



Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Seminar 3: Modele ARIMA



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București

IDA Institute Digital Assets

Blockchain Research Center

AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance

Academia Română, Institutul de Prognoză Economică

MSCA Digital Finance

Cuprins Seminar

- ▣ **Test de Recapitulare** – Verificare cunoștințe
- ▣ **Întrebări Adevărat/Fals** – Verificări conceptuale
- ▣ **Probleme Practice** – Practică aplicată
- ▣ **Exemple Rezolvate** – Soluții detaliate
- ▣ **Analiză pe Date Reale** – Exemple practice
- ▣ **Subiecte de Discuție** – Gândire critică
- ▣ **Exercițiu cu asistență AI** – Gândire critică
- ▣ **Rezumat** – Concluzii cheie

Test 1: Ordinul de Integrare

Întrebare

O serie de timp Y_t necesită două diferențe pentru a deveni staționară. Care este ordinul ei de integrare?

- A) $I(0)$
- B) $I(1)$
- C) $I(2)$
- D) Nu poate fi determinat

Test 1: Ordinul de Integrare

Întrebare

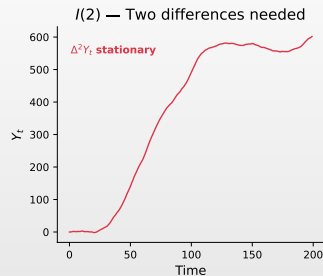
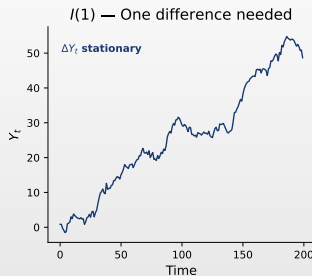
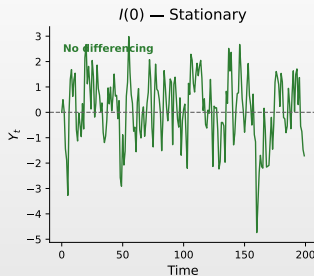
O serie de timp Y_t necesită două diferențe pentru a deveni staționară. Care este ordinul ei de integrare?

- A) $I(0)$
- B) $I(1)$
- C) $I(2)$
- D) Nu poate fi determinat

Răspuns: C – $I(2)$

- ▣ **Definiție:** $Y_t \sim I(d)$ dacă $\Delta^d Y_t$ este staționară dar $\Delta^{d-1} Y_t$ nu este.
- ▣ **Exemplu:** Dacă Y_t urmează $\Delta^2 Y_t = \varepsilon_t$, atunci:
 - ▶ $\Delta Y_t = \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$ (încă are rădăcină unitară)
 - ▶ $\Delta^2 Y_t = \varepsilon_t$ (zgomot alb, staționară)
- ▣ **În practică:** Nivelurile prețurilor pot fi $I(2)$ când inflația însăși este nestaționară.

Vizual: Procese Integrate



$I(0)$: staționară. $I(1)$: o diferență necesară. $I(2)$: două diferențe necesare pentru a deveni staționară.

 TSA_ch3_def_integrated

Test 2: Proprietățile Mersului Aleatoriu

Întrebare

Pentru un mers aleatoriu $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$ cu $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$, care este $\text{Var}(Y_t)$?

- A) σ^2
- B) $t \cdot \sigma^2$
- C) σ^2/t
- D) $\sigma^2/(1 - \phi^2)$

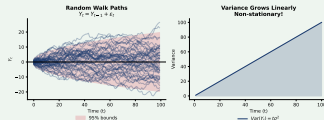
Test 2: Proprietățile Mersului Aleatoriu

Întrebare

Pentru un mers aleatoriu $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$ cu $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$, care este $\text{Var}(Y_t)$?

- A) σ^2
- B) $t \cdot \sigma^2$
- C) σ^2/t
- D) $\sigma^2/(1 - \phi^2)$

Răspuns: B – $t \cdot \sigma^2$



□ **Demonstrație:** $Y_t = \sum_{i=1}^t \varepsilon_i \Rightarrow \text{Var}(Y_t) = t\sigma^2$ (crește linear $\Rightarrow$ nestăționară)

Test 3: Ipotezele Testului ADF

Întrebare

În testul Augmented Dickey-Fuller, care este ipoteza nulă?

- A) Seria este staționară
- B) Seria are o rădăcină unitară
- C) Seria nu are autocorelație
- D) Seria este distribuită normal

Test 3: Ipotezele Testului ADF

Întrebare

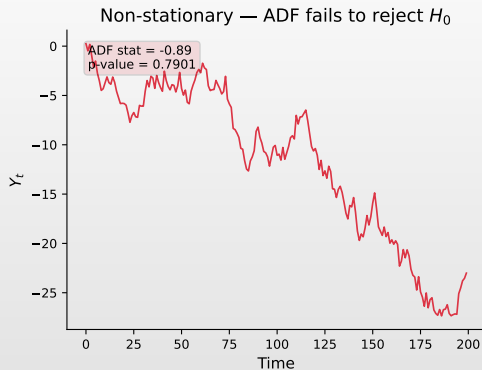
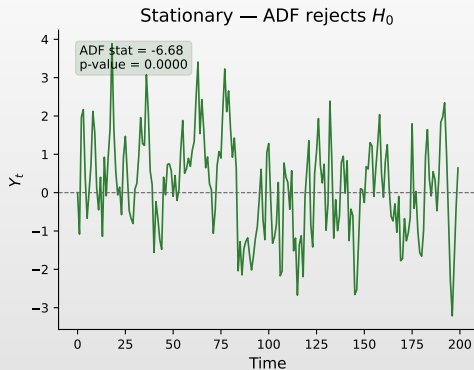
În testul Augmented Dickey-Fuller, care este ipoteza nulă?

- A) Seria este staționară
- B) Seria are o rădăcină unitară
- C) Seria nu are autocorelație
- D) Seria este distribuită normal

Răspuns: B – Seria are o rădăcină unitară

- ▣ **Regresia ADF:** $\Delta Y_t = \alpha + \gamma Y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \delta_j \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_t$
- ▣ **Ipoteze:** $H_0 : \gamma = 0$ (rădăcină unitară, nestacionară) vs $H_1 : \gamma < 0$ (staționară)
- ▣ **Decizie:** Respingem H_0 dacă statistica $t <$ valoarea critică (de ex., -2.86 la 5%). Folosește distribuția specială Dickey-Fuller, nu t standard.

Vizual: Testul ADF



Stânga: staționară – ADF respinge rădăcina unitară. Dreapta: nestăționară – ADF nu respinge.

Test 4: Notăția ARIMA

Întrebare

Ce înseamnă $ARIMA(2,1,1)$?

- A) $AR(2)$ pe date diferențiate cu erori $MA(1)$
- B) $AR(1)$ cu 2 diferențe și $MA(1)$
- C) $MA(2)$ cu 1 diferență și $AR(1)$
- D) 2 lag-uri, 1 trend, 1 componentă sezonieră

Test 4: Notăția ARIMA

Întrebare

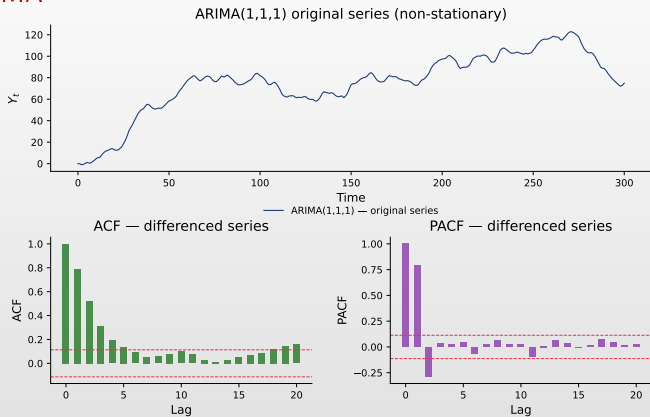
Ce înseamnă ARIMA(2,1,1)?

- A) AR(2) pe date diferențiate cu erori MA(1)
- B) AR(1) cu 2 diferențe și MA(1)
- C) MA(2) cu 1 diferență și AR(1)
- D) 2 lag-uri, 1 trend, 1 componentă sezonieră

Răspuns: A – AR(2) pe date diferențiate cu erori MA(1)

- ☐ **ARIMA**(p, d, q): $\phi(L)(1 - L)^d Y_t = \theta(L)\varepsilon_t$
- ☐ **ARIMA**(2,1,1) se expandează la: $(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)(1 - L)Y_t = (1 + \theta_1 L)\varepsilon_t$, sau echivalent:
 $(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)\Delta Y_t = (1 + \theta_1 L)\varepsilon_t$
- ☐ **Interpretare**: Mai întâi diferențiem seria, apoi ajustăm ARMA(2,1) pe ΔY_t .

Vizual: Procesul ARIMA



Sus: seria ARIMA originală. Jos: după diferențiere, folosim ACF/PACF pentru a identifica ordinele AR și MA.

Test 5: Operatorul de Diferență

Întrebare

Care este $(1 - L)^2 Y_t$ expandat?

- A) $Y_t - Y_{t-1}$
- B) $Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$
- C) $Y_t + 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$
- D) $Y_t - Y_{t-2}$

Test 5: Operatorul de Diferență

Întrebare

Care este $(1 - L)^2 Y_t$ expandat?

- A) $Y_t - Y_{t-1}$
- B) $Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$
- C) $Y_t + 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$
- D) $Y_t - Y_{t-2}$

Răspuns: B – $Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$

- **Expandare:** $(1 - L)^2 = 1 - 2L + L^2$
- **Aplicare:** $(1 - L)^2 Y_t = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$
- **Notă:** Aceasta este egală cu $\Delta(\Delta Y_t) = \Delta Y_t - \Delta Y_{t-1}$, “schimbarea schimbărilor”.

Test 6: KPSS vs ADF

Întrebare

Cum diferă testul KPSS de testul ADF?

- A) KPSS testează sezonabilitatea, ADF testează trenduri
- B) KPSS are staționaritatea ca nulă, ADF are rădăcina unitară ca nulă
- C) KPSS este mai puternic decât ADF
- D) Nu există diferență

Test 6: KPSS vs ADF

Întrebare

Cum diferă testul KPSS de testul ADF?

- A) KPSS testează sezonalitatea, ADF testează trenduri
- B) KPSS are staționaritatea ca nulă, ADF are rădăcina unitară ca nulă
- C) KPSS este mai puternic decât ADF
- D) Nu există diferență

Răspuns: B – Ipoteze nule inversate

ADF Test	KPSS Test
H_0 : Unit Root	H_0 : Stationary
H_1 : Stationary	H_1 : Unit Root
Reject if t stat is critical	Reject if I stat is critical

Decision Matrix		
ADF rejects	KPSS fails to reject	→ Stationary
ADF fails to reject	KPSS rejects	→ Unit Root
Both reject	or both fail	→ Inconclusive

▣ **Strategie:** Folosiți ambele teste împreună pentru inferență robustă.

Test 7: Supradiferențierea

Întrebare

Dacă $Y_t \sim I(1)$ și calculăm $\Delta^2 Y_t$, ce se întâmplă?

- A) Obținem o serie staționară mai bună
- B) Introducem autocorelație negativă artificială
- C) Varianța scade
- D) Nu se schimbă nimic

Test 7: Supradiferențierea

Întrebare

Dacă $Y_t \sim I(1)$ și calculăm $\Delta^2 Y_t$, ce se întâmplă?

- A) Obținem o serie staționară mai bună
- B) Introducem autocorelație negativă artificială
- C) Varianța scade
- D) Nu se schimbă nimic

Răspuns: B – Autocorelație negativă artificială



□ **Diagnostic:** ACF la lag 1 ≈ -0.5 semnalează supradiferențiere. Reduceți d cu 1.

Test 8: Varianța Prognozei

Întrebare

Pentru un model $ARIMA(0,1,0)$ (mers aleatoriu), cum se comportă varianța prognozei când orizontul h crește?

- A) Rămâne constantă
- B) Scade la zero
- C) Crește liniar cu h
- D) Convergă la o limită finită

Test 8: Varianța Prognozei

Întrebare

Pentru un model ARIMA(0,1,0) (mers aleatoriu), cum se comportă varianța prognozei când orizontul h crește?

- A) Rămâne constantă
- B) Scade la zero
- C) Crește liniar cu h
- D) Converge la o limită finită

Răspuns: C – Crește liniar cu h

- ▣ **Prognoză:** $\hat{Y}_{T+h|T} = Y_T$. **Eroare:** $Y_{T+h} - \hat{Y}_{T+h|T} = \sum_{i=1}^h \varepsilon_{T+i}$
- ▣ **Varianță:** $\text{Var}(Y_{T+h} - \hat{Y}_{T+h|T}) = h\sigma^2$
- ▣ **IC 95%:** $Y_T \pm 1.96\sqrt{h}\sigma$ (se lărgeste cu $\sqrt{h}$)

Test 9: Puterea Testului de Rădăcină Unitară

Întrebare

Testul ADF are putere scăzută când:

- A) Dimensiunea eșantionului este foarte mare
- B) Rădăcina adevărată este aproape dar nu egală cu 1
- C) Seria nu are trend
- D) Seria este clar staționară

Test 9: Puterea Testului de Rădăcină Unitară

Întrebare

Testul ADF are putere scăzută când:

- A) Dimensiunea eșantionului este foarte mare
- B) Rădăcina adevărată este aproape dar nu egală cu 1
- C) Seria nu are trend
- D) Seria este clar staționară

Răspuns: B – Rădăcina aproape dar nu egală cu 1

- ▣ **Exemplu:** AR(1) cu $\phi = 0.95$ vs mers aleatoriu ($\phi = 1$)
- ▣ **Problemă:** Ambele au modele ACF similare (descreștere lentă), dar una este staționară.
- ▣ **Putere scăzută:** Probabilitate mare de eroare de tip II (eșec în respingerea lui H_0 fals).
- ▣ **Soluții:** dimensiuni mai mari ale eșantionului, testul Phillips-Perron (robust la heteroscedasticitate), teste de rădăcină unitară pe paneluri (serii multiple).

Test 10: Selecția Modelului ARIMA

Întrebare

După o diferențiere, ACF arată un vârf doar la lag 1, și PACF descrește. Modelul potrivit este:

- A) ARIMA(1,1,0)
- B) ARIMA(0,1,1)
- C) ARIMA(1,1,1)
- D) ARIMA(0,2,1)

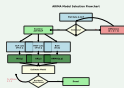
Test 10: Selecția Modelului ARIMA

Întrebare

După o diferențiere, ACF arată un vârf doar la lag 1, și PACF descrește. Modelul potrivit este:

- A) ARIMA(1,1,0)
- B) ARIMA(0,1,1)
- C) ARIMA(1,1,1)
- D) ARIMA(0,2,1)

Răspuns: B – ARIMA(0,1,1)



- **Model:** ACF se anulează la lag 1, PACF descrește $\Rightarrow$ MA(1) pentru seria diferențiată. Model complet: ARIMA(0,1,1) = IMA(1,1)

Test 11: Staționaritate în Trend vs Staționaritate în Diferențe

Întrebare

Un proces staționar în trend devine staționar prin:

- A) Luarea diferențelor de ordinul întâi
- B) Eliminarea trendului determinist prin regresie
- C) Luarea diferențelor de ordinul doi
- D) Aplicarea ajustării sezoniere

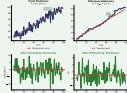
Test 11: Staționaritate în Trend vs Staționaritate în Diferențe

Întrebare

Un proces staționar în trend devine staționar prin:

- A) Luarea diferențelor de ordinul întâi
- B) Eliminarea trendului determinist prin regresie
- C) Luarea diferențelor de ordinul doi
- D) Aplicarea ajustării sezoniere

Răspuns: B – Eliminarea trendului determinist prin regresie



- **Staționar în trend:** Eliminarea trendului prin regresie (șocurile sunt temporare). **Staționar în diferențe:** Diferențiere (șocurile sunt permanente). Tratatamentul greșit afectează modelul.

Test 12: Invertibilitatea ARIMA

Întrebare

ARIMA(0,1,1) cu $\theta_1 = 1.2$ este:

- A) Staționară și invertibilă
- B) Nestaționară dar invertibilă
- C) Nestaționară și neinvertibilă
- D) Staționară dar neinvertibilă

Test 12: Invertibilitatea ARIMA

Întrebare

ARIMA(0,1,1) cu $\theta_1 = 1.2$ este:

- A) Staționară și invertibilă
- B) Nestaționară dar invertibilă
- C) Nestaționară și neinvertibilă
- D) Staționară dar neinvertibilă

Răspuns: C – Nestaționară și neinvertibilă

- ▣ **Staționaritate:** $d = 1$ înseamnă o rădăcină unitară $\Rightarrow$ **Nestaționară**
- ▣ **Invertibilitate:** Polinomul MA este $\theta(z) = 1 + 1.2z$; rădăcină: $z = -1/1.2 = -0.833$ (în interiorul cercului unitate). Invertibilitatea necesită rădăcina în afara cercului unitate, iar $|\theta_1| = 1.2 > 1 \Rightarrow$ **Neinvertibilă**.
- ▣ **Corecție:** Rescrieți cu $\theta^* = 1/1.2 = 0.833$ și ajustați varianța.

Test 13: Regresia Falsă

Întrebare

Regresând un mers aleatoriu pe un alt mers aleatoriu independent, de obicei se obține:

- A) Nicio relație semnificativă
- B) R^2 ridicat și statistici t semnificative (fals)
- C) Corelație negativă
- D) Multicolinearitate perfectă

Test 13: Regresia Falsă

Întrebare

Regresând un mers aleatoriu pe un alt mers aleatoriu independent, de obicei se obține:

- A) Nicio relație semnificativă
- B) R^2 ridicat și statistici t semnificative (fals)
- C) Corelație negativă
- D) Multicolinearitate perfectă

Răspuns: B – R^2 ridicat și statistici t semnificative (fals)

- ▣ **Granger & Newbold (1974):** Fenomenul regresiei false
- ▣ **Simptome:** R^2 ridicat (adesea > 0.9) între serii neînrudite, statistici t semnificative, statistică Durbin-Watson foarte scăzută ($\ll 2$), reziduuri nestaționare.
- ▣ **Soluții:** (1) Diferențiați ambele serii, sau (2) Testați pentru cointegrare

Test 14: Prognoza pe Termen Lung

Întrebare

Prognoza pe termen lung din ARIMA(1,1,0) cu $\phi_1 = 0.7$ convergă la:

- A) Zero
- B) Media necondiționată
- C) O extrapolare liniară a trendului
- D) Ultima valoare observată

Test 14: Prognoza pe Termen Lung

Întrebare

Prognoza pe termen lung din ARIMA(1,1,0) cu $\phi_1 = 0.7$ convergă la:

- A) Zero
- B) Media necondiționată
- C) O extrapolare liniară a trendului
- D) Ultima valoare observată

Răspuns: C – O extrapolare liniară a trendului

- ▣ **Model:** $(1 - \phi_1 L)(1 - L)Y_t = c + \varepsilon_t$
- ▣ **Prognoza pe termen lung:** Pentru modelele $I(1)$ cu derivă c : $\hat{Y}_{T+h} \approx Y_T + h \cdot \frac{c}{1-\phi_1}$
- ▣ **Diferențe cheie:** ARMA staționară: prognozele $\rightarrow$ media necondiționată; $I(1)$ fără derivă: prognozele $\rightarrow$ ultima valoare (plată); $I(1)$ cu derivă: prognozele $\rightarrow$ extrapolare liniară.

Întrebări Adevărat/Fals

Întrebare

Determinați dacă fiecare afirmație este Adevărată sau Falsă:

1. Un proces $I(2)$ necesită două diferențe pentru a deveni staționar.
2. Testul ADF include întotdeauna un termen constant.
3. $ARIMA(0,1,0)$ este un alt nume pentru un mers aleatoriu.
4. Diferențierea unei serii staționare o face “mai staționară.”
5. Testul KPSS are staționaritatea ca ipoteză nulă.
6. Modelele ARIMA pot captura doar modele liniare.

Răspunsul pe slide-ul următor...

Adevărat/Fals: Soluții

Răspunsuri

1. Un proces $I(2)$ necesită două diferențe pentru a deveni staționar.
 $I(d)$ înseamnă că d diferențe sunt necesare. $I(2)$ = două rădăcini unitare. **ADEVĂRAT**
2. Testul ADF include întotdeauna un termen constant.
Alegeți: fără constantă, doar constantă, sau constantă + trend. **FALS**
3. ARIMA(0,1,0) este un alt nume pentru un mers aleatoriu.
 $(1 - L)Y_t = \varepsilon_t \Rightarrow Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$. **ADEVĂRAT**
4. Diferențierea unei serii staționare o face “mai staționară.”
Supradiferențierea creează MA neinvertibil; afectează performanța modelului. **FALS**
5. Testul KPSS are staționaritatea ca ipoteză nulă.
KPSS: H_0 = staționară. Opus testului ADF. **ADEVĂRAT**
6. Modelele ARIMA pot captura doar modele liniare.
ARIMA este liniar în parametri. Modelele neliniare necesită GARCH, rețele neuronale, etc. **ADEVĂRAT**

Problema 1: Testarea Rădăcinii Unitare

Exercițiu

Aveți date trimestriale de PIB pentru 80 de trimestre. Testul ADF (cu constantă și trend) dă o statistică de test de -2.85 . Valoarea critică la 5% este -3.41 .

1. Care este concluzia dumneavoastră despre staționaritate?
2. Ce ați face în continuare?

Problema 1: Testarea Rădăcinii Unitare

Exercițiu

Aveți date trimestriale de PIB pentru 80 de trimestre. Testul ADF (cu constantă și trend) dă o statistică de test de -2.85 . Valoarea critică la 5% este -3.41 .

1. Care este concluzia dumneavoastră despre staționaritate?
2. Ce ați face în continuare?

Soluție

1. Deoarece $-2.85 > -3.41$, **nu respingem H_0** . Datele par să aibă o rădăcină unitară (nestaționare).
2. Luați prima diferență ΔY_t și repetați testul ADF pe seria diferențiată pentru a confirma că este acum staționară.

Problema 2: Identificarea Modelului

Exercițiu

După diferențierea o dată a unei serii de timp, ACF arată:

- ☐ Vârf semnificativ la lag 1 ($\rho_1 = 0.4$)
- ☐ Toate celelalte lag-uri nesemnificative

PACF arată descreștere graduală.

Ce model ARIMA este sugerat?

Problema 2: Identificarea Modelului

Exercițiu

După diferențierea o dată a unei serii de timp, ACF arată:

- ▣ Vârf semnificativ la lag 1 ($\rho_1 = 0.4$)
- ▣ Toate celelalte lag-uri nesemnificative

PACF arată descreștere graduală.

Ce model ARIMA este sugerat?

Soluție

- ▣ ACF se anulează după lag 1 $\Rightarrow$ componentă MA(1)
- ▣ PACF descrește $\Rightarrow$ Confirmă structura MA
- ▣ Deoarece am diferențiat o dată: $d = 1$
- ▣ **Model sugerat: ARIMA(0,1,1) sau IMA(1,1)**

Problema 3: Ecuația ARIMA

Exercițiu

Scrieți ecuația completă pentru ARIMA(1,1,1):

$$(1 - \phi_1 L)(1 - L)Y_t = c + (1 + \theta_1 L)\varepsilon_t$$

Expandați complet în termenii Y_t , Y_{t-1} , Y_{t-2} , etc.

Problema 3: Ecuația ARIMA

Exercițiu

Scrieți ecuația completă pentru ARIMA(1,1,1):

$$(1 - \phi_1 L)(1 - L)Y_t = c + (1 + \theta_1 L)\varepsilon_t$$

Expandați complet în termenii Y_t , Y_{t-1} , Y_{t-2} , etc.

Soluție

- Expandând $(1 - \phi_1 L)(1 - L) = 1 - L - \phi_1 L + \phi_1 L^2 = 1 - (1 + \phi_1)L + \phi_1 L^2$:

$$Y_t - (1 + \phi_1)Y_{t-1} + \phi_1 Y_{t-2} = c + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

- Sau echivalent:

$$Y_t = c + (1 + \phi_1)Y_{t-1} - \phi_1 Y_{t-2} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

Problema 4: Calculul Prognozei

Exercițiu

Dat ARIMA(0,1,1): $\Delta Y_t = \varepsilon_t + 0.3\varepsilon_{t-1}$

La momentul T : $Y_T = 100$, $\hat{\varepsilon}_T = 2$, $\sigma^2 = 4$

Calculați:

1. $\hat{Y}_{T+1|T}$ (prognoza la un pas)
2. $\hat{Y}_{T+2|T}$ (prognoza la doi pași)

Problema 4: Calculul Prognozei

Exercițiu

Dat ARIMA(0,1,1): $\Delta Y_t = \varepsilon_t + 0.3\varepsilon_{t-1}$

La momentul T : $Y_T = 100$, $\hat{\varepsilon}_T = 2$, $\sigma^2 = 4$

Calculați:

1. $\hat{Y}_{T+1|T}$ (prognoza la un pas)
2. $\hat{Y}_{T+2|T}$ (prognoza la doi pași)

Soluție

1. $\hat{Y}_{T+1|T} = Y_T + 0.3\hat{\varepsilon}_T = 100 + 0.3(2) = 100.6$
2. $\hat{Y}_{T+2|T} = \hat{Y}_{T+1|T} + 0.3 \cdot 0 = 100.6 + 0 = 100.6$
(Șocurile viitoare $\varepsilon_{T+1}, \varepsilon_{T+2}$ sunt prognozate ca 0)

Problema 5: Intervale de Încredere

Exercițiu

Continuând de la Problema 4, calculați intervalele de încredere de 95% pentru $\hat{Y}_{T+1|T}$ și $\hat{Y}_{T+2|T}$.
Reamintim: $\sigma^2 = 4$, $\theta_1 = 0.3$

Problema 5: Intervale de Încredere

Exercițiu

Continuând de la Problema 4, calculați intervalele de încredere de 95% pentru $\hat{Y}_{T+1|T}$ și $\hat{Y}_{T+2|T}$.
Reamintim: $\sigma^2 = 4$, $\theta_1 = 0.3$

Soluție

- ▣ Pentru IMA(1,1), ponderile MA(∞) sunt $\psi_0 = 1$, $\psi_j = 1 + \theta_1$ pentru $j \geq 1$.
- ▣ **1 pas:** $\text{Var}(e_{T+1}) = \sigma^2 \psi_0^2 = 4$, deci $SE = 2$
 $100.6 \pm 1.96(2) = [96.68, 104.52]$
- ▣ **2 pași:** $\text{Var}(e_{T+2}) = \sigma^2(\psi_0^2 + \psi_1^2) = 4(1 + 1.3^2) = 10.76$, $SE = 3.28$
 $100.6 \pm 1.96(3.28) = [94.17, 107.03]$

Exemplu: Testarea Rădăcinii Unitare în Prețurile Acțiunilor

Scenariu

Aveți prețuri de închidere zilnice pentru o acțiune pe parcursul a 500 de zile. Vreți să determinați dacă prețurile urmează un mers aleatoriu.

Abordare Pas cu Pas

1. **Inspecție vizuală:** Reprezentați grafic prețurile – probabil arată trend
2. **Testul ADF pe prețuri:** Așteptați să nu respingeți H_0 (rădăcină unitară)
3. **Luați randamentele logaritmice:** $r_t = \ln(P_t/P_{t-1}) = \Delta \ln(P_t)$
4. **Testul ADF pe randamente:** Ar trebui să respingeți H_0 (staționară)
5. **Concluzie:** Log prețurile sunt $I(1)$, randamentele sunt $I(0)$

Exemplu: Box-Jenkins pentru Date de Inflație

Scenariu

Rate lunare ale inflației pentru 10 ani. Construiți un model ARIMA.

Flux de lucru

1. **Reprezentare grafică și test:** ADF sugerează limită – încercați atât $d = 0$ cât și $d = 1$
2. **Dacă $d = 0$:** Ajustați modele ARMA, comparați AIC
3. **Dacă $d = 1$:** Examinați ACF/PACF ale lui ΔY_t
 - ▶ ACF: vârf la lag 1, apoi se anulează
 - ▶ PACF: descrește
 - ▶ $\Rightarrow$ Încercați ARIMA(0,1,1)
4. **Estimare:** Ajustați ARIMA(0,1,1), verificați coeficienții
5. **Diagnostic:** Ljung-Box pe reziduuri (vrem $p > 0.05$)
6. **Comparare:** AIC al ARIMA(0,1,1) vs ARMA(1,1) pe niveluri

Exemplu: Interpretarea Rezultatelor Python

Rezultate ARIMA din statsmodels

```

=====
                    ARIMA Model Results
=====
Dep. Variable:          D.y    No. Observations:   99
Model:                ARIMA(1,1,1)    AIC             285.32
                                   BIC             295.63
=====

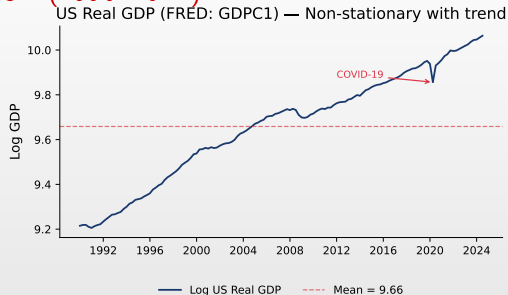
```

	coef	std err	z	P> z
const	0.0521	0.048	1.085	0.278
ar.L1	0.4532	0.102	4.443	0.000
ma.L1	-0.2891	0.118	-2.450	0.014
sigma2	1.2340	0.176	7.011	0.000

Interpretare

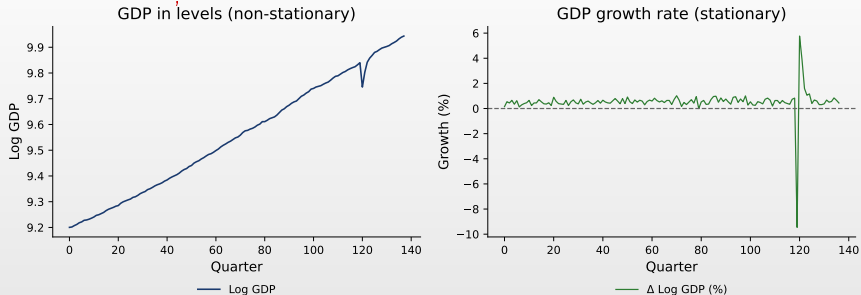
- ▣ Coeficientul AR (0.45) este semnificativ, coeficientul MA (-0.29) este semnificativ
- ▣ Constanta (0.052) nesemnificativă – am putea seta $c = 0$
- ▣ Verificare: $|\phi_1| < 1$ (staționară), $|\theta_1| < 1$ (invertibilă) – OK!

Studiu de Caz: PIB Real SUA (1990–2024)



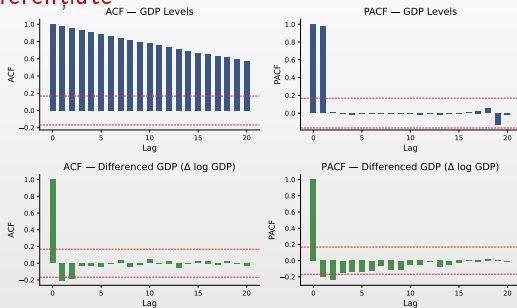
- ▣ PIB Real SUA în miliarde de dolari 2017 (date trimestriale)
- ▣ **Trend ascendent** clar – tipic pentru seriile macroeconomice
- ▣ Scăderi notabile în timpul recesiunilor (2008-2009, 2020)
- ▣ Nestaționară: necesită diferențiere înainte de modelarea ARIMA

Staționaritate Prin Diferențiere



- ▣ **Stânga:** PIB în niveluri – trend ascendent clar (nestaționară)
- ▣ **Dreapta:** Rata de creștere a PIB = $\Delta \log(Y_t) \times 100$ – staționară
- ▣ Prima diferențiere a log PIB elimină trendul stocastic
- ▣ Rata de creștere fluctuează în jurul unei medii constante ($\approx 0.6\%$ trimestrial)

ACF/PACF: Niveluri vs Diferențiate



- ▣ **Rândul de sus:** ACF/PACF ale nivelurilor PIB – descreștere lentă indică nestaționaritate
- ▣ **Rândul de jos:** ACF/PACF ale creșterii PIB – mai ales în limitele de încredere
- ▣ Modelul sugerează că un model ARIMA de ordin mic este potrivit

Rezultate Estimare ARIMA: Creșterea PIB SUA

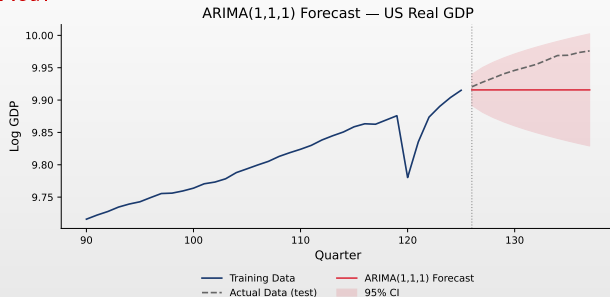
Model: ARIMA(1,1,1) pe log(PIB)

Parametru	Estimat	Eroare Std.	z-stat	valoare-p
ϕ_1 (AR.L1)	0.312	0.185	1.69	0.091
θ_1 (MA.L1)	-0.087	0.203	-0.43	0.668
σ^2	0.00012	-	-	-

Interpretare

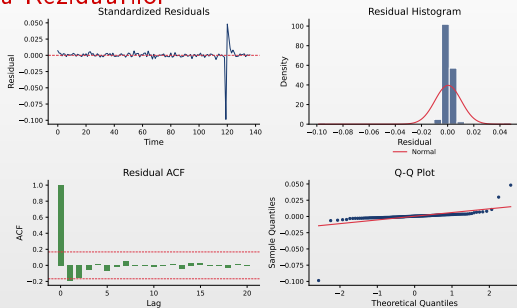
- ▣ ARIMA de ordin mic captează rezonabil dinamica PIB
- ▣ Coeficientul AR(1) pozitiv – creșterea PIB arată persistență
- ▣ Alternativă: mersul aleatoriu simplu (ARIMA(0,1,0)) adesea competitiv

Proгноză: ARIMA vs Real



- ▣ Albastru: date istorice de antrenare; Verde: date reale de test
- ▣ Roșu întrerupt: prognoze ARIMA cu interval de încredere 95%
- ▣ Prognozele captează direcția generală a trendului
- ▣ Intervalele de încredere se lărgesc pe măsură ce orizontul de prognoză crește

Diagnostic Model: Analiza Reziduurilor



- Reziduurile nu arată modele sistematice în timp
- Distribuție aproximativ normală (histogramă și grafic Q-Q)
- ACF-ul reziduurilor în limite – fără autocorelație semnificativă rămasă
- Modelul captează adecvat procesul generator de date

Discuție: Trenduri Deterministe vs Stochastice

Întrebare Cheie

De ce este important să distingem între trendurile deterministe și stochastice?

Puncte de Discuție

- ▣ **Consecințele tratamentului greșit:**
 - ▶ Eliminarea trendului prin regresie la o rădăcină unitară $\Rightarrow$ staționaritate falsă
 - ▶ Diferențierea unei serii staționare în trend $\Rightarrow$ supradiferențiere
- ▣ **Interpretare economică:**
 - ▶ Trend determinist: șocurile sunt temporare
 - ▶ Trend stohastic: șocurile au efecte permanente
- ▣ **Implicații de politică:**
 - ▶ O recesiune reduce permanent PIB-ul, sau economia revine la trend?

Discuție: Criterii de Selecție a Modelului

Întrebare Cheie

Când ar trebui să folosiți AIC vs BIC pentru selecția modelului ARIMA?

Considerații

- ▣ **AIC:** Minimizează eroarea de predicție, poate supraajusta
 - ▶ Mai bun pentru prognoză
 - ▶ Tinde să selecteze modele mai mari
- ▣ **BIC:** Selecție consistentă a modelului, mai simplu
 - ▶ Mai bun pentru identificarea modelului “adevărat”
 - ▶ Penalizează complexitatea mai puternic
- ▣ **Sfat practic:** Raportați ambele, preferați BIC dacă diferă substanțial

Discuție: Limitările ARIMA

Întrebare Cheie

Care sunt principalele limitări ale modelelor ARIMA?

Puncte de Discuție

- ▣ **Liniaritate:** Nu poate captura dinamici neliniare
- ▣ **Varianță constantă:** Presupune homoscedasticitate (fără efecte GARCH)
- ▣ **Fără rupturi structurale:** Parametrii presupuși constanți
- ▣ **Univariat:** Ignoră relațiile cu alte variabile
- ▣ **Simetric:** Tratează șocurile pozitive și negative la fel
- ▣ **Prognoze pe termen lung:** Incertitudinea crește rapid

Extensii

Aceste limitări motivează GARCH (volatilitate), VAR (multivariat), modele cu schimbări de regim, etc.

Exercițiu AI: Gândire critică

Prompt de testat în ChatGPT / Claude / Copilot

“Folosind yfinance, descarcă cursul de schimb lunar EUR/USD ($\text{EURUSD}=\text{X}$) din 2010-01 până în 2024-12 (180 observații). Testează prezența rădăcinii unitare cu ADF și KPSS. Determină ordinul de diferențiere d . Estimează un model $\text{ARIMA}(p, d, q)$ folosind atât analiza ACF/PACF, cât și `auto_arima`. Compară cele două abordări. Împarte datele în antrenare (2010–2023) și test (2024) și evaluează prognoza pe 12 luni cu RMSE și MAE. Vreau cod Python complet cu grafice.”

Exercițiu:

1. Rulați prompt-ul într-un LLM la alegere și analizați critic răspunsul.
2. Folosește ambele teste (ADF și KPSS) pentru a decide d ? Verifică supra-diferențierea?
3. Rezultatele ACF/PACF coincid cu ordinele alese de `auto_arima`? Dacă nu, de ce?
4. Intervalele de încredere ale prognozei se lărgesc cu orizontul? (proprietate cheie $I(1)$)
5. Menționează ipoteza de mers aleatoriu (random walk) pentru cursul de schimb?

Atenție: Codul generat de AI poate rula fără erori și arăta profesional. *Asta nu înseamnă că e corect.*

Puncte Cheie din Seminarul de Astăzi

Ce am Acoperit

1. **Integrare și diferențiere:** Procesele $I(d)$ necesită d diferențe
2. **Testarea rădăcinii unitare:** ADF testează H_0 : rădăcină unitară; KPSS testează H_0 : staționară
3. **ARIMA(p,d,q):** Combină ARMA cu diferențierea
4. **Identificarea modelului:** Folosiți modelele ACF/PACF și criteriile informaționale
5. **Prognoză:** Prognoze punctuale și intervale de încredere în creștere

Următorul Seminar

- Exerciții practice Python cu date economice reale:
 - ▶ Testarea rădăcinii unitare cu `statsmodels`
 - ▶ Auto-ARIMA cu `pmdarima`
 - ▶ Prognoză și diagnostice model

Bibliografie I

Fundamentele Seriilor de Timp

- ▣ Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice*, 3rd ed., OTexts.
- ▣ Shumway, R.H., & Stoffer, D.S. (2017). *Time Series Analysis and Its Applications*, 4th ed., Springer.
- ▣ Brockwell, P.J., & Davis, R.A. (2016). *Introduction to Time Series and Forecasting*, 3rd ed., Springer.

Serii de Timp Financiare

- ▣ Tsay, R.S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*, 3rd ed., Wiley.
- ▣ Franke, J., Härdle, W.K., & Hafner, C.M. (2019). *Statistics of Financial Markets*, 4th ed., Springer.

Bibliografie II

Abordări Moderne și Machine Learning

- ▣ Nielsen, A. (2019). *Practical Time Series Analysis*, O'Reilly Media.
- ▣ Petropoulos, F., et al. (2022). *Forecasting: Theory and Practice*, International Journal of Forecasting.
- ▣ Makridakis, S., Spiliotis, E., & Assimakopoulos, V. (2020). The M4 Competition, International Journal of Forecasting.

Resurse Online și Cod

- ▣ **Quantlet**: <https://quantlet.com> — Depozit de cod pentru statistică
- ▣ **Quantinar**: <https://quantinar.com> — Platformă de învățare metode cantitative
- ▣ **GitHub TSA**: https://github.com/QuantLet/TSA/tree/main/TSA_ch3 — Cod Python pentru acest seminar

Vă mulțumesc!

Întrebări?

Materialele seminarului sunt disponibile la:

<https://danpele.github.io/Time-Series-Analysis/>

 Quantlet

 Quantinar