








Serii de timp

Capitolul 6: Modele VAR și cauzalitate Granger



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București
IDA Institute Digital Assets
Blockchain Research Center
AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance
Academia Română, Institutul de Prognoză Economică
MSCA Digital Finance

Acronime folosite în acest material (1/2)

- **AI**: Artificial Intelligence (inteligență artificială)
- **AIC**: Akaike Information Criterion (criteriul informațional Akaike)
- **AR**: AutoRegressive (model) — model autoregresiv
- **ARMA**: AutoRegressive Moving Average (model) — model autoregresiv cu medie mobilă
- **BET**: Bucharest Exchange Trading (index) — indicele de referință al Bursei de Valori București
- **BIC**: Bayesian Information Criterion (criteriul informațional bayesian al lui Schwarz)
- **BNR**: Banca Națională a României
- **CCF**: Cross-Correlation Function (funcția de corelație încrucișată)
- **COVID-19**: COronaVIrus Disease 2019 (boala provocată de coronavirus, 2019)
- **DM**: Diebold–Mariano (test) — testul Diebold–Mariano de comparare a prognozelor
- **DSGE**: Dynamic Stochastic General Equilibrium (model) — model dinamic stochastic de echilibru general
- **EODHD**: EOD Historical Data (market-data provider) — furnizor de date de piață
- **FEVD**: Forecast Error Variance Decomposition (descompunerea variației erorii de prognoză)
- **FRED**: Federal Reserve Economic Data (baza de date economice a Rezervei Federale din St. Louis)
- **GDP**: Gross Domestic Product (produsul intern brut)

Acronime folosite în acest material (2/2)

- **GLS**: Generalised Least Squares (metoda generalizată a celor mai mici pătrate)
- **HICP**: Harmonised Index of Consumer Prices (indicele armonizat al prețurilor de consum)
- **HQ**: Hannan–Quinn (information criterion) — criteriul informațional Hannan–Quinn
- **IAPC**: Indicele armonizat al prețurilor de consum
- **IRF**: Impulse Response Function (funcția de răspuns la impuls)
- **MA**: Moving Average (medie mobilă)
- **MSE**: Mean Squared Error (eroarea pătratică medie)
- **OLS**: Ordinary Least Squares (metoda celor mai mici pătrate)
- **PIB**: Produsul intern brut
- **RMSE**: Root Mean Squared Error (rădăcina erorii pătratice medii)
- **ROBOR**: Romanian Interbank Offer Rate (rata dobînzii la care băncile din România oferă depozite interbancare)
- **RSS**: Residual Sum of Squares (suma pătratelor reziduurilor)
- **SE**: Standard Error (eroare standard)
- **SUA**: Statele Unite ale Americii
- **SVAR**: Structural Vector AutoRegression (model vector autoregresiv structural)
- **UE**: Uniunea Europeană
- **VAR**: Vector AutoRegression (model vector autoregresiv)
- **VECM**: Vector Error Correction Model (model vectorial cu corecția erorii)

Întrebarea de azi și traseul

- **Întrebarea**: cînd mai multe serii evoluează împreună (producția, prețurile, dobînzile; trei piețe bursiere), cum le modelăm împreună și ce putem afla despre cine pe cine precedă?
  - cîte o ecuație pentru fiecare variabilă, fiecare cu trecutul tuturor variabilelor: modelul vector autoregresiv (VAR)
- **Traseul** capitolului
  - de la o serie la mai multe: procese vectoriale și corelații încrucișate; modelul VAR(p) și stabilitatea lui
  - estimare, alegerea numărului de laguri și diagnosticare; cauzalitatea Granger și capcanele ei
  - funcții de răspuns la impuls, descompunerea variației, prognoze; ideea VAR-ului structural, Sims (1980)
- Pornim de la Capitolul 2 (modele AR) și de la Capitolul 3 (teste de staționaritate)

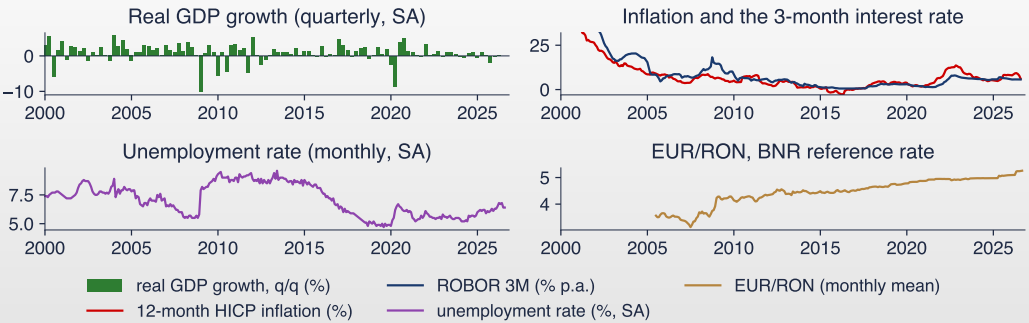
Rezultatele învățării

- Scrieți un VAR(p) în formă matriceală și ecuație cu ecuație și numărați-i parametrii
- Verificați stabilitatea cu valorile proprii ale matricei companion și calculați media unui VAR stabil
- Estimați un VAR prin OLS, alegeți p cu AIC, BIC și HQ și verificați reziduurile
- Testați cauzalitatea Granger și explicați ce nu demonstrează ea
- Calculați și interpretați funcțiile de răspuns la impuls ortogonalizate și descompunerea variației și explicați de ce contează ordinea variabilelor
- Faceți prognoze cu un VAR și comparați-le corect cu metode univariate de referință

Bibliografie și instrumente

- Manual: Huang și Petukhina (2022), cap. 7 (serii de timp multivariate)
  - manual însoțitor, gratuit online: Hyndman și Athanasopoulos (2021), secț. 12.3 (modele vectoriale autoregresive)
- Teorie: Lütkepohl (2005), cap. 2–4; Hamilton (1994), cap. 11; o sinteză accesibilă: Stock și Watson (2001)
- Quantlet-urile Python ale capitolului: Quantlets/Ch_06
  - `VAR` din `statsmodels`: `select_order`, `fit`, `test_whiteness`, `irf`, `fevd`, `forecast_interval`
- Notebook-ul cursului: deschideți în Google Colab
- Curs video: Applied Time Series Analysis with Python

România: patru serii macroeconomice care evoluează împreună



⊡ Creșterea PIB-ului real (față de trimestrul anterior) și rata șomajului, ajustate sezonier; inflația anuală IAPC; ROBOR 3M, dobînda la 3 luni; sursa: Eurostat; EUR/RON: cursul de referință BNR

TSA_ch6_multivariate_data

Interpretarea seriilor românești

- Inflația și ROBOR 3M cresc și scad împreună: corelația este 0,66 în T1 2005–T2 2026 (medii trimestriale)
  - inflația a atins 13,6% în noiembrie 2022; ROBOR 3M a atins 18,2% în octombrie 2008 (criza de lichiditate din 2008)
- Creșterea PIB-ului este zgomotoasă, cu două scăderi mari: $-10{,}2\%$ în T1 2009 și $-8{,}6\%$ în T2 2020
  - ultimele valori: inflația 6,1% (august 2026), ROBOR 3M 5,69%, șomajul 6,4%, EUR/RON 5,26
- Întrebările capitolului
  - Ajută inflația la prognoza dobînzii?
  - Cum reacționează ROBOR la o surpriză a inflației și cît timp?

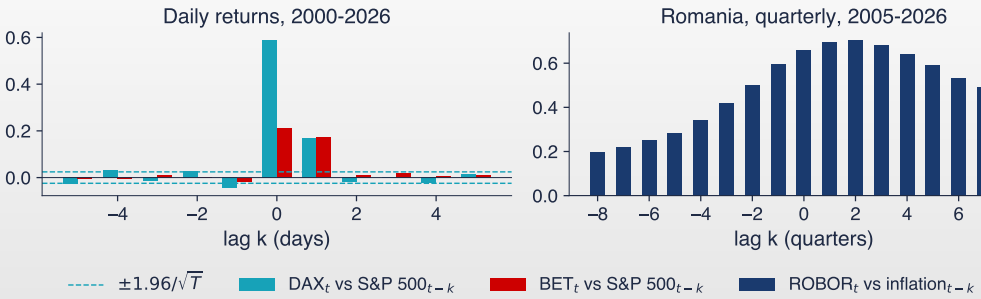
Serii de timp vectoriale

- **Definiție**: $\mathbf{Y}_t = (Y_{1t}, \ldots, Y_{Kt})'$ grupează K serii observate la aceleași date
  - exemplu: $\mathbf{Y}_t = (g_t, \pi_t, i_t)'$, creșterea PIB-ului, inflația și ROBOR 3M din trimestrul t; $K = 3$
  - Y_{jt}: valoarea seriei j la data t; apostroful $'$ notează transpusa (un vector coloană)
- **Vectorul mediilor**: $\boldsymbol{\mu} = E[\mathbf{Y}_t]$, de dimensiune $K \times 1$
  - **matricea de autocovarianță** la lagul h: $\boldsymbol{\Gamma}(h) = \mathrm{Cov}(\mathbf{Y}_t, \mathbf{Y}_{t-h}) = E[(\mathbf{Y}_t - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{Y}_{t-h} - \boldsymbol{\mu})']$, $K \times K$
  - diagonala: autocovariațele fiecărei serii (Capitolul 1); în afara diagonalei: **covariațele încrucișate** $\gamma_{jk}(h) = \mathrm{Cov}(Y_{jt}, Y_{k,t-h})$
- **Staționaritate slabă**: $\boldsymbol{\mu}$ și $\boldsymbol{\Gamma}(h)$ nu depind de t
  - $\boldsymbol{\Gamma}(h)$ nu este simetrică, dar $\boldsymbol{\Gamma}(-h) = \boldsymbol{\Gamma}(h)'$: „$Y_1$ precedă Y_2" și „Y_2 precedă Y_1" sînt afirmații diferite

Funcția de corelație încrucișată

- **Definiție**: $\rho_{yx}(k) = \text{Corr}(y_t, x_{t-k}) = \gamma_{yx}(k)/(\sigma_y \sigma_x)$, pentru $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
  - funcția de corelație încrucișată (CCF): $k > 0$: x din trecut cu y de azi (x precedă); $k < 0$: y precedă
  - $\gamma_{yx}(k) = \text{Cov}(y_t, x_{t-k})$: covarianța încrucișată; σ_y, σ_x: abaterile standard ale celor două serii
- Versiunea de eșantion: $\hat{\rho}_{yx}(k)$, corelația perechilor (y_t, x_{t-k})
  - dacă cele două serii sînt zgomote albe independente, $\hat{\rho}_{yx}(k) \approx N(0, 1/T)$, unde T este numărul de observații: benzile $\pm 1{,}96/\sqrt{T}$
  - pentru serii autocorelate benzile sînt prea înguste: apar relații false de precedență (comparați cu Capitolul 3, regresia falsă)
- CCF privește o pereche și un lag pe rînd; un VAR privește împreună toate variabilele și toate lagurile

Corelații încrucișate: piețe și date macroeconomice românești



- Stînga: randamente logaritmice zilnice (EODHD), 6 433 de zile comune de tranzacționare, 2000–2026; bare: $\mathrm{Corr}(\mathrm{DAX}_t, \mathrm{S\&P}_{t-k})$ și $\mathrm{Corr}(\mathrm{BET}_t, \mathrm{S\&P}_{t-k})$. Dreapta: ROBOR 3M trimestrial față de lagurile inflației

TSA_ch6_multivariate_data

Interpretarea corelațiilor încrucișate

- BET cu S&P 500: 0,21 în aceeași zi și 0,17 cu ziua precedentă ($k = 1$); pentru $k = -1$: $-0{,}02$
  - banda este $\pm 0{,}024$: randamentul de ieri de la New York se vede clar în randamentele de azi de la București și Frankfurt (DAX la $k = 1$: 0,17); legătura inversă este mult mai slabă (DAX la $k = -1$: $-0{,}046$, puțin în afara benzii)
  - motivul: Wall Street se închide la ora 22:00 (ora Frankfurtului), după piețele europene; știrile ajung la ele a doua zi dimineață
- ROBOR cu inflația: cea mai mare corelație, 0,70, apare la $k = 2$ trimestre (inflația precedă)
  - dar toate valorile sînt mari (0,34 la $k = -4$, 0,64 la $k = 4$): două serii persistente; CCF singură nu poate separa precedența de persistență

Avantajul unui singur model pentru toate seriile

- Modelele univariate (Capitolele 2–3) prognozează fiecare serie din propriul trecut
  - ele ignoră faptul că inflația din trimestrul trecut poate ajuta la prognoza dobînzii din acest trimestru
- **Feedback**: banca centrală reacționează la inflație, inflația reacționează la dobîndă
  - o singură regresie a lui π_t pe i_t tratează i_t ca fiind dat (exogen); aici ambele sînt **endogene**, determinate în interiorul sistemului
- Un VAR tratează simetric toate variabilele: fiecare depinde de trecutul tuturor
  - nu este nevoie de teorie economică pentru a-l scrie; teoria revine cînd interpretăm șocurile (secțiunea 7)

Recapitulare: de la o serie la mai multe

- O serie vectorială $\mathbf{Y}_t$ are un vector al mediilor și matrice de autocovarianță $\mathbf{\Gamma}(h)$, cu $\mathbf{\Gamma}(-h) = \mathbf{\Gamma}(h)'$
- CCF $\rho_{yx}(k)$ arată relațiile de precedență; $k > 0$: x precedă
- Randamentele S&P 500 precedă cu o zi randamentele DAX și BET
- Feedback-ul dintre variabile cere un model comun

Modelul VAR(p)

- **Definiție**: $\mathbf{Y}_t = \mathbf{c} + \mathbf{A}_1\mathbf{Y}_{t-1} + \cdots + \mathbf{A}_p\mathbf{Y}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$
  - $\mathbf{c}$: vectorul termenilor liberi, $K \times 1$; $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_p$: matricele coeficienților, $K \times K$
  - $\boldsymbol{\varepsilon}_t$: zgomot alb vectorial: $E[\boldsymbol{\varepsilon}_t] = \mathbf{0}$, $E[\boldsymbol{\varepsilon}_t\boldsymbol{\varepsilon}_t'] = \boldsymbol{\Sigma}$, $E[\boldsymbol{\varepsilon}_t\boldsymbol{\varepsilon}_s'] = \mathbf{0}$ pentru $t \neq s$
- $\boldsymbol{\Sigma}$ nu este, în general, diagonală: șocurile din ecuații diferite sînt corelate **la aceeași dată**
  - erorile de la date diferite nu sînt corelate: toată dinamica se află în matricele $\mathbf{A}_j$
- Pentru $K = 1$ regăsim modelul AR(p) din Capitolul 2
  - această formă se numește **forma redusă**: descrie datele, nu șocurile economice (secțiunea 10)

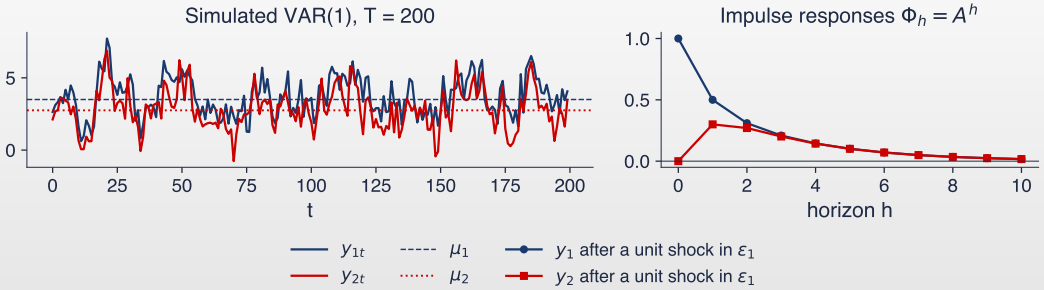
Un VAR(1) cu două variabile, ecuație cu ecuație

- În formă matriceală:
  - $\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$
- Ecuație cu ecuație:
  - $y_{1t} = c_1 + a_{11} y_{1,t-1} + a_{12} y_{2,t-1} + \varepsilon_{1t}$
  - $y_{2t} = c_2 + a_{21} y_{1,t-1} + a_{22} y_{2,t-1} + \varepsilon_{2t}$
- Interpretarea coeficienților: a_{jk} = efectul lui $y_{k,t-1}$ asupra lui y_{jt} (rîndul: ecuația; coloana: regresorul)
  - $a_{12} = a_{21} = 0$: două modele AR(1) separate; $a_{12} \neq 0$: trecutul lui y_2 ajută la prognoza lui y_1

Exemplu rezolvat: un VAR(1)

- Modelul: $\mathbf{c} = (1{,}2;\ 0{,}6)'$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$
  - $y_{1t} = 1{,}2 + 0{,}5y_{1,t-1} + 0{,}2y_{2,t-1} + \varepsilon_{1t}; \quad y_{2t} = 0{,}6 + 0{,}3y_{1,t-1} + 0{,}4y_{2,t-1} + \varepsilon_{2t}$
- Interpretare: $a_{21} = 0{,}3$: o unitate în plus a lui y_1 în perioada trecută crește y_2 cu 0,3 azi, celelalte fiind fixe
  - șocurile sînt corelate: $\text{Corr}(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}) = 0{,}5$
- Prognoze din $\mathbf{Y}_T = (5;\ 2)'$: $\hat{\mathbf{Y}}_{T+1} = \mathbf{c} + \mathbf{A}\mathbf{Y}_T = \begin{pmatrix} 4{,}10 \\ 2{,}90 \end{pmatrix}$, $\hat{\mathbf{Y}}_{T+2} = \mathbf{c} + \mathbf{A}\hat{\mathbf{Y}}_{T+1} = \begin{pmatrix} 3{,}83 \\ 2{,}99 \end{pmatrix}$
  - prognozele se îndreaptă spre medie, $\boldsymbol{\mu} = (3{,}50; 2{,}75)'$ (secțiunea următoare)

Exemplul rezolvat, simulat



⊡ Stînga: 200 de perioade din modelul VAR(1) de pe slide-ul anterior, cu cele două medii; dreapta: răspunsurile lui y_1 și y_2 la un șoc unitar în ε_1 la $h = 0$, coloanele lui $\mathbf{A}^h$

TSA_ch6_var_stability

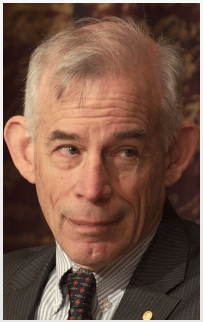
Interpretarea VAR(1) simulat

- Cele două serii oscilează în jurul mediilor și evoluează împreună: corelația de eșantion este 0,75
  - două surse ale evoluției comune: șocurile corelate (Corr $= 0{,}5$) și efectele încrucișate a_{12}, a_{21}
- Un șoc unitar în y_1 ajunge la y_2 după o perioadă ($a_{21} = 0{,}3$), apoi ambele se sting
  - stingerea este guvernată de cea mai mare valoare proprie a lui $\mathbf{A}$, 0,7: $(\mathbf{A}^h)_{11} = 0{,}6 \cdot 0{,}7^h + 0{,}4 \cdot 0{,}2^h$, deci după 5 perioade rămîne în y_1 0,10 din șoc

Numărul de parametri

- Un VAR(p) cu K variabile și termen liber: $K + pK^2$ coeficienți, plus $K(K+1)/2$ în $\mathbf{\Sigma}$
  - fiecare ecuație are $1 + pK$ regresori
  - VAR-ul românesc: $K = 3$, $p = 2$: $3 + 2 \cdot 9 = 21$ de coeficienți estimați pe 84 de trimestre
- **Blestemul dimensionalității**: $K = 5$, $p = 4$: $5 + 4 \cdot 25 = 105$ de coeficienți
  - cu 25 de ani de date trimestriale (100 de observații) fiecare ecuație are 21 de regresori și 79 de grade de libertate reziduale
- De aici VAR-uri mici (3–6 variabile), puține laguri și estimări cu erori standard mari; coeficienții individuali se interpretează rar

Christopher Sims și „Macroeconomics and Reality”



Christopher A. Sims, Premiul Nobel pentru economie 2011

Foto: Holger Motzkau (2011); CC BY-SA 3.0; Wikimedia Commons

- Sims (1980): marile modele macroeconomice din anii 1970 impuneau restricții „incredibile”
  - ce variabile sînt exogene, ce laguri sînt nule
  - propunerea lui: un VAR nerestricționat, fără restricții impuse a priori
  - apoi doar ipotezele minime necesare pentru interpretarea șocurilor
- VAR-ul a devenit instrumentul standard al băncilor centrale pentru prognoză și pentru măsurarea efectelor politicii monetare
- Premiul Nobel 2011, împreună cu Thomas Sargent, „pentru cercetarea empirică a cauzei și efectului în macroeconomie”

Recapitulare: modelul VAR(p)

- $\mathbf{Y}_t = \mathbf{c} + \sum_{j=1}^{p} \mathbf{A}_j \mathbf{Y}_{t-j} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$, $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ zgomot alb cu covarianța $\boldsymbol{\Sigma}$
- a_{jk}: efectul lagului variabilei k în ecuația variabilei j
- $K + pK^2$ coeficienți: păstrăm K și p mici
- Sims (1980): VAR-ul ca alternativă la restricțiile „incredibile"

Stabilitatea unui VAR(1)

- Substituim repetat: $\mathbf{Y}_t = \mathbf{c} + \mathbf{A}\mathbf{c} + \cdots + \mathbf{A}^{h-1}\mathbf{c} + \mathbf{A}^h\mathbf{Y}_{t-h} + \sum_{j=0}^{h-1} \mathbf{A}^j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}$
  - trecutul este uitat doar dacă $\mathbf{A}^h \to \mathbf{0}$
- **Condiția de stabilitate**: toate valorile proprii λ ale lui $\mathbf{A}$ au $|\lambda| < 1$
  - valorile proprii: rădăcinile ecuației $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$; pentru $K = 2$: $\lambda^2 - \text{tr}(\mathbf{A})\lambda + \det(\mathbf{A}) = 0$
  - $\mathbf{I}$: matricea identitate; $\text{tr}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22}$: urma; $\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$: determinantul; $|\lambda|$: modulul (valorile proprii pot fi complexe)
  - un VAR stabil este slab staționar (dacă a pornit demult); aceasta este versiunea multivariată a condiției $|\phi| < 1$ (Capitolul 2)
- **Exemplu**: $\text{tr}(\mathbf{A}) = 0{,}9$, $\det(\mathbf{A}) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 - 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}14$: $\lambda^2 - 0{,}9\lambda + 0{,}14 = 0$
  - $\lambda = (0{,}9 \pm 0{,}5)/2$: $\lambda_1 = 0{,}7$, $\lambda_2 = 0{,}2$; ambele în interiorul cercului unitate: stabil

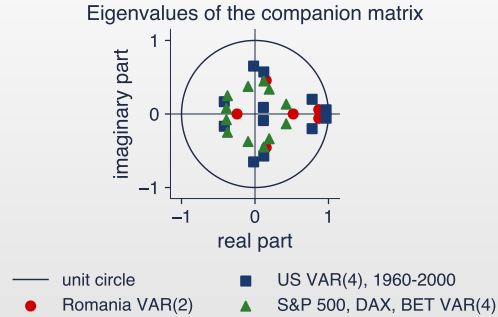
Media și varianța unui VAR(1) stabil

- **Media**: luăm media în ambii membri, $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{c} + \mathbf{A}\boldsymbol{\mu}$, deci $\boldsymbol{\mu} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{c}$
  - exemplu: $\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}2 \\ -0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix}$, determinantul 0,24; $\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{0{,}24}\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}50 \\ 2{,}75 \end{pmatrix}$
- **Varianța**: $\boldsymbol{\Gamma}(0) = \mathbf{A}\boldsymbol{\Gamma}(0)\mathbf{A}' + \boldsymbol{\Sigma}$ (o ecuație Lyapunov discretă); $\boldsymbol{\Gamma}(h) = \mathbf{A}^h\boldsymbol{\Gamma}(0)$
  - se rezolvă prin $\operatorname{vec}\boldsymbol{\Gamma}(0) = (\mathbf{I} - \mathbf{A} \otimes \mathbf{A})^{-1}\operatorname{vec}\boldsymbol{\Sigma}$; exemplu: $\boldsymbol{\Gamma}(0) = \begin{pmatrix} 1{,}75 & 1{,}22 \\ 1{,}22 & 1{,}73 \end{pmatrix}$
  - $\otimes$: produsul Kronecker; vec așază coloanele unei matrice una sub alta
- Varianțele 1,75 și 1,73 depășesc varianța șocurilor (1): dinamica acumulează șocurile trecute

Forma companion a unui VAR(p)

- Grupăm p vectori consecutivi: $\boldsymbol{\xi}_t = (\mathbf{Y}_t', \mathbf{Y}_{t-1}', \ldots, \mathbf{Y}_{t-p+1}')'$, de dimensiune Kp
  - atunci $\boldsymbol{\xi}_t = \boldsymbol{\nu} + \mathbf{F}\boldsymbol{\xi}_{t-1} + \mathbf{v}_t$: orice VAR($p$) este un VAR(1) în $\boldsymbol{\xi}_t$
  - $\boldsymbol{\nu}$: $\mathbf{c}$ urmat de zerouri; $\mathbf{v}_t$: ε_t urmat de zerouri; $\mathbf{F}$: matricea companion, $Kp \times Kp$
- Pentru $p = 2$: $\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_t \\ \mathbf{Y}_{t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{I}_K & \mathbf{0} \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{t-1} \\ \mathbf{Y}_{t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$
  - al doilea bloc de rînduri este identitatea $\mathbf{Y}_{t-1} = \mathbf{Y}_{t-1}$
- **Stabilitatea unui VAR(p)**: toate cele Kp valori proprii ale matricei companion $\mathbf{F}$ au modulul sub 1
  - echivalent: toate rădăcinile z (numere complexe) ale ecuației $\det(\mathbf{I}_K - \mathbf{A}_1 z - \cdots - \mathbf{A}_p z^p) = 0$ sînt în afara cercului unitate
  - valorile proprii ale lui $\mathbf{A}_1$ singure nu spun nimic despre stabilitatea unui VAR(2)

Valorile proprii a trei VAR-uri estimate



- Matricele companion: VAR(2) românesc (creșterea PIB-ului, inflația, ROBOR 3M; 6 valori proprii), VAR(4) american din secțiunea 10 (12), VAR(4) zilnic pentru S&P 500, DAX și BET (12)

TSA_ch6_var_stability

Interpretarea valorilor proprii

- Toate cele trei VAR-uri sînt stabile; cele mai mari module: România 0,869, SUA 0,969, piețe 0,464
  - cel mai mare modul stabilește viteza cu care se sting șocurile: $0{,}97^{20} \approx 0{,}54$ după 20 de trimestre, $0{,}46^2 \approx 0{,}21$ după 2 zile
- VAR-urile macroeconomice au valori proprii apropiate de 1 (inflație și dobînzi persistente); VAR-urile de randamente au valori mici
  - perechile complexe produc oscilații amortizate în răspunsuri
- O valoare proprie foarte apropiată de 1 semnalează o rădăcină unitară, poate cointegrare: Capitolul 7

Reprezentarea de medie mobilă

- Un VAR stabil se poate scrie ca o medie mobilă infinită a șocurilor (Wold, Capitolul 1):
  - $\mathbf{Y}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon}_t + \boldsymbol{\Phi}_1\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}_2\boldsymbol{\varepsilon}_{t-2} + \cdots = \boldsymbol{\mu} + \sum_{h=0}^{\infty} \boldsymbol{\Phi}_h\boldsymbol{\varepsilon}_{t-h}$, $\boldsymbol{\Phi}_0 = \mathbf{I}$
  - $\boldsymbol{\Phi}_h$: matricea $K \times K$ care ponderează șocul de acum h perioade
- VAR(1): $\boldsymbol{\Phi}_h = \mathbf{A}^h$; VAR($p$): $\boldsymbol{\Phi}_h = \sum_{j=1}^{\min(h,p)} \mathbf{A}_j\boldsymbol{\Phi}_{h-j}$
  - exemplu: $\boldsymbol{\Phi}_2 = \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 0{,}31 & 0{,}18 \\ 0{,}27 & 0{,}22 \end{pmatrix}$
- Elementul (j,k) al lui $\boldsymbol{\Phi}_h$: efectul asupra lui $Y_{j,t+h}$ al unei modificări unitare a lui ε_{kt}, celelalte șocuri fiind fixe
  - acestea sînt **răspunsurile la impuls** (secțiunea 7); tot din ele obținem erorile de prognoză (secțiunile 8–9)

Recapitulare: staționaritate și forma companion

- VAR(1): stabil dacă toate valorile proprii ale lui $\mathbf{A}$ au $|\lambda| < 1$; VAR(p): aceeași condiție pentru matricea companion
- Media $\boldsymbol{\mu} = (\mathbf{I} - \mathbf{A_1} - \cdots - \mathbf{A}_p)^{-1}\mathbf{c}$; prognozele converg spre ea
- Forma de medie mobilă $\mathbf{Y}_t = \boldsymbol{\mu} + \sum_h \boldsymbol{\Phi}_h \boldsymbol{\varepsilon}_{t-h}$: baza răspunsurilor la impuls
- VAR-urile macroeconomice estimate au valori proprii apropiate de 1

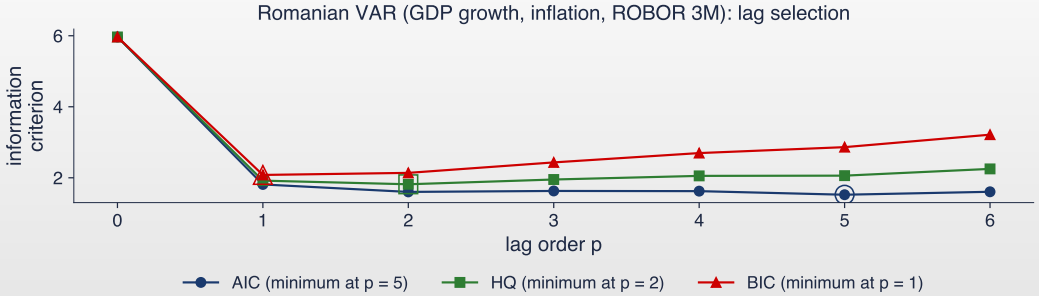
Estimarea prin OLS, ecuație cu ecuație

- Fiecare ecuație este o regresie liniară a lui Y_{jt} pe o constantă și pe $\mathbf{Y}_{t-1}, \ldots, \mathbf{Y}_{t-p}$
  - aceiași $1 + Kp$ regresori în fiecare ecuație; OLS (ordinary least squares, metoda celor mai mici pătrate) pe fiecare ecuație separat
- **OLS este suficient**: cu regresori identici, estimarea sistemului (GLS, generalized least squares, metoda celor mai mici pătrate generalizate, pe toate ecuațiile) dă exact estimările OLS
  - corelația șocurilor nu îmbunătățește estimările; cu erori Normale, OLS este și estimatorul de verosimilitate maximă
- **Covarianța șocurilor**: $\hat{\mathbf{\Sigma}} = \frac{1}{T-Kp-1} \sum_t \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_t'$, din reziduurile tuturor ecuațiilor
  - $\hat{\varepsilon}_t$: vectorul reziduurilor la data t; $T - Kp - 1$: gradele de libertate reziduale ale fiecărei ecuații
  - staționaritatea contează: pentru serii staționare testele t și F obișnuite sînt valide în eșantioane mari

Alegerea lui p: criterii informaționale

- Estimăm VAR(p) pentru $p = 0, \ldots, p_{\max}$ pe **același eșantion**; $\tilde{\mathbf{\Sigma}}(p)$: covarianța reziduurilor împărțită la T
  - AIC (Akaike) $= \ln \det \tilde{\mathbf{\Sigma}}(p) + \frac{2}{T} pK^2$ Akaike (1974)
  - BIC (Schwarz) $= \ln \det \tilde{\mathbf{\Sigma}}(p) + \frac{\ln T}{T} pK^2$ Schwarz (1978)
  - HQ (Hannan–Quinn) $= \ln \det \tilde{\mathbf{\Sigma}}(p) + \frac{2 \ln \ln T}{T} pK^2$ Hannan și Quinn (1979)
  - $\det \tilde{\mathbf{\Sigma}}(p)$: o varianță generalizată a reziduurilor; pK^2: numărul coeficienților lagurilor; $p_{\max}$: ordinul maxim încercat
- Primul termen: calitatea ajustării („volumul" reziduurilor mai mic); al doilea: o penalizare pe coeficient; alegem p cu cea mai mică valoare
  - penalizările: AIC $<$ HQ $<$ BIC (pentru $T \geq 16$): BIC alege cel mai mic p, AIC cel mai mare
  - BIC și HQ sînt consistente (găsesc p adevărat cînd $T \to \infty$); AIC tinde să supraajusteze, dar prognozează adesea bine

VAR-ul românesc: alegerea lui p



Creșterea PIB-ului, inflația anuală și ROBOR 3M, T1 2005–T2 2026; VAR(p) pentru $p = 0, \ldots, 6$ pe eșantionul comun de 80 de trimestre; cercurile marchează minimele

TSA_ch6_estimation_diagnostics

Interpretarea alegerii numărului de laguri

- BIC alege $p = 1$, HQ $p = 2$, AIC $p = 5$: cele trei criterii nu coincid, cum se întîmplă adesea în eșantioane scurte
  - AIC: 1,812 pentru $p = 1$, 1,603 pentru $p = 2$, 1,523 pentru $p = 5$: o curbă plată după $p = 2$
- $p = 5$ ar însemna $3 + 5 \cdot 9 = 48$ de coeficienți pentru circa 80 de trimestre
  - alegem $p = 2$ (HQ), apoi verificăm dacă reziduurile sînt zgomot alb; dacă nu, adăugăm laguri
- O regulă practică: pornim de la criterii, dar nu ne oprim la ele

VAR(2) românesc estimat

Regresorul	ecuația g_t	ecuația π_t	ecuația i_t
termen liber	1,09 (2,1)	0,49 (2,0)	−0,11 (−0,6)
g_{t-1}	0,01 (0,1)	0,01 (0,1)	0,14 (3,5)
π_{t-1}	0,53 (2,3)	1,26 (11,7)	0,24 (2,8)
i_{t-1}	−0,73 (−2,7)	0,16 (1,2)	1,04 (10,2)
g_{t-2}	−0,08 (−0,7)	−0,03 (−0,5)	0,07 (1,7)
π_{t-2}	−0,41 (−1,7)	−0,35 (−3,1)	−0,17 (−1,9)
i_{t-2}	0,54 (2,0)	−0,16 (−1,3)	−0,12 (−1,2)
R^2	0,16	0,90	0,93

- OLS pe 84 de trimestre (T3 2005–T2 2026); statisticile t între paranteze; 21 de coeficienți
- Abaterile standard ale reziduurilor: 2,32 (g), 1,09 (π), 0,87 (i); corelația reziduurilor lui π și i: 0,25

Interpretarea coeficienților

- Inflația este foarte persistentă: $1{,}26\,\pi_{t-1} - 0{,}35\,\pi_{t-2}$; la fel ROBOR: $1{,}04\,i_{t-1}$
  - R^2 de 0,90 și 0,93: cea mai mare parte provine din propriul trecut al seriilor
- În ecuația ROBOR contează creșterea PIB-ului din trecut ($t = 3{,}5$) și inflația din trecut ($t = 2{,}8$): dobînda urmează economia
  - Creșterea PIB-ului este greu de prognozat: $R^2 = 0{,}16$
- Coeficienții individuali ai unor laguri corelate sînt instabili (de exemplu i_{t-1} și i_{t-2} cu semne opuse în ecuația lui g): interpretăm sistemul prin teste, răspunsuri și prognoze, nu coeficient cu coeficient

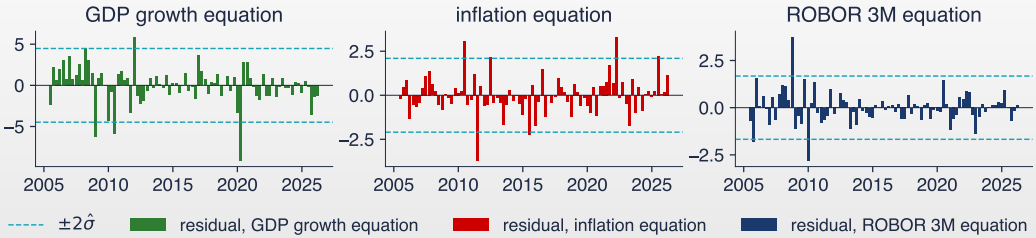
Recapitulare: estimare și alegerea numărului de laguri

- OLS ecuație cu ecuație este eficient: toate ecuațiile au aceiași regresori
- AIC, BIC, HQ: $\ln\det\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}(p)$ plus o penalizare; comparăm pe un eșantion comun
- BIC $\leq$ HQ $\leq$ AIC ca p ales; VAR-ul românesc: $p = 2$
- Interpretăm sistemul, nu coeficienții individuali

Verificarea reziduurilor: zgomot alb

- **Testul portmanteau multivariat** Hosking (1980)
  - H_0: nicio autocorelație și nicio corelație încrucișată a reziduurilor pînă la lagul h
  - $Q_h = T^2 \sum_{j=1}^{h} \frac{1}{T-j} \text{tr}(\hat{\mathbf{C}}_j' \hat{\mathbf{C}}_0^{-1} \hat{\mathbf{C}}_j \hat{\mathbf{C}}_0^{-1})$, $\hat{\mathbf{C}}_j = \frac{1}{T} \sum_t \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_t \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{t-j}'$: matricea de autocovarianță a reziduurilor la lagul j; tr: urma
  - în ipoteza H_0: χ^2 cu $K^2(h-p)$ grade de libertate; testul Ljung–Box multivariat (Capitolul 2); un p-value mic: reziduurile sînt încă autocorelate
- **Normalitatea**: un test Jarque–Bera multivariat Jarque și Bera (1980) pe reziduurile standardizate (asimetrie și kurtosis)
  - normalitatea nu este necesară pentru OLS; contează pentru intervale exacte și pentru eșantioane mici
- Dacă testul portmanteau respinge: adăugăm laguri, adăugăm o variabilă sau modelăm rupturile și valorile extreme (variabile dummy)
  - verificăm și stabilitatea (valorile proprii) și, pentru eșantioane lungi, stabilitatea parametrilor în timp

Reziduurile VAR(2) românesc



⊡ Reziduurile celor trei ecuații, T3 2005–T2 2026, cu ±2 abateri standard ale reziduurilor

TSA_ch6_estimation_diagnostics

Interpretarea reziduurilor

- Cele mai mari reziduuri: PIB $-9{,}1$ în T2 2020 (pandemia), ROBOR $+3{,}7$ în T4 2008 (criza de lichiditate din 2008), inflația $-3{,}7$ în T3 2011
  - kurtosis 6,5 (g) și 7,9 (i), față de 3 pentru distribuția Normală: Jarque–Bera 191 ($p < 0{,}001$)
- Portmanteau: $Q_8 = 76{,}7$ (54 de grade de libertate, $p = 0{,}023$); $Q_{12} = 105{,}3$ (90 de grade de libertate, $p = 0{,}130$)
  - la limită pentru 8 laguri, acceptabil pentru 12: rămîne o corelație pe termen scurt, în parte din cauza ratelor anuale ale inflației care se suprapun
- Consecință: estimările punctuale pot fi folosite, dar intervalele din secțiunile următoare se bazează pe aproximări pentru eșantioane mari; pentru răspunsuri folosim benzi bootstrap

Recapitulare: diagnosticarea reziduurilor

- Testul portmanteau: H_0 reziduuri zgomot alb, χ^2 cu $K^2(h-p)$ grade de libertate
- Normalitatea nu se verifică în datele macroeconomice: crizele produc valori extreme
- Remedii: mai multe laguri, mai multe variabile, dummy pentru trimestrele de criză

Cauzalitatea Granger: definiția



Clive Granger (1934–2009), Premiul Nobel pentru economie 2003

Foto: Olaf Storbeck (2008); CC BY-SA 2.0; Wikimedia Commons

- **Definiție** Granger (1969): x **cauzează în sens Granger** pe y
  - dacă trecutul lui x îmbunătățește prognoza lui y făcută din trecutul lui y (și al celorlalte variabile)
  - formal: MSE (mean squared error, eroarea pătratică medie) a prognozei optime pentru y_{t+1} este mai mică atunci cînd folosim $x_t, x_{t-1}, \ldots$
- O afirmație despre **predictibilitate**, nu despre cauză și efect
  - cauza vine înaintea efectului, dar „înainte" nu înseamnă „din cauza"
- Patru cazuri: nicio cauzalitate, $x \to y$, $y \to x$, feedback $x \leftrightarrow y$

Testarea cauzalității Granger într-un VAR

- Într-un VAR(p), x nu cauzează în sens Granger pe y dacă toți coeficienții lui $x_{t-1}, \ldots, x_{t-p}$ din ecuația lui y sînt zero
  - VAR(2) cu două variabile: H_0: $a_{12}^{(1)} = a_{12}^{(2)} = 0$ în $y_t = c + a_{11}^{(1)} y_{t-1} + a_{12}^{(1)} x_{t-1} + a_{11}^{(2)} y_{t-2} + a_{12}^{(2)} x_{t-2} + \varepsilon_t$
  - $a_{12}^{(j)}$: coeficientul lui x_{t-j} în ecuația lui y (indicele de sus este lagul)
- **Testul** F: $F = \dfrac{(RSS_R - RSS_U)/p}{RSS_U/(T - Kp - 1)} \sim F(p, T - Kp - 1)$ în ipoteza H_0
  - RSS_U: suma pătratelor reziduurilor din ecuația lui y; RSS_R: aceeași sumă fără lagurile lui x
  - un F mare (un p-value mic): eliminarea lagurilor lui x crește prea mult RSS, deci respingem H_0
- **Testul Wald**: $W = (\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}})'[\mathbf{R}\hat{\mathbf{V}}\mathbf{R}']^{-1}(\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \sim \chi^2(p)$; aici $W = pF$
  - $\hat{\boldsymbol{\beta}}$: coeficienții estimați ai ecuației lui y; $\mathbf{R}$ îi selectează pe cei testați; $\hat{\mathbf{V}}$: covarianța estimată a lui $\hat{\boldsymbol{\beta}}$; ambele versiuni cer variabile staționare

Exemplu rezolvat: este creșterea PIB-ului o cauză Granger pentru ROBOR?

- Ecuația lui i_t din VAR(2) românesc, $T = 84$, $K = 3$, $p = 2$
  - nerestricționat (cu g_{t-1}, g_{t-2}): $RSS_U = 58{,}27$; restricționat (fără ele): $RSS_R = 69{,}27$
- $F = \dfrac{(69{,}27 - 58{,}27)/2}{58{,}27/77} = \dfrac{5{,}498}{0{,}7568} = 7{,}26$
  - grade de libertate $(2, 84 - 6 - 1) = (2, 77)$; valoarea critică de 5%: 3,12; p-value-ul: 0,001
- **Decizia**: respingem H_0: creșterea PIB-ului din trecut ajută la prognoza ROBOR 3M, dat fiind trecutul inflației și al ROBOR
  - compatibil cu o bancă centrală care înăsprește politica atunci cînd economia crește repede

Cauzalitatea Granger în VAR(2) românesc

Cauza	Efectul	F	p
creșterea PIB	inflația	0,16	0,853
creșterea PIB	ROBOR 3M	7,26	0,001
inflația	creșterea PIB	2,94	0,059
inflația	ROBOR 3M	4,74	0,011
ROBOR 3M	creșterea PIB	4,02	0,022
ROBOR 3M	inflația	0,89	0,417

- Teste $F(2, 77)$ în VAR(2), T3 2005–T2 2026; valoarea critică de 5%: 3,12
- Semnificative la 5%: creșterea PIB → ROBOR, inflația → ROBOR, ROBOR → creșterea PIB

TSA_ch6_granger

Interpretarea testelor Granger

- Dobînda urmează economia: creșterea și inflația din trecut ajută la prognoza ROBOR
  - tiparul unei funcții de reacție (banca centrală răspunde la inflație și la activitate); testul singur nu poate demonstra că aceasta este regula BNR
- ROBOR nu cauzează inflația în sens Granger ($p = 0{,}417$): nicio dovadă că dobînzile din trecut îmbunătățesc prognoza inflației
  - aceasta nu înseamnă că politica monetară este ineficientă: efectul poate fi lent, mic față de zgomot sau deja anticipat
- ROBOR $\rightarrow$ creșterea PIB ($p = 0{,}022$): dobînzile mai mari preced o creștere mai slabă; în VAR-ul cu două variabile (PIB, ROBOR) p-value-ul este 0,063

Piețe: New York-ul precedă Frankfurtul și Bucureștiul



Sala de tranzacționare a Bursei din Frankfurt (DAX)

Foto: Ank Kumar (2015); CC BY-SA 4.0; Wikimedia Commons

Cauza	Efectul	F	p
S&P 500	DAX	94,6	$< 0{,}001$
S&P 500	BET	37,8	$< 0{,}001$
DAX	S&P 500	6,9	$< 0{,}001$
DAX	BET	3,2	0,012
BET	S&P 500	1,0	0,416
BET	DAX	2,6	0,032

- Randamente logaritmice zilnice, VAR(4) (ordinul din Diebold și Yilmaz (2012)), 6 429 de zile, 2000–2026; teste $F(4, \cdot)$; HQ ar alege $p = 2$, AIC $p = 8$
- Coeficientul S&P 500 de ieri în ecuația BET: 0,218 (SE 0,018); în ecuația DAX: 0,346

TSA_ch6_granger

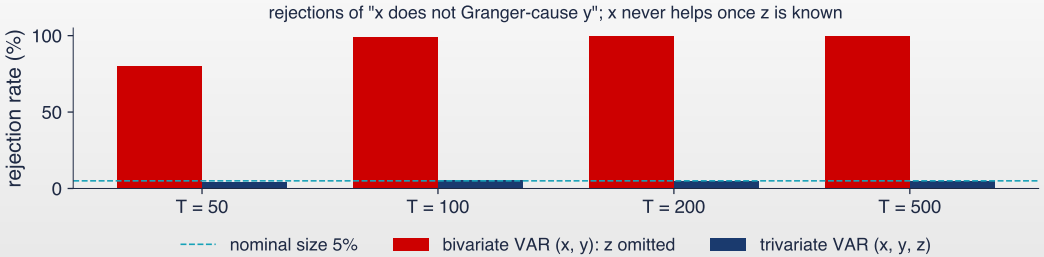
Interpretarea testelor pentru piețe

- Cauzalitate puternică, într-un singur sens, de la S&P 500 spre DAX și BET: un randament de 1% al S&P 500 ieri adaugă circa 0,218% la BET azi
  - BET nu cauzează S&P 500 în sens Granger ($p = 0{,}416$)
- Cauza: orele de închidere (tranzacționare nesincronă), nu o reacție lentă a pieței
  - New York tranzacționează și după închiderea Europei; randamentul S&P „de ieri" s-a produs parțial cînd Europa era închisă
  - pe date săptămînale efectul este mult mai slab (Seminarul 6, B2)
- Regularitatea nu aduce un profit sigur: ați cumpăra la deschiderea Bursei de la București, după ce prețurile s-au ajustat deja; cauzalitatea Granger în prețurile de închidere nu este o sursă de profit fără risc

Limitele cauzalității Granger: variabilele omise

- Cauzalitatea Granger depinde de setul de informații: adăugarea sau eliminarea unei variabile o poate crea sau distruge Lütkepohl (1982)
  - un factor comun z care afectează pe x mai devreme decît pe y îl face pe x să pară o cauză a lui y
- Simulare: $z_t = 0{,}5z_{t-1} + e_t$, $x_t = 0{,}8z_{t-1} + u_t$, $y_t = 0{,}8z_{t-2} + v_t$
  - e_t, u_t, v_t: zgomote albe independente, cu distribuția Normală standard
  - x nu apare niciodată în ecuația lui y; dar x_{t-1} este o măsură zgomotoasă a lui z_{t-2}, care determină pe y_t
- Exemplu: vînzările de înghețată cauzează înecurile în sens Granger într-un model cu două variabile; temperatura, factorul omis, le explică pe amîndouă

Cauzalitate Granger falsă din cauza unei variabile omise



- 1 000 de simulări pentru fiecare volum al eșantionului, cu sistemul de pe slide-ul anterior; testul F pentru „x nu cauzează y în sens Granger” la 5% într-un VAR(2), cu și fără z

TSA_ch6_granger

Interpretarea simulării

- Fără z, testul respinge în 80% din eșantioane pentru $T = 50$ și în 100% pentru $T = 200$: aproape mereu o „cauză”
  - mai multe date înrăutățesc situația: testul devine tot mai sigur de o concluzie greșită
- Cu z în VAR, rata de respingere este 4,3%–5,2%, apropiată de nivelul nominal de 5%
  - cauzalitatea Granger este o proprietate a sistemului ales, nu a lumii
- Exemplu românesc: inflația $\rightarrow$ creșterea PIB are p = 0,059 în VAR-ul cu trei variabile și 0,173 în cel cu două variabile

Limitele cauzalității Granger: cauzalitatea instantanee

- Testele Granger folosesc doar laguri; efectele din aceeași perioadă sînt ascunse în corelația șocurilor $\mathbf{\Sigma}$
  - **cauzalitate instantanee** între x și y: $\text{Cov}(\varepsilon_{xt}, \varepsilon_{yt}) \neq 0$; testată printr-un test Wald pe elementele din afara diagonalei lui $\mathbf{\Sigma}$
- Nu are **direcție**: datele nu pot spune dacă x l-a mișcat pe y sau y pe x în cursul trimestrului
  - România: șocurile ROBOR sînt corelate instantaneu cu celelalte ($p = 0{,}041$); corelația reziduurilor inflației și ROBOR este 0,25
- În datele trimestriale, multe efecte reale au loc în cursul trimestrului: un VAR în care nimic nu este semnificativ în sens Granger poate avea totuși legături puternice (secțiunea 7)

Limitele cauzalității Granger: trenduri, așteptări și sensul cuvîntului „cauză”

- **Variabile nestaționare**: pentru serii $I(1)$, testele F și Wald nu au distribuțiile obișnuite Sims, Stock și Watson (1990)
  - remedii: testăm pe diferențe (dacă nu există cointegrare) sau abordarea Toda–Yamamoto Toda și Yamamoto (1995): estimăm un VAR($p + d_{\max}$) în niveluri și testăm doar primele p laguri
  - $d_{\max}$: ordinul maxim de integrare al seriilor (de obicei 1); lagurile suplimentare se estimează, dar nu se testează
  - seriile cointegrate cer un VECM: Capitolul 7
- **Așteptările**: prețurile orientate spre viitor se mișcă înaintea evenimentelor pe care le anticipează
  - prețurile acțiunilor cauzează PIB-ul în sens Granger, iar prognozele meteo „cauzează” ploaia; niciuna nu este o cauză în sensul obișnuit
- Raportăm: „x ajută la prognoza lui y, date fiind aceste variabile și acest eșantion”; niciodată „x cauzează pe y”

Recapitulare: cauzalitatea Granger

- $x \to y$ (Granger): lagurile lui x îmbunătățesc prognoza lui y; test F sau Wald al restricțiilor nule
- România: creșterea PIB și inflația → ROBOR; piețe: S&P 500 → DAX, BET (fusurile orare)
- Capcane: variabile omise, efecte instantanee, nestaționaritate, așteptări
- Cauzalitatea Granger înseamnă predictibilitate, nu cauzalitate

Răspunsurile la impuls și necesitatea ortogonalizării

- **Funcția de răspuns la impuls** (IRF): traiectoria lui $Y_{j,t+h}$, $h = 0, 1, 2, \ldots$, după un șoc unic în variabila k la momentul t
  - din forma de medie mobilă: răspunsul la o modificare unitară a lui ε_{kt} este coloana k a lui $\mathbf{\Phi}_h$
- **Problema**: șocurile sînt corelate ($\mathbf{\Sigma}$ nu este diagonală)
  - „un șoc al inflației fără niciun șoc al ROBOR" este un experiment pe care datele îl arată rar: cele două șocuri vin de obicei împreună (corelația 0,25)
- **Soluția**: rescriem șocurile ca $\boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{P}\mathbf{u}_t$, cu $\mathbf{u}_t$ necorelate, de varianță unitară: $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{P}\mathbf{P}'$
  - **IRF ortogonalizată**: $\mathbf{\Theta}_h = \mathbf{\Phi}_h\mathbf{P}$; elementul (j, k): răspunsul lui Y_j la un șoc u_k de o abatere standard
  - $\mathbf{P}$: o matrice $K \times K$ care transformă șocurile necorelate $\mathbf{u}_t$ în șocurile observate $\boldsymbol{\varepsilon}_t$

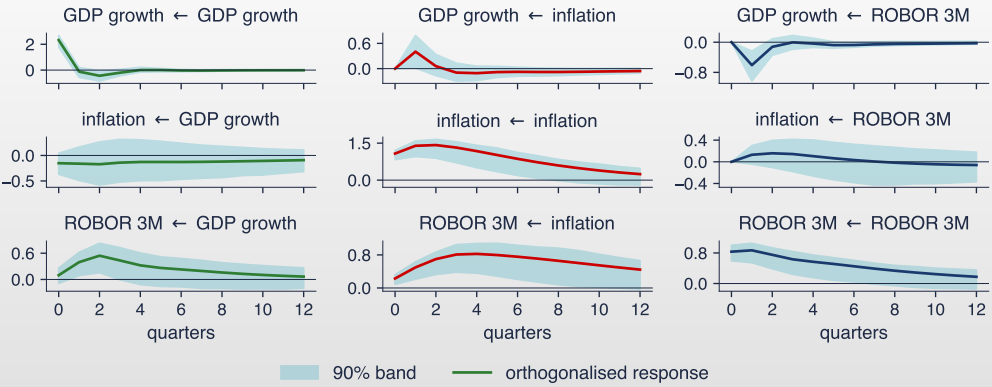
Descompunerea Cholesky și ordinea variabilelor

- **Cholesky**: matricea unică $\mathbf{P}$, inferior triunghiulară, cu diagonala pozitivă, pentru care $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{P}\mathbf{P}'$
  - exemplu: $\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1{,}000 & 0{,}000 \\ 0{,}500 & 0{,}866 \end{pmatrix}$, deoarece $p_{11} = 1$, $p_{21} = 0{,}5/1$, $p_{22} = \sqrt{1 - 0{,}25}$
- **Structura recursivă**: $\varepsilon_{1t} = p_{11}u_{1t}$, $\varepsilon_{2t} = p_{21}u_{1t} + p_{22}u_{2t}$
  - prima variabilă nu este mișcată de u_2 în aceeași perioadă; a doua reacționează imediat la ambele
  - întreaga corelație este atribuită variabilei așezate prima
- **Ordinea contează**: cu y_2 prima, $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}866 & 0{,}500 \\ 0{,}000 & 1{,}000 \end{pmatrix}$ (superior triunghiulară în ordinea inițială)
  - regula: ordonăm de la variabila cea mai lentă (nu reacționează în aceeași perioadă) la cea mai rapidă; România: creșterea PIB, inflația, ROBOR

Exemplu rezolvat: răspunsuri ortogonalizate

- VAR(1) din secțiunea 2, ordinea (y_1, y_2): $\mathbf{\Theta}_0 = \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1{,}000 & 0{,}000 \\ 0{,}500 & 0{,}866 \end{pmatrix}$
  - un șoc $u_1 = 1$ mișcă imediat y_1 cu 1 și y_2 cu 0,500; $u_2 = 1$ mișcă doar y_2, cu 0,866
- O perioadă mai tîrziu: $\mathbf{\Theta}_1 = \mathbf{AP} = \begin{pmatrix} 0{,}600 & 0{,}173 \\ 0{,}500 & 0{,}346 \end{pmatrix}$
  - y_2 răspunde la u_1 cu 0,500: $0{,}3 \cdot 1 + 0{,}4 \cdot 0{,}5$, efectul direct a_{21} plus propria persistență
- Răspunsul **cumulat** $\sum_{s \le h} \mathbf{\Theta}_s$ dă efectul asupra nivelului cînd VAR-ul este în rate de creștere

Răspunsurile la impuls ale VAR(2) românesc



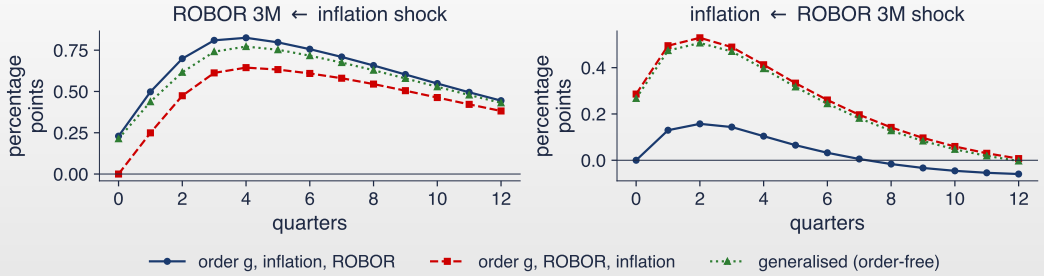
- Rîndul: variabila care răspunde; coloana: șocul de o abatere standard; ordinea Cholesky g, π, i; benzi de 90% dintr-un bootstrap pe reziduuri (500 de replicări) Kilian (1998)

TSA_ch6_irf_fevd

Interpretarea răspunsurilor românești

- Un șoc al inflației (1,08 puncte procentuale la impact) crește ROBOR imediat cu 0,23 pp și pînă la 0,82 pp după 4 trimestre; încă 0,44 pp după 3 ani
  - banda exclude zero la 11 din cele 13 orizonturi: cel mai clar rezultat al VAR-ului
- Un șoc ROBOR reduce creșterea PIB-ului cu 0,61 pp în trimestrul următor, apoi efectul dispare
  - dar inflația **crește** după un șoc ROBOR (pînă la 0,16 pp, nesemnificativ): „enigma prețurilor" Sims (1992)
  - un motiv probabil: dobînda crește atunci cînd banca centrală anticipează inflația; informația omisă din VAR (cursul de schimb, prețurile energiei) apare ca „șoc"
- Șocurile inflației sînt persistente: 1,18 pp după un an, 0,24 pp după trei

Efectul ordinii asupra răspunsurilor



- Același VAR(2), două ordini Cholesky (inflația înaintea ROBOR, ROBOR înaintea inflației) și răspunsurile generalizate din Pesaran și Shin (1998), care nu depind de ordine

TSA_ch6_irf_fevd

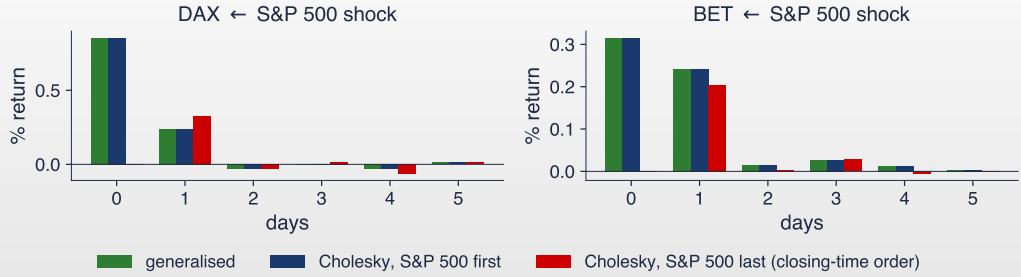
Interpretarea celor două ordini

- ROBOR după un șoc al inflației: maximul 0,82 pp (inflația prima), față de 0,64 pp (ROBOR primul)
  - cu ROBOR primul, răspunsul la impact este zero prin construcție
- Inflația după un șoc ROBOR: 0,16 pp, față de 0,53 pp, cu 0,29 pp deja la impact
  - a doua ordine atribuie partea comună a celor două șocuri (corelația 0,25) lui ROBOR, deci „enigma prețurilor" crește
- Ordinea este o ipoteză despre ce variabilă reacționează în cursul trimestrului; trebuie precizată și justificată, iar rezultatele care se schimbă odată cu ea sînt fragile

Răspunsuri la impuls generalizate

- **IRF generalizată** Pesaran și Shin (1998) (după Koop, Pesaran și Potter (1996)): aplicăm variabilei k un șoc de o abatere standard și lăsăm celelalte șocuri să se miște așa cum se mișcă de obicei odată cu ea
  - $\psi_k(h) = \mathbf{\Phi}_h \mathbf{\Sigma} \mathbf{e}_k / \sqrt{\sigma_{kk}}$; $\mathbf{e}_k$: coloana k a matricei identitate; σ_{kk}: varianța șocului k
- Proprietăți
  - nu este nevoie de nicio ordine; pentru variabila așezată prima coincide cu răspunsul Cholesky
  - șocurile nu sînt ortogonale: răspunsurile la șocuri diferite se suprapun și nu se pot aduna
- Util pentru piețe, unde nicio ordine nu este naturală; descrie evoluții comune tipice, nu șocuri structurale

Piețe: răspunsuri la un șoc S&P 500



- VAR(4) al randamentelor zilnice S&P 500, DAX și BET; șoc S&P de o abatere standard (1,21%); răspunsuri generalizate, Cholesky cu S&P 500 primul și Cholesky în ordinea orelor de închidere (BET, DAX, S&P 500)

TSA_ch6_market_spillovers

Interpretarea răspunsurilor piețelor

- Generalizate: DAX 0,85% în aceeași zi și 0,24% în ziua următoare; BET 0,32% și 0,24%
  - identice cu răspunsurile Cholesky cu S&P 500 primul, conform teoriei
- Cu S&P 500 ultimul (se închide ultimul), răspunsul din aceeași zi este zero prin ipoteză, iar cele din ziua următoare sînt 0,32% (DAX) și 0,20% (BET)
  - corelația din aceeași zi (0,63 cu DAX) este atribuită Europei în această ordine
- În ambele variante, efectul dispare după două zile: piețele încorporează rapid informația

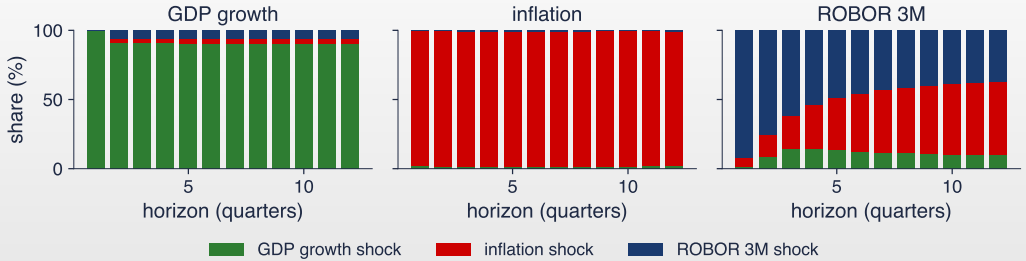
Recapitulare: funcții de răspuns la impuls

- IRF: coloanele lui $\mathbf{\Phi}_h$; ortogonalizată: $\mathbf{\Theta}_h = \mathbf{\Phi}_h\mathbf{P}$, $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{P}\mathbf{P}'$
- Cholesky = ordine recursivă; ordinea este o ipoteză și poate schimba rezultatele
- România: ROBOR crește ani la rînd după un șoc al inflației; apare „enigma prețurilor"
- IRF generalizată: nu depinde de ordine, dar nu este aditivă; benzi bootstrap pentru inferență

Descompunerea variației erorii de prognoză

- Eroarea de prognoză la h pași: $\mathbf{Y}_{t+h} - \hat{\mathbf{Y}}_{t+h|t} = \sum_{s=0}^{h-1} \mathbf{\Phi}_s \boldsymbol{\varepsilon}_{t+h-s} = \sum_{s=0}^{h-1} \mathbf{\Theta}_s \mathbf{u}_{t+h-s}$
  - șocurile ortogonale u_k sînt necorelate, deci varianța se împarte în K părți
- **FEVD**: $\omega_{jk}(h) = \dfrac{\sum_{s=0}^{h-1} \theta_{jk,s}^2}{\sum_{s=0}^{h-1} \sum_{m=1}^{K} \theta_{jm,s}^2}$, ponderea șocului k în varianța erorii de prognoză la h pași a lui Y_j
  - $\theta_{jk,s}$: elementul (j,k) al lui $\mathbf{\Theta}_s$; $\hat{\mathbf{Y}}_{t+h|t}$: prognoza lui $\mathbf{Y}_{t+h}$ făcută la momentul t
  - fiecare rînd însumează 100%; depinde de ordinea Cholesky; la $h = 1$ prima variabilă este explicată 100% de propriul șoc
- Exemplu (VAR(1) din secțiunea 2), $h = 2$: varianța erorii pentru y_2 este 1,37; șocul u_1 explică 36,5%
  - $(0{,}5^2 + 0{,}5^2)/1{,}37$: impactul $p_{21} = 0{,}5$ și răspunsul din perioada următoare 0,500

FEVD pentru VAR(2) românesc



- Ponderea fiecărui șoc ortogonal în varianța erorii de prognoză, orizonturi de 1–12 trimestre, ordinea Cholesky g, π, i

TSA_ch6_irf_fevd

Interpretarea descompunerii variației

- ROBOR: propriile șocuri explică 92% la un trimestru, dar doar 37% după trei ani; șocurile inflației explică 53%, cele ale PIB-ului 10%
  - pe termen lung, dobînda este determinată mai ales de inflație
- Inflația: 97% propriile șocuri chiar și după 12 trimestre; creșterea PIB: 90% propriile șocuri
  - în acest VAR mic, inflația este determinată de factori din afara modelului (energie, alimente, curs de schimb, taxe)
- FEVD și testele Granger sînt în acord: informația circulă de la inflație și producție spre dobîndă

Studiu de caz: Diebold și Yilmaz (2009, 2012)

- **Întrebarea**: cît din incertitudinea prognozei unei piețe provine din șocurile altor piețe și cum se schimbă aceasta în timp?
  - Diebold și Yilmaz (2009): FEVD Cholesky pentru randamentele săptămînale a 19 piețe bursiere; Diebold și Yilmaz (2012): FEVD generalizată, care elimină dependența de ordine
- **Indicele de spillover**: $S(H) = \frac{100}{K} \sum_{j \neq k} \tilde{\omega}_{jk}(H)$, ponderea medie a șocurilor celorlalte piețe
  - $\tilde{\omega}_{jk}$: FEVD generalizată rescalată astfel încît fiecare rînd să însumeze 1; specificația din Diebold și Yilmaz (2012): VAR(4), $H = 10$ zile, ferestre mobile de 200 de zile
- **Rezultatul**: spillover-ul crește puternic în crize; piețele devin mai conectate exact atunci cînd diversificarea este cea mai necesară
  - urmează: indicele pentru S&P 500, DAX și BET

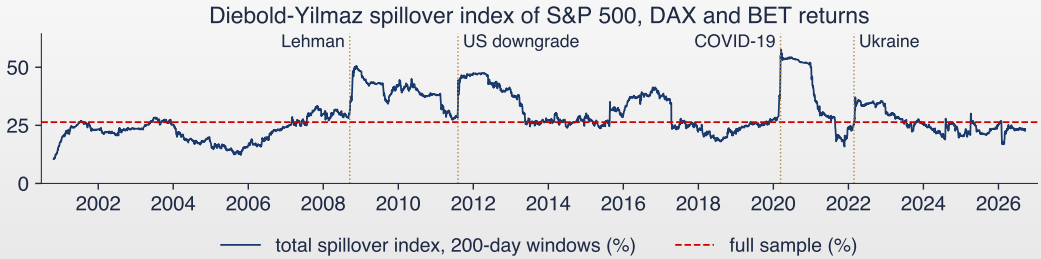
Tabelul de spillover: S&P 500, DAX, BET

Spre ← de la (%)	S&P 500	DAX	BET	**de la ceilalți**
S&P 500	69,2	27,1	3,7	30,8
DAX	28,2	66,4	5,4	33,6
BET	7,2	7,5	85,3	14,7
spre ceilalți	35,4	34,6	9,1	indice 26,4

- Rîndul j: ponderile variației erorii de prognoză la 10 zile a pieței j datorate șocurilor din fiecare piață (FEVD generalizată, întregul eșantion 2000–2026)
- S&P 500 primește 27,1% de la DAX, iar DAX 28,2% de la S&P 500; BET primește 14,7% și transmite doar 9,1%: o piață mică, receptoare netă

TSA_ch6_market_spillovers

Indicele de spillover în timp



- Indicele total de spillover pentru randamentele zilnice S&P 500, DAX și BET: FEVD generalizată la 10 zile dintr-un VAR(4), ferestre mobile de 200 de zile de tranzacționare (în medie 29,0%)

TSA_ch6_market_spillovers

Interpretarea indicelui de spillover

- De la 28% în 2007 la 47% în T4 2008 (după Lehman); maximul 57,5% pe 17 martie 2020, în prăbușirea din pandemia COVID-19
  - același tipar ca în Diebold și Yilmaz (2009): conectarea piețelor crește brusc în crize și scade lent
- Ultima valoare: 22,7%, sub indicele din întregul eșantion (26,4%)
  - salturile sînt în parte mecanice: o fereastră de 200 de zile care conține o prăbușire este dominată de ea timp de 200 de zile
- Pentru un portofoliu care conține BET: diversificarea între aceste piețe ajută cel mai puțin atunci cînd este cea mai necesară

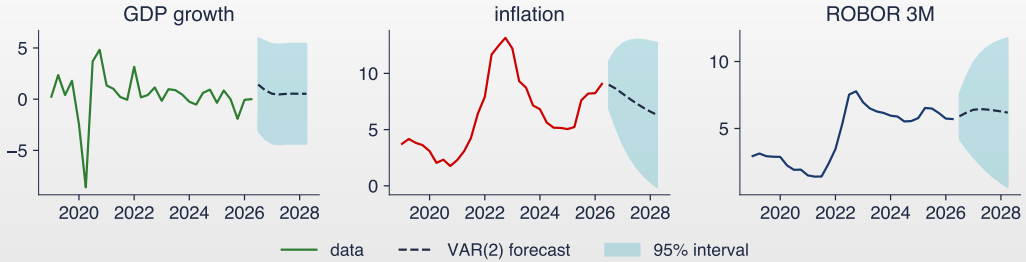
Recapitulare: descompunerea variației

- FEVD: ponderea fiecărui șoc ortogonal în varianța erorii de prognoză la h pași; rîndurile însumează 100%
- România: ROBOR este determinat de inflație pe orizonturi lungi; inflația mai ales de propriile șocuri
- Indicele de spillover Diebold–Yilmaz: ponderea totală din afara diagonalei a FEVD generalizate
- Spillover-ul dintre S&P 500, DAX și BET atinge maximele în crize (2008, 2020)

Prognozele VAR și incertitudinea lor

- **Prognozele punctuale** prin recurență: $\hat{\mathbf{Y}}_{T+h|T} = \mathbf{c} + \mathbf{A_1}\hat{\mathbf{Y}}_{T+h-1|T} + \cdots + \mathbf{A}_p\hat{\mathbf{Y}}_{T+h-p|T}$, cu $\hat{\mathbf{Y}}_{T+j|T} = \mathbf{Y}_{T+j}$ pentru $j \leq 0$
  - pentru un VAR stabil ele converg spre media $\boldsymbol{\mu}$ cînd h crește
- **Covariația erorii**: $\boldsymbol{\Sigma}(h) = \sum_{s=0}^{h-1} \boldsymbol{\Phi}_s \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\Phi}_s'$; crește cu h spre $\boldsymbol{\Gamma}(0)$
  - intervalul de 95% pentru Y_j: $\hat{Y}_{j,T+h|T} \pm 1{,}96\sqrt{\sigma_{jj}(h)}$, $\sigma_{jj}(h)$: elementul (j,j) al lui $\boldsymbol{\Sigma}(h)$ (șocuri Normale; incertitudinea parametrilor este ignorată)
  - exemplu (secțiunea 2): $\boldsymbol{\Sigma}(2) = \boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}'$, cu variațele 1,39 și 1,37
- Aceeași logică precum prognozele ARMA din Capitolul 2, cu matrice în locul numerelor

VAR(2) românesc: prognoze pe doi ani



- Date pînă în T2 2026; prognoze pentru T3 2026–T2 2028, cu intervale de 95%

TSA_ch6_forecasting

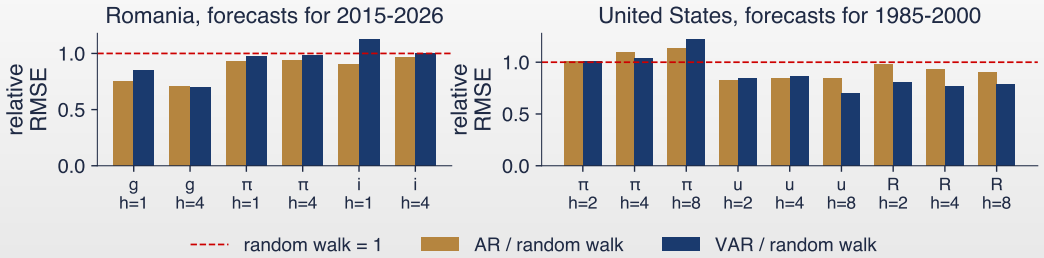
Interpretarea prognozelor

- Inflația: de la 9,1% în T2 2026 la 7,7% după un an și 6,3% după doi (95%: $[-0{,}1; 12{,}7]$)
  - prognozele se îndreaptă spre media VAR-ului (inflația 4,8%, ROBOR 4,8%), lent, deoarece cea mai mare valoare proprie este 0,869
- ROBOR: 6,4% după un an, 6,2% după doi; creșterea PIB: 0,5% pe trimestru, cu intervalul $[-4{,}4; 5{,}3]$
  - intervalul PIB-ului este larg pentru că valorile extreme din 2009 și 2020 măresc $\hat{\sigma}_g$
- O prognoză mecanică: nu știe nimic despre buget, prețurile energiei sau deciziile BNR; valoarea ei este aceea de reper transparent

Evaluarea corectă a prognozelor VAR

- **Evaluarea pseudo în afara eșantionului** (pseudo out-of-sample): reestimăm doar pe datele pînă la t, prognozăm $t + h$, avansăm t (fereastră care crește)
  - nu evaluăm niciodată pe datele folosite la estimare (Capitolul 0)
- **Metode de referință**: mersul aleator (nicio schimbare) și un AR(p) univariat pentru fiecare variabilă, p după AIC
  - întrebarea nu este „este VAR-ul bun?", ci „adaugă ceva celelalte variabile la propriul trecut al seriei?"
- Măsuri: RMSE relativ la mersul aleator (sub 1: mai bun); testul Diebold–Mariano Diebold și Mariano (1995) pentru acuratețe egală
  - statistica DM: media diferenței erorilor pătratice împărțită la eroarea ei standard; aproximativ $N(0, 1)$ în ipoteza H_0

VAR față de metodele univariate de referință



- RMSE relativ (model / mers aleator). Stînga: România, 46 de prognoze pe orizont, originile T4 2014–T1 2026; dreapta: VAR-ul american din secțiunea 10, prognoze pentru T1 1985–T4 2000, perioada de evaluare din Stock și Watson (2001)

TSA_ch6_forecasting

Interpretarea comparației prognozelor

- România, orizontul de un trimestru: VAR-ul este mai puțin precis decît AR pentru creșterea PIB-ului (0,85 față de 0,75; DM = 2,59, p = 0,010) și nu este mai bun pentru inflație sau ROBOR
  - 21 de coeficienți pe 38–84 de trimestre: erorile de estimare anulează informația adusă de celelalte variabile
- Statele Unite, orizontul de 8 trimestre: VAR-ul este mai precis decît AR pentru șomaj (0,70 față de 0,85) și pentru dobînda federală (0,79 față de 0,90)
  - pentru inflație, niciun model nu este mai precis decît mersul aleator (1,22) la acest orizont, în această perioadă
- VAR-urile ajută cînd eșantionul este lung și legăturile sînt puternice; în eșantioane scurte și zgomotoase, un AR simplu este greu de depășit

Recapitulare: prognoza cu un VAR

- Prognoze punctuale recursive; covarianța erorii $\sum_s \mathbf{\Phi}_s \mathbf{\Sigma} \mathbf{\Phi}_s'$
- Evaluăm în afara eșantionului, față de mersul aleator și de modele AR univariate
- România: niciun cîștig din VAR; SUA 1985–2000: cîștiguri pentru șomaj și dobîndă

De la forma redusă la VAR-ul structural

- **VAR structural** (SVAR): $\mathbf{B}_0\mathbf{Y}_t = \mathbf{d} + \mathbf{B}_1\mathbf{Y}_{t-1} + \cdots + \mathbf{B}_p\mathbf{Y}_{t-p} + \mathbf{u}_t$, $\mathbf{u}_t$ **șocuri structurale** necorelate
  - **d**: termenii liberi; $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_p$: coeficienții structurali ai lagurilor; $\mathbf{B}_0$: efectele contemporane (de exemplu, dobînda de politică monetară reacționează la inflația din acest trimestru)
  - înmulțind cu $\mathbf{B}_0^{-1}$ obținem forma redusă, cu $\varepsilon_t = \mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{u}_t$
- **Identificarea**: $\mathbf{\Sigma}$ are $K(K+1)/2$ elemente distincte, $\mathbf{B}_0^{-1}$ are K^2; avem nevoie de $K(K-1)/2$ restricții
  - Cholesky: $\mathbf{B}_0^{-1} = \mathbf{P}$ inferior triunghiulară: exact $K(K-1)/2$ zerouri; SVAR-ul recursiv din Sims (1980)
  - alte scheme: restricții pe termen lung, restricții de semn, instrumente externe (dincolo de acest curs)
- Datele identifică forma redusă; interpretarea structurală se bazează întotdeauna pe ipoteze care trebuie argumentate economic

Studiu de caz: Stock și Watson (2001)

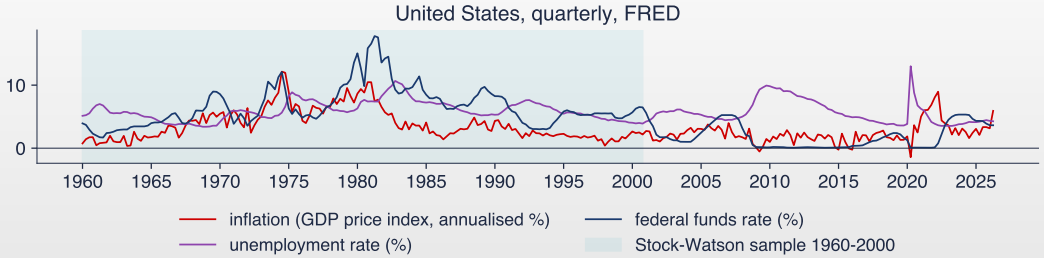


Clădirea Eccles, Washington: Consiliul Rezervei Federale

Foto: Federal Reserve (2011); public domain; Wikimedia Commons

- Stock și Watson (2001): „Vector autoregressions", o sinteză a metodei, folosită pe scară largă
  - trei variabile: inflația π_t, șomajul u_t, dobînda federală R_t
  - $\pi_t = 400 \ln(P_t/P_{t-1})$, P_t: indicele de preț al PIB; factorul 400 anualizează, în %
  - trimestrial, T1 1960–T4 2000, VAR(4), ordinea Cholesky π, u, R
- Patru sarcini: descrierea datelor, prognoza, inferența structurală, analiza politicilor
  - verdictul lor: VAR-urile sînt bune la primele două; ultimele două depind de ipotezele de identificare
- Îl reestimăm cu datele FRED de azi (seriile GDPCTPI, UNRATE, FEDFUNDS): cifrele diferă puțin de cele publicate, deoarece datele au fost revizuite

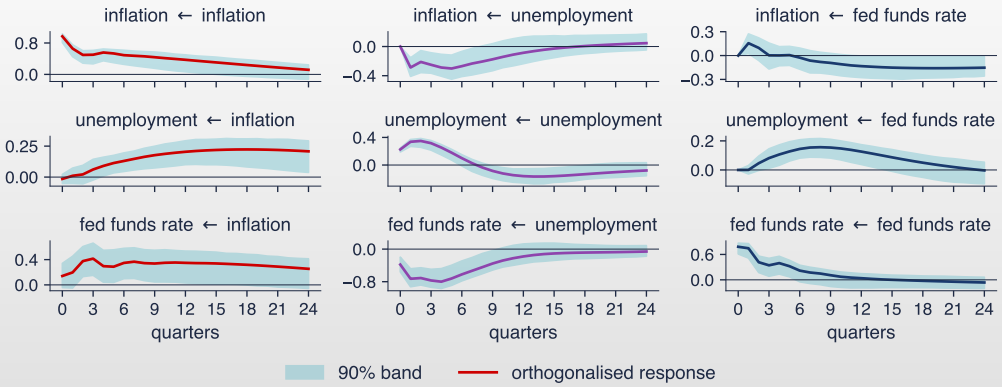
Cele trei serii americane



- Trimestrial, T1 1960–T2 2026 (FRED); zona colorată: eșantionul din Stock și Watson (2001), 164 de trimestre

TSA_ch6_stock_watson

VAR-ul Stock–Watson: răspunsuri la impuls



- VAR(4), T1 1960–T4 2000, 39 de coeficienți; ordinea Cholesky inflație, șomaj, dobînda federală; 24 de trimestre; benzi bootstrap de 90%

TSA_ch6_stock_watson

Interpretarea VAR-ului Stock–Watson

- Un șoc monetar (+0,78 pp în dobînda federală) crește șomajul cu pînă la 0,16 pp după 8 trimestre
  - inflația crește întîi (0,16 pp, o enigmă a prețurilor), apoi scade lent (−0,13 pp după 3 ani)
- Testele Granger: șomajul → inflația ($p = 0{,}036$), inflația și șomajul → dobînda federală ($p < 0{,}001$, $< 0{,}001$), dobînda federală → inflația nesemnificativ ($p = 0{,}402$)
  - FEVD după 12 trimestre: șocurile monetare explică 19% din șomaj și 2% din inflație
- Pe eșantionul extins 1960–T2 2026 ($T = 262$) răspunsul șomajului are semnul greșit în primele trimestre (−0,13 pp): dobînzile zero de după 2008 și pandemia schimbă sistemul

Moștenirea modelului VAR



Christopher Sims susținînd prelegerea Nobel, Stockholm, 8 decembrie 2011

Foto: Holger Motzkau (2011); CC BY-SA 3.0; Wikimedia Commons

- Băncile centrale folosesc VAR-uri pentru prognoze și scenarii de politică
  - și modelele derivate din ele: VAR-uri bayesiene, modele DSGE comparate cu VAR-uri
- Enigma prețurilor Sims (1992)
  - a dus la adăugarea prețurilor materiilor prime și a așteptărilor în VAR-urile monetare
- Variabilele nestaționare care evoluează împreună cer forma cu corecția erorii
  - Capitolul 7: cointegrare și VECM Engle și Granger (1987)

Recapitulare: VAR-uri structurale

- SVAR: $\boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{u}_t$; $K(K-1)/2$ restricții identifică șocurile structurale
- Cholesky este cea mai simplă identificare (recursivă)
- Stock și Watson (2001): un șoc monetar crește șomajul; inflația reacționează lent
- Rezultatele depind de eșantion și de identificare

Contribuția posibilă a AI

- **Cod**: o primă versiune a unui script care descarcă mai multe serii, le aliniază datele, alege p și estimează un VAR
- **Explicații**: o a doua explicație a descompunerii Cholesky sau a unui tabel FEVD
- **Explorare**: teste Granger și indici de spillover pentru multe perechi de piețe sau de țări din UE deodată
- Exemplu de prompt
  - `Write Python code that builds a quarterly data set for Romania (real GDP growth from Eurostat namq_10_gdp, 12-month HICP inflation from prc_hicp_minr, ROBOR 3M from irt_st_m), chooses the VAR lag order by AIC, BIC and HQ, checks stability and residuals, runs Granger tests and plots orthogonalised impulse responses with bootstrap bands.`

Verificări necesare

- Datele calendaristice: serii aliniate pe aceleași trimestre, fără valori propagate înainte (forward fill) sau suprapuse, care creează precedențe false
- Staționaritatea fiecărei variabile (Capitolul 3) înaintea testelor Granger; pentru variabile $I(1)$: diferențe, Toda–Yamamoto sau un VECM
- Stabilitatea din matricea companion, nu doar din $\mathbf{A}_1$
- Ordinea Cholesky folosită și justificarea ei; aceleași rezultate cu altă ordine sau cu răspunsuri generalizate
- Că „cauzează în sens Granger" nu este raportat niciodată drept „cauzează"
- Fiecare referință citată: trebuie să existe; verificați DOI-ul

Idei de reținut

- Un VAR(p) regresează fiecare variabilă pe trecutul tuturor; OLS ecuație cu ecuație; puține variabile și laguri
- Stabilitatea: toate valorile proprii ale matricei companion în interiorul cercului unitate; atunci există o medie și o formă de medie mobilă
- Alegem p cu AIC, BIC, HQ, apoi verificăm reziduurile cu testul portmanteau
- Cauzalitatea Granger = predictibilitate suplimentară, relativă la variabilele alese
- IRF și FEVD cer șocuri ortogonale: ordinea Cholesky este o ipoteză de identificare
- Prognozele VAR trebuie să fie mai precise, în afara eșantionului, decît modelele AR și mersul aleator; adesea nu sînt

Formule de reținut

Mărimea	**Formula**
VAR(p)	$\mathbf{Y}_t = \mathbf{c} + \mathbf{A_1}\mathbf{Y}_{t-\mathbf{1}} + \cdots + \mathbf{A}_p\mathbf{Y}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad E[\boldsymbol{\varepsilon}_t\boldsymbol{\varepsilon}_t'] = \boldsymbol{\Sigma}$
Stabilitate, medie	$\lvert\lambda_i(\mathbf{F})\rvert < 1; \quad \boldsymbol{\mu} = (\mathbf{I} - \mathbf{A_1} - \cdots - \mathbf{A}_p)^{-\mathbf{1}}\mathbf{c}$
Criterii	$\ln\det\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}(p) + c_T\, pK^{\mathbf{2}}/T, \quad c_T = 2,\ \ln T,\ 2\ln\ln T$
Portmanteau	$Q_h \sim \chi^{\mathbf{2}}(K^{\mathbf{2}}(h-p))$
Granger F	$\dfrac{(RSS_R - RSS_U)/p}{RSS_U/(T-Kp-1)} \sim F(p, T-Kp-1)$
Forma MA, IRF	$\boldsymbol{\Phi}_h = \sum_{j=\mathbf{1}}^{\min(h,p)} \mathbf{A}_j\boldsymbol{\Phi}_{h-j}, \quad \boldsymbol{\Theta}_h = \boldsymbol{\Phi}_h\mathbf{P}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{P}\mathbf{P}'$
FEVD	$\omega_{jk}(h) = \sum_{s<h}\theta_{jk,s}^{\mathbf{2}} / \sum_{s<h}\sum_m \theta_{jm,s}^{\mathbf{2}}$
Eroarea de prognoză	$\boldsymbol{\Sigma}(h) = \sum_{s=\mathbf{0}}^{h-\mathbf{1}} \boldsymbol{\Phi}_s\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Phi}_s'$

Autoevaluare

- **Întrebare**: este stabil VAR(1) cu $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$?
  - **Răspuns**: nu: $\lambda^2 - 1{,}7\lambda + 0{,}66 = 0$ dă $\lambda = 1{,}1$ și $0{,}6$
- **Întrebare**: un test Granger dă p $= 0{,}30$ pentru $x \to y$. Nu are x niciun efect asupra lui y?
  - **Răspuns**: nu putem concluziona asta: lagurile lui x nu îmbunătățesc prognoza; rămîn posibile efecte în aceeași perioadă, efecte lente sau o putere mică a testului
- **Întrebare**: într-o FEVD Cholesky, ce pondere din varianța erorii la un pas a primei variabile provine din propriul șoc?
  - **Răspuns**: 100%, prin construcția ordinii
- Urmează: Capitolul 7, cointegrarea și modelul vectorial cu corecția erorii (VECM)

Bibliografie (1/3)

- Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(6), 716–723. doi:10.1109/TAC.1974.1100705
- Diebold, F. X., & Mariano, R. S. (1995). Comparing predictive accuracy. *Journal of Business & Economic Statistics*, 13(3), 253–263. doi:10.1080/07350015.1995.10524599
- Diebold, F. X., & Yilmaz, K. (2009). Measuring financial asset return and volatility spillovers, with application to global equity markets. *The Economic Journal*, 119(534), 158–171. doi:10.1111/j.1468-0297.2008.02208.x
- Diebold, F. X., & Yilmaz, K. (2012). Better to give than to receive: Predictive directional measurement of volatility spillovers. *International Journal of Forecasting*, 28(1), 57–66. doi:10.1016/j.ijforecast.2011.02.006
- Engle, R. F., & Granger, C. W. J. (1987). Co-integration and error correction: Representation, estimation, and testing. *Econometrica*, 55(2), 251–276. doi:10.2307/1913236
- Granger, C. W. J. (1969). Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods. *Econometrica*, 37(3), 424–438. doi:10.2307/1912791
- Hamilton, J. D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press. doi:10.2307/j.ctv14jx6sm
- Hannan, E. J., & Quinn, B. G. (1979). The determination of the order of an autoregression. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, 41(2), 190–195. doi:10.1111/j.2517-6161.1979.tb01072.x

Bibliografie (2/3)

- Hosking, J. R. M. (1980). The multivariate portmanteau statistic. *Journal of the American Statistical Association*, 75(371), 602–608. doi:10.1080/01621459.1980.10477520
- Huang, C., & Petukhina, A. (2022). *Applied Time Series Analysis and Forecasting with Python*. Springer. doi:10.1007/978-3-031-13584-2
- Hyndman, R. J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice* (3rd ed.), Section 12.3, Vector autoregressions. OTexts. otexts.com/fpp3/VAR.html
- Jarque, C. M., & Bera, A. K. (1980). Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals. *Economics Letters*, 6(3), 255–259. doi:10.1016/0165-1765(80)90024-5
- Kilian, L. (1998). Small-sample confidence intervals for impulse response functions. *Review of Economics and Statistics*, 80(2), 218–230. doi:10.1162/003465398557465
- Koop, G., Pesaran, M. H., & Potter, S. M. (1996). Impulse response analysis in nonlinear multivariate models. *Journal of Econometrics*, 74(1), 119–147. doi:10.1016/0304-4076(95)01753-4
- Lütkepohl, H. (1982). Non-causality due to omitted variables. *Journal of Econometrics*, 19(2–3), 367–378. doi:10.1016/0304-4076(82)90011-2

Bibliografie (3/3)

- Lütkepohl, H. (2005). *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Springer. doi:10.1007/978-3-540-27752-1
- Pesaran, M. H., & Shin, Y. (1998). Generalized impulse response analysis in linear multivariate models. *Economics Letters*, 58(1), 17–29. doi:10.1016/S0165-1765(97)00214-0
- Schwarz, G. (1978). Estimating the dimension of a model. *The Annals of Statistics*, 6(2), 461–464. doi:10.1214/aos/1176344136
- Sims, C. A. (1980). Macroeconomics and reality. *Econometrica*, 48(1), 1–48. doi:10.2307/1912017
- Sims, C. A. (1992). Interpreting the macroeconomic time series facts: The effects of monetary policy. *European Economic Review*, 36(5), 975–1000. doi:10.1016/0014-2921(92)90041-T
- Sims, C. A., Stock, J. H., & Watson, M. W. (1990). Inference in linear time series models with some unit roots. *Econometrica*, 58(1), 113–144. doi:10.2307/2938337
- Stock, J. H., & Watson, M. W. (2001). Vector autoregressions. *Journal of Economic Perspectives*, 15(4), 101–115. doi:10.1257/jep.15.4.101
- Toda, H. Y., & Yamamoto, T. (1995). Statistical inference in vector autoregressions with possibly integrated processes. *Journal of Econometrics*, 66(1–2), 225–250. doi:10.1016/0304-4076(94)01616-8