



Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Seminar 12: Analiza Spectrală și Metode în Domeniul Frecvenței



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București

IDA Institute Digital Assets

Blockchain Research Center

AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance

Academia Română, Institutul de Prognoză Economică

MSCA Digital Finance

Cuprins Seminar

- ▣ **Partea I: Nivel Anul 3** – Randamente, periodogramă, spectru AR(1)
- ▣ **Partea II: Nivel Master** – Welch vs. multitaper, estimare AR, filtru HP
- ▣ **Partea III: Extensie Doctorat** – Estimator GPH, Local Whittle, analiză cross-spectrală
- ▣ **Subiecte de Discuție** – Gândire critică
- ▣ **Exercițiu cu Inteligență Artificială** – Gândire critică
- ▣ **Rezumat** – Concluzii cheie

Exercițiul 1: Log-Randamente

Întrebare

Fie o serie de prețuri P_t . Definim log-randamentele $r_t = \log(P_t/P_{t-1})$.

Exercițiu

- (A) Reprezentați grafic seria P_t și seria de randamente r_t . Ce caracteristici vizuale observați?
- (B) Calculați ACF-ul eșantion al r_t și al r_t^2 pentru decalajele $h = 1, \dots, 20$.
- (C) Ce sugerează un ACF aproape nul al r_t despre predictibilitate? Ce indică valorile semnificative ale ACF al r_t^2 ?

Răspunsul pe slide-ul următor...

Exercițiul 1: Soluție

Soluție

Variante de răspuns

- (A) P_t prezintă de obicei un trend nestaționar; r_t oscilează în jurul valorii zero cu perioade de volatilitate ridicată și scăzută (aglomerarea volatilității).
- (B) $ACF(r_t)$: majoritatea valorilor se încadrează în benzile de confidență $\pm 1,96/\sqrt{n} \Rightarrow$ randamentele sunt aproximativ necorelate. $ACF(r_t^2)$: valori pozitive semnificative la multe decalaje $\Rightarrow$ randamentele la pătrat sunt corelate.
- (C) $ACF(r_t) \approx 0 \Rightarrow$ randamentele sunt aproape **zgomot alb**: informația din trecut nu ajută la prognoza randamentelor viitoare (ipoteza eficienței slabe a pieței). $ACF(r_t^2)$ semnificativ $\Rightarrow$ **efecte ARCH/GARCH**: volatilitatea este predictibilă chiar și atunci când randamentele nu sunt.

Exercițiul 2: Periodograma Brută

Întrebare

Fie $n = 256$ observații. Periodograma la frecvența Fourier $\omega_j = 2\pi j/n$ este:

$$I(\omega_j) = \frac{1}{2\pi n} |d(\omega_j)|^2, \quad d(\omega_j) = \sum_{t=1}^n Y_t e^{-i\omega_j t}$$

Exercițiu

- (A) Reprezentați $I(\omega_j)$ în funcție de $\omega_j \in [0, \pi]$. Cum identificați frecvența dominantă?
- (B) Dacă seria are un tipar trimestrial (perioadă = 4), la ce frecvență unghiulară ω^* așteptați vârful cel mai mare al periodogramei?
- (C) Ce indică o periodogramă complet plată?

Răspunsul pe slide-ul următor...

Exercițiul 2: Soluție

Soluție

Variante de răspuns

(A) Frecvența dominantă este ω_j la care $I(\omega_j)$ atinge maximul global. Perioada corespunzătoare este $T = 2\pi/\omega_j$ unități de timp.

(B) Un tipar trimestrial are perioada $T = 4$, deci:

□ $\omega^* = 2\pi/4 = \pi/2 \approx 1,571$ rad. Aceasta corespunde celei de-a 64-a frecvențe Fourier pentru $n = 256$ ($j^* = n/T = 64$).

□ (C) O periodogramă plată $I(\omega_j) \approx c$ pentru orice j indică **zgomot alb**: toate frecvențele contribuie în mod egal la varianța seriei ($\int_0^\pi f(\omega) d\omega = \gamma(0)$, unde $f(\omega) = \sigma^2/(2\pi) = \text{const}$).

Exercițiul 3: Inconsistența Periodogramei

Întrebare

Arătați că periodograma este un estimator *inconsistent* al densității spectrale.

Exercițiu

- (A) Enunțați distribuția asimptotică a $I(\omega_j)$ când $n \rightarrow \infty$.
- (B) Derivați $\text{Var}[I(\omega_j)]$ în funcție de n . Converge la zero?
- (C) Propuneți o soluție care produce un estimator consistent și explicați compromisul implicat.

Răspunsul pe slide-ul următor...

Exercițiul 3: Soluție

Soluție

- ▣ (A) Pentru $\omega_j \neq 0, \pi$: $\frac{2 I(\omega_j)}{f(\omega_j)} \xrightarrow{d} \chi_2^2 \Rightarrow I(\omega_j) \stackrel{d}{\approx} f(\omega_j) \cdot \chi_2^2/2$
- ▣ (B) $\text{Var}[I(\omega_j)] \approx f(\omega_j)^2$. Aceasta **nu scade** cu $n \Rightarrow$ periodograma este **inconsistentă**.
- ▣ (C) **Netezire** peste m ordonate adiacente: $\hat{f}(\omega_j) = \frac{1}{2m+1} \sum_{k=-m}^m I(\omega_{j+k})$. Varianță $\propto 1/m$, rezoluție $\propto m/n$. Netezire mai mare $\Rightarrow$ varianță mai mică, bias mai mare.

 TSA_ch12_periodogram

Exercițiul 4: Spectrul Procesului AR(1)

Întrebare

Considerați procesul AR(1): $Y_t = 0,8 Y_{t-1} + \varepsilon_t$ cu $\sigma_\varepsilon^2 = 1$.

Exercițiu

- (A) Derivați densitatea spectrală $f(\omega)$ pentru $\omega \in [0, \pi]$.
- (B) Calculați raportul $f(0)/f(\pi)$ și interpretați rezultatul.
- (C) Ce este un *spectru roșu*? Dați un exemplu economic.

Răspunsul pe slide-ul următor...

Exercițiul 4: Soluție

Soluție

- ▣ **(A)** Pentru AR(1) cu $\phi = 0,8$: $f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{1,64 - 1,6 \cos \omega}$
- ▣ **(B)** $f(0) = \frac{25}{2\pi}$, $f(\pi) = \frac{1}{2\pi \cdot 3,24}$, deci $\frac{f(0)}{f(\pi)} = \left(\frac{1,8}{0,2}\right)^2 = 81$. Cea mai mare parte a varianței este concentrată la frecvențe joase.
- ▣ **(C)** Un **spectru roșu** este dominat de frecvențe joase: cea mai mare parte a varianței provine din oscilații lente (cicluri lungi). PIB-ul, consumul și prețurile acțiunilor prezintă spectre roșii — evoluează lent și persistent.

Exercițiul 5: Welch vs. Multitaper

Întrebare

Comparați doi estimatori spectrali aplicați aceleiași serii cu $n = 512$ observații: **Welch**: $L = 4$ segmente suprapuse; **Multitaper**: $NW = 4$, $K = 7$ tapere DPSS.

Exercițiu

- (A) Calculați rezoluția în frecvență (lățimea de bandă) pentru fiecare estimator.
- (B) Care estimator are varianță mai mică? De ce?
- (C) Descrieți compromisul bias-varianță pentru fiecare metodă.

Răspunsul pe slide-ul următor...

Exercițiul 5: Soluție

Soluție

- ▣ **(A)** Welch ($L = 4$, $n_{seg} = 128$): $\Delta\omega_{\text{Welch}} \approx 2/128 \approx 0,0156$ cicluri/obs. Multitaper ($NW = 4$, $n = 512$): $\Delta\omega_{\text{MT}} \approx 8/512 = 0,0156$ cicluri/obs. Ambii estimatori au aceeași rezoluție în frecvență.
- ▣ **(B)** Multitaper mediază $K = 7$ eigen-spectre independente $\Rightarrow$ varianță $\propto 1/K$. Grade de libertate echivalente: $\approx 2K = 14$ față de $\approx 2L = 8$.
- ▣ **(C)** Ambele metode sacrifică rezoluția pentru varianță mai mică. Multitaper suprimă în mod optim lobii laterali prin taperele DPSS — este preferat în majoritatea aplicațiilor.

Exercițiul 6: Estimarea Spectrală AR

Întrebare

Considerați procesul AR(2):

$$Y_t = 1,5 Y_{t-1} - 0,7 Y_{t-2} + \varepsilon_t, \quad \sigma_\varepsilon^2 = 1$$

Exercițiu

- (A) Derivați densitatea spectrală parametrică $\hat{f}_{AR}(\omega)$.
- (B) Determinați frecvența de vârf ω^* a spectrului.
- (C) Converteți ω^* în perioadă de ciclu și interpretați economic.

Răspunsul pe slide-ul următor...

Exercițiul 6: Soluție

Soluție

- ▣ **(A)** Cu $\phi_1 = 1,5$, $\phi_2 = -0,7$: $f(\omega) = \frac{1}{2\pi |1 - 1,5e^{-i\omega} + 0,7e^{-2i\omega}|^2}$
- ▣ **(B)** Prin derivare numerică a lui $|A(e^{-i\omega})|^2$: $\omega^* \approx 0,47$ rad.
- ▣ **(C)** Perioada $= 2\pi/\omega^* \approx 2\pi/0,47 \approx 13,4$ observații. Pentru date trimestriale, aceasta corespunde unui **ciclu de afaceri de 3,3 ani** — consistent cu ciclurile tipice de inventar și investiții.

 TSA_ch12_spectral_density

Exercițiul 7: Funcția de Transfer a Filtrului HP

Întrebare

Filtrul HP extrage trendul τ_t minimizând $\sum (Y_t - \tau_t)^2 + \lambda \sum (\Delta^2 \tau_t)^2$. Câștigul la putere al componentei ciclu este: $|A_{HP}(\omega)|^2 = \frac{\lambda [2(1 - \cos \omega)]^2}{1 + \lambda [2(1 - \cos \omega)]^2}$

Exercițiu

- (A) Evaluați $|A_{HP}(\omega)|^2$ la $\omega = 0$ și $\omega = \pi$ pentru orice λ .
- (B) Găsiți frecvența de tăiere la jumătate din putere pentru $\lambda = 1600$.
- (C) Rezumați critica lui Hamilton (2018) la adresa filtrului HP.

Răspunsul pe slide-ul următor...

Exercițiul 7: Soluție

Soluție

- ▣ **(A)** La $\omega = 0$: $2(1 - \cos 0) = 0 \Rightarrow |A_{HP}(0)|^2 = 0$ (trend eliminat). La $\omega = \pi$: $|A_{HP}(\pi)|^2 = 16\lambda/(1 + 16\lambda) \approx 1$ (frecv. înalte trec).
- ▣ **(B)** Condiția $|A_{HP}(\omega)|^2 = 0,5$: $\lambda[2(1 - \cos \omega)]^2 = 1$, deci $2(1 - \cos \omega) = 0,025$, $\omega^* \approx 0,158$ rad $\approx 2\pi/40$ (perioadă ≈ 10 ani).
- ▣ **(C) Hamilton (2018)**: filtrul HP este echivalent cu o regresie pe valori decalate. Ciclul obținut este corelat spurios la toate decalajele și impune structură ARMA(4,4) zgomotului alb — generând *cicluri artificiale*. Hamilton recomandă o regresie simplă în 2 pași.

Exercițiul 8: Estimatorul GPH

Întrebare

Pentru ARFIMA(0, d ,0), estimatorul GPH aplică MCO la:

$$\log I(\omega_j) = c - d \log[4 \sin^2(\omega_j/2)] + u_j, \quad j = 1, \dots, m$$

Exercițiu

- (A) Care este estimatorul MCO $\hat{d}$? Cum se calculează?
- (B) Ce lățime de bandă m ar trebui utilizată? Recomandări teoretice?
- (C) Care este eroarea standard asimptotică a lui $\hat{d}$?

Răspunsul pe slide-ul următor...

Exercițiul 8: Soluție

Soluție

- ▣ **(A)** Fie $x_j = -\log[4 \sin^2(\omega_j/2)]$ și $y_j = \log I(\omega_j)$: $\hat{d} = \frac{\sum_{j=1}^m (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{\sum_{j=1}^m (x_j - \bar{x})^2}$ (panta MCO)
- ▣ **(B)** $m = O(n^\alpha)$, $\alpha \in (0, 1)$; practică: $m \approx n^{0,5}$ până la $n^{0,6}$. m mic $\Rightarrow$ varianță mare; m mare $\Rightarrow$ bias.
- ▣ **(C)** $ES(\hat{d}) = \pi/\sqrt{6m}$. Pentru $n = 1000$, $m = 32$: $ES \approx 0,226$. Hurst: $H = d + 0,5$; $d > 0 \Rightarrow H > 0,5$ (persistență).

Exercițiul 9: Estimatorul Whittle Local

Întrebare

Comparați estimatorii GPH și Whittle Local pentru o serie cu $n = 1000$ observații și $d = 0,3$ adevărat.

Exercițiu

- (A) Scrieți funcția obiectiv a Whittle Local și precizați ce minimizează.
- (B) Ce lățime de bandă m se folosește și care este varianța asimptotică a $\hat{d}_{WL}$?
- (C) De ce este Whittle Local mai eficient decât GPH?

Răspunsul pe slide-ul următor...

Exercițiul 9: Soluție

Soluție

- ▣ **(A)** Whittle Local minimizează log-verosimilitatea restricționată:

$$Q(d) = \log G(d) - 2d \bar{\lambda}_m, \quad G(d) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{I(\omega_j)}{\omega_j^{-2d}}, \quad \hat{d}_{WL} = \arg \min_d Q(d)$$

- ▣ **(B)** $m = O(n^{0,6-0,8})$; pentru $n = 1000$ tipic $m \approx 100-250$. $\text{Var}(\hat{d}_{WL}) = 1/(4m)$; pentru $m = 100$: $\text{ES} = 0,05$.
- ▣ **(C)** GPH folosește MCO pe log-periodogramă (erori χ_2^2 cu coadă grea); WL folosește o verosimilitate propriu-zisă. WL este asimptotic eficient: $\text{Var} = 1/(4m)$ față de $\approx 1,645/m$ (GPH) pentru același m .

Exercițiul 10: Analiza Spectrală Încrucișată

Întrebare

Presupunem că $Y_t = X_{t-4} + \varepsilon_t$, unde $\varepsilon_t \perp X_s$ pentru orice s, t .

Exercițiu

- (A) Derivați spectrul încrucișat $S_{XY}(\omega) = e^{-4i\omega} S_{XX}(\omega)$. Care este funcția de fază $\phi(\omega)$?
- (B) Calculați coerența la pătrat $C_{XY}^2(\omega)$: (i) fără zgomot, (ii) cu zgomot $\varepsilon_t \sim (0, \sigma_\varepsilon^2)$.
- (C) Ce indică panta fazei $-d\phi/d\omega$ și care este valoarea sa în acest caz?

Răspunsul pe slide-ul următor...

Exercițiul 10: Soluție

Soluție

- ▣ **(A)** Funcția de transfer $H(\omega) = e^{-4i\omega}$, deci $S_{XY}(\omega) = e^{-4i\omega} S_{XX}(\omega)$. Faza: $\phi(\omega) = -4\omega$ (liniară în ω).
- ▣ **(B)** $C_{XY}^2(\omega) = |S_{XY}|^2 / (S_{XX} \cdot S_{YY})$: (i) Fără zgomot: $C_{XY}^2 = 1$. (ii) Cu zgomot: $C_{XY}^2 = S_{XX} / (S_{XX} + \sigma_\varepsilon^2 / (2\pi)) < 1$.
- ▣ **(C)** **Întârzierea de grup** $= -d\phi/d\omega = 4$ perioade la toate frecvențele — confirmă o deplasare pură de 4 perioade, fără distorsiune de fază.

Discuție: Alegerea Estimatorului Spectral

Întrebare Cheie

Aveți $n = 1000$ observații. Ce estimator spectral folosiți și de ce?

Cadru de Decizie

1. **Doriți o privire rapidă asupra frecvențelor dominante?**
 - ▶ Periodograma brută — rapidă, dar zgomotoasă
2. **Aveți nevoie de varianță redusă și suprimare bună a lobilor laterali?**
 - ▶ Multitaper (DPSS) — standardul modern
3. **Serie scurtă sau segmente nestaționare?**
 - ▶ Welch (segmente suprapuse) — reduce sensibilitatea la nestaționaritate
4. **Seria urmează un model AR/ARMA cunoscut?**
 - ▶ Spectrul AR parametric — neted și consistent cu modelul

Discuție: Interpretarea Spectrelor Economice

Întrebare Cheie

Calculați densitatea spectrală a creșterii trimestriale a PIB și găsiți cea mai mare putere la frecvențe sub $\pi/16$. Ce implică aceasta?

Ghid de Interpretare

- ▣ Frecvență $\omega < \pi/16 \Rightarrow$ perioadă > 32 trimestre = 8 ani: **cicluri lungi**
- ▣ Spectrul este **roșu**: domină componenta persistentă, cu evoluție lentă
- ▣ Banda ciclului de afaceri: $\omega \in [\pi/16, \pi/3]$ (perioade 6–32 trimestre)

Reguli Practice

- ▣ **Trend**: putere la $\omega \approx 0$ (frecvență foarte joasă)
- ▣ **Ciclu de afaceri**: putere în banda Baxter-King (6–32 trimestre)
- ▣ **Sezonalitate**: vârfuri clare la $\omega = \pi/2$ (trimestrial), $2\pi/12$ (lunar)
- ▣ **Zgomot alb**: spectru plat la toate frecvențele

Discuție: Filtrul HP în Practică

Întrebare Cheie

Ar trebui economiștii să renunțe la filtrul HP? Care sunt alternativele?

Argumente Împotrivă (Hamilton 2018)

- ▣ Impune structură ARMA(4,4) spurioasă zgomotului alb
- ▣ Generează cicluri artificiale absente din date
- ▣ Estimările la sfârșitul eșantionului sunt nesigure
- ▣ Rezultatele nu sunt invariante la alegerea lui λ

Alternative

- ▣ **Filtrul Hamilton:** regresia Y_{t+h} pe $Y_t, Y_{t-1}, Y_{t-2}, Y_{t-3}$; reziduul ca ciclu
- ▣ **Filtrul bandpass** (Baxter-King, Christiano-Fitzgerald): izolează direct frecvențele ciclului de afaceri
- ▣ **Model cu componente neobservate:** modelare explicită trend + ciclu (metode state-space)

Exercițiu AI: Gândire Critică

Prompt de testat în ChatGPT / Claude / Copilot

„Estimați densitatea spectrală a creșterii trimestriale a PIB real al SUA (1947–prezent) folosind periodograma, metoda Welch și multitaper. Identificați frecvența dominantă a ciclului de afaceri. Testați memoria lungă cu estimatorul GPH și comparați cu Whittle Local.”

Exercițiu: evaluați critic rezultatul AI:

1. A folosit AI normalizarea spectrală corectă (convenția $1/(2\pi)$)?
2. Sunt justificați parametrii pentru segmentele Welch și lățimea de bandă multitaper?
3. Vârful identificat al ciclului de afaceri corespunde intervalului așteptat de 6–32 trimestre?
4. Este lățimea de bandă GPH aleasă în mod optim (de ex. $m \approx n^{0.5}$)?
5. Sunt consistente estimările GPH și Whittle Local? Dacă nu, de ce pot diferi?

Atenție: Codul generat de AI poate rula fără erori și arăta profesional. *Aceasta nu înseamnă că este corect.*

 TSA_ch12_long_memory

Exerciții pentru Acasă

1. **Teoretic:** Arătați că pentru zgomot alb $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$, densitatea spectrală este $f(\omega) = \sigma^2 / (2\pi)$ pentru orice $\omega \in [0, \pi]$.
2. **Calcul:** Pentru procesul AR(2) $Y_t = 0,6Y_{t-1} - 0,3Y_{t-2} + \varepsilon_t$:
 - ▶ Derivați analitic densitatea spectrală $f(\omega)$
 - ▶ Simulați $n = 512$ observații și comparați periodograma cu spectrul teoretic
 - ▶ Aplicați estimarea Welch și multitaper; comparați toate trei metode
3. **Aplicat:** Descărcați datele lunare privind numărul de pete solare (sidc.be):
 - ▶ Estimați densitatea spectrală și identificați ciclul de ≈ 11 ani
 - ▶ Testați memoria lungă; raportați $\hat{d}$ prin GPH și Whittle Local
4. **Gândire Critică:** De ce aplicarea filtrului HP cu $\lambda = 1600$ pe date lunare (în loc de trimestriale) produce rezultate eronate?

Indicii pentru Soluții

Indicii

1. Prin teorema Wiener-Khinchin: $f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_h \gamma(h) e^{-i\omega h}$. Pentru zgomot alb: $\gamma(0) = \sigma^2$, $\gamma(h) = 0$ pentru $h \neq 0$, deci $f(\omega) = \sigma^2/(2\pi)$ — plat.
2. Spectrul AR(2): $f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi|1-0,6e^{-i\omega}+0,3e^{-2i\omega}|^2}$. Procesul are un vârf spectral (rădăcini complexe). Verificați numeric: vârful ar trebui să se afle între 0 și $\pi/2$.
3. Ciclul petelor solare: așteptați un vârf clar la $\omega = 2\pi/(11 \times 12) \approx 0,048$ rad/lună. Testele de memorie lungă dau de obicei $\hat{d} \approx 0,3-0,5$ pentru petele solare.
4. Calibrarea filtrului HP: $\lambda = 1600$ este proiectat pentru date trimestriale. Pentru date lunare, valoarea corectă este $\lambda \approx 1600 \times 3^4 = 129.600$. Folosind $\lambda = 1600$ pe date lunare, frecvența de tăiere este greșită, distorsionând ciclul extras.

Rezumat: Capitolul 12

Parte	Exerciții
Anul 3	Ex. 1–4
Master	Ex. 5–7
Doctorat	Ex. 8–10

Compromis cheie: Rezoluție în frecvență $\longleftrightarrow$ Varianță statistică — netezire mai mare $\Rightarrow$ varianță mai mică, dar nu se pot distinge vârfuri spectrale apropiate

Întrebări?

Bibliografie I

Manuale de Analiză a Seriilor de Timp

- ▣ Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice*, ed. a 3-a, OTexts.
- ▣ Shumway, R.H., & Stoffer, D.S. (2017). *Time Series Analysis and Its Applications*, ed. a 4-a, Springer.
- ▣ Percival, D.B., & Walden, A.T. (1993). *Spectral Analysis for Physical Applications*. Cambridge University Press.

Memorie Lungă și Filtre

- ▣ Geweke, J., & Porter-Hudak, S. (1983). Estimarea modelelor cu memorie lungă. *J. Time Ser. Anal.*, 4, 221–238.
- ▣ Robinson, P.M. (1995). Estimare semiparametrică gaussiană a dependenței pe termen lung. *Ann. Statist.*, 23, 1630–1661.
- ▣ Hamilton, J.D. (2018). De ce nu trebuie folosit filtrul HP. *Rev. Econ. Statist.*, 100(5), 831–843.

Bibliografie II

Wavelets și Metode Avansate

- ▣ Mallat, S. (2009). *A Wavelet Tour of Signal Processing*, ed. a 3-a, Academic Press.
- ▣ Gençay, R., Selçuk, F., & Whitcher, B. (2002). *An Introduction to Wavelets and Other Filtering Methods in Finance and Economics*. Academic Press.
- ▣ Baxter, M., & King, R.G. (1999). Measuring business cycles: Approximate band-pass filters. *Rev. Econ. Statist.*, 81(4), 575–593.

Resurse Online și Cod

- ▣ **Quantlet**: <https://quantlet.com> — Platformă de cod pentru metode cantitative
- ▣ **Quantinar**: <https://quantinar.com> — Platformă de învățare pentru metode cantitative
- ▣ **GitHub TSA**: https://github.com/danpele/TSA/tree/main/TSA_ch12 — Cod Python pentru acest seminar

Vă mulțumesc!

Întrebări?

Materialele seminarului sunt disponibile la:

<https://danpele.github.io/Time-Series-Analysis/>

 Quantlet

 Quantinar