








Serii de timp

Capitolul 7: Cointegrare și VECM



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București
IDA Institute Digital Assets
Blockchain Research Center
AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance
Academia Română, Institutul de Prognoză Economică
MSCA Digital Finance

Acronime folosite în acest material (1/2)

- **ACF**: Autocorrelation Function (funcția de autocorelație)
- **ADF**: Augmented Dickey–Fuller (test) — testul Dickey–Fuller augmentat
- **AI**: Artificial Intelligence (inteligență artificială)
- **AIC**: Akaike Information Criterion (criteriul informațional Akaike)
- **AR**: AutoRegressive (model) — model autoregresiv
- **ARCH**: AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity (heteroscedasticitate condiționată autoregresivă)
- **ARFIMA**: AutoRegressive Fractionally Integrated Moving Average (model) — model autoregresiv fracționar integrat cu medie mobilă
- **BIC**: Bayesian Information Criterion (criteriul informațional bayesian al lui Schwarz)
- **BNR**: Banca Națională a României
- **BVB**: Bursa de Valori București
- **DHSY**: Davidson, Hendry, Srba and Yeo (1978) — modelul de consum cu corecția erorii al lui Davidson, Hendry, Srba și Yeo (1978)
- **DOLS**: Dynamic Ordinary Least Squares (metoda celor mai mici pătrate dinamică)
- **DW**: Durbin–Watson (statistic) — statistica Durbin–Watson

Acronime folosite în acest material (2/2)

- **ECM**: Error Correction Model (model cu corecția erorii)
- **FRED**: Federal Reserve Economic Data (baza de date economice a Rezervei Federale din St. Louis)
- **IAPC**: Indicele armonizat al prețurilor de consum
- **LR**: Likelihood Ratio (test) — testul raportului de verosimilitate
- **OLS**: Ordinary Least Squares (metoda celor mai mici pătrate)
- **PIB**: Produsul intern brut
- **PPP**: Purchasing Power Parity (paritatea puterii de cumpărare)
- **RMSE**: Root Mean Squared Error (rădăcina erorii pătratice medii)
- **ROBOR**: Romanian Interbank Offer Rate (rata dobînzii la care băncile din România oferă depozite interbancare)
- **SE**: Standard Error (eroare standard)
- **SUA**: Statele Unite ale Americii
- **US**: United States (Statele Unite ale Americii)
- **VAR**: Vector AutoRegression (model vector autoregresiv)
- **VECM**: Vector Error Correction Model (model vectorial cu corecția erorii)

Întrebarea de azi și traseul

- **Întrebarea**: două prețuri evoluează amîndouă ca niște mersuri aleatoare; poate fi stabilă o combinație a lor și cum o modelăm?
  - dacă da, seriile au un trend stochastic comun și un echilibru pe termen lung: regresiile în niveluri au sens și nu sînt false
- **Traseul** capitolului
  - ideea de cointegrare; metoda Engle–Granger în doi pași, cu valorile critice potrivite; modelele cu corecția erorii
  - modelul VECM și teorema de reprezentare a lui Granger; testele Johansen; estimarea și interpretarea lui β și α; prognoza
  - aplicații: paritatea puterii de cumpărare, ratele dobînzii, trei monede central-europene, pairs trading la Bursa de Valori București
- Pornim de la Capitolul 3 (rădăcini unitare, regresia falsă) și de la Capitolul 6 (modele VAR)

Rezultatele învățării

- Definiți cointegrarea și explicați-o ca trend stochastic comun
- Aplicați testele Engle–Granger și Phillips–Ouliaris și comparați statisticile cu valorile critice potrivite (nu cu cele Dickey–Fuller)
- Estimați un model cu corecția erorii și interpretați viteza de ajustare și timpul de înjumătățire
- Scrieți un VAR ca VECM, enunțați teorema de reprezentare a lui Granger și alegeți rangul de cointegrare cu testele Johansen
- Interpretați vectorii de cointegrare și coeficienții de ajustare și decideți cînd un VECM prognozează mai bine decît un VAR în diferențe
- Evaluați o aplicație (condiții de paritate, pairs trading) în afara eșantionului și după costuri

Bibliografie și instrumente

- Manual: Huang și Petukhina (2022), cap. 9 (nestaționaritate și cointegrare)
  - teorie: Hamilton (1994), cap. 19–20; Lütkepohl (2005), cap. 6–8; abordarea prin verosimilitate în Johansen (1995) și Juselius (2006)
- Lucrări de referință: Engle și Granger (1987), Johansen (1988), Johansen (1991); prelegerea Nobel a lui Granger, Granger (2004)
- Quantlet-urile Python ale capitolului: Quantlets/Ch_07
  - `coint`, `coint_johansen`, `VECM` și `VAR` din `statsmodels`; `phillips_ouliaris` din `arch`
- Notebook-ul cursului: deschideți în Google Colab
- Curs video: Applied Time Series Analysis with Python

De la regresia falsă la cointegrare

- Capitolul 3: regresia unei serii $I(1)$ pe o altă serie $I(1)$, **fără legătură** cu ea, dă un t mare, un R^2 mare și o statistică Durbin–Watson apropiată de 0 Granger și Newbold (1974)
  - eroarea $y_t - a - bx_t$ este ea însăși $I(1)$ pentru orice b: nimic nu leagă cele două serii
- Excepția: pentru o anumită valoare a lui b, combinația $u_t = y_t - a - bx_t$ este **staționară**
  - atunci y_t și x_t sînt **cointegrate** Granger (1981), Engle și Granger (1987): regresia în niveluri estimează o relație reală pe termen lung
  - cele două serii se pot îndepărta o vreme, dar u_t le aduce mereu înapoi: un **echilibru**
- Azi: cum recunoaștem acest caz, cum îl testăm și cum îl modelăm

O femeie beată și cîinele ei

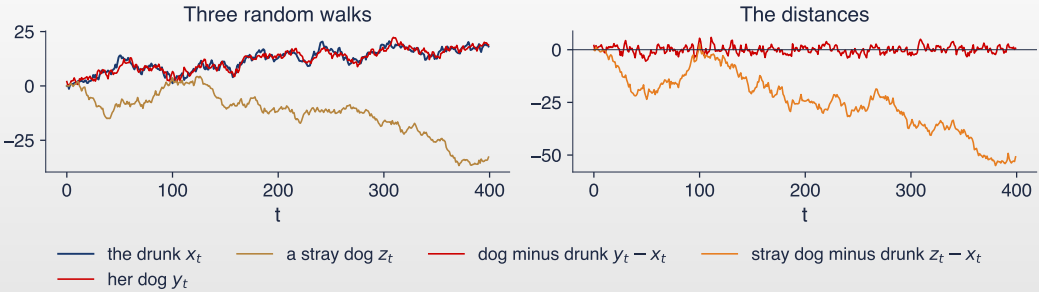


O plimbare cu cîinele: două traiectorii care nu se îndepărtează mult una de alta

Foto: Amin (2018); CC BY-SA 4.0; Wikimedia Commons

- Murray (1994): o femeie beată iese din local și rătăcește: traiectoria ei x_t este un mers aleator
  - cîinele ei rătăcește și el: y_t este tot un mers aleator
  - distanța dintre doi trecători **independenți** crește fără limită, ca $\sqrt{t}$
- Dar cîinele îi aude strigătul și aleargă înapoi; ea aude cîinele și se întoarce spre el
  - fiecare corectează o parte din distanță: $\Delta x_t = c\,(y_{t-1} - x_{t-1}) + u_t$, $\Delta y_t = d\,(x_{t-1} - y_{t-1}) + w_t$; $c, d > 0$: fracțiunile din distanță închise la fiecare pas; u_t, w_t: șocuri independente
  - ambele traiectorii rămîn imprevizibile, dar distanța $y_t - x_t$ rămîne mărginită: **cointegrare** cu **corecția erorii**

Femeia beată și cîinele ei prin simulare



- $T = 400$, șocuri gaussiene; $c = 0{,}15$, $d = 0{,}25$; un cîine fără stăpîn z_t este un mers aleator independent, cu aceeași varianță a șocurilor

TSA_ch7_common_trends

Interpretarea simulării: distanțele

- Fiecare traiectorie este $I(1)$: ADF pe x_t dă p $= 0{,}21$
  - distanța $y_t - x_t$ este un AR(1) cu $\rho = 1 - c - d = 0{,}6$: ADF p $< 0{,}001$, abaterea standard 1,9
  - distanța față de cîinele fără stăpîn rătăcește: ADF p $= 0{,}81$, abaterea standard 14,1
- Jumătate dintr-o distanță dispare în $\ln 0{,}5 / \ln 0{,}6 = 1{,}4$ pași: **timpul de înjumătățire** (secțiunea 3)
  - știind unde este femeia, știm unde să căutăm cîinele, deși niciuna dintre traiectorii nu poate fi prognozată

Definiția cointegrării

- **Definiție** Engle și Granger (1987): componentele lui $\mathbf{y}_t = (y_{1t}, \ldots, y_{nt})^\top$ sînt **cointegrate de ordinul (1,1)**, $\mathbf{y}_t \sim CI(1,1)$, dacă
  - fiecare componentă este $I(1)$ (Capitolul 3: staționară după o diferențiere) și
  - o anumită combinație liniară $\beta^\top \mathbf{y}_t$, cu $\beta \neq 0$, este $I(0)$: staționară
- β este **vectorul de cointegrare**; $u_t = \beta^\top \mathbf{y}_t - \mu$ este **eroarea de echilibru** (μ: media ei; $\top$: transpusa)
  - β este unic doar pînă la o constantă multiplicativă: și 2β este bun; **normalizăm** un coeficient la 1, de exemplu $\beta = (1, -b)^\top$
  - cu n variabile pot exista cel mult $r = n - 1$ vectori de cointegrare independenți; r este **rangul de cointegrare**
- Cointegrarea este o proprietate a **nivelurilor**: diferențierea datelor distruge informația din $\beta^\top \mathbf{y}_t$

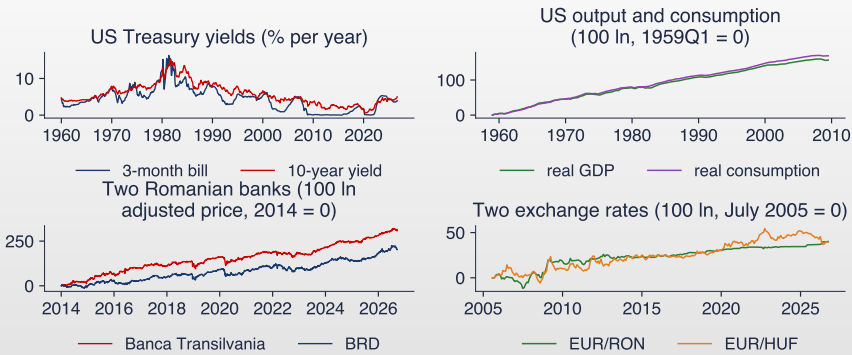
Trenduri stochastice comune

- Fie $x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t$ (un mers aleator) și $y_t = b\,x_t + u_t$, cu u_t staționar
  - ambele serii conțin același trend stochastic $\sum_{s \le t} \varepsilon_s$; $y_t - bx_t = u_t$ îl elimină
- Reprezentarea prin **trenduri comune** Stock și Watson (1988): n variabile cu r vectori de cointegrare sînt antrenate de $n - r$ trenduri stochastice comune
  - $r = 0$: n trenduri separate, fără cointegrare; $r = n - 1$: un singur trend, comun tuturor
  - exemplu: trei randamente (la 1, 5 și 10 ani) cu $r = 2$ au un singur trend comun, **nivelul** ratelor dobînzii (secțiunea 5)
- **Exemplu rezolvat**: x_t mers aleator, $y_t = 2x_t + u_t$, $z_t = -x_t + v_t$ (u_t, v_t staționare)
  - $n = 3$, un singur trend comun, deci $r = 2$: în ordinea (x_t, y_t, z_t), de exemplu $\beta_1 = (-2, 1, 0)^\top$ și $\beta_2 = (0, 1, 2)^\top$ (deoarece $y_t - 2x_t = u_t$ și $y_t + 2z_t = u_t + 2v_t$)

Cointegrarea în teoria economică

- **Paritatea puterii de cumpărare**: $s_t = p_t - p_t^* + q_t$, cu cursul real q_t staționar (secțiunea 8)
  - s_t: logaritmul cursului (lei pentru un euro); p_t, p_t^*: logaritmii nivelurilor prețurilor în țară și în străinătate
- **Structura la termen a ratelor dobînzii**: conform ipotezei așteptărilor, diferența (spread-ul) dintre un randament pe termen lung și unul pe termen scurt este staționară Campbell și Shiller (1987)
- **Consum și venit**: „marele raport" $c_t - y_t$ (în logaritmi) este stabil dacă consumul urmează venitul permanent
- **Prețul spot și prețul futures**, un indice și un fond care îl replică: arbitrajul menține diferența mică
- **Acțiunile unor firme similare**: aceleași șocuri sectoriale; baza pairs trading (secțiunea 9)

Patru perechi de serii cu trend



- Randamentele titlurilor de stat americane (FRED, lunar, din 1960); PIB-ul și consumul real al SUA (macrodata din statsmodels, 1959–2009)
- Banca Transilvania și BRD (prețuri zilnice ajustate); EUR/RON și EUR/HUF (cursuri de referință BNR, la sfîrșitul lunii)

TSA_ch7_common_trends

Interpretarea celor patru perechi

- Fiecare serie este $I(1)$ (Capitolul 3); întrebarea este dacă cele două serii ale unei perechi evoluează **împreună** pe termen lung
  - testul Engle–Granger (secțiunea 2), valoarea critică de 5% circa $-3{,}34$
- Randamentele: $\tau = -3{,}35$, p $= 0{,}048$: la limită; consumul și venitul: $\tau = -3{,}54$, p $= 0{,}029$
- Cele două bănci: $\tau = -4{,}33$, p $= 0{,}002$: cointegrate în acest eșantion
- EUR/RON și EUR/HUF: $\tau = -2{,}47$, p $= 0{,}294$: **nicio dovadă** de cointegrare
  - deși au crescut cu valori apropiate, iar $R^2 = 0{,}79$ în niveluri: o direcție comună nu este un trend comun

Întrebare pentru sală

- **Întrebare**: două serii $I(1)$ au în niveluri o corelație de 0,95. Sînt ele cointegrate?
  - **Răspuns**: nu putem spune: mersurile aleatoare fără legătură au adesea corelații mari (Capitolul 3); doar un test pe eroarea de echilibru decide
- **Întrebare**: două serii cointegrate au o corelație de 0,2 între variațiile lor zilnice. Este o contradicție?
  - **Răspuns**: nu: cointegrarea privește termenul lung; pe termen scurt variațiile pot fi aproape necorelate

Recapitulare: ideea de cointegrare

- Seriile $I(1)$ sînt cointegrate dacă o combinație $\beta^\top \mathbf{y}_t$ este staționară: un echilibru pe termen lung
- Echivalent, au trenduri stochastice comune: n variabile, r vectori, $n - r$ trenduri
- Teoria sugerează cointegrarea (condiții de paritate, spread-uri, „marile rapoarte"), dar datele trebuie să o confirme

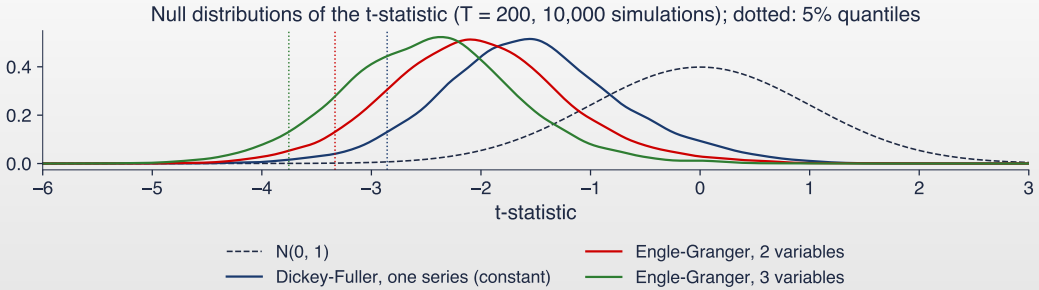
Doi pași

- **Pasul 1**: estimăm relația pe termen lung prin OLS (ordinary least squares, metoda celor mai mici pătrate) în niveluri: $y_t = a + b\,x_t + u_t$
  - păstrăm reziduurile $\hat{u}_t = y_t - \hat{a} - \hat{b}x_t$
  - dacă seriile sînt cointegrate, $\hat{b}$ este **superconsistent**: eroarea lui scade ca $1/T$, mai repede decît de obicei $(1/\sqrt{T})$
- **Pasul 2**: un test ADF (Capitolul 3) pe reziduuri, fără constantă: $\Delta\hat{u}_t = \gamma\,\hat{u}_{t-1} + \sum_{j=1}^{k} \delta_j \Delta\hat{u}_{t-j} + e_t$
  - H_0: $\gamma = 0$, reziduurile au o rădăcină unitară: **fără cointegrare**; H_1: $\gamma < 0$: cointegrare
  - δ_j: coeficienții celor k laguri ale diferențelor, care preiau autocorelația lui $\hat{u}_t$; e_t: zgomot alb
  - statistica $\tau = \hat{\gamma}/\mathrm{SE}(\hat{\gamma})$, SE: eroarea standard; respingem H_0 cînd τ este sub valoarea critică
- Testare prealabilă: fiecare serie trebuie să fie $I(1)$; o serie $I(0)$ și una $I(1)$ nu pot fi cointegrate

Motivul pentru care tabelul Dickey–Fuller este greșit aici

- OLS alege $\hat{b}$ astfel încît varianța reziduurilor să fie cît mai mică
  - deci $\hat{u}_t$ pare mai staționar decît adevăratul u_t, chiar și atunci cînd nu există cointegrare
  - în ipoteza H_0, statistica τ este deplasată la stînga distribuției Dickey–Fuller
- Valorile critice depind de numărul de variabile n și de termenii determiniști din pasul 1
  - tabele: Engle și Granger (1987) (prin simulare), apoi MacKinnon (1994) și MacKinnon (2010), folosite de `statsmodels` (`coint`)
- Cu β **cunoscut** din teorie (de exemplu un spread, $\beta = (1, -1)^\top$), nu se estimează nimic: se aplică testul ADF obișnuit, cu tabelul lui

Distribuția în ipoteza nulă prin simulare



- 10 000 de eșantioane de $T = 200$ mersuri aleatoare gaussiene independente; pasul 1 cu constantă, pasul 2 fără laguri

TSA_ch7_engle_granger

Interpretarea simulării: valorile critice

- Cuantilele de 5%: $-2{,}86$ (o serie, Dickey–Fuller), $-3{,}33$ (2 variabile), $-3{,}75$ (3 variabile)
  - valorile MacKinnon pentru $T = 200$: $-2{,}88$; $-3{,}37$; $-3{,}78$: simularea le reproduce
- Folosind valoarea Dickey–Fuller $-2{,}88$ pentru reziduuri, am respinge o ipoteză H_0 adevărată în 14,5% din eșantioane cu 2 variabile și în 30,3% cu 3
  - în loc de 5%: am „găsi" cointegrare mult prea des
- Mai multe variabile îi dau metodei OLS mai multă libertate de ajustare, de unde valori critice mai negative

Valorile critice ale testului Engle–Granger

Variabile n	**constantă**			**constantă și trend**		
	1%	5%	10%	1%	5%	10%
1 (Dickey–Fuller)	−3,43	−2,86	−2,57	−3,96	−3,41	−3,13
2	−3,90	−3,34	−3,04	−4,33	−3,78	−3,50
3	−4,29	−3,74	−3,45	−4,66	−4,12	−3,84
4	−4,64	−4,10	−3,81	−4,97	−4,43	−4,15

- Valori asimptotice ($T \to \infty$) din MacKinnon (2010); pentru T finit, valorile sînt puțin mai negative
- Citiți rîndul cu numărul **total** de variabile din regresie, inclusiv y_t
- Constantă și trend în pasul 1: cînd seriile au derive pe care relația nu le anulează

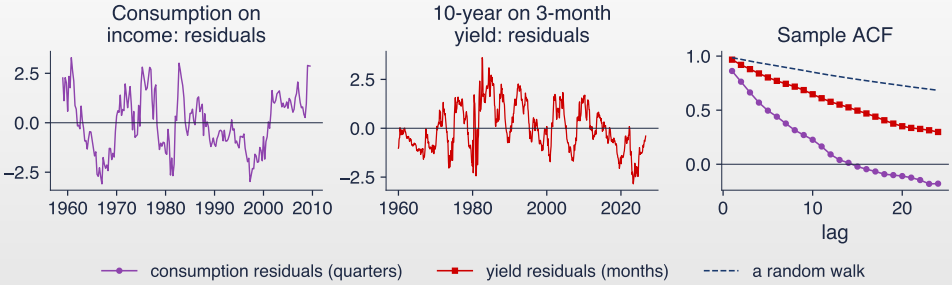
Testul Phillips–Ouliaris

- Phillips și Ouliaris (1990): același pas 1 și aceeași ipoteză H_0 (fără cointegrare)
  - pasul 2: o regresie Dickey–Fuller **fără** laguri ale diferențelor; statistica t este corectată cu varianța pe termen lung a reziduurilor (ca în testul Phillips–Perron din Capitolul 3)
  - două versiuni: Z_t (raportul t corectat) și Z_α ($T\hat{\gamma}$ corectat); valorile critice ale lui Z_t sînt cele Engle–Granger
- Motivul folosirii a două teste
  - Engle–Granger depinde de numărul de laguri k ales după AIC; Phillips–Ouliaris depinde de lățimea de bandă a varianței pe termen lung
  - cînd concordă, verdictul este robust; cînd nu concordă, examinăm graficul reziduurilor și eșantionul
- În Python: `coint(y, x)` din `statsmodels`; `phillips_ouliaris(y, x, test_type="Zt")` din `arch`

Exemplu rezolvat: consumul și venitul în SUA

- Datele: c_t, $y_t = 100 \times$ logaritmul consumului real și al PIB-ului real, trimestrial, T1 1959–T3 2009 (203 trimestre)
  - testare prealabilă: ADF cu trend, p = 0,31 pentru c_t și 0,39 pentru y_t: ambele $I(1)$
- Pasul 1: $\hat{c}_t = -107{,}6 + 1{,}075\, y_t$, $R^2 = 0{,}9992$, DW $= 0{,}24$
  - DW: statistica Durbin–Watson a reziduurilor, aproximativ 2 fără autocorelație și apropiată de 0 pentru reziduuri foarte persistente
  - panta este apropiată de 1: o pondere stabilă a consumului; dar R^2 și DW singure nu dovedesc nimic
- Pasul 2: $\tau = -3{,}54$ cu 0 laguri; valoarea critică de 5% pentru $n = 2$, $T = 203$: $-3{,}37$
  - $-3{,}54 < -3{,}37$: respingem „fără cointegrare" la 5% (p = 0,029); Phillips–Ouliaris: $Z_t = -3{,}52$, p = 0,031
  - cu valoarea Dickey–Fuller ($-2{,}88$) decizia ar fi aceeași aici, dar din motive greșite

Reziduurile din pasul 1



- Stînga și centru: $\hat{u}_t$ pentru consumul pe venit și pentru randamentul la 10 ani pe cel la 3 luni; dreapta: ACF de selecție a lor și a unui mers aleator simulat

TSA_ch7_engle_granger

Interpretarea reziduurilor

- Consumul: $\hat{\rho}(1) = 0{,}86$, dar $\hat{\rho}(8) = 0{,}31$: abateri de 1–3% care se reduc mult în aproximativ doi ani
- Randamentele: $\hat{\rho}(1) = 0{,}97$, $\hat{\rho}(12) = 0{,}58$: abateri foarte persistente; un test la limită ($\tau = -3{,}35$, p $= 0{,}048$)
  - persistența ridicată este situația obișnuită: puterea testului împotriva unui ρ apropiat de 1 este mică (Capitolul 3)
- Un mers aleator descrește mult mai lent: ACF singură nu poate tranșa întrebarea; testul poate

Engle–Granger și Phillips–Ouliaris pe date reale

Regresia	Frecv.	T	$\hat{b}$	τ (k)	p	Z_t	p
SUA: consumul pe venit	trimestrial	203	1,07	−3,54 (0)	0,029	−3,52	0,031
SUA: 10 ani pe 3 luni	lunar	801	0,86	−3,35 (20)	0,048	−4,04	0,006
TLV pe BRD (din 2014)	zilnic	3 176	1,36	−4,33 (3)	0,002	−4,14	0,005
BRD pe TLV (din 2014)	zilnic	3 176	0,71	−4,16 (3)	0,004	−4,02	0,007
TLV pe BRD (din 2010)	zilnic	4 187	1,68	−1,82 (3)	0,622	−1,83	0,619
EUR/RON pe EUR/HUF	lunar	255	0,71	−2,47 (0)	0,294	−2,43	0,309
România: consumul pe PIB	trimestrial	126	1,46	−2,32 (8)	0,363	−6,80	$<0{,}001$

- τ: statistica Engle–Granger (k laguri după AIC); p-value-uri din MacKinnon (2010) pentru 2 variabile; Z_t: Phillips–Ouliaris
- Băncile: prețuri ajustate din data/market; România: consumul gospodăriilor și PIB-ul, Eurostat, volume înlănțuite, ajustate sezonier, din 1995

Interpretarea tabelului

- **Normalizarea**: TLV pe BRD și BRD pe TLV dau valori τ diferite ($-4{,}33$ și $-4{,}16$) și pante care nu sînt exact inverse una alteia
  - Engle–Granger depinde de variabila aleasă în stînga; aici verdictul este același
- **Eșantionul**: din 2010 testul nu găsește cointegrare pentru aceleași bănci ($p = 0{,}622$); din 2014 o găsește ($p = 0{,}002$)
  - alegerea datei de început după examinarea datelor este o formă de data snooping (căutare în date pînă la găsirea unui rezultat)
- **Cele două teste nu concordă** pentru România: Engle–Granger $p = 0{,}363$ cu 8 laguri, Phillips–Ouliaris $p < 0{,}001$
  - panta 1,46 este departe de 1: ponderea consumului a crescut puternic; Seminarul 7 (B2) discută acest caz

Limitele metodei Engle–Granger

- **Cel mult un** vector de cointegrare: cu $n \geq 3$ variabile pot exista mai mulți (secțiunile 4–5)
- **Normalizarea**: rezultatele depind de variabila pusă în stînga
- **Inferența asupra lui** $\hat{b}$: superconsistent, dar deplasat în eșantioane mici, iar statisticile t din OLS **nu** sînt valide
  - remediu: OLS dinamic (DOLS) Stock și Watson (1993), cu valori viitoare (leads) și laguri ale lui Δx_t, dă erori standard valide
- **Erori în doi pași**: greșelile din pasul 1 se transmit în pasul 2; puterea este mică împotriva unei ajustări lente
  - metoda Johansen (secțiunea 5) estimează totul deodată, prin verosimilitate maximă

Studiu de caz: Engle și Granger (1987)



Robert Engle (2022); Premiul Nobel pentru economie 2003

Foto: Jon Demske (2022); CC BY-SA 4.0; Wikimedia Commons

- **Întrebarea**: cum modelăm serii $I(1)$ legate pe termen lung, fără regresii false și fără a elimina prin diferențiere informația pe termen lung?
  - Engle și Granger (1987), scrisă la Universitatea California din San Diego, una dintre cele mai citate lucrări din econometrie
- **Contribuția**
  - definiția cointegrării și teorema de reprezentare (secțiunea 4): cointegrare $\Leftrightarrow$ corecția erorii
  - estimatorul în doi pași și testele pe reziduuri, cu valori critice obținute prin simulare
  - aplicații pe serii din SUA, precum consumul și venitul, prețurile și salariile, ratele dobînzii pe termen scurt și lung

Recapitulare: metoda Engle–Granger

- Pasul 1: OLS în niveluri ($\hat{b}$ superconsistent); pasul 2: ADF pe reziduuri, H_0: fără cointegrare
- Valorile critice Engle–Granger (MacKinnon), mai negative decît cele Dickey–Fuller și dependente de n
- Verificăm cu Phillips–Ouliaris, cu normalizarea inversă și cu un alt eșantion

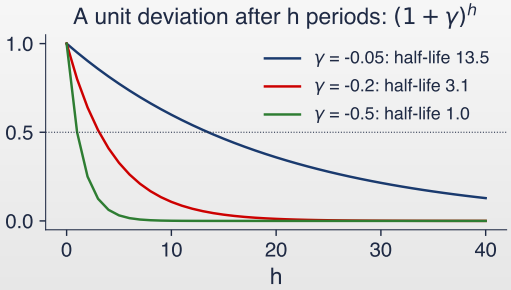
Modelul cu corecția erorii

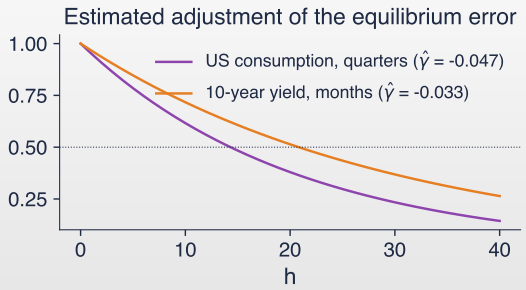
- Cu $u_{t-1} = y_{t-1} - a - bx_{t-1}$ (eroarea de echilibru din perioada anterioară), **modelul cu corecția erorii** (ECM) este
  - $\Delta y_t = c + \gamma\, u_{t-1} + \delta_0\, \Delta x_t + \sum_{j\geq 1}(\phi_j \Delta y_{t-j} + \delta_j \Delta x_{t-j}) + \varepsilon_t$
- Toți termenii sînt staționari: OLS și testele t obișnuite sînt valide (cu $\hat{u}_{t-1}$ din pasul 1)
  - b: efectul **pe termen lung** al lui x asupra lui y; δ_0: efectul **pe termen scurt** (în aceeași perioadă)
  - γ: **viteza de ajustare**; corecția erorii cere $-2 < \gamma < 0$
  - c: termenul liber; ϕ_j, δ_j: coeficienții pe termen scurt ai lagurilor diferențelor; ε_t: zgomot alb
- Interpretare: dacă y_{t-1} a fost peste echilibru ($u_{t-1} > 0$) și $\gamma < 0$, atunci y_t tinde să scadă: o fracțiune $|\gamma|$ din distanță se închide în fiecare perioadă

Viteza de ajustare și timpul de înjumătățire

- Fără șocuri noi, eroarea de echilibru evoluează după $u_t = (1+\gamma)\, u_{t-1}$, deci $u_h = (1+\gamma)^h u_0$
  - (într-un sistem cu două variabile în care se ajustează doar y)
- **Timpul de înjumătățire**: numărul de perioade după care a dispărut jumătate dintr-o abatere
  - $(1+\gamma)^h = 0{,}5 \;\Rightarrow\; h_{1/2} = \ln 0{,}5 / \ln(1+\gamma)$
- **Exemplu rezolvat**: $\gamma = -0{,}2$, $h_{1/2} = \ln 0{,}5 / \ln 0{,}8 = 3{,}1$ perioade
  - în luni: circa trei luni pentru jumătate dintr-o abatere; în trimestre: trei trimestre
- Comparăm timpii de înjumătățire doar în aceeași unitate de timp: un γ lunar și unul trimestrial nu sînt comparabile

Timpi de înjumătățire: teorie și estimări





- Stînga: $(1+\gamma)^h$ pentru trei viteze; dreapta: descreșterea implicată de modelele ECM estimate pentru consumul din SUA (trimestre) și pentru randamentul la 10 ani (luni)

TSA_ch7_error_correction

Interpretarea modelelor ECM estimate

- Consumul: $\hat{\gamma} = -0{,}047$ ($t = -1{,}75$), timp de înjumătățire 14,3 trimestre; $\hat{\delta}_0 = 0{,}54$
  - jumătate dintr-o creștere a venitului ajunge în consum în același trimestru; restul vine lent, iar termenul de ajustare este doar marginal semnificativ
- Randamentul la 10 ani: $\hat{\gamma} = -0{,}033$ ($t = -4{,}94$), timp de înjumătățire 20,8 luni; $\hat{\delta}_0 = 0{,}38$
  - și rata la 3 luni reacționează la aceeași distanță: $\hat{\gamma} = 0{,}024$ ($t = 2{,}08$), cu semn opus: ambele rate se apropie una de alta
- Cînd ambele variabile se ajustează, un ECM cu o singură ecuație descrie doar o parte a ajustării: de aici VECM (secțiunea 4)

Exemplu rezolvat: un trimestru de consum

- ECM estimat (termenii principali): $\Delta c_t = 0{,}418 + 0{,}54\,\Delta y_t - 0{,}047\,\hat{u}_{t-1} + \ldots$, cu $\hat{u}_{t-1} = c_{t-1} - 1{,}075\,y_{t-1} - \hat{a}$
- Scenariu: consumul este cu 2% peste echilibru ($\hat{u}_{t-1} = 2$), iar venitul crește cu 1% în acest trimestru
  - efectul pe termen scurt: $0{,}537 \times 1 = 0{,}537$; corecția erorii: $-0{,}047 \times 2 = -0{,}095$
  - creșterea prognozată a consumului: circa 0,86% (lagurile diferențelor sînt egale cu 0)
- Fără termenul de corecție a erorii, modelul ar ignora faptul că deja consumul este prea mare

Studiu de caz: funcția de consum DHSY (1978)

- **Întrebarea**: de ce prognozau atît de prost cheltuielile de consum din Marea Britanie funcțiile de consum din anii 1970, estimate în niveluri sau în diferențe?
  - Davidson et al. (1978) (Davidson, Hendry, Srba și Yeo, „DHSY"): date trimestriale pentru Marea Britanie, cheltuieli și venit
- **Metoda**: un model în diferențe plus lagul raportului logaritmic dintre cheltuieli și venit, termenul de corecție a erorii
  - o căutare de la general la particular, pornind de la un model dinamic amplu
- **Moștenirea**: forma ECM a apărut prima; Granger (1981) și Engle și Granger (1987) au arătat apoi de ce funcționează: cele două serii sînt cointegrate
  - un test de cointegrare poate folosi și statistica t a lui γ din ECM, cu valori critice proprii Banerjee, Dolado și Mestre (1998)

Recapitulare: modele cu corecția erorii

- ECM: Δy_t pe Δx_t, laguri ale diferențelor și $\hat{u}_{t-1}$; toți termenii sînt staționari
- $\gamma < 0$: viteza de ajustare; timpul de înjumătățire $\ln 0{,}5 / \ln(1+\gamma)$, în unitățile datelor
- Termenul scurt (δ_0) și termenul lung (b) într-o singură ecuație; dacă se ajustează mai multe variabile, avem nevoie de un sistem

De la VAR la VECM

- Capitolul 6: un VAR(p) în niveluri, $\mathbf{y}_t = \mathbf{c} + A_1\mathbf{y}_{t-1} + \cdots + A_p\mathbf{y}_{t-p} + \mathbf{u}_t$
  - scădem $\mathbf{y}_{t-1}$ și regrupăm lagurile: același model sub forma **vectorială cu corecția erorii** (VECM)
- $\Delta\mathbf{y}_t = \mathbf{c} + \Pi\,\mathbf{y}_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1}\Gamma_i\,\Delta\mathbf{y}_{t-i} + \mathbf{u}_t, \quad \Pi = A_1 + \cdots + A_p - I, \quad \Gamma_i = -(A_{i+1} + \cdots + A_p)$
  - Π: matricea pe termen lung (înmulțește nivelurile); Γ_i: matricele pe termen scurt; I: matricea identitate
- **Deducere** pentru $p = 2$: $\mathbf{y}_t - \mathbf{y}_{t-1} = (A_1 - I)\mathbf{y}_{t-1} + A_2\mathbf{y}_{t-2} + \mathbf{u}_t$; adunăm și scădem $A_2\mathbf{y}_{t-1}$:
  - $\Delta\mathbf{y}_t = (A_1 + A_2 - I)\,\mathbf{y}_{t-1} - A_2\,\Delta\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{u}_t$: $\Pi = A_1 + A_2 - I$, $\Gamma_1 = -A_2$
- VECM este o rescriere, nu un model nou: toată informația despre termenul lung se află în matricea Π

Rangul matricei Π

- $\Delta \mathbf{y}_t$ este staționar; deci și $\Pi \mathbf{y}_{t-1}$ trebuie să fie staționar. Trei cazuri, după $r = \text{rang}(\Pi)$:
- $r = 0$: $\Pi = 0$; fără cointegrare; modelul potrivit este un **VAR în diferențe**
- $r = n$: Π are rang maxim; $\mathbf{y}_t$ este deja staționar; un **VAR în niveluri** (Capitolul 6)
- $0 < r < n$: **cointegrare** cu r vectori; $\Pi = \alpha\beta^\top$, cu α, β de dimensiune $n \times r$
  - $\beta^\top \mathbf{y}_{t-1}$: cele r erori de echilibru; α: **coeficienții de ajustare** (loadings), cît de puternic reacționează fiecare variabilă la fiecare eroare
  - doar produsul este unic: $\alpha\beta^\top = (\alpha Q)(\beta Q^{-\top})^\top$ pentru orice Q inversabilă; normalizăm β
- Testarea cointegrării = testarea rangului lui Π (secțiunea 5)

Teorema de reprezentare a lui Granger

- **Teorema** Engle și Granger (1987): dacă $\mathbf{y}_t$ este $I(1)$ și cointegrat cu rangul r, atunci are o reprezentare VECM cu $\Pi = \alpha\beta^\top$, și reciproc
  - cointegrare $\Leftrightarrow$ corecția erorii: eroarea de echilibru trebuie să influențeze variațiile
- **Consecințe**
  - un VAR în diferențe omite $\alpha\beta^\top \mathbf{y}_{t-1}$: este **greșit specificat** cînd seriile sînt cointegrate
  - $\alpha \neq 0$: cel puțin o variabilă se ajustează, deci există cauzalitate Granger (Capitolul 6) în cel puțin o direcție
  - nivelurile sînt antrenate de $n - r$ trenduri stochastice comune; efectele șocurilor asupra nivelurilor nu se sting
- Un VAR în niveluri nu este nici el greșit: este consistent, dar ignoră restricția $\text{rang}(\Pi) = r$, iar testele lui sînt nestandard

2003: Premiul Nobel pentru cointegrare



Clive Granger (1934–2009)

Foto: Olaf Storbeck (2008); CC BY-SA 2.0; Wikimedia Commons



Clădirea Sir Clive Granger, Universitatea din Nottingham

Foto: mattbuck (2012); CC BY-SA 3.0; Wikimedia Commons

- Premiul din 2003: Granger pentru cointegrare, împreună cu Robert Engle pentru ARCH (Capitolul 5)
- Granger a studiat și și-a început cariera la Nottingham
- Prelegerea Nobel: Granger (2004): „time series analysis, cointegration, and applications"

Exemplu rezolvat: un VECM cu două variabile

- $\Delta y_{1t} = -0{,}10\,(y_{1,t-1} - y_{2,t-1}) + u_{1t}, \quad \Delta y_{2t} = 0{,}10\,(y_{1,t-1} - y_{2,t-1}) + u_{2t}$
  - $\beta = (1, -1)^\top$, $\alpha = (-0{,}10; 0{,}10)^\top$; $\Pi = \alpha\beta^\top = \begin{pmatrix} -0{,}10 & 0{,}10 \\ 0{,}10 & -0{,}10 \end{pmatrix}$, $\det \Pi = 0$, rangul 1
- Dacă y_1 este peste y_2: y_1 scade ($\alpha_1 < 0$), iar y_2 crește ($\alpha_2 > 0$): ambele închid distanța
- Distanța $z_t = y_{1t} - y_{2t}$: $z_t = (1 + \beta^\top \alpha)\, z_{t-1} + (u_{1t} - u_{2t}) = 0{,}8\, z_{t-1} + \ldots$
  - un AR(1) staționar; timpul de înjumătățire $\ln 0{,}5 / \ln 0{,}8 = 3{,}1$ perioade; condiția este $-2 < \beta^\top \alpha < 0$
- Media $(y_{1t} + y_{2t})/2$ variază cu $(u_{1t} + u_{2t})/2$: un mers aleator, trendul comun

Termenii deterministi: cinci cazuri

Cazul	În VECM	Implicația pentru date	`statsmodels`
1	fără constantă, fără trend	fără derivă; relații prin origine	`n`
2	constantă doar în $\beta^\top \mathbf{y}_{t-1}$	fără derivă; erori de echilibru cu medie nenulă (randamente, spread-uri)	`ci`
3	constantă nerestricționată	trenduri liniare în niveluri, nu și în relații (PIB, prețuri)	`co`
4	constantă și trend în $\beta^\top \mathbf{y}_{t-1}$	trenduri în niveluri și în relații	`coli`
5	constantă și trend nerestricționate	trenduri pătratice în niveluri; rareori plauzibil	`colo`

- Valorile critice ale testelor Johansen se schimbă de la un caz la altul Johansen (1995); alegem cazul după grafic și după teorie, înainte de testare
- `coint_johansen` din `statsmodels` implementează cazul 1 (`det_order=-1`) și cazul 3 (`det_order=0`), cazul folosit în acest capitol

Exogenitatea slabă

- Dacă un rînd din α este nul, $\alpha_i = 0$, variabila y_i **nu** reacționează la erorile de echilibru
  - y_i este **slab exogenă** pentru β: celelalte variabile fac toată ajustarea
  - y_i antrenează trendul comun; de exemplu Euribor pentru ratele dobînzii din România (Seminarul 7, B4)
- Testul: un test t pentru α_i (un vector de cointegrare) sau un test al raportului de verosimilitate (LR) pentru $\alpha_i = 0$ Johansen (1991)
  - statistica are asimptotic distribuția χ^2 cu r grade de libertate, după ce r a fost fixat
- Utilitate: dacă x_t este slab exogenă, un ECM cu o singură ecuație pentru y_t (secțiunea 3) nu pierde informație despre β

Recapitulare: modelul VECM

- $\Delta \mathbf{y}_t = \alpha \beta^\top \mathbf{y}_{t-1} + \sum \Gamma_i \Delta \mathbf{y}_{t-i} + \mathbf{u}_t$: un VAR rescris; $\text{rang}(\Pi) = r$
- Reprezentarea Granger: cointegrare $\Leftrightarrow$ corecția erorii; un VAR în diferențe omite termenul lung
- β: echilibre; α: cine se ajustează; termenii deterministi: cinci cazuri; $\alpha_i = 0$: exogenitate slabă

Ideea: regresia cu rang redus



Universitatea din Copenhaga, unde Søren Johansen și Katarina Juselius au dezvoltat metoda

Foto: Per Meistrup (2011); CC BY-SA 4.0; Wikimedia Commons

- Johansen (1988), Johansen (1991): verosimilitate maximă pentru VECM, cu erori gaussiene
  - regresăm $\Delta \mathbf{y}_t$ și $\mathbf{y}_{t-1}$ pe lagurile diferențelor; păstrăm reziduurile R_{0t} și R_{1t}
  - căutăm combinațiile lui R_{1t} cel mai puternic corelate cu R_{0t}: **corelațiile canonice**
- Pătratele lor sînt valorile proprii $1 > \hat{\lambda}_1 \geq \cdots \geq \hat{\lambda}_n \geq 0$
  - un $\hat{\lambda}_i$ mare: o combinație staționară care prezice variațiile; $\hat{\lambda}_i \approx 0$: o combinație care rămîne $I(1)$
  - vectorii proprii dau $\hat{\beta}$; apoi $\hat{\alpha}$ rezultă prin OLS

Statisticile urmei și a valorii proprii maxime

- **Testul urmei**: H_0: rang $\leq r$, față de rang $= n$; $\lambda_{\text{trace}}(r) = -T \sum_{i=r+1}^{n} \ln(1 - \hat{\lambda}_i)$
  - însumează informația din cele mai mici $n - r$ valori proprii: dacă sînt toate apropiate de 0, statistica este mică și H_0 nu este respinsă
- **Testul valorii proprii maxime**: H_0: rang $= r$, față de rang $= r + 1$; $\lambda_{\max}(r) = -T \ln(1 - \hat{\lambda}_{r+1})$
  - folosește doar următoarea valoare proprie, $\hat{\lambda}_{r+1}$; T: numărul de observații
- **Procedura secvențială**: testăm $r = 0$, apoi $r \leq 1$ etc.; rangul este primul r pentru care H_0 **nu** este respinsă
  - statisticile sînt rapoarte de verosimilitate, dar distribuțiile lor sînt nestandard (funcții de mișcări browniene)
  - valorile critice depind de $n - r$ și de cazul termenilor determiniști: Osterwald-Lenum (1992), MacKinnon, Haug și Michelis (1999)
- Cele două teste concordă de obicei; dacă nu, în majoritatea lucrărilor aplicate se preferă testul urmei

Exemplu rezolvat: de la valori proprii la statistici

- Randamentele din SUA la 1, 5 și 10 ani, 801 luni; eșantionul efectiv $T = 801 - 2 - 1 = 798$: $\hat{\lambda} = (0{,}0405; 0{,}0229; 0{,}0039)$
  - $-\ln(1 - \hat{\lambda}_i)$: 0,0414; 0,0231; 0,0039
- $r = 0$: urma $= 798 \times (0{,}0414 + 0{,}0231 + 0{,}0039) = 54{,}6 > 29{,}80$: respingem
  - valoarea proprie maximă: $798 \times 0{,}0414 = 33{,}0 > 21{,}13$: respingem
- $r \leq 1$: urma $= 21{,}6 > 15{,}49$: respingem; $r \leq 2$: urma $= 3{,}1 < 3{,}84$: nu respingem
  - rangul 2: doi vectori de cointegrare, un singur trend comun
- Și valorile proprii mici contează: sînt înmulțite cu T

Testele Johansen pe trei sisteme

Sistemul	T	k	$\lambda_{\mathbf{trace}}(0)$	$\lambda_{\mathbf{trace}}(1)$	$\lambda_{\mathbf{trace}}(2)$	$\lambda_{\max}(0)$	$\lambda_{\max}(1)$	**rang**
SUA: randamentele la 1, 5 și 10 ani	801	2	54,6	21,6	3,1	33,0	18,5	2
SUA: PIB, consum, investiții	203	1	28,9	11,4	2,6	17,4	8,9	0
EUR/RON, EUR/HUF, EUR/PLN	255	1	24,2	7,9	2,7	16,3	5,2	0
Valoarea critică de 5%			29,80	15,49	3,84	21,13	14,26	

- Cazul 3 (constantă nerestricționată); k: numărul de laguri ale diferențelor, ales după BIC pentru VAR-ul în niveluri; rangurile după testul urmei (testul valorii proprii maxime dă aici aceleași ranguri)
- Randamentele: FRED, 1960–2026; PIB, consum și investiții: 100 ln, SUA 1959–2009; monedele: BNR, sfîrșitul lunii, 2005–2026

Interpretarea celor trei sisteme

- Randamentele: rangul 2, deci un singur trend comun: **nivelul** ratelor mișcă toate scadențele; cele două spread-uri sînt staționare
  - ipoteza așteptărilor pentru structura la termen Campbell și Shiller (1987), în forma ei slabă
- PIB, consum și investiții: urma 28,9 față de 29,80: rangul 0 la 5%, foarte aproape de respingere
  - creșterea echilibrată implică rangul 2 (ponderi stabile ale consumului și investițiilor); cu Engle–Granger, consumul și venitul erau cointegrate ($p = 0{,}029$): putere mică, nu dovada absenței
- Monedele: urma 24,2: rangul 0; trei trenduri stochastice separate (secțiunea 8)

Cazul termenilor deterministi schimbă răspunsul

Termeni deterministi	$\lambda_{\text{trace}}(0)$	5%	$\lambda_{\text{trace}}(1)$	5%	$\lambda_{\text{trace}}(2)$	5%
niciunul, cazul 1 (`det_order=-1`)	45,9	24,28	13,3	12,32	0,4	4,13
constantă, cazul 3 (`det_order=0`)	54,6	29,80	21,6	15,49	3,1	3,84
constantă și trend, cazul 5 (`det_order=1`)	60,0	35,01	23,7	18,40	4,8	3,84

- Randamentele din SUA la 1, 5 și 10 ani: rangurile 2, 2 și 3
- Cu trend liniar, testul spune că fiecare randament este staționar în jurul unui trend: neplauzibil pentru ratele dobînzii pe 66 de ani
  - alegem termenii deterministi după teorie și după grafic, nu după rezultatul care ne convine
- Alte probleme practice: numărul de laguri k; distorsiunile nivelului de semnificație în eșantioane mici (factorul de corecție $(T - nk)/T$, Reinsel și Ahn (1992)); rupturile structurale

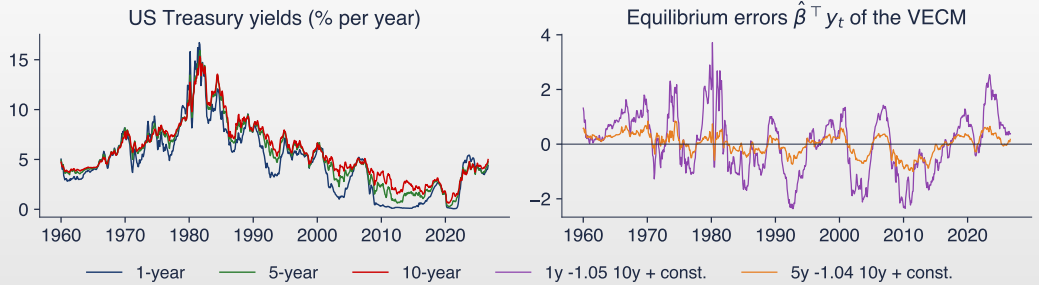
Studiu de caz: Johansen și Juselius (1990)

- **Întrebarea**: există o cerere de bani stabilă în Danemarca și Finlanda?
  - Johansen și Juselius (1990): masa monetară reală, venitul real, ratele dobînzii (și inflația); date trimestriale
- **Metoda**: VECM prin verosimilitate maximă; rangul prin testele urmei și ale valorii proprii maxime; apoi **teste ale restricțiilor** asupra lui β și α
  - de exemplu o elasticitate unitară față de venit, $\beta = (1, -1, \cdot)$; exogenitatea slabă a venitului și a ratelor dobînzii
- **Moștenirea**: modelul metodologiei „VAR cointegrat" Juselius (2006): testăm rangul, apoi testăm ipotezele economice ca restricții
  - una dintre cele mai citate lucrări din econometria aplicată

Recapitulare: testele Johansen

- Valorile proprii ale unei regresii cu rang redus; statisticile urmei și a valorii proprii maxime; testare secvențială de la $r = 0$
- Valorile critice depind de $n - r$ și de cazul termenilor determiniști
- Randamentele: rangul 2; agregatele macroeconomice: la limită; monedele: rangul 0

Modelul VECM al structurii la termen



- Randamentele titlurilor de stat americane la 1, 5 și 10 ani (FRED GS1, GS5, GS10), ianuarie 1960–septembrie 2026; VECM cu rangul 2, 2 laguri ale diferențelor, constantă restricționată la relații (cazul 2)

TSA_ch7_johansen_vecm

Interpretarea vectorilor de cointegrare

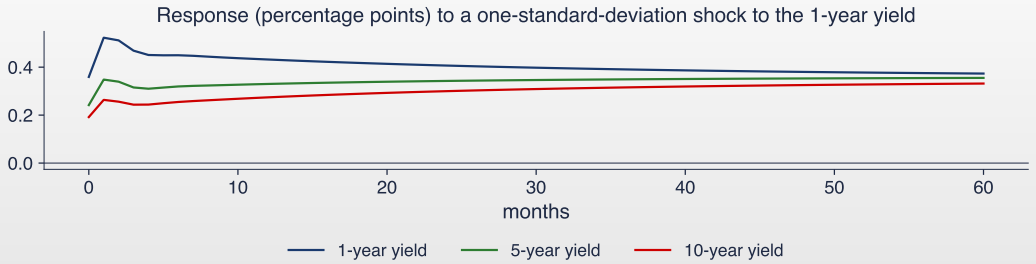
- Normalizare pe randamentele la 1 și 5 ani: $\hat{\beta}_1^\top \mathbf{y}_t = i_t^{(1)} - 1{,}045\, i_t^{(10)} + 1{,}22$, $\hat{\beta}_2^\top \mathbf{y}_t = i_t^{(5)} - 1{,}044\, i_t^{(10)} + 0{,}59$
  - ambele pante sînt apropiate de 1: echilibrele sînt aproape spread-urile $i^{(1)} - i^{(10)}$ și $i^{(5)} - i^{(10)}$, cu prime de termen medii
- Erorile de echilibru sînt staționare: ADF p $< 0{,}001$ și $0{,}008$; sînt mari în anii 1980 și în perioadele cu dobînzi aproape de zero
- Un test formal pentru $\beta = (1, -1)$ la fiecare spread este un test al raportului de verosimilitate Johansen (1991); cu $\hat{\beta}$ superconsistent, valori atît de apropiate de 1 sînt informative

Coeficienții de ajustare

Ecuația	$\hat{\alpha}_{\cdot \mathbf{1}}$	t	$\hat{\alpha}_{\cdot \mathbf{2}}$	t
$\Delta i_t^{(\mathbf{1})}$ (1 an)	$-0{,}021$	$-0{,}82$	$0{,}024$	$0{,}31$
$\Delta i_t^{(\mathbf{5})}$ (5 ani)	$0{,}045$	$2{,}21$	$-0{,}122$	$-2{,}00$
$\Delta i_t^{(\mathbf{10})}$ (10 ani)	$0{,}040$	$2{,}22$	$-0{,}077$	$-1{,}43$

- Randamentul la 1 an nu reacționează la niciuna dintre erori ($|t| < 1$): se comportă ca **slab exogen**
  - capătul scurt urmează politica monetară; randamentele la 5 și 10 ani fac ajustarea ($|t|$ între 1,43 și 2,22)
- Erorile de echilibru $\mathbf{z}_t = \hat{\beta}^\top \mathbf{y}_t$ urmează $\mathbf{z}_t = (I + \hat{\beta}^\top \hat{\alpha})\, \mathbf{z}_{t-1} + \ldots$; valorile proprii 0,969 și 0,926
  - timpi de înjumătățire de circa 22,1 și 9,0 luni: corecție lentă a erorii, tipică pentru ratele dobînzii

Funcțiile de răspuns la impuls ale modelului VECM



- Răspunsuri ortogonalizate (Cholesky, ordinea 1 an, 5 ani, 10 ani; Capitolul 6) la un șoc de o abatere standard asupra randamentului la 1 an

TSA_ch7_johansen_vecm

Interpretarea răspunsurilor la impuls

- La impact: +0,36, +0,24 și +0,19 puncte procentuale pentru 1, 5 și 10 ani
  - după 60 de luni: +0,37, +0,36 și +0,33: efectele **nu** se sting și devin aproape egale
- O deplasare permanentă a trendului comun (nivelul), cu spread-uri staționare: semnătura unui singur trend comun, $n - r = 1$
- Într-un VAR staționar (Capitolul 6) orice răspuns revine la zero; într-un VECM, răspunsurile pe termen lung sînt în general diferite de zero

Recapitulare: β și α

- $\hat{\beta}$: normalizăm, interpretăm ca echilibre (spread-uri, rapoarte), testăm restricțiile economice
- $\hat{\alpha}$: cine se ajustează și cît de repede; un rînd nul înseamnă exogenitate slabă
- Șocurile au efecte permanente asupra nivelurilor cointegrate, dar nu asupra erorilor de echilibru

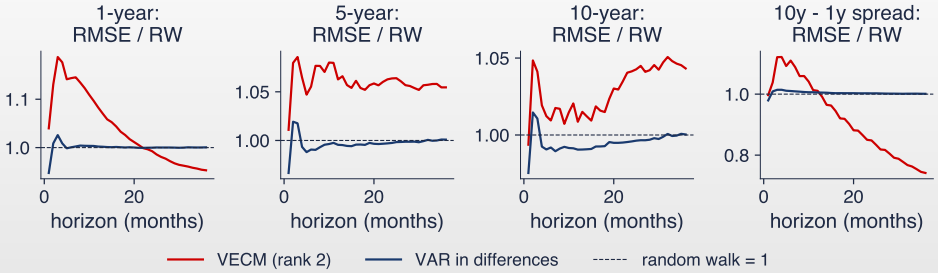
Argumentele teoretice

- Prognozele VECM păstrează echilibrele: pe măsură ce orizontul crește, $\hat{\beta}^\top \hat{\mathbf{y}}_{T+h}$ revine la media sa
  - un VAR în diferențe nu folosește informația din niveluri: prognozele lui pentru spread-uri rămîn la valoarea curentă
- Engle și Yoo (1987): impunerea cointegrării îmbunătățește prognozele pe orizonturi lungi în sisteme simulate
- Christoffersen și Diebold (1998): cîștigurile sînt concentrate în **combinațiile de cointegrare**
  - pentru nivelurile individuale, eroarea de prognoză este dominată de trendul comun, pe care niciun model nu îl poate prezice
  - eroarea de estimare din α, β și din constante poate face un VECM mai slab în practică
- Verificăm în afara eșantionului, cu reestimare la fiecare origine a prognozei

Experimentul de prognoză

- Datele: randamentele din SUA la 1, 5 și 10 ani, lunar, din 1960
- 135 de origini ale prognozei, la fiecare trei luni, din ianuarie 1990 pînă în iulie 2023; modelele sînt reestimate pe datele de pînă la fiecare origine
  - VECM cu rangul 2 și constantă restricționată; VAR în diferențe fără constantă, cu aceleași laguri; mersul aleator (fără schimbare)
- Orizonturi de la 1 la 36 de luni; RMSE (root mean squared error, rădăcina erorii pătratice medii) a fiecărui model împărțită la cea a mersului aleator
  - raport sub 1: mai bun decît mersul aleator; și pentru spread-ul dintre randamentul la 10 ani și cel la 1 an

VECM față de un VAR în diferențe, în afara eșantionului



- RMSE relativ la mersul aleator, pe orizonturi; primele trei panouri: randamentele; ultimul panou: spread-ul 10 ani minus 1 an

TSA_ch7_forecasting

Interpretarea comparației prognozelor

- Nivelurile: niciun model nu este clar mai precis decît mersul aleator; VECM este mai slab pe orizonturi scurte (1 an la 6 luni: 1,14; 5 ani: 1,06)
  - VAR-ul în diferențe rămîne aproape de 1 la orice orizont (1 an la 12 luni: 1,00)
- Spread-ul: VECM este mai precis pe orizonturi lungi: 0,85 la 24 de luni și 0,74 la 36 de luni; VAR-ul în diferențe: 1,00
  - exact tiparul din Christoffersen și Diebold (1998): cointegrarea ajută la prognoza erorilor de echilibru, nu a trendului
- Lecția: folosim un VECM cînd ne interesează relația (un spread, un raport, o pereche); pentru nivelurile singure, mersul aleator este greu de depășit

Recapitulare: prognoza

- VECM readuce prognozele erorilor de echilibru la mediile lor; VAR-ul în diferențe nu face acest lucru
- În afara eșantionului: cîștiguri pentru spread pe orizonturi lungi, niciunul pentru niveluri
- Comparăm întotdeauna cu mersul aleator, cu reestimare și fără a folosi date din viitor

Paritatea puterii de cumpărare

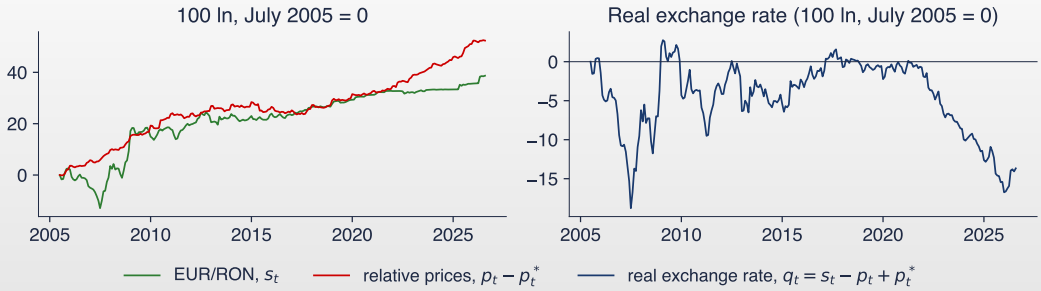


Banca Națională a României, care publică cursurile de referință

Foto: Ștefan Jurcă (2015); CC BY 2.0; Wikimedia Commons

- **Paritatea relativă a puterii de cumpărare** (PPP, purchasing power parity): cursul compensează diferențele de inflație
  - $s_t = 100 \ln(\text{EUR/RON})$; p_t, p_t^*: $100 \ln$ din IAPC (indicele armonizat al prețurilor de consum) al României și al zonei euro
  - PPP este valabilă pe termen lung dacă cursul real $q_t = s_t - p_t + p_t^*$ este staționar: cointegrare cu $\beta = (1, -1, 1)$
- Motivele pentru care PPP poate să nu fie valabilă
  - Balassa (1964): creșterea rapidă a productivității în sectorul bunurilor comercializabile ridică prețurile serviciilor necomercializabile într-o economie în convergență: o apreciere reală în trend
  - chiar acolo unde PPP este valabilă, abaterile se sting lent; sinteza Taylor și Taylor (2004) raportează timpi de înjumătățire de mai mulți ani

PPP pentru leu



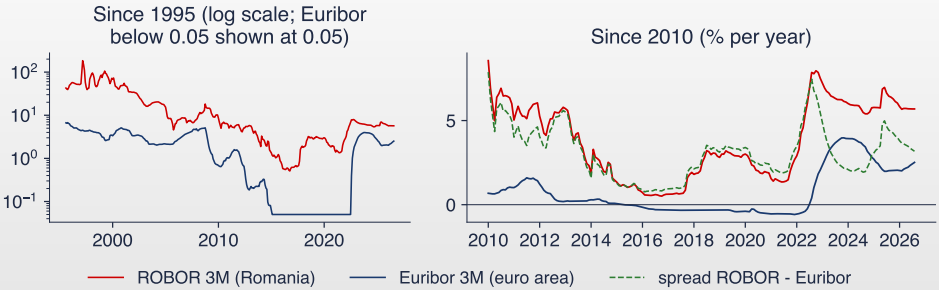
- Lunar, iulie 2005–august 2026: EUR/RON (media lunară a cursului de referință BNR), IAPC al României și al zonei euro (Eurostat, 2015 = 100)

TSA_ch7_parity_conditions

Interpretarea PPP pentru leu

- Din 2005 leul a pierdut 38,7 puncte logaritmice față de euro, în timp ce prețurile din România au crescut cu 52,4 puncte logaritmice mai mult decît cele din zona euro
  - cursul real s-a modificat cu $-13{,}7$ puncte logaritmice: o apreciere reală a leului, concentrată după 2021
- ADF pe q_t: p $= 0{,}24$; Engle–Granger pentru s_t pe $p_t - p_t^*$: panta 0,89, p $= 0{,}34$; Johansen pe (s_t, p_t, p_t^*): rangul 0
- Nicio dovadă de PPP în 21 de ani, în acord cu convergența de tip Balassa–Samuelson; 21 de ani pot fi și prea puțini pentru timpi de înjumătățire de mai mulți ani

ROBOR și Euribor



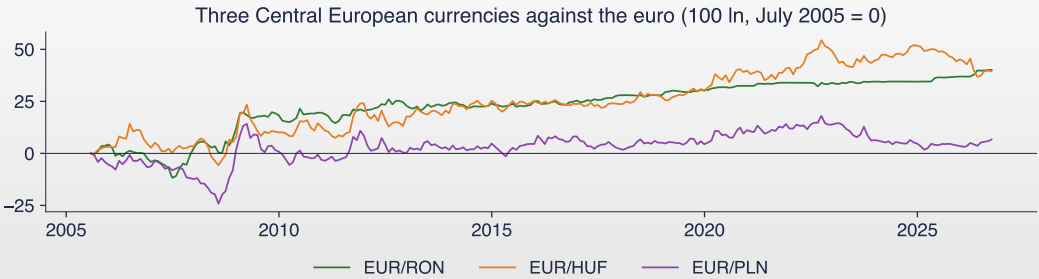
Ratele dobînzii pe piața monetară la trei luni (Eurostat), august 1995–august 2026: ROBOR 3M pentru România și Euribor 3M pentru zona euro

TSA_ch7_parity_conditions

Interpretarea ROBOR și Euribor

- Eșantionul complet: Engle–Granger p = 0,52, Phillips–Ouliaris p = 0,010: dezinflația din anii 1990 domină, iar testele nu concordă
- Din 2010: p = 0,047 (Engle–Granger) și 0,029 (Phillips–Ouliaris), panta 1,19, spread-ul mediu 3,11 puncte procentuale
  - ECM pentru ROBOR: $\hat{\gamma} = -0{,}020$ ($t = -1{,}18$), timp de înjumătățire de circa 34 de luni: ajustare slabă și lentă
- Politica monetară a României urmărește propria țintă de inflație; legătura cu Euribor este slabă (Seminarul 7, B4, adaugă randamentul la 10 ani al României)

Trei monede central-europene



- EUR/RON, EUR/HUF și EUR/PLN, cursuri încrucișate calculate din cursurile de referință BNR, la sfîrșitul lunii, 100 ln

TSA_ch7_parity_conditions

Interpretarea celor trei monede

- Din iulie 2005: EUR/RON +40,1, EUR/HUF +39,5, EUR/PLN +6,7 puncte logaritmice; ADF nu respinge rădăcina unitară la 5% pentru niciun curs (p = 0,55; 0,75; 0,08, EUR/PLN la limită la 10%)
- Johansen: urma 24,2 pentru $r = 0$ (valoarea critică 29,80): nicio dovadă de cointegrare, nici din 2012 (urma 12,7)
  - o ancoră comună (euro) și șocuri similare nu creează un trend comun: fiecare bancă centrală și fiecare evoluție a inflației adaugă propriul trend
- Modelul potrivit pentru aceste cursuri este un VAR în diferențe (Capitolul 6); Seminarul 7 (B3) reia analiza

Recapitulare: exemple economice

- Nicio dovadă de PPP pentru leu în 2005–2026 (rădăcina unitară în q_t nu este respinsă): aprecierea reală a unei economii în convergență
- ROBOR și Euribor: o legătură slabă și lentă din 2010; eșantionul decide verdictul
- Teoria propune β; testele, eșantionul și termenii determiniști decid dacă datele sînt de acord

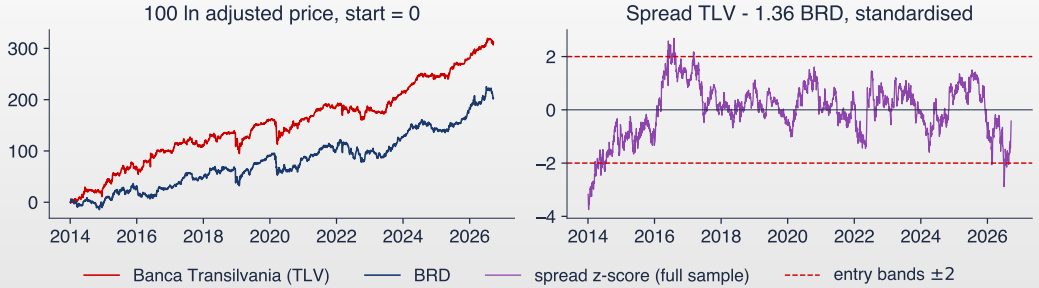
Ideea de pairs trading

- Două acțiuni expuse acelorași șocuri (două bănci, două companii petroliere) pot fi cointegrate: spread-ul lor revine la medie
  - cînd spread-ul este neobișnuit de mare, vindem acțiunea scumpă și cumpărăm acțiunea ieftină; închidem cînd spread-ul a revenit
- O tranzacție de **valoare relativă**: direcția pieței se anulează; profitul vine din corecția erorii
  - Gatev, Goetzmann și Rouwenhorst (2006): metoda distanței pe acțiuni americane, profitabilă în perioada 1962–2002
  - Do și Faff (2010): profiturile au scăzut în anii următori
- Un bun test pentru o idee din seriile de timp: trebuie să funcționeze **în afara eșantionului**, **după costuri** și pe perechi alese **fără a privi în viitor**

O regulă fără informații din viitor

- **Formarea** (cele 252 de zile de tranzacționare anterioare): testăm fiecare pereche cu Engle–Granger; păstrăm perechile cu $p < 0{,}05$
  - $P_{A,t}$, $P_{B,t}$: prețurile acțiunilor A și B; r_A, r_B: randamentele lor logaritmice zilnice
  - raportul de acoperire $\hat{b}$ prin OLS pentru $\ln P_A$ pe $\ln P_B$; media $\bar{s}$ și abaterea standard $\hat{\sigma}_s$ ale spread-ului $s_t = \ln P_{A,t} - \hat{a} - \hat{b} \ln P_{B,t}$
- **Tranzacționarea** (următoarele 126 de zile), cu parametrii din formare ficși: $z_t = (s_t - \bar{s})/\hat{\sigma}_s$
  - $z_t > 2$: vindem A în lipsă, cumpărăm $\hat{b}$ din B; $z_t < -2$: invers; închidem la $z_t = 0$ sau la sfîrșitul ferestrei
  - randamentul zilnic pe unitatea de expunere brută: $\pm(r_A - \hat{b}\, r_B)/(1 + |\hat{b}|)$; capital egal pentru fiecare pereche selectată
- **Costuri**: 0,20% (București) și 0,05% (SUA) din expunerea brută tranzacționată, la fiecare deschidere și închidere

Banca Transilvania și BRD



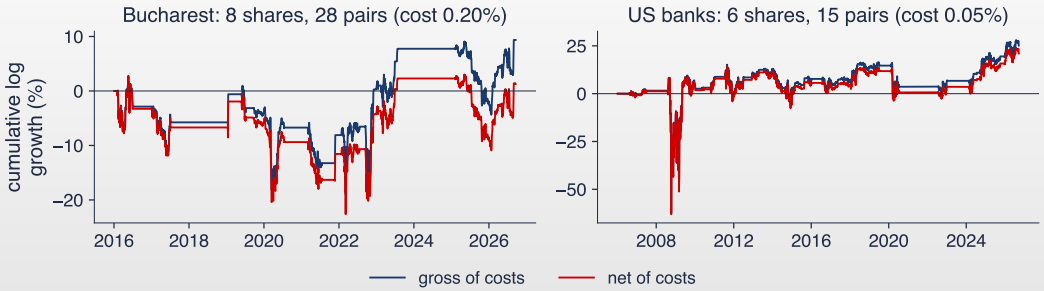
⊡ Prețuri zilnice ajustate din 2014; dreapta: spread-ul regresiei pe întregul eșantion, standardizat, cu benzile de intrare

TSA_ch7_pairs_trading

Interpretarea perechii de bănci

- Întregul eșantion: $\hat{b} = 1{,}36$; spread-ul este un AR(1) cu $\hat{\rho} = 0{,}990$: timp de înjumătățire de circa 69 de zile de tranzacționare
  - doar 5,0% din zile se află în afara benzii ± 2: puține ocazii de tranzacționare, fiecare durînd luni de zile
- Aplicarea regulii pe acest grafic, cu parametrii din întregul eșantion, dă 3,32% pe an (raportul Sharpe 0,44), după costuri
  - raportul Sharpe: randamentul mediu anual împărțit la abaterea standard anuală a randamentelor
  - o iluzie: $\hat{b}$, $\bar{s}$ și $\hat{\sigma}_s$ folosesc viitorul, iar perechea a fost aleasă pentru că pare cointegrată din 2014
- Cu regula pe ferestre mobile, perechea nu trece testul de formare în niciuna dintre cele 24 de ferestre: un an de date este prea puțin pentru a detecta o corecție atît de lentă

Pairs trading în afara eșantionului



- Stînga: 8 acțiuni lichide de la BVB (TLV, BRD, SNP, TGN, TEL, EL, SNG, SNN), din 2015; dreapta: 6 bănci americane (JPM, BAC, C, WFC, GS, MS), din 2005

TSA_ch7_pairs_trading

Interpretarea testului istoric

- București: 22 de ferestre, perechi găsite în 14, 73 de tranzacții, 62% dintre ele profitabile, dar randamentul mediu pe tranzacție este $-0{,}26\%$
  - brut 1,17% pe an (Sharpe 0,15); net 0,41% (Sharpe 0,05); costul la care profitul net devine zero: 0,31%
- Băncile americane: brut 2,77% (Sharpe 0,16), net 2,57% (Sharpe 0,14), 80 de tranzacții
  - cu o pierdere mare în toamna lui 2008: relația de cointegrare poate dispărea exact atunci cînd este cea mai importantă
- Multe cîștiguri mici și cîteva pierderi mari: profilul tipic al unei strategii de revenire la medie

Limitele strategiei pairs trading

- **Testarea multiplă**: cu 28 de perechi și un test de 5%, circa 1,4 perechi trec întîmplător în fiecare fereastră
- **Informațiile din viitor**: alegerea perechilor, a datelor de început sau a pragurilor după ce am văzut întregul eșantion
- **Rupturile**: fuziunile, recapitalizările, reglementările și crizele schimbă β; spread-ul poate să nu mai revină
- **Fricțiunile pieței**: vînzarea în lipsă este limitată la BVB, împrumutul acțiunilor costă un comision, diferențele bid-ask sînt mari pentru companiile mici
- **Corecția lentă a erorii**: timpi de înjumătățire de luni înseamnă capital blocat luni de zile și o așteptare lungă într-o poziție pierzătoare

Recapitulare: pairs trading

- Pairs trading mizează pe corecția erorii în spread-ul a două acțiuni cointegrate
- În eșantion pare atractiv; în afara eșantionului, după costuri, profiturile la BVB sînt aproape nule
- Raportăm selecția, costurile, numărul de tranzacții și cel mai rău episod, nu doar raportul Sharpe

Contribuția posibilă a AI

- **Cod**: o primă versiune a unui script care aplică teste de rădăcină unitară, Engle–Granger, Phillips–Ouliaris și Johansen pe multe serii și tabelează verdictele
- **Explicații**: o a doua explicație a teoremei de reprezentare a lui Granger sau a unui tabel de rezultate `VECM`
- **Explorare**: perechi candidate la BVB sau condiții de paritate pentru mai multe țări din Europa Centrală
- Exemplu de prompt
  - `Write Python code that loads monthly US Treasury yields GS1, GS5 and GS10 from FRED, runs the Johansen trace test with a constant and BIC lags, fits a VECM with the chosen rank using statsmodels, and prints beta normalised on the first variables, alpha with t-statistics and the half-lives of the equilibrium errors.`

Verificări necesare

- Valorile critice: Engle–Granger (MacKinnon) pentru reziduuri, nu Dickey–Fuller; Johansen pentru cazul potrivit al termenilor determiniști
- Sensul ipotezei nule: „fără cointegrare" la Engle–Granger; „rang $\leq r$" la testul urmei
- Că fiecare serie este $I(1)$ înainte de testare și că o corelație mare între niveluri nu este raportată drept cointegrare
- Semnul coeficienților de ajustare și timpii de înjumătățire, în unitatea de timp potrivită
- Testele istorice: fără informații din viitor la alegerea perechilor, cu costuri incluse și cu numărul perechilor testate raportat
- Fiecare referință citată: trebuie să existe; verificați DOI-ul

Idei de reținut

- Seriile $I(1)$ cointegrate au trenduri stochastice comune; o combinație $\beta^\top \mathbf{y}_t$ este staționară
- Engle–Granger: OLS în niveluri, apoi ADF pe reziduuri, cu valorile critice MacKinnon; verificăm cu Phillips–Ouliaris
- ECM: variațiile răspund la lagul erorii de echilibru; γ dă viteza și timpul de înjumătățire
- VECM: $\Pi = \alpha\beta^\top$; reprezentarea Granger: cointegrare $\Leftrightarrow$ corecția erorii; testele Johansen aleg r
- Cointegrarea ajută la prognoza relațiilor (spread-uri), nu a nivelurilor; aplicațiile se evaluează în afara eșantionului și după costuri

Formule de reținut

Mărimea	**Formula**
Cointegrarea	$\mathbf{y}_t \sim I(1), \quad \beta^\top \mathbf{y}_t \sim I(0)$
Engle–Granger	$y_t = a + bx_t + u_t; \quad \Delta\hat{u}_t = \gamma\hat{u}_{t-\mathbf{1}} + \sum_j \delta_j \Delta\hat{u}_{t-j} + e_t, \quad H_{\mathbf{0}}\colon\ \gamma = 0$
ECM	$\Delta y_t = c + \gamma\,\hat{u}_{t-\mathbf{1}} + \delta_{\mathbf{0}}\Delta x_t + \cdots + \varepsilon_t, \quad h_{\mathbf{1/2}} = \ln 0{,}5 / \ln(1+\gamma)$
VECM	$\Delta\mathbf{y}_t = \alpha\beta^\top \mathbf{y}_{t-\mathbf{1}} + \sum_{i=\mathbf{1}}^{p-\mathbf{1}} \Gamma_i \Delta\mathbf{y}_{t-i} + \mathbf{u}_t, \quad \Pi = \sum_i A_i - I, \quad \Gamma_i = -\sum_{j>i} A_j$
Johansen	$\lambda_{\mathbf{trace}}(r) = -T\sum_{i>r}\ln(1-\hat{\lambda}_i), \quad \lambda_{\max}(r) = -T\ln(1-\hat{\lambda}_{r+\mathbf{1}})$
Erorile de echilibru	$\mathbf{z}_t = \beta^\top \mathbf{y}_t\colon \quad \mathbf{z}_t = (I + \beta^\top\alpha)\mathbf{z}_{t-\mathbf{1}} + \ldots$

Autoevaluare

- **Întrebare**: Engle–Granger cu două variabile dă $\tau = -3{,}1$ pentru $T = 300$. Respingeți „fără cointegrare" la 5%?
  - **Răspuns**: nu: $-3{,}1 > -3{,}36$; cu valoarea Dickey–Fuller ($-2{,}87$) ați respinge greșit
- **Întrebare**: un ECM dă $\hat{\gamma} = -0{,}1$ pe date lunare. Cît este timpul de înjumătățire?
  - **Răspuns**: $\ln 0{,}5 / \ln 0{,}9 \approx 6{,}6$ luni
- **Întrebare**: patru variabile $I(1)$ au rangul de cointegrare 3. Cîte trenduri comune le antrenează?
  - **Răspuns**: $n - r = 1$
- Urmează: Capitolul 8, memoria lungă: serii între $I(0)$ și $I(1)$, diferențierea fracționară și ARFIMA

Bibliografie (1/3)

- Balassa, B. (1964). The purchasing-power parity doctrine: A reappraisal. *Journal of Political Economy*, 72(6), 584–596. doi:10.1086/258965
- Banerjee, A., Dolado, J. J., & Mestre, R. (1998). Error-correction mechanism tests for cointegration in a single-equation framework. *Journal of Time Series Analysis*, 19(3), 267–283. doi:10.1111/1467-9892.00091
- Campbell, J. Y., & Shiller, R. J. (1987). Cointegration and tests of present value models. *Journal of Political Economy*, 95(5), 1062–1088. doi:10.1086/261502
- Christoffersen, P. F., & Diebold, F. X. (1998). Cointegration and long-horizon forecasting. *Journal of Business & Economic Statistics*, 16(4), 450–456. doi:10.1080/07350015.1998.10524784
- Davidson, J. E. H., Hendry, D. F., Srba, F., & Yeo, S. (1978). Econometric modelling of the aggregate time-series relationship between consumers' expenditure and income in the United Kingdom. *The Economic Journal*, 88(352), 661–692. doi:10.2307/2231972
- Do, B., & Faff, R. (2010). Does simple pairs trading still work? *Financial Analysts Journal*, 66(4), 83–95. doi:10.2469/faj.v66.n4.1
- Engle, R. F., & Granger, C. W. J. (1987). Co-integration and error correction: Representation, estimation, and testing. *Econometrica*, 55(2), 251–276. doi:10.2307/1913236
- Engle, R. F., & Yoo, B. S. (1987). Forecasting and testing in co-integrated systems. *Journal of Econometrics*, 35(1), 143–159. doi:10.1016/0304-4076(87)90085-6
- Gatev, E., Goetzmann, W. N., & Rouwenhorst, K. G. (2006). Pairs trading: Performance of a relative-value arbitrage rule. *Review of Financial Studies*, 19(3), 797–827. doi:10.1093/rfs/hhj020
- Granger, C. W. J. (1981). Some properties of time series data and their use in econometric model specification. *Journal of Econometrics*, 16(1), 121–130. doi:10.1016/0304-4076(81)90079-8

Bibliografie (2/3)

- Granger, C. W. J. (2004). Time series analysis, cointegration, and applications. *American Economic Review*, 94(3), 421–425. doi:10.1257/0002828041464669
- Granger, C. W. J., & Newbold, P. (1974). Spurious regressions in econometrics. *Journal of Econometrics*, 2(2), 111–120. doi:10.1016/0304-4076(74)90034-7
- Hamilton, J. D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press. doi:10.2307/j.ctv14jx6sm
- Huang, C., & Petukhina, A. (2022). *Applied Time Series Analysis and Forecasting with Python*. Springer. doi:10.1007/978-3-031-13584-2
- Johansen, S. (1988). Statistical analysis of cointegration vectors. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12(2–3), 231–254. doi:10.1016/0165-1889(88)90041-3
- Johansen, S. (1991). Estimation and hypothesis testing of cointegration vectors in Gaussian vector autoregressive models. *Econometrica*, 59(6), 1551–1580. doi:10.2307/2938278
- Johansen, S. (1995). *Likelihood-Based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models*. Oxford University Press. doi:10.1093/0198774508.001.0001
- Johansen, S., & Juselius, K. (1990). Maximum likelihood estimation and inference on cointegration, with applications to the demand for money. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 52(2), 169–210. doi:10.1111/j.1468-0084.1990.mp52002003.x
- Juselius, K. (2006). *The Cointegrated VAR Model: Methodology and Applications*. Oxford University Press. doi:10.1093/oso/9780199285662.001.0001
- Lütkepohl, H. (2005). *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Springer. doi:10.1007/978-3-540-27752-1

Bibliografie (3/3)

- MacKinnon, J. G. (1994). Approximate asymptotic distribution functions for unit-root and cointegration tests. *Journal of Business & Economic Statistics*, 12(2), 167–176. doi:10.1080/07350015.1994.10510005
- MacKinnon, J. G. (2010). Critical values for cointegration tests. Queen's Economics Department Working Paper No. 1227, Queen's University. ideas.repec.org/p/qed/wpaper/1227
- MacKinnon, J. G., Haug, A. A., & Michelis, L. (1999). Numerical distribution functions of likelihood ratio tests for cointegration. *Journal of Applied Econometrics*, 14(5), 563–577. doi:10.1002/(SICI)1099-1255(199909/10)14:5<563::AID-JAE530>3.0.CO;2-R
- Murray, M. P. (1994). A drunk and her dog: An illustration of cointegration and error correction. *The American Statistician*, 48(1), 37–39. doi:10.1080/00031305.1994.10476017
- Osterwald-Lenum, M. (1992). A note with quantiles of the asymptotic distribution of the maximum likelihood cointegration rank test statistics. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 54(3), 461–472. doi:10.1111/j.1468-0084.1992.tb00013.x
- Phillips, P. C. B., & Ouliaris, S. (1990). Asymptotic properties of residual based tests for cointegration. *Econometrica*, 58(1), 165–193. doi:10.2307/2938339
- Reinsel, G. C., & Ahn, S. K. (1992). Vector autoregressive models with unit roots and reduced rank structure: Estimation, likelihood ratio test, and forecasting. *Journal of Time Series Analysis*, 13(4), 353–375. doi:10.1111/j.1467-9892.1992.tb00113.x
- Stock, J. H., & Watson, M. W. (1988). Testing for common trends. *Journal of the American Statistical Association*, 83(404), 1097–1107. doi:10.1080/01621459.1988.10478707
- Stock, J. H., & Watson, M. W. (1993). A simple estimator of cointegrating vectors in higher order integrated systems. *Econometrica*, 61(4), 783–820. doi:10.2307/2951763
- Taylor, A. M., & Taylor, M. P. (2004). The purchasing power parity debate. *Journal of Economic Perspectives*, 18(4), 135–158. doi:10.1257/0895330042632744