10,5 (0,402)	8,7 (0,469)	4,2
Bitcoin	0	−0,022 (0,015)	−0,043 (0,014)	29,9 (< 0,001)	48,4 (< 0,001)	−9,5

- p: ordinul AR ales după BIC cu variantă constantă; SE pentru AR-GARCH: robuste; ΔBIC: AR(1)-GARCH-t minus GARCH-t cu medie constantă (negativ: se preferă AR(1))
- S&P 500: $\hat{\phi}$ scade de la $-0{,}099$ la $-0{,}054$: valoarea OLS reflectă mai ales zilele agitate din 2008 și 2020
- BET: autocorelația pozitivă se menține ($\hat{\phi} = 0{,}091$, $t = 6{,}8$): ajustarea lentă a prețurilor pe o piață mai puțin lichidă; EUR/RON: de la 0,170 la 0,031, nu mai este semnificativ
- Interpretare: modelul pentru medie și cel pentru variantă trebuie alese împreună; concluziile despre ϕ se pot schimba

TSA_ch5_arma_garch

Intervale de prognoză variabile în timp



- BET, intervale de 95% cu o zi înainte: AR(1) cu varianță constantă (lățimea de 5,4 puncte în fiecare zi) și AR(1)-GARCH(1,1)-t (lățimea de la 2,2 la 22,5 puncte în această fereastră)

TSA_ch5_arma_garch

Interpretarea celor două intervale

- Pe întregul eșantion ambele ratează circa 5% dintre zile: 5,0% și 5,2%
  - intervalul constant este corect în medie, dar greșit aproape în fiecare zi
- În 2017 (an liniștit): intervalul constant ratează 0,4% dintre zile, intervalul GARCH 2,0%
  - în martie–aprilie 2020: 33,3% față de 9,5%: ratările intervalului constant se grupează în crize
- Capitolul 2 a dat intervale a căror lățime depinde doar de orizont; cu GARCH ea depinde și de starea curentă

Recapitulare: patru piețe și ARMA-GARCH

- $\alpha + \beta$ apropiat de 1 peste tot; EUR/RON și Bitcoin sînt IGARCH
- Volatilitatea de lungă durată este imprecisă cînd $\alpha + \beta$ este aproape de 1
- ARMA-GARCH: media din Capitolul 2 cu erori GARCH; MLE comun; intervale care urmează volatilitatea

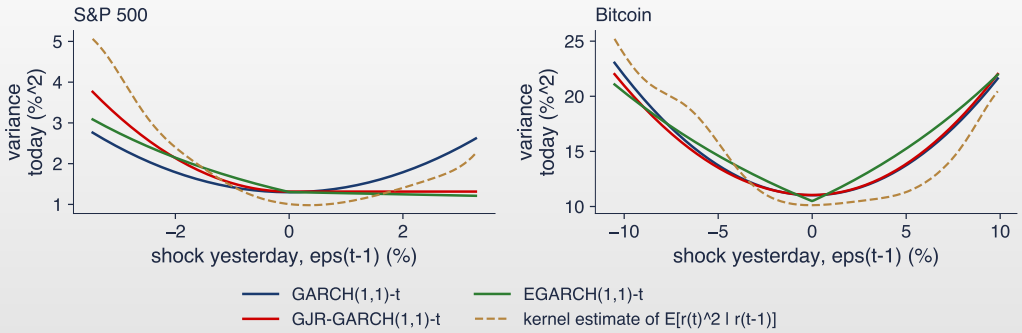
Efectul de levier și curba de impact a știrilor

- **Efectul de levier**: scăderile prețurilor acțiunilor cresc volatilitatea mai mult decît creșterile de aceeași mărime Christie (1982)
  - un preț mai mic al acțiunii crește raportul datorii/capitaluri proprii, deci acțiunea devine mai riscantă; știrile despre un risc mai mare scad și ele imediat prețurile
- GARCH(1,1) nu îl poate surprinde: σ_t^2 depinde de ε_{t-1}^2, nu de semnul lui ε_{t-1}
  - graficul QQ și t asimetrică ($\hat{\lambda} < 0$) au arătat deja spre coada stîngă
- **NIC** (news impact curve, curba de impact a știrilor) Engle și Ng (1993): σ_t^2 ca funcție de ε_{t-1}, cu σ_{t-1}^2 fixat la varianța necondiționată; pentru GARCH, o parabolă simetrică

GJR-GARCH și EGARCH

- **GJR-GARCH** Glosten, Jagannathan și Runkle (1993): $\sigma_t^2 = \omega + (\alpha + \gamma I_{t-1})\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$, cu $I_{t-1} = 1$ dacă $\varepsilon_{t-1} < 0$, altfel 0
  - știri bune: panta α; știri proaste: $\alpha + \gamma$; efect de levier: $\gamma > 0$; în `arch`: `o=1`
  - persistența $\alpha + \beta + \gamma/2$ pentru z_t simetric (jumătate dintre șocuri sînt negative)
- **EGARCH** (exponential GARCH, GARCH exponențial) Nelson (1991):
  $\ln \sigma_t^2 = \omega + \alpha\left(|z_{t-1}| - E|z_{t-1}|\right) + \gamma z_{t-1} + \beta \ln \sigma_{t-1}^2$
  - z_{t-1}: șocul standardizat de ieri; $E|z_{t-1}|$: valoarea lui absolută medie ($\sqrt{2/\pi}$ pentru distribuția Normală); α: efectul mărimii; γ: efectul semnului
  - logaritmul păstrează $\sigma_t^2 > 0$ fără restricții de semn; efect de levier: $\gamma < 0$; persistența: β
- Ambele au un parametru în plus față de GARCH(1,1); testăm $\gamma = 0$ cu statistica t sau cu un test LR, $\chi^2(1)$

Curbele de impact ale știrilor: S&P 500 și Bitcoin



- Curbele modelelor: σ_t^2 în funcție de ε_{t-1}, cu σ_{t-1}^2 la varianța de selecție; linia întreruptă: o estimare nucleu (Nadaraya–Watson) a lui $E[r_t^2 \mid r_{t-1}]$, fără model
- S&P 500, GJR: după o scădere de 2%, varianța de mîine este de 1,62 ori mai mare decît după o creștere de 2%; Bitcoin: raportul 1,00, o curbă simetrică

TSA_ch5_asymmetry

Asimetria pe patru piețe

	GJR α	GJR γ	$t(\gamma)$	LR	p	ΔBIC	EGARCH γ	$t(\gamma)$
S&P 500	0,000	0,205	10,0	235,7	$<0,001$	$-226,8$	$-0,165$	$-15,2$
BET	0,172	0,043	2,1	4,9	0,026	3,9	$-0,028$	$-2,6$
EUR/RON	0,103	0,039	3,0	9,3	0,002	$-0,7$	$-0,040$	$-2,5$
Bitcoin	0,113	$-0,013$	$-0,7$	0,7	0,416	7,7	0,015	1,2

- Inovații Student-t; statistici t robuste; LR $= 2(\ell_{GJR} - \ell_{GARCH}) \sim \chi^2(1)$; ΔBIC: GJR minus GARCH (negativ: se preferă GJR)
- S&P 500: GJR $\hat{\alpha} = 0{,}000$: doar știrile proaste cresc volatilitatea; un efect de levier foarte puternic
- BET: slab, semnificativ după LR, dar BIC preferă GARCH; Bitcoin: niciun efect; EUR/RON: $r_t > 0$ înseamnă un leu mai slab, deci „știrile proaste" din GJR sînt zilele în care leul se întărește
- Interpretare: efectul de levier este o proprietate a piețelor mature de acțiuni, nu a oricărei serii financiare

TSA_ch5_asymmetry

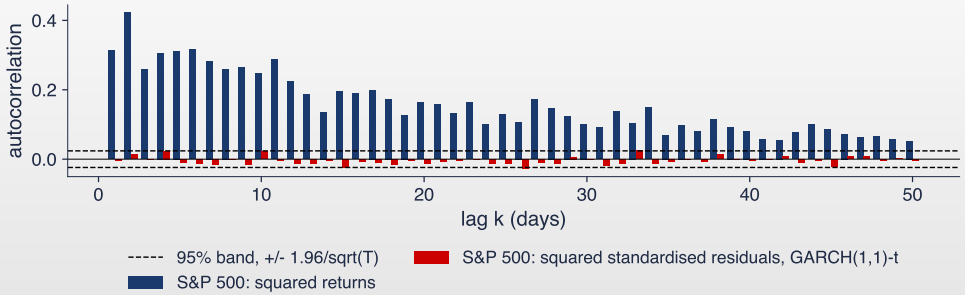
Recapitulare: asimetria

- GJR: o pantă suplimentară γ pentru șocurile negative; EGARCH: un termen de semn γz_{t-1} în $\ln \sigma_t^2$
- Curba de impact a știrilor arată asimetria dintr-o privire
- Puternică la S&P 500, slabă la BET, absentă la Bitcoin

Verificarea unui model estimat

- Dacă modelul este corect, **reziduurile standardizate** $\hat{z}_t = (r_t - \hat{\mu}_t)/\hat{\sigma}_t$ sînt aproape i.i.d., cu media 0 și varianța 1
  - Ljung–Box $Q(10)$ pe $\hat{z}_t$: nu a rămas autocorelație în medie (verificarea din Capitolul 2)
  - Ljung–Box $Q(10)$ pe $\hat{z}_t^2$ și ARCH-LM pe $\hat{z}_t$: nu au rămas efecte ARCH
  - graficul QQ al lui $\hat{z}_t$: este corectă distribuția presupusă?
- **Testul de asimetrie (sign bias)** Engle și Ng (1993): regresia lui $\hat{z}_t^2$ pe I_{t-1}, $I_{t-1}\hat{\varepsilon}_{t-1}$ și $(1 - I_{t-1})\hat{\varepsilon}_{t-1}$
  - testul comun $TR^2 \sim \chi^2(3)$: o respingere înseamnă că semnul șocurilor trecute încă anticipează varianța
- Un diagnostic trecut nu dovedește că modelul este corect; unul picat arată unde greșește

Autocorelațiile eliminate de GARCH



- S&P 500: ACF a lui r_t^2: 0,31 la lagul 1, încă 0,053 la lagul 50; ACF a lui $\hat{z}_t^2$ (GARCH(1,1)-t): $-0{,}005$ la lagul 1, cel mult 0,028 în valoare absolută; banda $\pm 0{,}024$
- Interpretare: patru parametri absorb aproape tot volatility clustering din 27 de ani de date zilnice

TSA_ch5_diagnostics

Diagnosticare pe date reale

S&P 500	$Q(10)$ (p)	$Q(10)$ al pătratelor (p)	ARCH-LM(5) (p)
randamente r_t	96,3 ($<0{,}001$)	6133 ($<0{,}001$)	1684 ($<0{,}001$)
$\hat{z}_t$, GARCH-N	21,2 (0,020)	16,4 (0,089)	7,0 (0,222)
$\hat{z}_t$, GARCH-t	21,9 (0,016)	13,6 (0,192)	4,8 (0,438)

- GARCH elimină efectele ARCH ($Q(10)$ al pătratelor: de la 6133 la 13,6); rămîne puțină autocorelație în medie (medie constantă; un AR(1) ajută, secțiunea 6)
- Testul de asimetrie pentru GARCH-t pe S&P 500: $\chi^2(3) = 40{,}7$ ($p < 0{,}001$): lipsește asimetria din secțiunea 7
- $Q(10)$ al lui $\hat{z}_t^2$, GARCH-t: BET 8,3 ($p = 0{,}596$), Bitcoin 4,7 ($p = 0{,}910$), EUR/RON 0,004: suspect de mic (slide-ul următor)

TSA_ch5_diagnostics

Studiu de caz: EUR/RON pe 6 mai 2025

- În aprilie 2025, cursul de referință a variat în medie cu 0,0038% pe zi: BNR a menținut leul aproape fix
  - volatilitatea IGARCH a scăzut la $\hat{\sigma}_t = 0{,}0078\%$; apoi cursul a crescut cu 1,20% (la două zile după primul tur al alegerilor prezidențiale) și cu 1,21% a doua zi
- Reziduul standardizat: $\hat{z}_t = 154$, o zi „de 154 sigma"; următorul ca mărime este 13,2
  - $Q(10)$ al lui $\hat{z}_t^2$: 0,004 cu această zi, 19,2 ($p = 0{,}038$) fără ea: o singură valoare ascunde efectele ARCH rămase
- Lecția: un curs în regim de managed float nu se formează liber pe piață; GARCH nu poate anticipa o decizie de politică; reprezentăm întotdeauna grafic $\hat{z}_t$ înainte de a ne baza pe un test



Banca Națională a României, București

Foto: Britchi Mirela (2018); CC BY-SA 4.0; Wikimedia Commons

TSA_ch5_diagnostics

Nouă modele pentru S&P 500

- AIC Akaike (1974) și BIC Schwarz (1978), definite pe slide-ul ARCH(q) și limitele lui; comparăm modele estimate pe aceleași date

	Normală		Student-t		t asimetrică	
	log-verosim.	ΔBIC	log-verosim.	ΔBIC	log-verosim.	ΔBIC
GARCH(1,1)	−9218,0	648,9	−9062,5	346,7	−9038,4	307,4
GJR-GARCH(1,1)	−9086,5	394,7	−8944,6	119,9	−8905,1	49,6
EGARCH(1,1)	−9075,6	372,9	−8922,1	74,8	−8880,3	0,0

- ΔBIC: diferența față de cel mai bun model, EGARCH cu inovații t asimetrice
- Pornind de la GARCH Normal: doar asimetria (EGARCH Normal) reduce BIC cu 276, doar cozile groase (GARCH cu t asimetrică) cu 341, ambele cu 649
- Interpretare: cu 6 714 observații, chiar și cîștigurile mici sînt „semnificative"; comparația în afara eșantionului din secțiunea 9 este testul real

TSA_ch5_diagnostics

Recapitulare: diagnosticare și alegerea modelului

- Reziduurile standardizate: fără autocorelație în $\hat{z}_t$ și $\hat{z}_t^2$, distribuția potrivită, fără efect de semn
- Un singur $\hat{z}_t$ extrem poate ascunde totul: graficul înaintea testului
- AIC/BIC pe aceleași date; potrivirea în eșantion nu înseamnă capacitate de prognoză

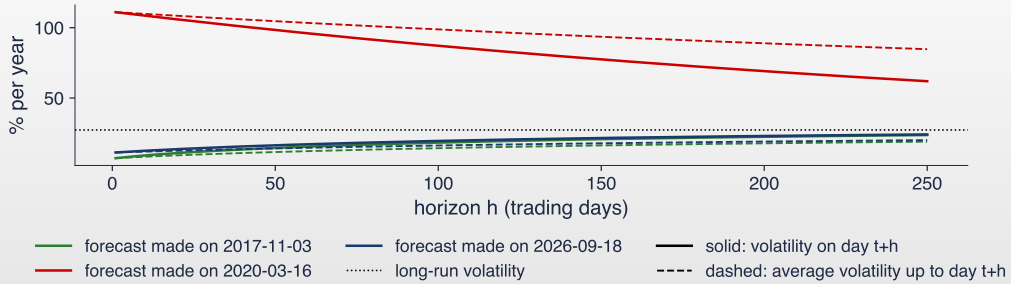
Prognoze pe mai mulți pași

- Un pas: $\sigma^2_{t+1} = \omega + \alpha\varepsilon^2_t + \beta\sigma^2_t$ este cunoscut la sfîrșitul zilei t
  - doi pași: $E_t[\sigma^2_{t+2}] = \omega + \alpha E_t[\varepsilon^2_{t+1}] + \beta\sigma^2_{t+1} = \omega + (\alpha+\beta)\sigma^2_{t+1}$, deoarece $E_t[\varepsilon^2_{t+1}] = \sigma^2_{t+1}$
- Prin inducție: $E_t[\sigma^2_{t+h}] = \bar{\sigma}^2 + (\alpha+\beta)^{h-1}(\sigma^2_{t+1} - \bar{\sigma}^2)$
  - prognoza converge spre varianța de lungă durată, așa cum prognoza unui AR(1) converge spre medie (Capitolul 2)
- Varianța randamentului pe H zile: suma prognozelor zilnice (randamentele sînt necorelate)
  - $\mathrm{Var}_t(r_{t+1} + \cdots + r_{t+H}) = \sum_{h=1}^{H} E_t[\sigma^2_{t+h}]$, nu $H\sigma^2_{t+1}$
  - regula rădăcinii pătrate a timpului, $\sigma_{t+1}\sqrt{H}$, dă valori prea mari în criză și prea mici într-o perioadă liniștită

Exemplu rezolvat: S&P 500 la 18 septembrie 2026

- GARCH(1,1)-t: $\alpha + \beta = 0{,}9947$, $\bar{\sigma}^2 = 2{,}972$; prognoza pentru ziua următoare $\sigma^2_{t+1} = 0{,}509$ (sub nivelul de lungă durată)
- Pas cu pas
  - ziua 10: $2{,}972 + 0{,}9947^9(0{,}509 - 2{,}972) = 2{,}972 + 0{,}953 \times (0{,}509 - 2{,}972) = 0{,}624$
  - varianța pe 10 zile: suma celor zece prognoze zilnice $= 5{,}67$, deci volatilitatea pe 10 zile este 2,38%
  - regula rădăcinii pătrate a timpului: $\sqrt{10 \times 0{,}509} = 2{,}26\%$: prea mică, deoarece volatilitatea este așteptată să crească spre nivelul de lungă durată

Structura la termen a volatilității



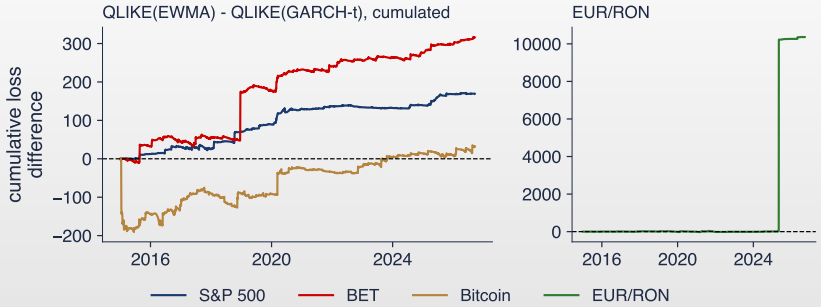
- S&P 500, GARCH(1,1)-t pe toate datele; prognoze făcute într-o zi liniștită (3 noiembrie 2017), în vîrful crizei COVID-19 (16 martie 2020) și la 18 septembrie 2026
- Ziua liniștită: 7,3% mîine, în medie 19,0% pe un an; vîrful COVID-19: 111,0% mîine, încă 84,7% în medie pe un an
- Interpretare: toate curbele se îndreaptă spre nivelul de lungă durată (27,3%) cu aceeași viteză redusă; panta arată dacă sîntem într-o perioadă liniștită sau într-o furtună

TSA_ch5_forecasts

Evaluarea unei prognoze de volatilitate

- Adevăratul σ_t^2 nu este observat niciodată: comparăm prognoza h_t cu o **aproximare** zgomotoasă, aici r_t^2
  - $E_{t-1}[r_t^2] = \sigma_t^2$ (cu $\mu \approx 0$), dar r_t^2 este foarte zgomotos: un R^2 mic chiar și pentru o prognoză perfectă Andersen și Bollerslev (1998)
- Funcția de pierdere **QLIKE** Patton (2011): $L(r_t^2, h_t) = \dfrac{r_t^2}{h_t} + \ln h_t$ (pînă la o constantă); cu cît media este mai mică, cu atît mai bine
  - ordonează corect prognozele chiar și cu o aproximare zgomotoasă; este minus log-verosimilitatea Normală; penalizează prognozele prea mici
- **În afara eșantionului** (Capitolul 0): din 2015, fiecare prognoză folosește doar date pînă în ziua precedentă; modelele se reestimează la fiecare 250 de zile
- **Testul DM** Diebold și Mariano (1995): H_0: $E[d_t] = 0$, cu $d_t = L_t^A - L_t^B$ diferența pierderilor a două modele A și B
  - $\mathrm{DM} = \bar{d}/\widehat{\mathrm{SE}}(\bar{d})$, aproximativ $N(0,1)$ în ipoteza H_0; $\bar{d}$: media lui d_t; $\mathrm{DM} < -1{,}96$: A este mai bun
  - $\widehat{\mathrm{SE}}$: eroare standard HAC (heteroskedasticity and autocorrelation consistent, robustă la heteroscedasticitate și autocorelație)

GARCH față de EWMA, în afara eșantionului



- Prognoze ale variației cu o zi înainte, din 2015 pînă la 18 septembrie 2026: GARCH(1,1)-t (reestimat la fiecare 250 de zile) față de EWMA cu $\lambda = 0{,}94$; o curbă crescătoare înseamnă că GARCH-t are QLIKE mai mic

TSA_ch5_forecasts

Interpretarea comparației prognozelor

2015–2026	zile	QLIKE GARCH-t	QLIKE GJR-t	QLIKE EWMA	DM t, GARCH-t față de EWMA (p)
S&P 500	2 944	0,761	0,733	0,819	$-3{,}69$ ($<0{,}001$)
BET	2 926	0,680	0,674	0,788	$-2{,}22$ (0,027)
EUR/RON	2 939	2,456	3,276	5,982	$-1{,}02$ (0,310)
Bitcoin	4 279	3,383	3,401	3,390	$-0{,}20$ (0,845)

- S&P 500 și BET: GARCH-t este mai bun decît EWMA ($t < -1{,}96$); GJR-t are cel mai mic QLIKE (efectul de levier contează și în afara eșantionului)
- Bitcoin: nicio diferență ($t = -0{,}20$): GARCH-ul lui este un IGARCH, adică aproape un EWMA
- EUR/RON: QLIKE mediu mult mai mic pentru GARCH, dar $t = -1{,}02$: 98% din diferența totală provine dintr-o singură zi, 6 mai 2025, cînd EWMA a prognozat o variantă aproape nulă
- Interpretare: QLIKE penalizează prognozele prea mici; testul DM ne ferește de concluzii construite pe o singură zi

TSA_ch5_forecasts

Studiu de caz: Hansen și Lunde (2005)

- **Întrebarea**: poate ceva să depășească un GARCH(1,1)? Hansen și Lunde (2005)
  - 330 de modele de tip ARCH (asimetrice, cu memorie lungă, cu inovații diferite), comparate în afara eșantionului pe cursul marcă germană/dolar american și pe randamentele unei acțiuni americane
  - aproximarea: varianța realizată din randamente intrazilnice, mai precisă decît r_t^2
- **Rezultatul**: la cursul de schimb, niciun model nu a depășit semnificativ GARCH(1,1); la acțiune, modelele cu efect de levier au fost mai bune
  - același tipar ca în tabelul nostru: asimetria contează pentru acțiuni, nu pentru cursuri de schimb sau Bitcoin
- **Moștenirea**: GARCH(1,1) este reperul pe care orice model nou de volatilitate, inclusiv de învățare automată (Capitolul 9), trebuie să-l depășească în afara eșantionului

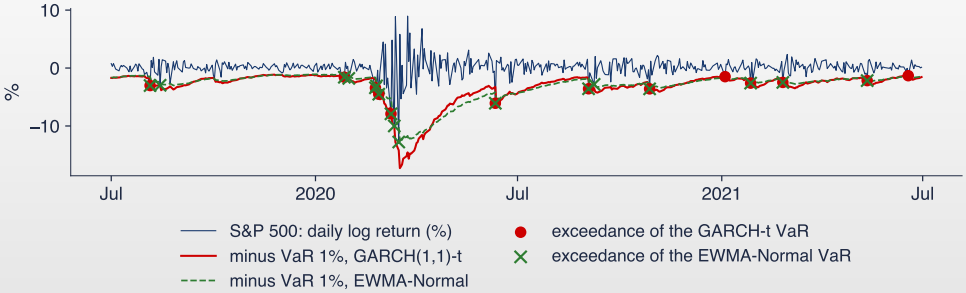
Recapitulare: prognoza variației

- $E_t[\sigma^2_{t+h}] = \bar{\sigma}^2 + (\alpha+\beta)^{h-1}(\sigma^2_{t+1} - \bar{\sigma}^2)$; varianța pe H zile = suma prognozelor zilnice
- Comparăm prognozele în afara eșantionului cu QLIKE și testul Diebold–Mariano
- GARCH este mai bun decît EWMA acolo unde volatilitatea revine la medie

VaR condiționat

- **VaR** (value at risk, valoarea expusă la risc) la nivelul α: pierderea depășită cu probabilitatea α, $\text{VaR}_\alpha = -q_\alpha(r_{t+1})$, unde q_α este cuantila de ordin α
  - aici $\alpha = 1\%$: VaR 1%, o pierdere depășită într-o zi din o sută
- Cu $r_{t+1} = \mu + \sigma_{t+1} z_{t+1}$: $\text{VaR}_{t+1} = -(\mu + \sigma_{t+1}\, q_\alpha(z))$
  - $q_\alpha(z)$: cuantila de ordin α a inovației z; Normală: $q_{0,01} = -2{,}326$
  - t standardizată: $q_{0,01} = t_\nu^{-1}(0{,}01)\sqrt{(\nu-2)/\nu}$, t_ν^{-1}: funcția cuantilă a distribuției Student cu ν grade de libertate
  - VaR se schimbă în fiecare zi odată cu σ_{t+1}: mare în furtuni, mic în perioadele liniștite
- **Exemplu rezolvat**: S&P 500 la 18 septembrie 2026, GARCH(1,1)-t: $\hat{\mu} = 0{,}079$, $\sigma_{t+1} = 0{,}714$, $\hat{\nu} = 6{,}26$
  - $t_{\hat{\nu}}^{-1}(0{,}01) = -3{,}100$, $\sqrt{(\hat{\nu}-2)/\hat{\nu}} = 0{,}825$, deci $q_{0,01} = -3{,}100 \times 0{,}825 = -2{,}557$
  - VaR 1% $= -(0{,}079 + 0{,}714 \times (-2{,}557)) = 1{,}75\%$
  - cu z_t Normale: 1,58%; pe 10 zile (suma variațelor, fără μ): $2{,}557 \times \sqrt{5{,}67} = 6{,}09\%$

VaR 1% în timpul crahului COVID-19



- S&P 500, iulie 2019 – iunie 2021 (505 zile): VaR 1% pe o zi din GARCH(1,1)-t (reestimat la fiecare 250 de zile) și din EWMA cu z_t Normale
- Depășiri (randament sub −VaR): GARCH-t 13, EWMA-Normal 17, circa 5 așteptate; ambele modele reacționează, dar abia după primele scăderi mari din martie 2020

TSA_ch5_forecasts

Depășiri 2015–2026

VaR 1%	zile	așteptat	GARCH-t	EWMA-Normal
S&P 500	2 944	29	49 (1,66%)	65 (2,21%)
BET	2 926	29	34 (1,16%)	67 (2,29%)
EUR/RON	2 939	29	35 (1,19%)	63 (2,14%)
Bitcoin	4 279	43	64 (1,50%)	93 (2,17%)

- Un VaR 1% corect este depășit în 1% dintre zile, iar depășirile nu apar grupat
- EWMA-Normal: 2,1–2,3% peste tot: cuantila Normală este prea mică pentru cozi groase
- GARCH-t: 1,2–1,7%: mult mai aproape de 1%; cel mai mare pentru S&P 500, unde lipsește efectul de levier
- Sînt diferențele semnificative? Testul Kupiec (1995) compară numărul de depășiri cu o distribuție binomială

TSA_ch5_forecasts

Recapitulare: VaR 1% dintr-un model GARCH

- $\text{VaR}_{t+1} = -(\mu + \sigma_{t+1} q_\alpha(z))$: o volatilitate dinamică și cuantila potrivită
- Cuantilele Normale subestimează riscul; Student-t este mult mai aproape de 1%
- Mai multe serii deodată (covariațele randamentelor): GARCH multivariat, Capitolul 14 (studiu individual)

Contribuția posibilă a AI

- **Cod**: o primă versiune a unui script care aplică ARCH-LM, estimează GARCH, GJR și EGARCH cu `arch` pe multe serii și tabelează rezultatele
- **Explicații**: o a doua explicație a formei ARMA(1,1) a modelului GARCH sau a unui tabel de rezultate `arch`
- **Explorare**: volatilitatea tuturor acțiunilor de la BVB sau a leului față de mai multe valute
- Exemplu de prompt
  - `Write Python code that loads daily BET closes, computes log returns in percent, runs the ARCH-LM test with 5 lags, fits AR(1)-GARCH(1,1) with Student-t innovations using the arch package, and plots the annualised conditional volatility.`

Verificări necesare

- Unitățile: randamente în %, nu în zecimale; rescalăm o serie cu variață foarte mică (EUR/RON) și convertim înapoi ω
- Persistența: $\alpha + \beta$ pentru GARCH, $\alpha + \beta + \gamma/2$ pentru GJR, β pentru EGARCH
- Estimările pe frontieră ($\alpha + \beta = 1$): fără timp de înjumătățire și fără volatilitate de lungă durată; nu raportăm valori infinite
- Calendarele: Bitcoin se tranzacționează 7 zile pe săptămînă, BET cinci; anualizăm fiecare serie cu propria frecvență
- Prognozele în afara eșantionului folosesc doar date trecute; nivelul VaR se scrie VaR 1%
- Fiecare referință citată: trebuie să existe; verificați DOI-ul

Idei de reținut

- Randamentele: o medie aproape imprevizibilă și o varianță previzibilă, $r_t = \mu_t + \sigma_t z_t$; testăm cu ACF a lui r_t^2 și ARCH-LM
- GARCH(1,1) este un ARMA(1,1) pentru ε_t^2; $\alpha + \beta$ apropiat de 1; IGARCH și EWMA cînd $\alpha + \beta = 1$
- Estimăm prin verosimilitate maximă cu `arch` și raportăm SE robuste; inovații Student-t pentru cozi
- ARMA-GARCH: media din Capitolul 2 și varianța din acest capitol, estimate împreună
- Indicii de acțiuni au nevoie de asimetrie (GJR, EGARCH); verificăm $\hat{z}_t$ și $\hat{z}_t^2$ după fiecare estimare
- Prognozele revin la nivelul de lungă durată; le comparăm în afara eșantionului cu QLIKE și DM; VaR 1% $= -(\mu + \sigma_{t+1} q_{0,01}(z))$

Formule de reținut

Mărimea	Formula
ARCH-LM	$\hat{\varepsilon}_t^2 = b_0 + \sum_{i=1}^{q} b_i \hat{\varepsilon}_{t-i}^2 + u_t, \quad LM = nR^2 \sim \chi^2(q)$
ARCH(q)	$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2, \quad \bar{\sigma}^2 = \omega/(1 - \sum \alpha_i)$
GARCH(1,1)	$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2, \quad \bar{\sigma}^2 = \omega/(1-\alpha-\beta), \quad h_{1/2} = \ln 0{,}5 / \ln(\alpha+\beta)$
EWMA	$\sigma_t^2 = \lambda\sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda) r_{t-1}^2$
GJR, EGARCH	$\sigma_t^2 = \omega + (\alpha + \gamma I_{t-1})\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2; \quad \ln\sigma_t^2 = \omega + \alpha(\lvert z_{t-1}\rvert - E\lvert z_{t-1}\rvert) + \gamma z_{t-1} + \beta \ln\sigma_{t-1}^2$
Log-verosimilitatea	$\ell = -\frac{1}{2}\sum_t [\ln 2\pi + \ln\sigma_t^2 + (r_t - \mu_t)^2/\sigma_t^2]$
Prognoza	$E_t[\sigma_{t+h}^2] = \bar{\sigma}^2 + (\alpha+\beta)^{h-1}(\sigma_{t+1}^2 - \bar{\sigma}^2)$
QLIKE, VaR 1%	$L = r_t^2/h_t + \ln h_t; \quad \text{VaR}_{t+1} = -(\mu + \sigma_{t+1}\, q_{0,01}(z))$

Autoevaluare

- **Întrebare**: $\omega = 0{,}05$, $\alpha = 0{,}05$, $\beta = 0{,}90$. Care sînt varianța de lungă durată și timpul de înjumătățire?
  - **Răspuns**: $0{,}05/0{,}05 = 1$; $\ln 0{,}5 / \ln 0{,}95 = 13{,}5$ zile
- **Întrebare**: o regresie ARCH-LM cu $q = 5$ pe 1000 de reziduuri dă $R^2 = 0{,}004$. Există efecte ARCH la 5%?
  - **Răspuns**: LM $= 1000 \times 0{,}004 = 4 < 11{,}07$: H_0 nu se respinge, nu există dovezi de efecte ARCH la 5% (ceea ce nu dovedește că ele lipsesc)
- **Întrebare**: GJR dă $\hat{\alpha} = 0$ și $\hat{\gamma} = 0{,}2$. Ce se întîmplă cu varianța după o creștere de 3%?
  - **Răspuns**: nimic în afară de scăderea $\beta\sigma_t^2$: doar șocurile negative cresc varianța
- Urmează: Capitolul 6, modele VAR și cauzalitate Granger (mai multe serii deodată)

Bibliografie (1/3)

- Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(6), 716–723. doi:10.1109/TAC.1974.1100705
- Andersen, T. G., & Bollerslev, T. (1998). Answering the skeptics: Yes, standard volatility models do provide accurate forecasts. *International Economic Review*, 39(4), 885–905. doi:10.2307/2527343
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3), 307–327. doi:10.1016/0304-4076(86)90063-1
- Bollerslev, T. (1987). A conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return. *Review of Economics and Statistics*, 69(3), 542–547. doi:10.2307/1925546
- Bollerslev, T., & Wooldridge, J. M. (1992). Quasi-maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time-varying covariances. *Econometric Reviews*, 11(2), 143–172. doi:10.1080/07474939208800229
- Christie, A. A. (1982). The stochastic behavior of common stock variances: Value, leverage and interest rate effects. *Journal of Financial Economics*, 10(4), 407–432. doi:10.1016/0304-405X(82)90018-6
- Diebold, F. X., & Mariano, R. S. (1995). Comparing predictive accuracy. *Journal of Business & Economic Statistics*, 13(3), 253–263. doi:10.1080/07350015.1995.10524599
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, 50(4), 987–1007. doi:10.2307/1912773
- Engle, R. F. (2004). Risk and volatility: Econometric models and financial practice. *American Economic Review*, 94(3), 405–420. doi:10.1257/0002828041464597

Bibliografie (2/3)

- Engle, R. F., & Bollerslev, T. (1986). Modelling the persistence of conditional variances. *Econometric Reviews*, 5(1), 1–50. doi:10.1080/07474938608800095
- Engle, R. F., & Ng, V. K. (1993). Measuring and testing the impact of news on volatility. *Journal of Finance*, 48(5), 1749–1778. doi:10.1111/j.1540-6261.1993.tb05127.x
- Franke, J., Härdle, W. K., & Hafner, C. M. (2019). *Statistics of Financial Markets: An Introduction* (5th ed.). Springer. doi:10.1007/978-3-030-13751-9
- Glosten, L. R., Jagannathan, R., & Runkle, D. E. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *Journal of Finance*, 48(5), 1779–1801. doi:10.1111/j.1540-6261.1993.tb05128.x
- Hamilton, J. D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press. doi:10.2307/j.ctv14jx6sm
- Hansen, B. E. (1994). Autoregressive conditional density estimation. *International Economic Review*, 35(3), 705–730. doi:10.2307/2527081
- Hansen, P. R., & Lunde, A. (2005). A forecast comparison of volatility models: Does anything beat a GARCH(1,1)? *Journal of Applied Econometrics*, 20(7), 873–889. doi:10.1002/jae.800
- Huang, C., & Petukhina, A. (2022). *Applied Time Series Analysis and Forecasting with Python*. Springer. doi:10.1007/978-3-031-13584-2
- Hyndman, R. J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice* (3rd ed.). OTexts. otexts.com/fpp3

Bibliografie (3/3)

- J.P. Morgan/Reuters (1996). *RiskMetrics – Technical Document* (4th ed.). Morgan Guaranty Trust Company. msci.com
- Kupiec, P. H. (1995). Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. *Journal of Derivatives*, 3(2), 73–84. doi:10.3905/jod.1995.407942
- Ljung, G. M., & Box, G. E. P. (1978). On a measure of lack of fit in time series models. *Biometrika*, 65(2), 297–303. doi:10.1093/biomet/65.2.297
- Mandelbrot, B. (1963). The variation of certain speculative prices. *Journal of Business*, 36(4), 394–419. doi:10.1086/294632
- McLeod, A. I., & Li, W. K. (1983). Diagnostic checking ARMA time series models using squared-residual autocorrelations. *Journal of Time Series Analysis*, 4(4), 269–273. doi:10.1111/j.1467-9892.1983.tb00373.x
- Nelson, D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. *Econometrica*, 59(2), 347–370. doi:10.2307/2938260
- Patton, A. J. (2011). Volatility forecast comparison using imperfect volatility proxies. *Journal of Econometrics*, 160(1), 246–256. doi:10.1016/j.jeconom.2010.03.034
- Schwarz, G. (1978). Estimating the dimension of a model. *Annals of Statistics*, 6(2), 461–464. doi:10.1214/aos/1176344136
- Tsay, R. S. (2010). *Analysis of Financial Time Series* (3rd ed.). Wiley. doi:10.1002/9780470644560