

Serii de timp

Capitolul 8: Memorie lungă și ARFIMA



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București
IDA Institute Digital Assets
Blockchain Research Center
AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance
Academia Română, Institutul de Prognoză Economică
MSCA Digital Finance

Acronime folosite în acest material (1/2)

- **ACF**: Autocorrelation Function (funcția de autocorelație)
- **ADF**: Augmented Dickey–Fuller (test) — testul Dickey–Fuller augmentat
- **AI**: Artificial Intelligence (inteligență artificială)
- **AIC**: Akaike Information Criterion (criteriul informațional Akaike)
- **AR**: AutoRegressive (model) — model autoregresiv
- **ARCH**: AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity (heteroscedasticitate condiționată autoregresivă)
- **ARFIMA**: AutoRegressive Fractionally Integrated Moving Average (model) — model autoregresiv fracționar integrat cu medie mobilă
- **ARIMA**: AutoRegressive Integrated Moving Average (model) — model autoregresiv integrat cu medie mobilă
- **ARMA**: AutoRegressive Moving Average (model) — model autoregresiv cu medie mobilă
- **BET**: Bucharest Exchange Trading (index) — indicele de referință al Bursei de Valori București
- **BIC**: Bayesian Information Criterion (criteriul informațional bayesian al lui Schwarz)
- **BNR**: Banca Națională a României
- **DFA**: Detrended Fluctuation Analysis (analiza fluctuațiilor fără tendință)
- **EODHD**: EOD Historical Data (market-data provider) — furnizor de date de piață
- **FFT**: Fast Fourier Transform (transformata Fourier rapidă)

Acronime folosite în acest material (2/2)

- **FIGARCH**: Fractionally Integrated GARCH (model GARCH fracționar integrat)
- **FRED**: Federal Reserve Economic Data (baza de date economice a Rezervei Federale din St. Louis)
- **GARCH**: Generalised AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity (heteroscedasticitate condiționată autoregresivă generalizată)
- **GPH**: Geweke–Porter-Hudak (estimator) — estimatorul Geweke–Porter-Hudak al parametrului de memorie lungă
- **HAR**: Heterogeneous AutoRegressive (model) — model autoregresiv heterogen
- **HICP**: Harmonised Index of Consumer Prices (indicele armonizat al prețurilor de consum)
- **IAPC**: Indicele armonizat al prețurilor de consum
- **IGARCH**: Integrated GARCH (GARCH integrat)
- **IPC**: Indicele prețurilor de consum
- **LW**: Local Whittle (estimator) — estimatorul Whittle local
- **MA**: Moving Average (medie mobilă)
- **ML**: Machine Learning (învățare automată)
- **OLS**: Ordinary Least Squares (metoda celor mai mici pătrate)
- **RMS**: Root Mean Square (abaterea medie pătratică)
- **RMSE**: Root Mean Squared Error (rădăcina erorii pătratice medii)
- **RV**: Realised Volatility (volatilitatea realizată)
- **SE**: Standard Error (eroare standard)
- **SUA**: Statele Unite ale Americii

Întrebarea de azi și traseul

- **Întrebarea**: cît timp rămîne un șoc într-o serie? Modelele ARMA (Capitolul 2) uită exponențial; unele serii uită mult mai lent
  - exemple: viiturile Nilului, inflația, șomajul, volatilitatea randamentelor bursiere
- **Traseul** capitolului
  - memorie scurtă și memorie lungă: descreșterea exponențială și cea hiperbolică a ACF
  - diferențierea fracționară $(1-L)^d$ și modelul ARFIMA(p,d,q)
  - estimarea lui d: R/S, DFA, GPH, Whittle local, verosimilitate maximă; prognoza
  - memoria lungă a volatilității; memoria lungă aparentă, produsă de rupturi și regimuri
- Pornim de la Capitolul 1 (ACF, spectru), Capitolul 3 (rădăcini unitare) și Capitolul 5 (GARCH)

Rezultatele învățării

- Distingeți memoria scurtă de memoria lungă după descreșterea ACF și după spectrul din apropierea frecvenței zero
- Calculați ponderile lui $(1-L)^d$ și autocorelațiile unui ARFIMA$(0,d,0)$
- Precizați intervalele de staționaritate și de inversabilitate ale lui d și legătura $H = d + 1/2$
- Estimați d cu R/S, DFA, GPH, Whittle local și verosimilitate maximă și apreciați incertitudinea estimărilor
- Faceți prognoze cu ARFIMA și comparați-le corect cu modele ARMA de referință
- Recunoașteți memoria lungă aparentă, cauzată de rupturi și de schimbări de regim

Bibliografie și instrumente

- Manual: Huang și Petukhina (2022) (modelele ARIMA și GARCH, pe care se sprijină acest capitol)
  - teorie: Brockwell și Davis (1991), secț. 13.2 (procese cu memorie lungă); Beran et al. (2013); sinteză: Baillie (1996)
  - istorie: Graves et al. (2017), „A brief history of long memory: Hurst, Mandelbrot and the road to ARFIMA"
- Quantlet-urile Python ale capitolului: Quantlets/Ch_08
  - estimatorii sînt scriși explicit în cod (R/S, DFA, GPH, Whittle local, ML exactă); `statsmodels` nu are o clasă ARFIMA; FIGARCH provine din pachetul `arch`
- Notebook-ul cursului: deschideți în Google Colab
- Curs video: Applied Time Series Analysis with Python

Harold Edwin Hurst și Nilul



H. E. Hurst (1880–1978)

Foto: Elliott & Fry (1953); domeniu public; Wikimedia Commons

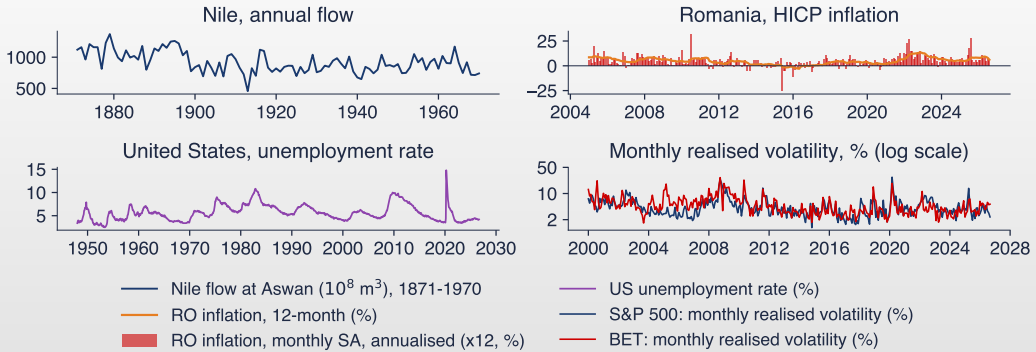
- Hurst a lucrat peste 60 de ani în Egipt, măsurînd Nilul pentru a dimensiona rezervoarele barajelor de la Aswan
  - un rezervor trebuie să acopere cel mai lung șir de ani secetoși: mărimea lui depinde de **amplitudinea** intrărilor cumulate
- Hurst (1951): amplitudinea crește ca n^H, cu $H \approx 0{,}7$, nu ca $n^{\mathbf{0{,}5}}$, cum ar fi pentru ani independenți
  - anii ploioși se grupează cu anii ploioși și cei secetoși cu cei secetoși, pe decenii: „efectul Iosif" din Mandelbrot și Wallis (1968)
- Aceasta este **memoria lungă**: o dependență care se stinge prea lent pentru orice model ARMA de ordin mic



Barajul Aswan Low (1902), pe Nil

Foto: Karelj (2010); domeniu public; Wikimedia Commons

Patru serii persistente



- Debitul Nilului la Aswan, 1871–1970 (statsmodels); inflația IAPC din România, anuală și lunară, ajustată sezonier (SA) cu mediile lunare (Eurostat)
- Rata șomajului din SUA (FRED UNRATE); volatilitatea realizată lunară a randamentelor zilnice S&P 500 și BET (EODHD)

TSA_ch8_memory_data

Interpretarea celor patru serii

- Fiecare serie stă mult timp deasupra sau sub media ei
  - Nilul: media 919 (10^8 m^3), perioade secetoase lungi după 1900; inflația anuală din România a atins 13,6% în noiembrie 2022 și era 6,1% în august 2026
- Șomajul din SUA crește repede în recesiuni (maximum 14,8% în aprilie 2020) și scade lent; ultima valoare 4,2% (septembrie 2026)
  - volatilitatea realizată: anii calmi alternează cu anii agitați; maxime 27% (S&P 500, martie 2020) și 27% (BET, octombrie 2008)
- Întrebarea capitolului: este aceasta o memorie care se stinge lent (lungă), o rădăcină aproape unitară sau o succesiune de regimuri?

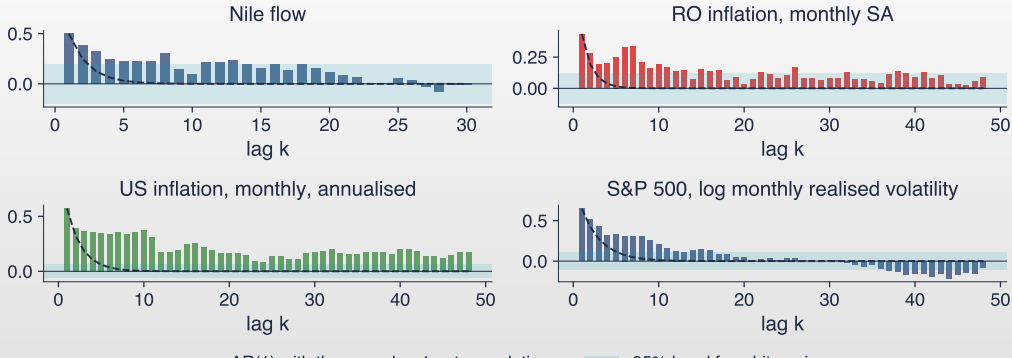
Memoria scurtă

- Reamintim (Capitolul 1): $\rho(k) = \gamma(k)/\gamma(0)$, autocorelația la lagul k a unei serii staționare
  - **memorie scurtă**: autocorelațiile sînt absolut sumabile, $\sum_{k=0}^{\infty} |\rho(k)| < \infty$
- Procesele ARMA staționare: $|\rho(k)| \leq Cr^k$, cu $0 < r < 1$: descreștere **exponențială**
  - $C > 0$: o constantă; r: rata de descreștere pe lag (pentru un AR(1), $r = |\phi|$)
  - AR(1): $\rho(k) = \phi^k$; pentru $\phi = 0{,}9$, $\rho(50) = 0{,}005$: după 50 de perioade șocul este uitat
- În domeniul frecvenței: densitatea spectrală $f(\lambda)$ este finită și pozitivă la frecvența $\lambda = 0$
  - $\lambda \in [0, \pi]$: frecvența, în radiani pe perioadă (un ciclu de lungime $2\pi/\lambda$ perioade)
  - $\gamma(k)$: autocovarianța la lagul k
  - $f(0) = \frac{1}{2\pi} \sum_k \gamma(k)$: varianța pe termen lung este finită; varianța mediei de selecție scade ca $1/T$

Memoria lungă

- **Memorie lungă** (dependență pe termen lung): $\rho(k) \sim C\, k^{2d-1}$ cînd $k \to \infty$, cu $0 < d < 1/2$
  - o descreștere **hiperbolică** (de tip putere): exponentul $2d-1$ se află în $(-1, 0)$
  - suma $\sum_k \rho(k)$ diverge: observațiile îndepărtate contează încă, luate împreună
  - $\sim$: raportul celor doi membri tinde la 1; $C, G, c > 0$: constante; d: parametrul de memorie
- În domeniul frecvenței: $f(\lambda) \sim G\, \lambda^{-2d}$ cînd $\lambda \to 0$: un **pol** la frecvența zero
  - frecvențele joase (cicluri lente de toate lungimile) poartă cea mai mare parte a variației
- Consecință: $\mathrm{Var}(\bar{x}_T) \sim c\, T^{2d-1}$ ($\bar{x}_T$: media de selecție a T observații), mai lent decît $1/T$
  - intervalele de încredere care presupun independența sînt prea înguste; parametrul de memorie d măsoară cît de lent se estompează trecutul

ACF de selecție comparată cu un AR(1)



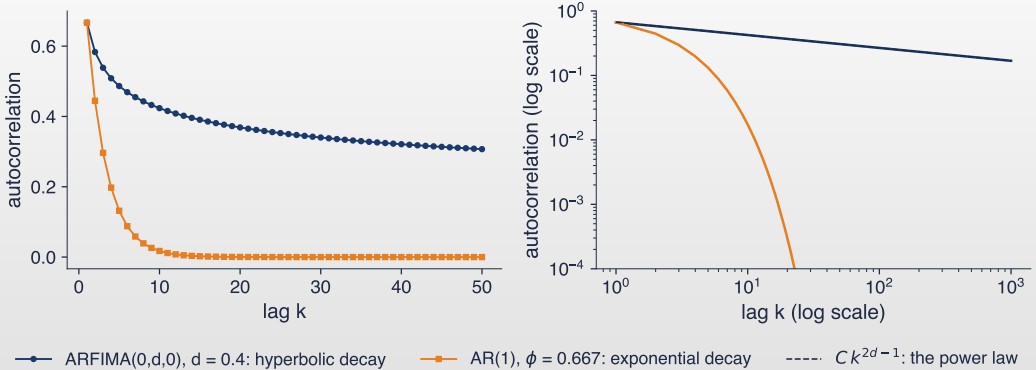
- Bare: ACF de selecție; linia punctată: $\hat{\rho}(1)^k$, ACF a unui AR(1) cu aceeași autocorelație de ordinul 1; zona colorată: $\pm 1{,}96/\sqrt{T}$

TSA_ch8_memory_data

Interpretarea ACF de selecție

- Nilul: $\hat{\rho}(1) = 0{,}50$; un AR(1) ar da $\rho(10) = 0{,}0009$, datele dau 0,09
  - 11 dintre primele 30 de autocorelații sînt deasupra benzii zgomotului alb
- Inflația lunară din România: $\hat{\rho}(1) = 0{,}44$, $\hat{\rho}(10) = 0{,}20$; 22 din 48 de laguri deasupra benzii
  - inflația lunară din SUA: 48 din 48; logaritmul volatilității realizate S&P 500: 15 din 48
- O primă autocorelație moderată, urmată de o coadă lungă care scade lent, este semnătura memoriei lungi; un AR(1) nu o poate produce

Descreștere hiperbolică și descreștere exponențială



- ACF teoretică a unui ARFIMA$(0, d, 0)$ cu $d = 0{,}4$ (secțiunile următoare) și a unui AR(1) cu același $\rho(1) = d/(1-d) = 0{,}667$; dreapta: ambele pe axe log–log, cu legea de putere Ck^{2d-1}

TSA_ch8_arfima_processes

Interpretarea celor două legi de descreștere

- Același început, cozi diferite: la lagul 10, 0,424 față de 0,017; la lagul 50, 0,307 față de $1{,}6 \cdot 10^{-9}$
  - ACF cu memorie lungă este încă 0,169 la lagul 1000
- Pe axe log–log ACF hiperbolică devine o dreaptă de pantă $2d - 1 = -0{,}2$; ACF exponențială se curbează în jos
  - panta unui grafic log–log este ideea din spatele tuturor estimatorilor din acest capitol
- Sumele autocorelațiilor: AR(1) $\sum_{k \geq 1} \phi^k = 2{,}0$; ARFIMA: 33,0 pînă la lagul 100 și 210,4 pînă la lagul 1000, în creștere

Recapitulare: memorie scurtă și memorie lungă

- Memorie scurtă: ACF sumabilă, descreștere exponențială, spectru finit la zero (ARMA)
- Memorie lungă: $\rho(k) \sim Ck^{2d-1}$, ACF nesumabilă, pol spectral $f(\lambda) \sim G\lambda^{-2d}$
- Hurst și Nilul: amplitudinile cresc ca n^H, cu $H > 1/2$
- Inflația și volatilitatea au cozi lungi ale ACF, care scad lent

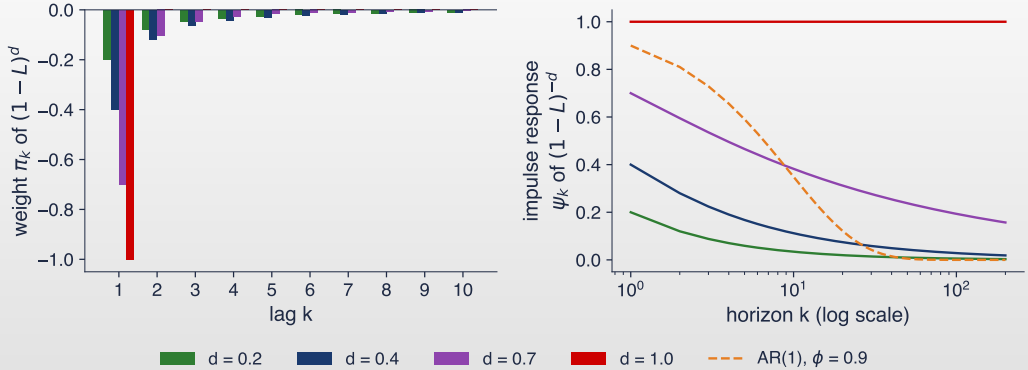
De la diferențe întregi la diferențe fracționare

- Operatorul de lag: $Lx_t = x_{t-1}$; prima diferență $(1-L)x_t = x_t - x_{t-1}$ (Capitolul 3)
  - $d = 0$: nivelul; $d = 1$: prima diferență; $d = 2$: $x_t - 2x_{t-1} + x_{t-2}$
- **Diferența fracționară**, pentru orice d real (seria binomială)
  - $(1-L)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d}{k}(-L)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k L^k$
  - $(1-L)^d = 1 - dL - \frac{d(1-d)}{2!}L^2 - \frac{d(1-d)(2-d)}{3!}L^3 - \ldots$
  - recurența: $\pi_0 = 1$, $\pi_k = \pi_{k-1}\,\dfrac{k-1-d}{k}$; pentru k mare: $\pi_k \approx -\dfrac{d}{\Gamma(1-d)}\,k^{-1-d}$
  - $\binom{d}{k} = d(d-1)\cdots(d-k+1)/k!$: coeficientul binomial pentru d real; π_k: ponderea lui x_{t-k}; $\Gamma(\cdot)$: funcția gamma, $\Gamma(n) = (n-1)!$ pentru numere întregi
- O diferență fracționară folosește **toate** valorile trecute, cu ponderi care scad hiperbolic: elimină o parte din memorie, nu toată memoria

Exemplu rezolvat: ponderile lui $(1-L)^{0,4}$

- Recurența $\pi_k = \pi_{k-1}(k-1-d)/k$ cu $d = 0{,}4$:
  - $\pi_1 = 1 \cdot (0-0{,}4)/1 = -0{,}40$
  - $\pi_2 = -0{,}40 \cdot (1-0{,}4)/2 = -0{,}12$
  - $\pi_3 = -0{,}12 \cdot (2-0{,}4)/3 = -0{,}0640$; $\quad \pi_4 = -0{,}0640 \cdot 3{,}6/4 = -0{,}0416$; $\quad \pi_5 = -0{,}0300$
- Deci $(1-L)^{0,4}x_t = x_t - 0{,}4x_{t-1} - 0{,}12x_{t-2} - 0{,}064x_{t-3} - 0{,}0416x_{t-4} - \ldots$
  - ponderile însumează $(1-1)^{0,4} = 0$ pe toate lagurile: un nivel constant este eliminat, ca la $d = 1$
- Comparați cu $d = 1$: $\pi_1 = -1$, iar toate celelalte ponderi sînt 0; $d = 0{,}7$: $\pi_1 = -0{,}70$, $\pi_2 = -0{,}105$

Diferențiere fracționară și integrare fracționară



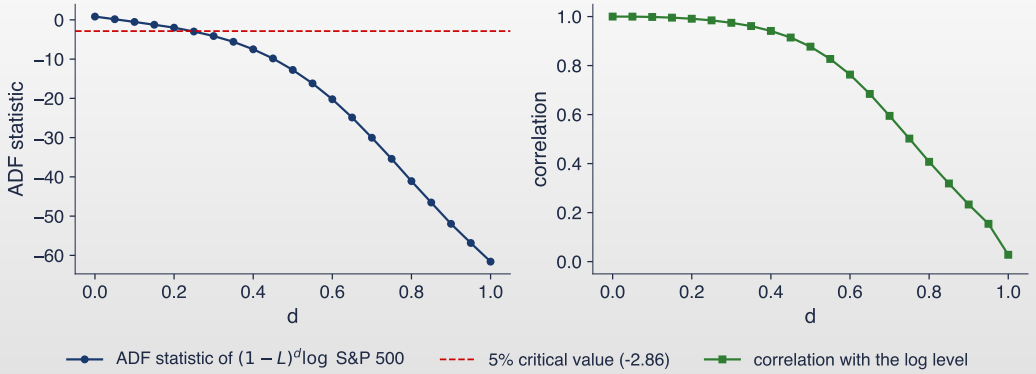
⊡ Stînga: ponderile π_k ale lui $(1-L)^d$; dreapta: răspunsurile la impuls ψ_k ale lui $(1-L)^{-d}$, adică efectul după k perioade al unui șoc unitar asupra unei serii integrate fracționar, comparate cu un AR(1) cu $\phi = 0{,}9$

TSA_ch8_fractional_differencing

Interpretarea ponderilor

- Integrarea fracționară: $x_t = (1-L)^{-d}\varepsilon_t = \sum_k \psi_k \varepsilon_{t-k}$, cu $\psi_k = \psi_{k-1}(k-1+d)/k \approx k^{d-1}/\Gamma(d)$
  - după 100 de perioade un șoc are încă ponderea 0,028 ($d = 0{,}4$) și 0,193 ($d = 0{,}7$); AR(1) păstrează $2{,}7 \cdot 10^{-5}$
- La început AR(1) își amintește mai mult (0,349 la lagul 10, față de 0,112 pentru $d = 0{,}4$); apoi uită mult mai repede
  - $d = 1$ (mers aleator): $\psi_k = 1$ mereu, șocul nu se stinge niciodată
- Pentru $0 < d < 1$ răspunsurile tind spre zero: seria **revine la medie**, chiar și cînd este nestaționară ($d \geq 0{,}5$)

Gradul de diferențiere necesar pentru un preț



⊡ Logaritmul S&P 500, zilnic, 6 715 de zile din 2000; $(1-L)^d$ cu fereastră fixă (ponderile sub 10^{-4} sînt eliminate), $d = 0;\ 0{,}05;\ \ldots;\ 1$; stînga: statistica ADF (Capitolul 3); dreapta: corelația cu nivelul logaritmic

TSA_ch8_fractional_differencing

Interpretarea diferențierii fracționare a unui preț

- Nivelul logaritmic ($d = 0$) are rădăcină unitară (ADF 0,84); randamentul ($d = 1$) este staționar (ADF $-61{,}6$), dar are corelația 0,03 cu nivelul
  - prima diferență elimină toată informația despre nivel
- Statistica ADF trece de valoarea critică de 5% ($-2{,}86$) deja la $d = 0{,}25$, unde corelația cu nivelul este încă 0,984
  - fereastra fixă are atunci 445 de ponderi
- O diferență fracționară poate face o serie staționară păstrîndu-i cea mai mare parte a memoriei: un instrument folosit pentru variabilele explicative din machine learning (Capitolul 9)

Recapitulare: diferențierea fracționară

- $(1-L)^d = \sum_k \pi_k L^k$, $\pi_k = \pi_{k-1}(k-1-d)/k$: ponderi care scad hiperbolic
- $(1-L)^{-d}$: răspunsuri la impuls $\psi_k \approx k^{d-1}/\Gamma(d)$; revenire la medie pentru $d < 1$
- d între 0 și 1 umple golul dintre niveluri și primele diferențe

Modelul ARFIMA(p, d, q)

- **Definiție**: $\phi(L)(1-L)^d(x_t - \mu) = \theta(L)\varepsilon_t$, ε_t zgomot alb cu varianța σ^2
  - $\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \cdots - \phi_p L^p$ și $\theta(L) = 1 + \theta_1 L + \cdots + \theta_q L^q$, cu rădăcinile în afara cercului unitate (Capitolul 2)
  - μ: media lui x_t; ARFIMA: autoregresiv, fracționar integrat, cu medie mobilă
- Două părți cu două roluri
  - d: memoria **pe termen lung**, coada hiperbolică a ACF
  - ϕ, θ: dinamica **pe termen scurt**, primele cîteva autocorelații
- Cazuri particulare: $d = 0$: ARMA(p, q); $d = 1$: ARIMA$(p, 1, q)$ (Capitolul 3); d între ele: integrare fracționară, $x_t \sim I(d)$

Granger, Joyeux și Hosking (1980–1981)



Clive W. J. Granger (1934–2009), Premiul Nobel 2003

Foto: Olaf Storbeck (2008); CC BY-SA 2.0; Wikimedia Commons

- Granger și Joyeux (1980) și Hosking (1981) au introdus independent diferențierea fracționară
  - Granger și Joyeux: agregarea multor serii AR(1) cu persistențe diferite produce memorie lungă
  - Hosking: ACF, condițiile de staționaritate și de inversabilitate și familia ARFIMA(p, d, q)
- Modelul lor leagă exponentul Hurst din hidrologie de modelele Box–Jenkins din econometrie
- Au urmat aplicații pentru inflație Hassler și Wolters (1995), producție, dobînzi și volatilitate Ding, Granger și Engle (1993)

Parametrul d: semnificația fiecărui interval

Intervalul lui d	**Proprietăți**	**ACF / șocuri**
$d \leq -0{,}5$	neinversabil (fără formă AR(∞))	–
$-0{,}5 < d < 0$	staționar, inversabil, antipersistent	negativă, cu suma $-1/2$
$d = 0$	ARMA, memorie scurtă	descreștere exponențială
$0 < d < 0{,}5$	staționar, memorie lungă	hiperbolică, nesumabilă
$0{,}5 \leq d < 1$	nestaționar, cu revenire la medie	șocurile se sting, lent
$d = 1$	rădăcină unitară, ARIMA	șocurile sînt permanente

- Staționaritatea cere $d < 1/2$, inversabilitatea cere $d > -1/2$ (Hosking (1981)); o serie nestaționară cu $d < 1{,}5$ se tratează diferențiind o dată: $(1 - L)x_t \sim I(d - 1)$
- Exponentul Hurst al incrementelor staționare: $H = d + 1/2$; $H > 1/2$ persistență, $H < 1/2$ antipersistență

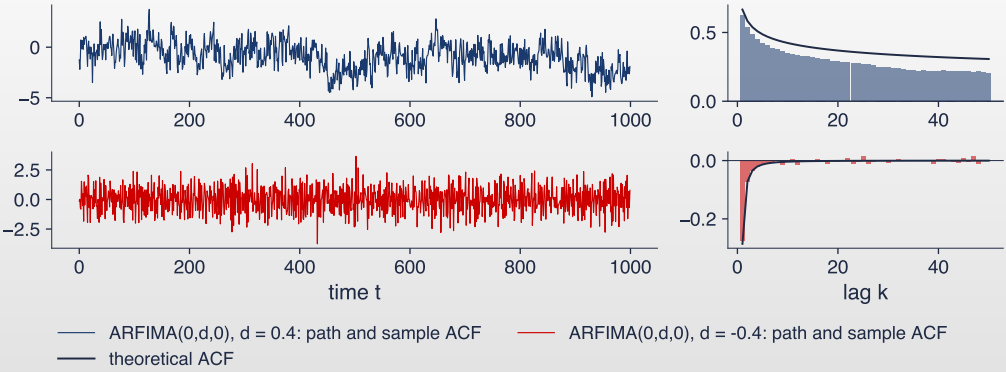
Autocorelațiile unui ARFIMA$(0, d, 0)$

- Pentru $x_t = (1-L)^{-d}\varepsilon_t$, $-1/2 < d < 1/2$ (Hosking (1981)):
  - varianța $\gamma(0) = \sigma^2 \dfrac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma(1-d)^2}$
  - autocorelațiile $\rho(k) = \dfrac{\Gamma(1-d)\,\Gamma(k+d)}{\Gamma(d)\,\Gamma(k+1-d)}$, calculate cu $\rho(k) = \rho(k-1)\,\dfrac{k-1+d}{k-d}$
- Primele laguri: $\rho(1) = \dfrac{d}{1-d}$, $\quad \rho(2) = \dfrac{d(1+d)}{(1-d)(2-d)}$
  - k mare: $\rho(k) \approx \dfrac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)}\, k^{2d-1}$, legea de putere din secțiunea 1, cu $C = \Gamma(1-d)/\Gamma(d)$
- Densitatea spectrală (i: unitatea imaginară): $f(\lambda) = \dfrac{\sigma^2}{2\pi}\,|1-e^{-i\lambda}|^{-2d} = \dfrac{\sigma^2}{2\pi}\,\big(2\sin(\lambda/2)\big)^{-2d} \approx \dfrac{\sigma^2}{2\pi}\lambda^{-2d}$ în apropierea lui 0

Exemplu rezolvat: ARFIMA(0; 0,3; 0)

- $\rho(1) = 0{,}3/0{,}7 = 0{,}429$; $\rho(2) = 0{,}429 \cdot 1{,}3/1{,}7 = 0{,}328$; $\rho(3) = 0{,}328 \cdot 2{,}3/2{,}7 = 0{,}279$
  - continuînd recurența: $\rho(5) = 0{,}228$, $\rho(10) = 0{,}173$
- Varianța pentru $\sigma^2 = 1$: $\Gamma(0{,}4)/\Gamma(0{,}7)^2 = 1{,}316$, mai mare decît varianța șocurilor
  - memoria acumulează șocurile trecute
- Un AR(1) cu același $\rho(1) = 0{,}429$ are $\rho(10) = 0{,}429^{10} = 0{,}0002$: cu trei ordine de mărime sub 0,173
- $H = d + 0{,}5 = 0{,}8$: o serie persistentă

ARFIMA$(0, d, 0)$ cu $d = 0{,}4$ și $d = -0{,}4$



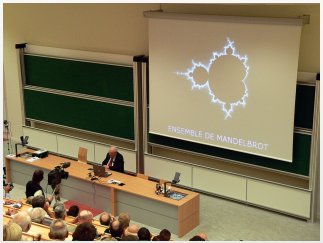
- Traiectorii simulate (1000 de observații, simulare exactă prin scufundare circulantă) cu $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$; dreapta: ACF de selecție pentru 20 000 de observații și ACF teoretică

TSA_ch8_arfima_processes

Interpretarea celor două traiectorii ARFIMA

- $d = 0{,}4$: excursii lungi deasupra și sub zero; ACF hiperbolică din secțiunea 1; varianța 2,07
  - traiectoria pare să aibă trenduri, deși media este constantă: un motiv pentru care memoria lungă este confundată cu nestaționaritatea
- $d = -0{,}4$: zig-zag rapid; $\rho(1) = -0{,}286$, $\rho(2) = -0{,}071$; varianța 1,18
  - antipersistență: o creștere tinde să fie urmată de o scădere; tipică seriilor diferențiate excesiv, de exemplu diferența unei serii cu $d = 0{,}6$

Mandelbrot: mișcarea browniană fracționară și H

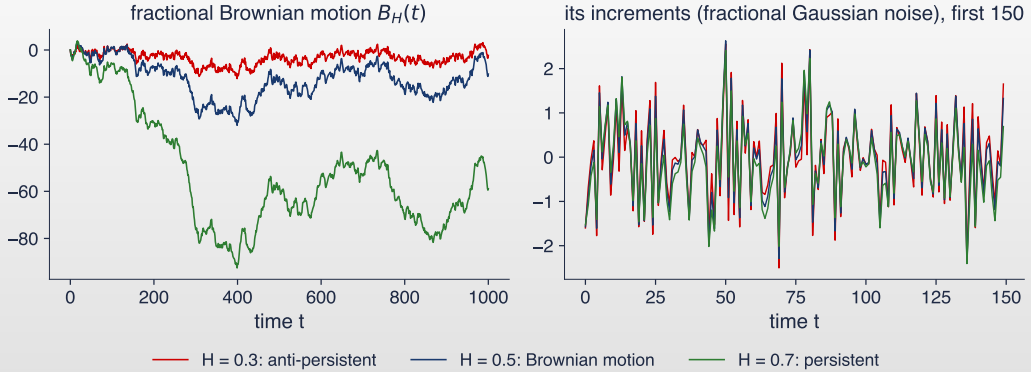


Benoît Mandelbrot (1924–2010)

Foto: David Monniaux (2006); CC BY-SA 3.0; Wikimedia Commons

- **Mișcarea browniană fracționară** $B_H(t)$, $0 < H < 1$ Mandelbrot și Van Ness (1968): gaussiană, $B_H(0) = 0$, $\mathrm{Var}(B_H(t)) = t^{2H}$
  - autosimilară: $B_H(ct)$ are aceeași distribuție ca $c^H B_H(t)$; $H = 1/2$: mișcarea browniană
- Incrementele ei, **zgomotul gaussian fracționar** (fGn), sînt staționare, cu $\rho(k) = \frac{1}{2}(|k+1|^{2H} - 2|k|^{2H} + |k-1|^{2H})$
  - $\rho(k) \approx H(2H-1)k^{2H-2}$: aceeași coadă ca ARFIMA cu $d = H - 1/2$
- Mandelbrot a adus rezultatul lui Hurst în statistică: fGn este varianta în timp continuu a unui ARFIMA$(0, d, 0)$

Mișcarea browniană fracționară pentru trei exponenți Hurst



- Aceleași numere aleatoare pentru $H = 0{,}3$, $0{,}5$ și $0{,}7$ (scufundare circulantă); dreapta: primele 150 de incremente

TSA_ch8_arfima_processes

Interpretarea traiectoriilor fBm

- $H = 0{,}7$: traiectorie netedă, cu aparență de trend; autocorelația de ordinul 1 a incrementelor $2^{2H-1} - 1 = 0{,}32$ (în eșantion 0,32)
  - $H = 0{,}3$: traiectorie aspră, care se întoarce mereu; $\rho(1) = -0{,}24$ (în eșantion $-0{,}23$)
- Amplitudinea traiectoriei crește ca t^H: mărimea pe care a măsurat-o Hurst pe Nil
- În modelarea seriilor de timp preferăm ARFIMA: adaugă partea ARMA pe termen scurt, care lipsește din fGn

Recapitulare: modelul ARFIMA

- $\phi(L)(1-L)^d(x_t - \mu) = \theta(L)\varepsilon_t$: d pentru termenul lung, ARMA pentru termenul scurt
- Staționar pentru $d < 1/2$, inversabil pentru $d > -1/2$; cu revenire la medie pentru $d < 1$
- ARFIMA$(0, d, 0)$: $\rho(1) = d/(1-d)$, $\rho(k) \sim Ck^{2d-1}$; $H = d + 1/2$
- fBm și fGn: aceeași memorie lungă, în forma în timp continuu a lui Mandelbrot

Cinci estimatori

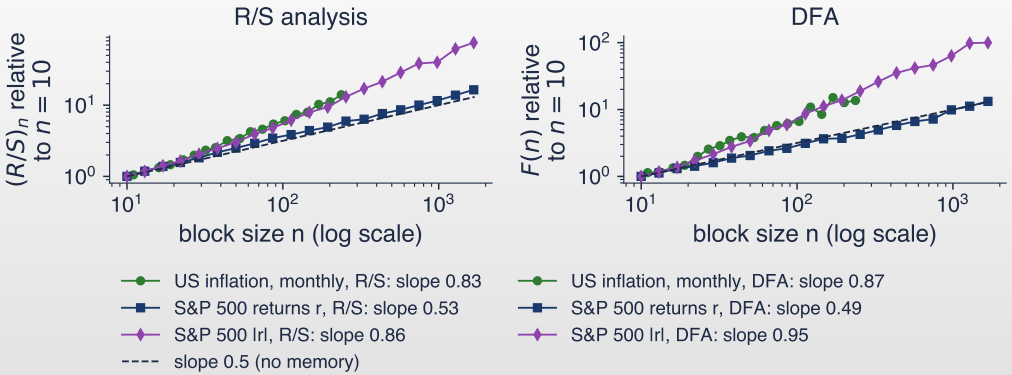
Estimatorul	Folosește	Estimarea	Tipul
R/S Hurst (1951)	amplitudinea sumelor parțiale pe blocuri	panta lui $\log(R/S)_n$ față de $\log n = H$	euristic
DFA Peng et al. (1994)	fluctuațiile fără tendință ale profilului	panta lui $\log F(n)$ față de $\log n = H$	euristic
GPH Geweke și Porter-Hudak (1983)	primele m valori ale periodogramei	panta OLS a unei regresii pe log-periodogramă	semiparametric
Whittle local Robinson (1995)	primele m valori ale periodogramei	maximizează o verosimilitate gaussiană locală	semiparametric
ML exactă, Whittle Sowell (1992), Fox și Taqqu (1986)	toată seria	d, ϕ, θ, σ^2 împreună	parametric

- Semiparametric: se modelează doar comportamentul din apropierea frecvenței zero, partea pe termen scurt rămîne liberă; parametric: întregul model ARFIMA trebuie să fie corect
- ML: verosimilitate maximă; OLS: metoda celor mai mici pătrate; $d = H - 1/2$ face trecerea între cele două scale

Statistica R/S, pas cu pas

- Blocul $x_1, \ldots, x_n$: media $\bar{x}$, abaterile cumulate $Y_k = \sum_{i \le k}(x_i - \bar{x})$
  - amplitudinea $R = \max_k Y_k - \min_k Y_k$, S: abaterea standard a blocului; amplitudinea rescalată R/S
- Exemplu: $x = (0{,}5;\ -0{,}3;\ 0{,}8;\ -0{,}2;\ 0{,}6;\ -0{,}1;\ 0{,}4;\ -0{,}7)$, $\bar{x} = 0{,}125$
  - Y_k: 0,375; −0,050; 0,625; 0,300; 0,775; 0,550; 0,825; 0; $R = 0{,}825 - (-0{,}050) = 0{,}875$
  - $S = 0{,}489$, deci $R/S = 1{,}79$
- **Exponentul Hurst**: media $(R/S)_n$ pe blocuri de mărime n; $E(R/S)_n \approx c\, n^H$, deci H este panta lui $\log(R/S)_n$ față de $\log n$
  - capcane: deplasat în sus pe blocuri mici Mandelbrot și Wallis (1969); și memoria scurtă îl crește; Lo (1991) corectează S cu autocovariațe (R/S modificat)
  - **DFA** Peng et al. (1994): ajustăm o dreaptă profilului Y_k în fiecare bloc; $F(n)$, abaterea medie pătratică (RMS), crește ca n^H

R/S și DFA pentru trei serii



⊡ Inflația lunară din SUA (FRED CPIAUCSL, 1947–2026), randamentele zilnice S&P 500 r_t și randamentele absolute $|r_t|$ (2000–2026); ambele axe logaritmice, curbele normalizate la 1 pentru $n = 10$

TSA_ch8_hurst_rs_dfa

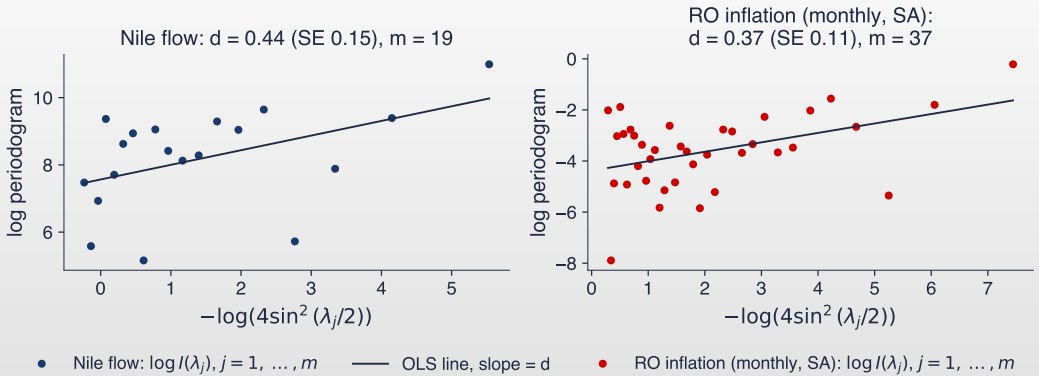
Interpretarea pantelor R/S și DFA

- Randamentele S&P 500: pantele 0,53 (R/S) și 0,49 (DFA), apropiate de 0,5: fără memorie în randamente
  - eficiența slabă din Capitolul 3 este valabilă pentru randamente
- Randamentele absolute: 0,86 și 0,95; inflația din SUA: 0,83 și 0,87
  - ambele mult peste 0,5: persistente; o pantă DFA apropiată de 1 sugerează un d apropiat de 0,5, limita staționarității
- Acestea sînt instrumente grafice: nu dau o eroare standard și reacționează la memoria scurtă și la trenduri; estimatorii următori sînt construiți pentru inferență

Periodograma și estimatorul GPH

- **Periodograma** la frecvențele Fourier $\lambda_j = 2\pi j/T$: $I(\lambda_j) = \frac{1}{2\pi T}\left|\sum_t (x_t - \bar{x})e^{-i\lambda_j t}\right|^2$
  - i: unitatea imaginară; $|\cdot|$: modulul unui număr complex; $j = 1, \ldots, \lfloor T/2 \rfloor$
  - o estimare zgomotoasă a densității spectrale $f(\lambda_j)$; λ_j apropiat de 0 = cicluri lente, de perioadă T/j
- În apropierea lui zero, $f(\lambda) \approx G\,(4\sin^2(\lambda/2))^{-d}$; logaritmînd:
  - **Regresia GPH** Geweke și Porter-Hudak (1983): $\log I(\lambda_j) = c + d\left[-\log(4\sin^2(\lambda_j/2))\right] + u_j$, $j = 1, \ldots, m$
  - c: termenul liber; u_j: eroarea regresiei; $\hat{d}$ = panta OLS; eroarea standard $\pi/\sqrt{24m}$
- **Lățimea de bandă** m: cîte frecvențe joase folosim; aici $m = \lfloor T^{0{,}65} \rfloor$
  - m mic: puțină deplasare din partea pe termen scurt, varianță mare; m mare: varianță mică, dar memoria scurtă se strecoară în $\hat{d}$

Regresii GPH: Nilul și inflația din România



⊡ Puncte: logaritmul periodogramei la cele mai joase m frecvențe Fourier; linia: ajustarea OLS. Nilul: $T = 100$ de ani; inflația lunară din România (SA): $T = 260$ de luni, ultima august 2026

TSA_ch8_estimation

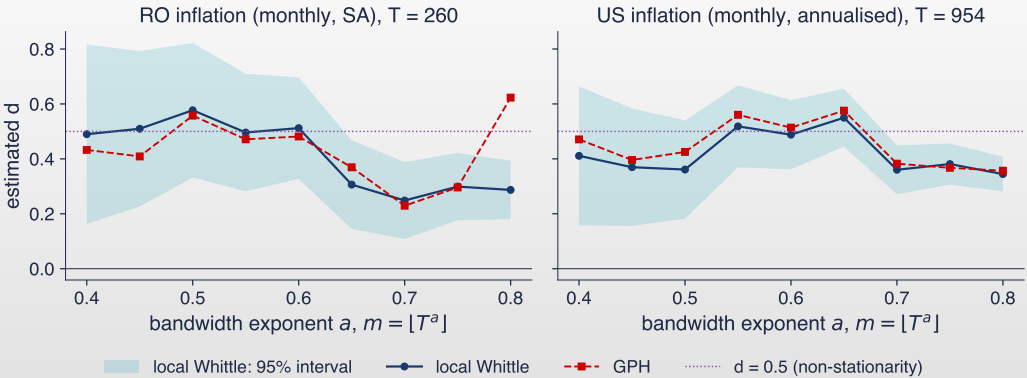
Interpretarea regresiilor GPH

- Nilul: $\hat{d} = 0{,}44$ (SE 0,15), $m = 19$ frecvențe, adică cicluri mai lungi de 5,3 ani
  - Whittle local (slide-ul următor): 0,40 (SE 0,11); ambele semnificativ peste 0, dar intervalele de 95% [0,15; 0,72] și [0,18; 0,63] conțin și 0,5: staționaritatea nu este demonstrată
- Inflația din România: $\hat{d} = 0{,}37$ (SE 0,11); Whittle local 0,31 (SE 0,08)
  - cicluri mai lungi de 7,0 luni: un șoc al inflației lunare se stinge în ani, nu în luni
- Norul de puncte este larg: fiecare valoare a periodogramei este aproximativ o variabilă exponențială în jurul lui $f(\lambda_j)$; panta are nevoie de multe puncte

Estimatorul Whittle local

- Whittle local (LW) Robinson (1995)
  - presupunem $f(\lambda) \approx G\lambda^{-2d}$ pentru $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ și maximizăm verosimilitatea gaussiană (Whittle) a acestor valori
  - după eliminarea constantei G din $f(\lambda) \approx G\lambda^{-2d}$: $\hat{d} = \arg\min_d \ \log\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{2d} I(\lambda_j)\right) - \frac{2d}{m}\sum_{j=1}^{m} \log \lambda_j$
- Eroarea standard $1/(2\sqrt{m})$, mai mică decît la GPH ($\pi/\sqrt{24m} \approx 0{,}64/\sqrt{m}$)
  - consistent pentru $d < 1$, dar asimptotic normal cu această eroare standard doar pentru $-1/2 < d < 3/4$ Velasco (1999)
- Atît GPH, cît și Whittle local depind de m: raportați întotdeauna $\hat{d}$ pentru mai multe lățimi de bandă

Sensibilitatea la lățimea de bandă



⊡ $\hat{d}$ pentru $m = \lfloor T^a \rfloor$, $a = 0{,}40;\ \ldots;\ 0{,}80$; zona colorată: intervalul de 95% al estimatorului Whittle local. Inflația lunară din România ($T = 260$, m de la 9 la 85) și inflația lunară din SUA ($T = 954$)

TSA_ch8_estimation

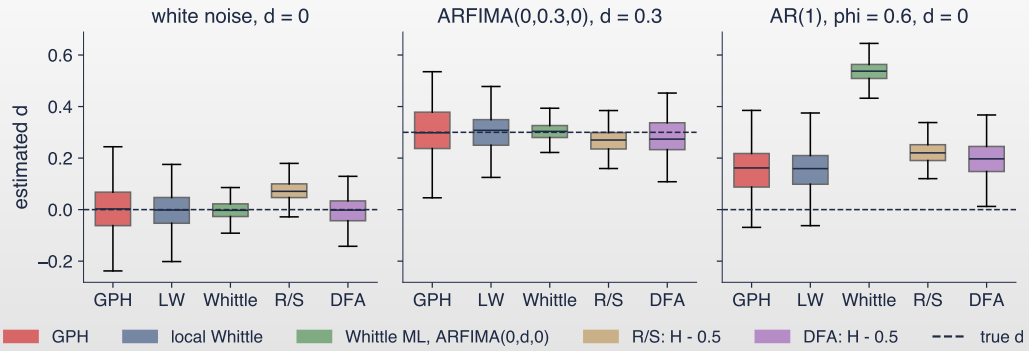
Interpretarea graficului lățimii de bandă

- România: Whittle local între 0,25 și 0,58, GPH între 0,23 și 0,62
  - cu puține frecvențe estimarea este aproape de 0,5; cu mai multe scade spre 0,3: răspunsul depinde de alegerea lui m
- Statele Unite: Whittle local între 0,34 și 0,55, mereu mult peste 0
  - eșantionul lung (1947–2026) dă intervale înguste; un d apropiat de 0,5 sugerează schimbări de regim (secțiunea 7)
- Concluzie: inflația are memorie lungă în ambele țări; un singur număr pentru d ascunde o incertitudine de aproximativ $\pm 0{,}15$

Verosimilitatea maximă pentru ARFIMA(p, d, q)

- **ML exactă** Sowell (1992): pentru $x = (x_1, \ldots, x_T)'$ gaussian, cu matricea de covarianță $\Gamma(\vartheta)$, $\vartheta = (d, \phi, \theta, \sigma^2)$:
  - $\ell(\vartheta) = -\frac{T}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\log\det\Gamma(\vartheta) - \frac{1}{2}(x-\mu)'\Gamma(\vartheta)^{-1}(x-\mu)$
  - ℓ: logaritmul verosimilității; μ: vectorul mediilor; $\Gamma(\vartheta)$: matricea $T \times T$ a autocovarianțelor ARFIMA
  - Γ provine din autocovarianțele ARFIMA; recurența Durbin–Levinson calculează ℓ în $O(T^2)$ operații
- **Whittle** (ML aproximativă) Fox și Taqqu (1986): înlocuim verosimilitatea cu $-\frac{1}{2}\sum_j \left[\log f(\lambda_j;\vartheta) + I(\lambda_j)/f(\lambda_j;\vartheta)\right]$ pe toate frecvențele Fourier
  - $f(\lambda_j;\vartheta)$: densitatea spectrală implicată de parametrii ϑ
  - rapidă ($O(T\log T)$ cu FFT, transformata Fourier rapidă), apropiată de ML exactă în eșantioane mari
- Estimatorii parametrici sînt eficienți (SE în jur de $\sqrt{6}/(\pi\sqrt{T})$ pentru ARFIMA$(0, d, 0)$) doar dacă ordinele ARMA sînt corecte; alegem p, q după AIC/BIC

Monte Carlo: cinci estimatori ai lui d



- 300 de eșantioane de $T = 500$ pentru fiecare variantă; GPH și Whittle local cu $m = \lfloor T^{0.65} \rfloor$; ML Whittle pentru ARFIMA$(0, d, 0)$; R/S și DFA convertite cu $d = H - 1/2$

TSA_ch8_monte_carlo

Interpretarea simulării Monte Carlo

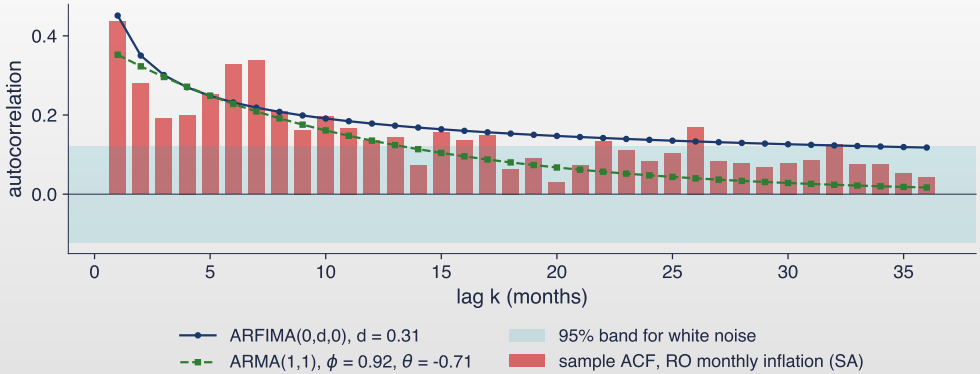
- Model corect: ML Whittle este cel mai precis (abaterea standard 0,04, față de 0,08 pentru Whittle local și 0,10 pentru GPH la $d = 0{,}3$)
  - R/S este deplasat în sus pentru zgomot alb (media 0,07) Mandelbrot și Wallis (1969)
- AR(1) cu $\phi = 0{,}6$, fără memorie lungă: ARFIMA$(0, d, 0)$ prin Whittle dă 0,54, GPH 0,15, Whittle local 0,15
  - un model parametric greșit specificat transformă memoria scurtă în „memorie lungă"; estimatorii semiparametrici sînt mai puțin afectați, dar nu sînt imuni
- În practică: estimați întotdeauna și ARFIMA(p, d, q) cu $p, q \geq 1$ și verificați $\hat{d}$ semiparametric pentru mai multe valori ale lui m

Inflația din România: ARMA sau ARFIMA?

Model (ML exactă)	$\hat{d}$	AR / MA	ℓ	AIC	BIC
ARMA(1,1)	0	0,92 / −0,71	−138,0	282,1	292,8
ARMA(2,0)	0	0,39, ...	−139,9	285,9	296,6
ARFIMA(0,d,0)	0,31	–	−135,9	**275,8**	**282,9**
ARFIMA(1,d,0)	0,27	0,07 / –	−135,6	277,1	287,8
ARFIMA(0,d,1)	0,27	– / 0,08	−135,5	277,1	287,8
ARFIMA(1,d,1)	0,27	−0,03 / 0,10	−135,5	279,1	293,3

- Inflația lunară IAPC din România, ajustată sezonier, $T = 260$ de luni (2005–2026); ℓ: logaritmul verosimilității maximizate; aldin: cel mai mic criteriu
- ARFIMA$(0, d, 0)$ are cele mai mici criterii, cu un singur parametru: $\hat{d} = 0{,}31$ (SE 0,047); adăugarea lui ϕ sau θ abia schimbă ℓ
- Cel mai bun ARMA are nevoie de $\phi = 0{,}92$, aproape de 1, și de un termen MA care îl compensează, pentru a imita descreșterea lentă

Inflația din România: autocorelațiile modelelor estimate



- Bare: ACF de selecție; linii: ACF implicată de ARFIMA$(0, d, 0)$ și de ARMA(1,1), ambele estimate prin ML exactă

TSA_ch8_estimation

Interpretarea ACF a modelelor estimate

- La lagul 12: în eșantion 0,14, ARFIMA 0,18, ARMA(1,1) 0,14; la lagul 24: 0,08; 0,14 și 0,05
  - cele două modele sînt de acord pentru primul an și diferă pentru al doilea: prognozele lor pe termen lung vor fi diferite
- Curba ARFIMA reproduce coada lentă cu un singur parametru; curba ARMA tinde exponențial spre zero
- Ajustarea sezonieră contează: un vîrf sezonier aproape de cele mai joase frecvențe ar distorsiona $\hat{d}$ (Capitolul 4)

Memoria lungă în douăsprezece serii

Seria	T	$H_{R/S}$	H_{DFA}	d_{GPH}	d_{LW} (SE)
Debitul Nilului	100	0,83	0,64	0,44	0,40 (0,11)
Inflația RO, lunară, ajust.	260	0,75	0,84	0,37	0,31 (0,08)
Inflația RO, anuală	260	0,96	1,38	1,14	1,00 (0,08)
Inflația SUA, lunară	954	0,83	0,87	0,58	0,55 (0,05)
Inflația SUA, 1985–2019	420	0,69	0,59	0,07	0,10 (0,07)
Șomajul SUA	944	0,97	1,27	0,82	0,91 (0,05)
S&P 500, r_t	6 714	0,53	0,49	0,02	−0,01 (0,03)
S&P 500, $\lvert r_t \rvert$	6 714	0,86	0,95	0,56	0,53 (0,03)
BET, r_t	6 670	0,58	0,57	0,16	0,12 (0,03)
BET, $\lvert r_t \rvert$	6 670	0,79	0,85	0,40	0,39 (0,03)
EUR/RON, r_t	5 352	0,53	0,52	−0,01	−0,01 (0,03)
EUR/RON, $\lvert r_t \rvert$	5 352	0,82	0,85	0,38	0,39 (0,03)

- $m = \lfloor T^{\mathbf{0,65}} \rfloor$; LW: Whittle local, SE $1/(2\sqrt{m})$ (valabilă pentru $d < 3/4$); date: statsmodels, Eurostat, FRED, EODHD, BNR; randamente zilnice din 2000 (EUR/RON din 2005)

Interpretarea tabelului

- Randamente: $d \approx 0$ pentru S&P 500 ($-0{,}01$) și EUR/RON ($-0{,}01$); mic, dar pozitiv pentru BET (0,12)
  - randamentele absolute: 0,53; 0,39 și 0,39: memorie lungă în volatilitate (secțiunea 6)
- Inflația anuală din România: $d \approx 1{,}00$, față de 0,31 pentru rata lunară: rata anuală însumează 12 variații lunare suprapuse
  - filtrul $1 + L + \cdots + L^{11}$ înmulțește spectrul cu $\sin^2(6\lambda)/\sin^2(\lambda/2)$: 144 la $\lambda = 0$, 0 la $\lambda = 2\pi/12 \approx 0{,}52$, în interiorul benzii folosite ($\lambda_m = 0{,}89$); această scădere abruptă seamănă cu un pol în 0 și împinge $\hat{d}$ spre 1; modelați rata lunară
- Șomajul din SUA: $d \approx 0{,}91$, nestaționar; revenirea la medie ($d < 1$) nu este demonstrată: [0,80; 1,01] conține 1 (iar peste $d = 3/4$ eroarea standard nu este valabilă); inflația din SUA în 1985–2019: 0,10, față de 0,55 în 1947–2026

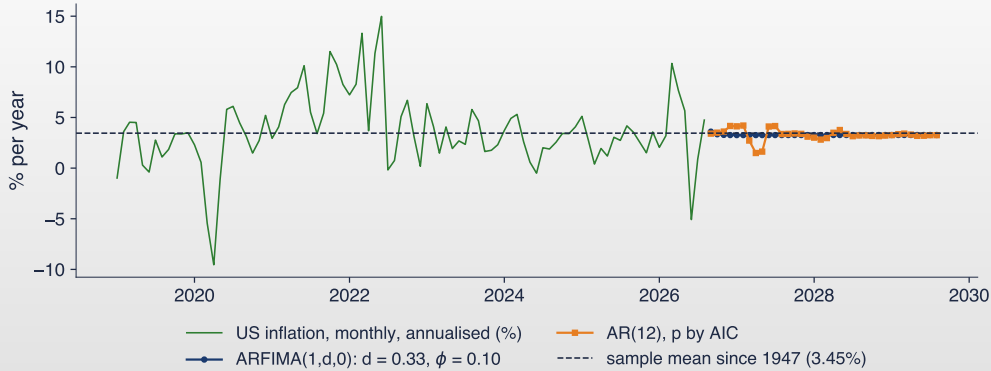
Recapitulare: estimarea lui d

- R/S și DFA: pantele unor grafice log–log, instrumente grafice, deplasate în eșantioane mici
- GPH și Whittle local: regresii sau verosimilități pe cele mai joase m frecvențe; raportați mai multe valori ale lui m
- ML exactă și Whittle: eficienți dacă partea ARMA este corectă; memoria scurtă poate fi confundată cu d
- Inflația lunară din România: ARFIMA$(0, d, 0)$ cu $\hat{d} = 0{,}31$ este preferat modelelor ARMA după AIC și BIC

Prognoze din forma AR(∞)

- Un ARFIMA inversabil se poate scrie $\pi(L)(x_t - \mu) = \varepsilon_t$, cu $\pi(L) = \phi(L)(1-L)^d/\theta(L) = \sum_k \pi_k L^k$
  - π_k: ponderile AR(∞) (pentru ARFIMA$(0, d, 0)$, ponderile lui $(1-L)^d$); $\hat{x}_{T+h}$: prognoza făcută la T pentru $T+h$
  - un pas: $\hat{x}_{T+1} = \mu - \sum_{k=1}^{T} \pi_k (x_{T+1-k} - \mu)$; h pași: aceeași recurență, cu prognoze în locul valorilor necunoscute
- Exemplu, ARFIMA(0; 0,4; 0): $-\pi_k = 0{,}4;\ 0{,}12;\ 0{,}064;\ 0{,}042;\ \ldots$
  - $\hat{x}_{T+1} - \mu = 0{,}4(x_T - \mu) + 0{,}12(x_{T-1} - \mu) + 0{,}064(x_{T-2} - \mu) + \ldots$: contează toată istoria
  - un AR(1) folosește doar x_T; după o perioadă lungă peste medie, prognoza ARFIMA rămîne mai sus, mai mult timp
- Prognozele revin la μ hiperbolic; varianța erorii de prognoză $\sigma^2 \sum_{j<h} \psi_j^2$ (ψ_j: ponderile MA(∞)) crește lent spre $\gamma(0)$ Ray (1993)

Inflația din SUA: prognoze ARFIMA și AR



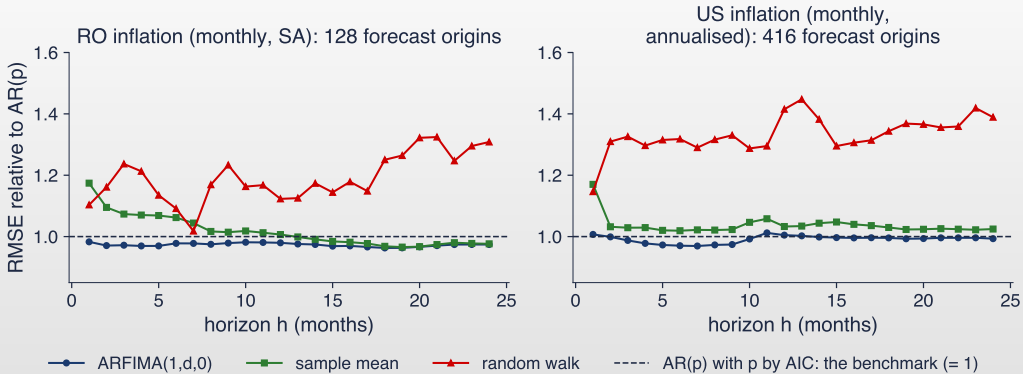
- Inflația lunară IPC din SUA, anualizată, $T = 954$ de valori pînă în august 2026; ARFIMA(1,d,0) estimat prin Whittle; AR(p) cu p ales după AIC; 36 de luni înainte. FRED nu are IPC pentru octombrie 2025 (nepublicat): valoarea din noiembrie 2025 este variația față de septembrie, anualizată pe cele două luni

TSA_ch8_forecasting

Interpretarea celor două prognoze

- ARFIMA: $\hat{d} = 0{,}33$, $\hat{\phi} = 0{,}10$; AR: $p = 12$ laguri, numărul maxim permis
  - AR are nevoie de un an de laguri pentru a imita ce face d cu un singur parametru
- Ultimele 12 luni (inflația anuală) 3,30%; prognozele: 3,60% și 3,40% luna viitoare, 3,26% și 3,37% peste un an, 3,27% și 3,25% peste trei ani
  - ambele se apropie de media pe termen lung 3,45%; traiectoriile diferă puțin, deoarece AR(12) poartă deja o memorie lungă
- Dacă media pe termen lung din 1947–2026 este ancora potrivită azi este o întrebare despre regimuri, nu despre d

Contribuția memoriei lungi la prognoză



- În afara eșantionului, fereastră extinsă: România 128 de origini (ianuarie 2014–august 2024), ajustare sezonieră în fiecare fereastră; Statele Unite 416 origini (ianuarie 1990–august 2024), erori asociate după luna calendaristică (fără IPC pentru octombrie 2025). RMSE relativ la AR(p); sub 1: mai bun

TSA_ch8_forecasting

Interpretarea comparației prognozelor

- România: ARFIMA este mai precis decît AR la toate orizonturile, cu 1,7–3,7% (raportul 0,983 la o lună, 0,980 la 12, 0,974 la 24)
  - RMSE la 12 luni: ARFIMA 0,53, AR 0,54, media 0,54, mers aleator 0,61 (pp pe lună)
- Statele Unite: rapoarte între 0,969 și 1,012: practic aceeași precizie ca un AR(p) cu multe laguri
  - mersul aleator este mult mai slab la toate orizonturile de peste o lună
- Memoria lungă aduce cîștiguri modeste, dar constante; erorile mari provin din schimbări de regim (2008, 2021–2022) pe care niciun model liniar nu le anticipează; testați cîștigurile cu Diebold–Mariano (Capitolul 4)

Recapitulare: prognoza cu ARFIMA

- Prognoze din ponderile AR(∞) π_k: contează toată istoria
- Revenire hiperbolică la medie; incertitudinea prognozei crește lent
- Inflația: cîștiguri mici față de AR în România, aceeași precizie în Statele Unite

Studiu de caz: Ding, Granger și Engle (1993)

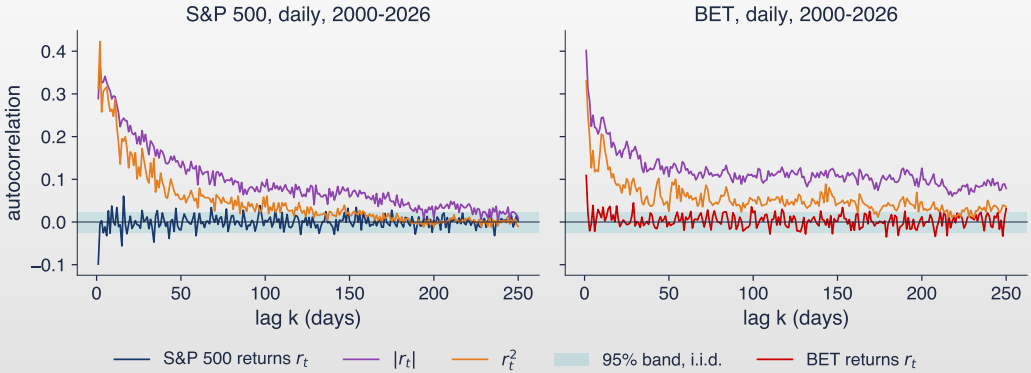


Robert F. Engle, Premiul Nobel 2003, împreună cu Clive Granger

Foto: Jon Demske (2022); CC BY-SA 4.0; Wikimedia Commons

- Ding, Granger și Engle (1993): randamentele zilnice S&P 500, 1928–1991
  - randamentele sînt aproape necorelate, dar $|r_t|^\delta$ este autocorelat pe mii de laguri
  - $\delta > 0$: o putere; autocorelația este cea mai puternică pentru $\delta \approx 1$
  - „proprietatea de memorie lungă" a randamentelor bursiere: memoria se află în mărimea randamentelor, nu în semnul lor
- Un GARCH(1,1) (Capitolul 5) implică autocorelații ale lui r_t^2 care scad ca $(\alpha + \beta)^k$ (α, β: parametrii ARCH și GARCH): exponențial
- Rezultatul a dus la FIGARCH Baillie, Bollerslev și Mikkelsen (1996) și, cu date de înaltă frecvență, la modelele de volatilitate realizată Andersen et al. (2003), Corsi (2009)

Randamente, randamente absolute și pătrate



- Randamentele logaritmice zilnice ale S&P 500 ($T = 6\,714$) și BET ($T = 6\,670$), 2000–2026; ACF pînă la lagul 250 (un an bursier); zona colorată: $\pm 1{,}96/\sqrt{T}$

TSA_ch8_volatility_memory

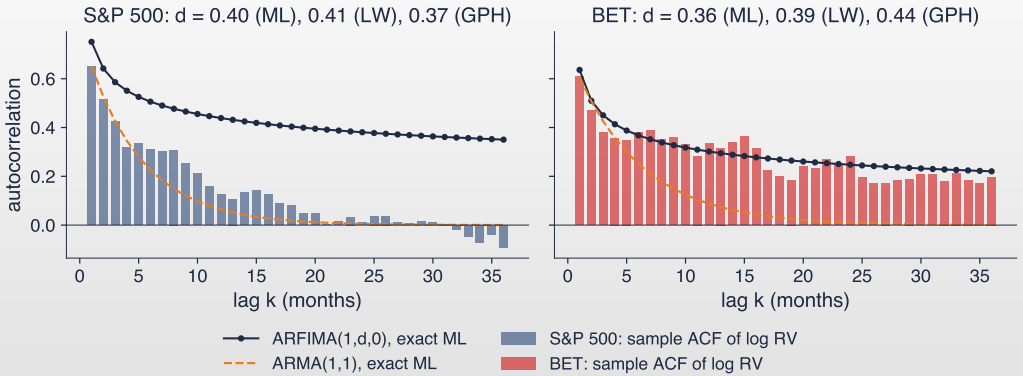
Interpretarea ACF a volatilității

- S&P 500: $|r_t|$ are $\hat{\rho} = 0{,}29$ la lagul 1 și încă 0,08 la lagul 100; 227 din 250 de laguri deasupra benzii
  - BET: 0,40 la lagul 1, 0,08 la lagul 250, 250 din 250 deasupra benzii
- $|r_t|$ este mai persistent decît r_t^2, ca în Ding, Granger și Engle (1993); pătratele sînt dominate de cîteva zile de crah
  - Whittle local pentru $|r_t|$: 0,53 (S&P 500), 0,39 (BET); după o permutare aleatoare a zilelor: 0,00 și $-0{,}02$
- Permutarea păstrează distribuția și distruge ordinea: memoria se află în succesiunea zilelor calme și agitate, nu în cozile groase

Volatilitatea realizată

- **Varianța realizată** a lunii m Andersen et al. (2003)
  - $RV_m = \sum_{t \in m} r_t^2$: suma pătratelor randamentelor zilnice din lună
  - volatilitatea realizată $\sqrt{RV_m}$ măsoară volatilitatea lunii m aproape fără model; cu date intrazilnice aceeași idee dă un RV zilnic
- Modelăm $\log \sqrt{RV_m}$: logaritmul aduce distribuția aproape de distribuția Normală și elimină restricția de pozitivitate
  - faptul stilizat din Andersen et al. (2003): logaritmul RV este bine descris de un model cu memorie lungă, cu $d \approx 0{,}4$
- Spre deosebire de $|r_t|$, $\log \sqrt{RV_m}$ este o măsură precisă: zgomotul zilelor individuale se compensează în cadrul lunii

Volatilitatea realizată lunară: ARFIMA sau ARMA?



⊡ Logaritmul volatilității realizate lunare din randamentele zilnice, 321 de luni (2000–2026); linii: ACF a modelelor ARFIMA(1,d,0) și ARMA(1,1), ambele prin ML exactă

TSA_ch8_volatility_memory

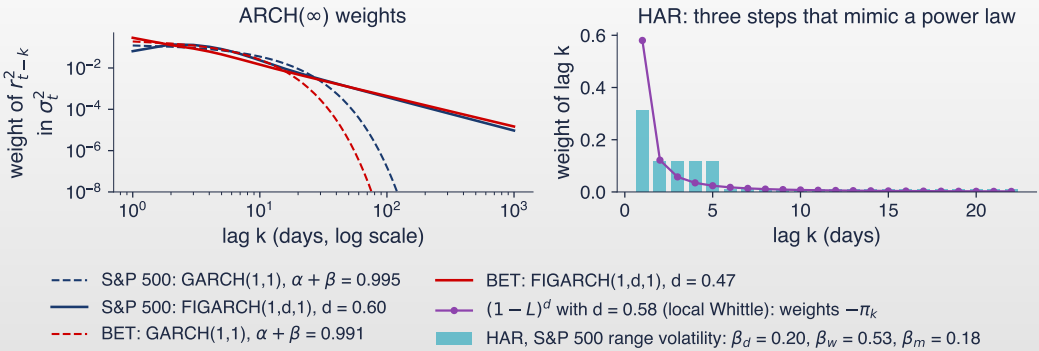
Interpretarea volatilității realizate

- Toți estimatorii sînt de acord: d între 0,36 și 0,44 pentru ambele piețe (ML 0,40 și 0,36)
  - BET: ARFIMA reproduce coada lentă (lagul 24: în eșantion 0,28) și are un BIC mai mic (343,9 față de 355,4 pentru ARMA(1,1))
- S&P 500: ACF de selecție se stinge după aproximativ 20 de luni; ARMA(1,1) cu $\phi = 0{,}81$ se potrivește la fel de bine (BIC 294,4 față de 295,9)
  - cu 27 de ani de date, memoria lungă și un ARMA persistent sînt greu de deosebit
- ACF de selecție a unei serii cu memorie lungă este deplasată în jos (media de selecție absoarbe o parte din componenta lentă): judecați modelele după verosimilitate, nu vizual

FIGARCH și HAR

- **FIGARCH**$(1, d, 1)$ Baillie, Bollerslev și Mikkelsen (1996): scriem GARCH(1,1) ca ARMA(1,1) în ε_t^2 și aplicăm $(1-L)^d$:
  - σ_t^2: varianța condiționată; ε_t: șocul randamentului; $\omega > 0$, β, ϕ: parametri de tip GARCH (Capitolul 5)
  - $\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \left[1 - \beta L - (1-\phi L)(1-L)^d\right]\varepsilon_t^2$, adică $\sigma_t^2 = \omega^* + \sum_{k\geq 1} \lambda_k \varepsilon_{t-k}^2$
  - $\omega^* = \omega/(1-\beta)$; ponderile ARCH($\infty$) λ_k scad ca k^{-1-d}; $d = 0$: GARCH, $d = 1$: IGARCH
- **HAR** (model autoregresiv heterogen) Corsi (2009): $RV_{t+1} = c + \beta_d RV_t + \beta_w \overline{RV}_{t-4:t} + \beta_m \overline{RV}_{t-21:t} + u_{t+1}$
  - $\overline{RV}_{t-4:t}$, $\overline{RV}_{t-21:t}$: mediile pe ultimele 5 și 22 de zile (săptămînală, lunară); β_d, β_w, β_m: ponderile lor; estimat prin OLS
  - intuiția: participanți la piață cu orizonturi zilnice, săptămînale și lunare
  - nu este un model cu memorie lungă, ci trei trepte care imită o lege de putere pe orizonturile relevante
- Ambele răspund unei slăbiciuni a modelului GARCH din Capitolul 5: în GARCH șocurile volatilității se sting prea repede

FIGARCH comparat cu GARCH; HAR comparat cu $(1-L)^d$



- Stînga: ponderile ARCH(∞) ale GARCH(1,1) și FIGARCH(1,d,1), erori Student t, randamente zilnice 2000–2026 (`arch`)
- Dreapta: HAR pentru volatilitatea zilnică pe baza amplitudinii S&P 500 (estimatorul Parkinson, din prețurile maxime și minime)

TSA_ch8_volatility_memory

Interpretarea modelelor FIGARCH și HAR

- FIGARCH: $\hat{d} = 0{,}60$ (S&P 500) și 0,47 (BET); BIC scade cu 34 și 71 față de GARCH
  - ponderea unui șoc de acum 100 de zile în varianța de azi: GARCH $1{,}6 \cdot 10^{-7}$, FIGARCH $3{,}9 \cdot 10^{-4}$ (S&P 500): cu trei ordine de mărime mai mult
- GARCH obține persistența prin $\alpha + \beta = 0{,}995$, aproape de 1: rezultatul aproape IGARCH din Capitolul 5 este un simptom al memoriei lungi
  - HAR: $\hat{\beta}_d = 0{,}20$, $\hat{\beta}_w = 0{,}53$, $\hat{\beta}_m = 0{,}18$; componenta săptămînală domină
- Treptele HAR (0,31 la lagul 1, 0,11 la lagurile 2–5, 0,008 la lagurile 6–22) scad aproximativ ca ponderile $-\pi_k$ ale lui $(1 - L)^d$, cu $d = 0{,}58$ din Whittle local (0,58 la lagul 1, 0,12 la lagul 2, 0,018 la lagul 6, 0,002 la lagul 22): o pondere mai mică la lagul 1, o funcție în trepte

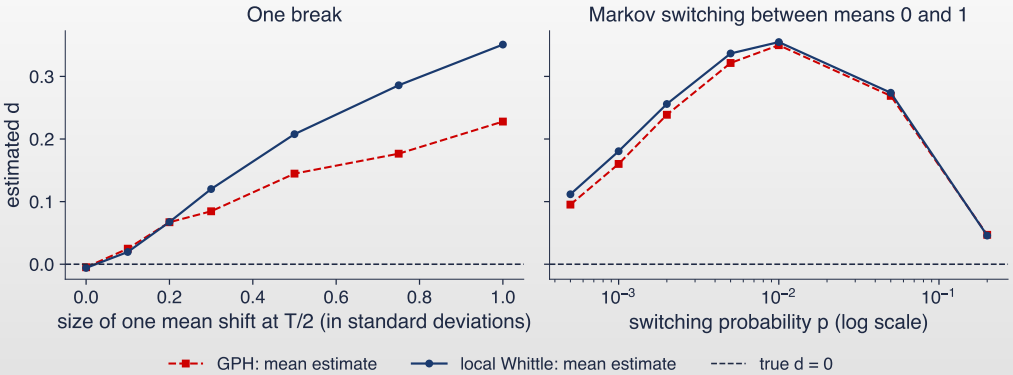
Recapitulare: memoria lungă a volatilității

- Randamente: $d \approx 0$; randamente absolute și volatilitate realizată: $d \approx 0{,}4$
- Testul permutării: memoria se află în ordinea zilelor, nu în distribuție
- FIGARCH: ponderi ARCH(∞) hiperbolice; HAR: o aproximare simplă prin OLS

Rupturi structurale, schimbări de regim și memorie lungă aparentă

- O schimbare de nivel adaugă o componentă lentă, în trepte: crește puterea spectrală la frecvențele joase, iar ACF de selecție scade lent
  - același mecanism care face ca o serie cu ruptură să pară cu rădăcină unitară (Perron, Capitolul 3)
- Diebold și Inoue (2001): o medie cu schimbări de regim de tip Markov, cu schimbări rare, este „echivalentă observațional" cu memoria lungă
  - cu cît sînt mai puține schimbări într-un eșantion de lungime T, cu atît seria seamănă mai mult cu $I(d)$
  - modelele cu schimbare de regim sînt tema Capitolului 10
- Granger și Hyung (2004): rupturile ocazionale explică o mare parte din memoria lungă a randamentelor absolute S&P 500

Memorie lungă aparentă în procese cu memorie scurtă



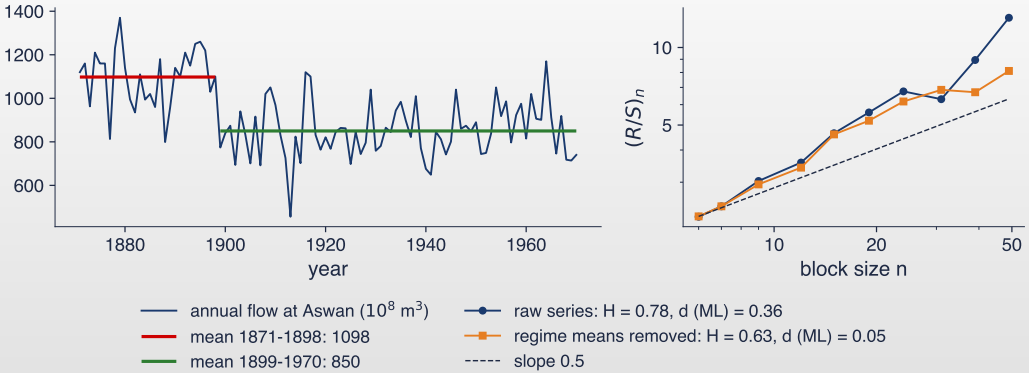
- 200 de eșantioane de $T = 1000$, $d = 0$ în realitate. Stînga: zgomot $N(0, 1)$ cu o singură schimbare a mediei la $T/2$; dreapta: zgomot $N(0, 1)$ plus o medie care trece între 0 și 1 cu probabilitatea p în fiecare perioadă

TSA_ch8_spurious_memory

Interpretarea memoriei aparente

- O singură schimbare de o jumătate de abatere standard dă deja $\hat{d} = 0{,}21$ (Whittle local); o schimbare de o abatere standard dă 0,35
  - ruptura se vede greu cu ochiul în date zgomotoase, dar estimatorul raportează o memorie lungă moderată
- Schimbări de regim: cu $p = 0{,}01$ (aproximativ 10 schimbări) $\hat{d} = 0{,}35$; cu $p = 0{,}2$ (schimbări frecvente) $\hat{d} = 0{,}05$
  - regimurile rare imită memoria lungă, cele frecvente se compensează și dau memorie scurtă
- Un $\hat{d}$ semnificativ este compatibil atît cu memoria lungă, cît și cu rupturile: este nevoie de alte dovezi pentru a decide

Nilul în 1898: memorie sau ruptură?



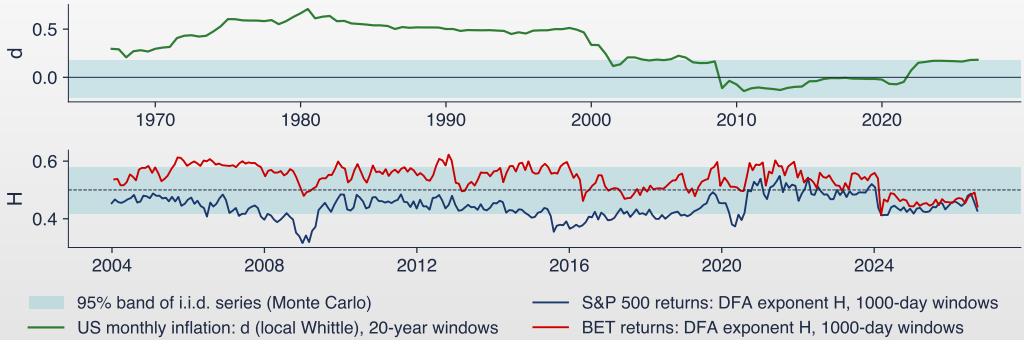
Stînga: debitul, cu mediile dinainte și de după 1898, punctul de schimbare din Cobb (1978) (primul baraj de la Aswan a fost finalizat în 1902); dreapta: graficul R/S pentru seria brută și pentru seria fără cele două medii de regim

TSA_ch8_spurious_memory

Interpretarea rupturii Nilului

- Media scade de la 1098 la 850 (-23%) după 1898
  - seria brută: $\hat{d} = 0{,}36$ (ML exactă, SE 0,07), Whittle local 0,40, R/S $H = 0{,}78$
- Fără mediile de regim: $\hat{d} = 0{,}05$ (SE 0,10), Whittle local $-0{,}17$; $\hat{\rho}(1)$ scade de la 0,50 la 0,16
  - pentru acești 100 de ani o singură ruptură explică aproape toată memoria
- Dovezile lui Hurst proveneau din înregistrări mult mai lungi (nilometrul de la Roda, din secolul al VII-lea); lecția: testați rupturile înainte de a interpreta d

Stabilitatea memoriei în timp



- Sus: $\hat{d}$ Whittle local pentru inflația lunară din SUA, pe ferestre mobile de 20 de ani (datate la sfîrșitul ferestrei)
- Jos: exponentul DFA al randamentelor zilnice S&P 500 și BET, pe ferestre de 1000 de zile mutate cu 21 de zile; zona colorată: benzi Monte Carlo de 95% pentru serii i.i.d. Weron (2002)

TSA_ch8_spurious_memory

Interpretarea estimărilor pe ferestre mobile

- Inflația din SUA: $\hat{d}$ atinge 0,71 în fereastra care se încheie în iulie 1980 (Marea Inflație și dezinflația Volcker) și coboară la $-0{,}14$ (iulie 2010)
  - în anii calmi ai Marii Moderații (Fed a anunțat o țintă explicită de 2% abia în 2012) d se află în banda fără memorie $[-0{,}209;\ 0{,}182]$; creșterea bruscă din 2021–2022 îl duce la 0,1820, la marginea de sus a benzii (0,1823), dar nu peste ea
- Randamentele: exponentul S&P 500 stă mai ales sub 0,5 (minimum 0,32, decembrie 2008); BET depășește banda în 24% din ferestre
  - o piață mai puțin lichidă arată o anumită persistență a randamentelor, care slăbește în ultimii ani
- Estimarea pe tot eșantionul pentru SUA (0,55) amestecă regimuri: o memorie care apare și dispare odată cu regimurile monetare semnalează rupturi, nu un d constant

Verificări împotriva memoriei lungi aparente

- Reprezentați seria grafic și testați rupturile (Capitolul 3: Zivot–Andrews, Bai–Perron); reestimați d pe subeșantioane și după eliminarea mediilor de regim
- Raportați $\hat{d}$ pentru mai multe lățimi de bandă m; o valoare care se modifică puternic cînd m se schimbă este fragilă
- Comparați ARFIMA cu ARMA și cu modele cu schimbare de regim după verosimilitate și prin prognoze în afara eșantionului (Capitolul 10)
- Folosiți testul permutării și benzi Monte Carlo construite pentru aceeași lungime a eșantionului
- Evitați datele suprapuse (inflația anuală, sumele pe ferestre mobile): ele creează putere artificială la frecvențele joase

Recapitulare: memoria lungă aparentă

- Rupturile și schimbările rare de regim produc $\hat{d} > 0$ în serii cu memorie scurtă
- Nilul: o singură ruptură în 1898 explică cea mai mare parte a memoriei din 1871–1970
- Inflația din SUA: d se schimbă odată cu regimul monetar

Cointegrarea fracționară

- Capitolul 7: două serii $I(1)$ sînt cointegrate dacă o combinație $y_t - \beta x_t$ este $I(0)$
  - **cointegrare fracționară**: $x_t, y_t \sim I(d)$ și $y_t - \beta x_t \sim I(d-b)$, cu $0 < b \leq d$
  - eroarea de echilibru poate avea ea însăși memorie lungă: abaterile de la echilibru sînt corectate, dar lent
- Exemplu: paritatea puterii de cumpărare Cheung și Lai (1993): cursul real revine la paritate cu un d între 0 și 1
  - testele Engle–Granger și Johansen din Capitolul 7 presupun $b = 1$ și pot să nu detecteze o astfel de ajustare lentă
- Dincolo de acest curs; un proiect natural: estimați d al reziduului unei regresii de cointegrare cu estimatorul Whittle local

Contribuția posibilă a AI

- **Cod**: o primă versiune a diferențierii fracționare, a estimatorilor GPH și Whittle local, a unei verosimilități ARFIMA
- **Explicații**: o a doua explicație a periodogramei, a compromisului lățimii de bandă, a legăturii $H = d + 1/2$
- **Explorare**: d pentru inflația multor țări sau volatilitatea multor active, cu subeșantioane și lățimi de bandă diferite
- Exemplu de prompt
  - `Write Python code that downloads Romanian monthly HICP (Eurostat prc_hicp_minr), computes the monthly inflation rate, removes the monthly means, estimates d with GPH and local Whittle for bandwidths T^0.5 to T^0.8, fits ARFIMA(p,d,q) by exact Gaussian maximum likelihood and compares it with ARMA(1,1) by BIC.`

Verificări necesare

- Biblioteca: `statsmodels` nu are o clasă ARFIMA; un răspuns AI care folosește una a inventat-o
- Semnul și scala: GPH regresează pe $-\log(4\sin^2(\lambda/2))$, deci panta este d, nu $-2d$; R/S și DFA dau H, nu d
- Intervalul: verosimilitatea unui ARFIMA staționar cere $d < 0{,}5$; diferențiați întîi dacă $\hat{d}$ este aproape de 0,5 sau peste
- Simulați o serie cu d cunoscut și verificați că codul îl regăsește
- Rupturile, sezonalitatea și datele suprapuse, înainte de orice afirmație despre memoria lungă
- Fiecare referință citată: trebuie să existe; verificați DOI-ul

Idei de reținut

- Memoria lungă: descreștere hiperbolică a ACF $\rho(k) \sim Ck^{2d-1}$ și un pol spectral la zero; memoria ARMA este exponențială
- $(1-L)^d$ cu d real; ARFIMA(p,d,q) separă memoria pe termen lung (d) de dinamica pe termen scurt (ARMA)
- Staționar pentru $d < 1/2$, inversabil pentru $d > -1/2$, cu revenire la medie pentru $d < 1$; $H = d + 1/2$
- Estimați d cu mai multe metode și lățimi de bandă; preferați comparațiile cu ARMA pe baza verosimilității
- Inflația și volatilitatea au memorie lungă; randamentele nu; rupturile și regimurile o pot imita

Formule de reținut

Mărimea	**Formula**
ARFIMA(p, d, q)	$\phi(L)(1-L)^{d}(x_t-\mu)=\theta(L)\varepsilon_t$
Ponderile lui $(1-L)^{d}$	$\pi_{\mathbf{0}}=1, \quad \pi_k=\pi_{k-\mathbf{1}}(k-1-d)/k$
ACF pentru ARFIMA$(0, d, 0)$	$\rho(1)=d/(1-d), \quad \rho(k)=\rho(k-1)(k-1+d)/(k-d)\sim Ck^{\mathbf{2}d-\mathbf{1}}$
Spectrul în apropierea lui 0	$f(\lambda)\sim G\lambda^{-\mathbf{2}d}$
GPH	$\log I(\lambda_j)=c+d\,[-\log(4\sin^{\mathbf{2}}(\lambda_j/2))]+u_j, \quad \mathrm{SE}=\pi/\sqrt{24m}$
Whittle local	$\min_d \log\big(\frac{\mathbf{1}}{m}\sum_j \lambda_j^{\mathbf{2}d} I(\lambda_j)\big)-\frac{\mathbf{2}d}{m}\sum_j \log\lambda_j, \quad \mathrm{SE}=1/(2\sqrt{m})$
R/S, DFA	$E(R/S)_n\approx cn^{H}, \quad F(n)\approx cn^{H}, \quad H=d+1/2$
FIGARCH	$\sigma_t^{\mathbf{2}}=\omega+\beta\sigma_{t-\mathbf{1}}^{\mathbf{2}}+[1-\beta L-(1-\phi L)(1-L)^{d}]\varepsilon_t^{\mathbf{2}}$

Autoevaluare

- **Întrebare**: cît sînt π_1 și π_2 pentru $(1-L)^{0,2}$?
  - **Răspuns**: $\pi_1 = -0{,}2$, $\pi_2 = -0{,}2 \cdot 0{,}8/2 = -0{,}08$
- **Întrebare**: este staționar un ARFIMA(0; 0,7; 0)?
  - **Răspuns**: nu ($d \geq 0{,}5$), dar revine la medie; prima ei diferență este ARFIMA(0; −0,3; 0), staționar și antipersistent
- **Întrebare**: GPH dă $\hat{d} = 0{,}35$ pentru o serie cu o schimbare mare de nivel. Este aceasta o dovadă de memorie lungă?
  - **Răspuns**: nu, prin ea însăși: o ruptură produce aceeași putere la frecvențele joase; reestimați după eliminarea schimbării și pe subeșantioane
- Urmează: Capitolul 9, învățarea automată pentru serii de timp

Bibliografie (1/3)

- Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X., & Labys, P. (2003). Modeling and forecasting realized volatility. *Econometrica*, 71(2), 579–625. doi:10.1111/1468-0262.00418
- Baillie, R. T. (1996). Long memory processes and fractional integration in econometrics. *Journal of Econometrics*, 73(1), 5–59. doi:10.1016/0304-4076(95)01732-1
- Baillie, R. T., Bollerslev, T., & Mikkelsen, H. O. (1996). Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 74(1), 3–30. doi:10.1016/S0304-4076(95)01749-6
- Beran, J., Feng, Y., Ghosh, S., & Kulik, R. (2013). *Long-Memory Processes: Probabilistic Properties and Statistical Methods*. Springer. doi:10.1007/978-3-642-35512-7
- Brockwell, P. J., & Davis, R. A. (1991). *Time Series: Theory and Methods* (2nd ed.). Springer. doi:10.1007/978-1-4419-0320-4
- Cheung, Y.-W., & Lai, K. S. (1993). A fractional cointegration analysis of purchasing power parity. *Journal of Business & Economic Statistics*, 11(1), 103–112. doi:10.1080/07350015.1993.10509936
- Cobb, G. W. (1978). The problem of the Nile: Conditional solution to a changepoint problem. *Biometrika*, 65(2), 243–251. doi:10.1093/biomet/65.2.243
- Corsi, F. (2009). A simple approximate long-memory model of realized volatility. *Journal of Financial Econometrics*, 7(2), 174–196. doi:10.1093/jjfinec/nbp001
- Diebold, F. X., & Inoue, A. (2001). Long memory and regime switching. *Journal of Econometrics*, 105(1), 131–159. doi:10.1016/S0304-4076(01)00073-2
- Ding, Z., Granger, C. W. J., & Engle, R. F. (1993). A long memory property of stock market returns and a new model. *Journal of Empirical Finance*, 1(1), 83–106. doi:10.1016/0927-5398(93)90006-D

Bibliografie (2/3)

- Fox, R., & Taqqu, M. S. (1986). Large-sample properties of parameter estimates for strongly dependent stationary Gaussian time series. *The Annals of Statistics*, 14(2), 517–532. doi:10.1214/aos/1176349936
- Geweke, J., & Porter-Hudak, S. (1983). The estimation and application of long memory time series models. *Journal of Time Series Analysis*, 4(4), 221–238. doi:10.1111/j.1467-9892.1983.tb00371.x
- Granger, C. W. J., & Hyung, N. (2004). Occasional structural breaks and long memory with an application to the S&P 500 absolute stock returns. *Journal of Empirical Finance*, 11(3), 399–421. doi:10.1016/j.jempfin.2003.03.001
- Granger, C. W. J., & Joyeux, R. (1980). An introduction to long-memory time series models and fractional differencing. *Journal of Time Series Analysis*, 1(1), 15–29. doi:10.1111/j.1467-9892.1980.tb00297.x
- Graves, T., Gramacy, R., Watkins, N., & Franzke, C. (2017). A brief history of long memory: Hurst, Mandelbrot and the road to ARFIMA, 1951–1980. *Entropy*, 19(9), 437. doi:10.3390/e19090437
- Hassler, U., & Wolters, J. (1995). Long memory in inflation rates: International evidence. *Journal of Business & Economic Statistics*, 13(1), 37–45. doi:10.1080/07350015.1995.10524577
- Hosking, J. R. M. (1981). Fractional differencing. *Biometrika*, 68(1), 165–176. doi:10.1093/biomet/68.1.165
- Huang, C., & Petukhina, A. (2022). *Applied Time Series Analysis and Forecasting with Python*. Springer. doi:10.1007/978-3-031-13584-2
- Hurst, H. E. (1951). Long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 116(1), 770–799. doi:10.1061/TACEAT.0006518

Bibliografie (3/3)

- Lo, A. W. (1991). Long-term memory in stock market prices. *Econometrica*, 59(5), 1279–1313. doi:10.2307/2938368
- Mandelbrot, B. B., & Van Ness, J. W. (1968). Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Review*, 10(4), 422–437. doi:10.1137/1010093
- Mandelbrot, B. B., & Wallis, J. R. (1968). Noah, Joseph, and operational hydrology. *Water Resources Research*, 4(5), 909–918. doi:10.1029/WR004i005p00909
- Mandelbrot, B. B., & Wallis, J. R. (1969). Robustness of the rescaled range R/S in the measurement of noncyclic long run statistical dependence. *Water Resources Research*, 5(5), 967–988. doi:10.1029/WR005i005p00967
- Peng, C.-K., Buldyrev, S. V., Havlin, S., Simons, M., Stanley, H. E., & Goldberger, A. L. (1994). Mosaic organization of DNA nucleotides. *Physical Review E*, 49(2), 1685–1689. doi:10.1103/PhysRevE.49.1685
- Ray, B. K. (1993). Modeling long-memory processes for optimal long-range prediction. *Journal of Time Series Analysis*, 14(5), 511–525. doi:10.1111/j.1467-9892.1993.tb00161.x
- Robinson, P. M. (1995). Gaussian semiparametric estimation of long range dependence. *The Annals of Statistics*, 23(5), 1630–1661. doi:10.1214/aos/1176324317
- Sowell, F. (1992). Maximum likelihood estimation of stationary univariate fractionally integrated time series models. *Journal of Econometrics*, 53(1–3), 165–188. doi:10.1016/0304-4076(92)90084-5
- Velasco, C. (1999). Gaussian semiparametric estimation of non-stationary time series. *Journal of Time Series Analysis*, 20(1), 87–127. doi:10.1111/1467-9892.00127
- Weron, R. (2002). Estimating long-range dependence: Finite sample properties and confidence intervals. *Physica A*, 312(1–2), 285–299. doi:10.1016/S0378-4371(02)00961-5