



Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Seminar 5: Modele GARCH



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București

IDA Institute Digital Assets

Blockchain Research Center

AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance

Academia Română, Institutul de Prognoză Economică

MSCA Digital Finance

Cuprins Seminar

- ▣ **Test de Recapitulare** – Verificare cunoștințe
- ▣ **Întrebări Adevărat/Fals** – Verificări conceptuale
- ▣ **Probleme Practice** – Practică aplicată
- ▣ **Flux de Lucru Python** – Practică de programare
- ▣ **Exercițiu cu asistență AI** – Gândire critică
- ▣ **Rezumat** – Concluzii cheie

Întrebarea 1

Ce reprezintă “gruparea volatilității (*volatility clustering*)”?

- (A) Volatilitatea este constantă în timp
- (B) Perioadele de volatilitate ridicată sunt urmate de perioade de volatilitate ridicată
- (C) Randamentele sunt corelate în timp
- (D) Distribuția randamentelor este normală

Gândiți-vă la comportamentul piețelor financiare în perioadele de criză...

Răspuns Întrebarea 1

Răspuns Corect: (B)

- ☐ Perioadele de volatilitate ridicată sunt urmate de perioade de volatilitate ridicată

Răspuns Întrebarea 1

Răspuns Corect: (B)

- ▣ Perioadele de volatilitate ridicată sunt urmate de perioade de volatilitate ridicată

Explicație

- ▣ **Volatility clustering** este un fapt stilizat observat în seriile financiare
- ▣ Perioadele de volatilitate ridicată (cu mișcări mari) tind să persiste
- ▣ Perioadele de stabilitate relativă (cu mișcări mici) tind și ele să persiste
- ▣ Aceasta implică că varianța condiționată σ_t^2 este **predictibilă**
- ▣ Modelele GARCH captează exact acest fenomen!

Întrebarea 2

În modelul GARCH(1,1): $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$

- Ce reprezintă parametrul α ? **(A)** Persistența volatilității
(B) Nivelul de bază al volatilității
(C) Reacția la șocuri recente (news coefficient)
(D) Varianța necondiționată

Răspuns Întrebarea 2

Răspuns Corect: (C)

- ☒ Reacția la șocuri recente (news coefficient)

Răspuns Întrebarea 2

Răspuns Corect: (C)

- ▣ Reacția la șocuri recente (news coefficient)

Interpretarea Parametrilor GARCH(1,1)

- ▣ ω = nivelul de bază (floor) al volatilității
- ▣ α = **reacția** la pătratele inovațiilor ("news")
- ▣ β = **persistența** volatilității (memory)
- ▣ $\alpha + \beta$ = persistența totală

Un α mare înseamnă că volatilitatea reacționează puternic la șocuri recente.

Întrebarea 3

Care este condiția de stationaritate pentru GARCH(1,1)?

- (A) $\omega > 0$
- (B) $\alpha + \beta = 1$
- (C) $\alpha + \beta < 1$
- (D) $\alpha > \beta$

Răspuns Întrebarea 3

Răspuns Corect: (C)

☒ $\alpha + \beta < 1$

Răspuns Întrebarea 3

Răspuns Corect: (C)

☐ $\alpha + \beta < 1$

Condiții Complete

Pentru stationaritatea GARCH(1,1):

- ☐ $\omega > 0$ (asigură varianță pozitivă)
- ☐ $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ (non-negativitate)
- ☐ $\alpha + \beta < 1$ (**stationaritate în covarianță**)

Dacă $\alpha + \beta = 1 \Rightarrow$ IGARCH (șocurile au efect permanent)

Întrebarea 4

Care este formula varianței necondiționate în GARCH(1,1)?

(A) $\bar{\sigma}^2 = \omega$

(B) $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha}$

(C) $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}$

(D) $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{\alpha + \beta}$

Răspuns Întrebarea 4

Răspuns Corect: (C)

$$\square \quad \bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}$$

Răspuns Întrebarea 4

Răspuns Corect: (C)

$$\square \bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}$$

Demonstrație

Luând așteptarea necondiționată a GARCH(1,1):

$$\mathbb{E}[\sigma_t^2] = \omega + \alpha \mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2] + \beta \mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2]$$

$$\bar{\sigma}^2 = \omega + \alpha \bar{\sigma}^2 + \beta \bar{\sigma}^2$$

$$\bar{\sigma}^2(1 - \alpha - \beta) = \omega$$

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}$$

Întrebarea 5

Ce este “leverage effect”?

- (A) Șocurile pozitive cresc volatilitatea mai mult decât cele negative
- (B) Șocurile negative cresc volatilitatea mai mult decât cele pozitive
- (C) Volatilitatea este independentă de semnul șocurilor
- (D) Randamentele sunt asimetrice

Răspuns Întrebarea 5

Răspuns Corect: (B)

- ☐ Șocurile negative cresc volatilitatea mai mult decât cele pozitive

Răspuns Întrebarea 5

Răspuns Corect: (B)

- Șocurile negative cresc volatilitatea mai mult decât cele pozitive

Explicație

- Observat empiric pe piețele de acțiuni
- Când prețurile scad, gradul de îndatorare al firmei crește (datoria devine mai mare relativă la capitaluri)
- Aceasta face firma mai riscantă $\Rightarrow$ volatilitate mai mare
- GARCH standard **nu poate** captura acest efect (depinde de ε^2)
- Soluții: **EGARCH, GJR-GARCH, TGARCH**

Întrebarea 6

În modelul EGARCH, parametrul γ negativ indică:

- (A) Absența leverage effect
- (B) Prezența leverage effect
- (C) Volatilitate constantă
- (D) Model nestationar

Răspuns Întrebarea 6

Răspuns Corect: (B)

- ☒ Prezența leverage effect

Răspuns Întrebarea 6

Răspuns Corect: (B)

- ▣ Prezența leverage effect

EGARCH(1,1)

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \alpha(|z_{t-1}| - \mathbb{E}[|z|]) + \gamma z_{t-1} + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2)$$

- ▣ $\gamma < 0$: șoc negativ ($z < 0$) $\Rightarrow$ crește $\ln(\sigma_t^2)$
- ▣ $\gamma > 0$: efect invers (mai rar întâlnit)
- ▣ $\gamma = 0$: efect simetric (ca GARCH)

 TSA_ch5_egarch_sim

Întrebarea 7

Care este principalul avantaj al EGARCH față de GARCH?

- (A) Este mai rapid de estimat
- (B) Nu necesită restricții de non-negativitate
- (C) Are mai puțini parametri
- (D) Este mai ușor de interpretat

Răspuns Întrebarea 7

Răspuns Corect: (B)

- ☒ Nu necesită restricții de non-negativitate

Răspuns Întrebarea 7

Răspuns Corect: (B)

- ▣ Nu necesită restricții de non-negativitate

Avantajele EGARCH

- ▣ Modelează $\ln(\sigma_t^2)$, nu σ_t^2
- ▣ $\sigma_t^2 = e^{\ln(\sigma_t^2)} > 0$ **automat**, indiferent de valorile parametrilor
- ▣ GARCH necesită $\omega > 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$
- ▣ La estimare, aceste restricții pot cauza probleme de convergență

 TSA_ch5_egarch_sim

Întrebarea 8

Ce test folosim pentru a detecta efecte ARCH în reziduuri?

- (A) Testul Dickey-Fuller
- (B) Testul Ljung-Box pe reziduuri
- (C) Testul Engle (ARCH-LM)
- (D) Testul Breusch-Pagan

Răspuns Întrebarea 8

Răspuns Corect: (C)

☐ Testul Engle (ARCH-LM)

Răspuns Întrebarea 8

Răspuns Corect: (C)

▣ Testul Engle (ARCH-LM)

Procedura Testului ARCH-LM

1. Estimează modelul pentru medie, obține reziduurile $\hat{\varepsilon}_t$
2. Calculează $\hat{\varepsilon}_t^2$
3. Regresează: $\hat{\varepsilon}_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \dots + \beta_q \hat{\varepsilon}_{t-q}^2 + u_t$
4. Statistica: $LM = T \cdot R^2 \sim \chi^2(q)$ sub H_0

H_0 : Nu există efecte ARCH H_1 : Există efecte ARCH

 TSA_ch5_btc_arch

Întrebarea 9

Pentru S&P 500, valorile tipice ale $\alpha + \beta$ în GARCH(1,1) sunt:

- (A) 0.50 – 0.70
- (B) 0.70 – 0.85
- (C) 0.95 – 0.99
- (D) Mai mare decât 1

Răspuns Întrebarea 9

Răspuns Corect: (C)

☒ 0.95 – 0.99

Răspuns Întrebarea 9

Răspuns Corect: (C)

▣ 0.95 – 0.99

Volatilitate Foarte Persistentă

- ▣ Seriile financiare au volatilitate foarte persistentă
- ▣ $\alpha + \beta \approx 0.98$ pentru S&P 500
- ▣ Half-life: $HL = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\alpha + \beta)} \approx 35 - 60$ zile
- ▣ Aceasta înseamnă că un șoc de volatilitate se disipează în câteva luni

Serie	$\alpha + \beta$
S&P 500	0.97–0.99
Bitcoin	0.90–0.98
EUR/USD	0.96–0.99

Întrebarea 10

Care distribuție este cel mai des folosită pentru inovațiile GARCH pentru a captura cozile groase?

- (A) Normală
- (B) Uniformă
- (C) Student-t
- (D) Exponențială

Răspuns Întrebarea 10

Răspuns Corect: (C)

☐ Student-t

Răspuns Întrebarea 10

Răspuns Corect: (C)

▣ **Student-t**

Distribuții pentru Inovații

- ▣ **Normală**: standard, dar subestimează riscul extrem
- ▣ **Student-t**: cozi groase, parametru ν (grade de libertate)
- ▣ **GED**: Generalized Error Distribution, flexibilă
- ▣ **Skewed Student-t**: asimetrie + cozi groase

Pentru S&P 500: $\nu \approx 5 - 8$ (cozi semnificativ mai groase decât normala)

Întrebarea 11

Ce descompune modelul CGARCH (Component GARCH)?

- (A) Randamentul în componentă sistematică și nesistematică
- (B) Varianța condiționată în componentă permanentă și tranzitorie
- (C) Distribuția inovațiilor în cozi stângi și drepte
- (D) Volatilitatea în componentă simetrică și asimetrică

Gândiți-vă la ce factori influențează volatilitatea pe termen scurt vs lung...

Răspuns Întrebarea 11

Răspuns Corect: (B)

- ☐ **Varianța condiționată în componentă permanentă și tranzitorie**

Răspuns Întrebarea 11

Răspuns Corect: (B)

- ▣ **Varianța condiționată în componentă permanentă și tranzitorie**

CGARCH(1,1) — Engle & Lee (1999)

- ▣ Componenta **permanentă** q_t : evoluează lent (factori macro: inflație, ciclul economic)
- ▣ Componenta **tranzitorie** $\sigma_t^2 - q_t$: reacționează rapid la știri (earnings, Fed, geopolitică)
- ▣ Half-life diferit: permanent $\approx 2-3$ ani; tranzitoriu $\approx 2-4$ săptămâni
- ▣ Util pentru VaR pe termen lung (Solvency II, stress testing)

 TSA_ch5_cgarch_sim

Întrebarea 12

În modelul FIGARCH(1, d ,1), parametrul d controlează:

- (A) Gradul de asimetrie a volatilității
- (B) Numărul de lag-uri în ecuația varianței
- (C) Viteza de descreștere a memoriei (integrare fracționară)
- (D) Distribuția inovațiilor

Ce se întâmplă când $d = 0$ (GARCH), $d = 1$ (IGARCH) și $0 < d < 1$?

Răspuns Întrebarea 12

Răspuns Corect: (C)

- ☐ Viteza de descreștere a memoriei (integrare fracționară)

Răspuns Întrebarea 12

Răspuns Corect: (C)

- ▣ Viteza de descreștere a memoriei (integrare fracționară)

FIGARCH — Baillie, Bollerslev & Mikkelsen (1996)

- ▣ $d = 0$ (GARCH): ACF a r_t^2 decade **exponențial** — șocurile se sting rapid
- ▣ $d = 1$ (IGARCH): ACF nu decade — persistență **infinită**
- ▣ $0 < d < 1$ (FIGARCH): ACF decade **hiperbolic** ($\sim k^{2d-1}$) — memorie lungă
- ▣ Valori empirice tipice: acțiuni $\hat{d} \approx 0.35\text{--}0.50$; forex $\hat{d} \approx 0.40\text{--}0.60$

Întrebarea 13

Modelul APARCH generalizează familia GARCH prin parametrul δ . Ce obținem pentru $\delta = 2$, $\gamma_1 = 0$?

- (A) EGARCH(1,1)
- (B) TGARCH(1,1)
- (C) GARCH(1,1) standard
- (D) IGARCH(1,1)

$$APARCH: \sigma_t^\delta = \omega + \alpha_1(|\varepsilon_{t-1}| - \gamma_1 \varepsilon_{t-1})^\delta + \beta_1 \sigma_{t-1}^\delta$$

Răspuns Întrebarea 13

Răspuns Corect: (C)

- ☒ **GARCH(1,1) standard**

Răspuns Întrebarea 13

Răspuns Corect: (C)

- ▣ **GARCH(1,1) standard**

Cazuri Particulare ale APARCH(1,1)

- ▣ $\delta = 2, \gamma_1 = 0$: **GARCH(1,1) standard**
- ▣ $\delta = 2, \gamma_1 \neq 0$: **GJR-GARCH**
- ▣ $\delta = 1, \gamma_1 \neq 0$: **TGARCH** (Zakoian, 1994)
- ▣ $\delta = 1, \gamma_1 = 0$: **AVGARCH** (Taylor, 1986)
- ▣ Studii empirice: $\hat{\delta} \approx 1.0-1.5$ pentru acțiuni (Ding et al., 1993)

Adevărat sau Fals?

1. Modelele ARIMA pot captura volatility clustering.
2. În GARCH(1,1), dacă $\alpha + \beta = 1$, modelul se numește IGARCH.
3. GJR-GARCH folosește o variabilă indicator pentru șocuri negative.
4. Prognoza volatilității GARCH converge către zero pe termen lung.
5. EGARCH poate avea parametri negativi fără a genera varianță negativă.
6. Value at Risk (VaR) poate fi calculat folosind prognoza volatilității GARCH.

Răspunsuri Adevărat/Fals

1. **FALS** — ARIMA presupune varianță constantă; GARCH modelează volatilitatea.
2. **ADEVĂRAT** — IGARCH = Integrated GARCH, volatilitatea are rădăcină unitară.
3. **ADEVĂRAT** — $I_{t-1} = 1$ dacă $\varepsilon_{t-1} < 0$, altfel 0.
4. **FALS** — Converge către varianța necondiționată $\bar{\sigma}^2$, nu zero.
5. **ADEVĂRAT** — Modelează $\ln(\sigma_t^2)$, deci $\sigma_t^2 = e^{\ln(\sigma_t^2)} > 0$ mereu.
6. **ADEVĂRAT** — $\text{VaR}_\alpha = z_\alpha \cdot \sigma_{t+1}$ (pentru medie zero).
7. EWMA are proprietatea de mean-reversion (revenire la medie) ca și GARCH(1,1).
8. Modelele Markov-switching GARCH pot explica persistența aparent infinită (IGARCH spurios).

Răspunsuri Adevărat/Fals (continuare)

7. **FALS** — EWMA = IGARCH cu $\omega = 0$: are $\alpha + \beta = 1$, deci **nu** revine la o varianță necondiționată. Volatilitatea EWMA rămâne ridicată mai mult timp după crize.
8. **ADEVĂRAT** — Când regimuri diferite (calm/criză) sunt amestecate, un model GARCH unic estimează $\alpha + \beta \approx 1$. Modelul Markov-switching identifică regimurile și poate arăta că în fiecare regim persistența este mai mică.

Problema 1: Calculul Varianței Necondiționate

Enunț

Un model GARCH(1,1) are parametrii estimați:

- ☐ $\omega = 0.000002$
- ☐ $\alpha = 0.08$
- ☐ $\beta = 0.90$

Calculați:

- ☐ (a) Varianța necondiționată zilnică
- ☐ (b) Volatilitatea necondiționată zilnică (ca procent)
- ☐ (c) Volatilitatea anualizată (presupunând 252 zile de tranzacționare)
- ☐ (d) Half-life-ul volatilității

Soluție Problema 1

Răspunsuri

$$\square \text{ (a) } \bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta} = \frac{0.000002}{1 - 0.08 - 0.90} = \frac{0.000002}{0.02} = 0.0001$$

$$\square \text{ (b) } \bar{\sigma} = \sqrt{0.0001} = 0.01 = 1\% \text{ pe zi}$$

$$\square \text{ (c) } \sigma_{\text{annual}} = \bar{\sigma} \times \sqrt{252} = 0.01 \times 15.87 = 15.87\% \text{ pe an}$$

$$\square \text{ (d) } HL = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\alpha + \beta)} = \frac{\ln(0.5)}{\ln(0.98)} = \frac{-0.693}{-0.0202} \approx 34 \text{ zile}$$

Interpretare

Volatilitatea de 15.87% pe an este tipică pentru un indice bursier. Half-life de 34 zile înseamnă că un șoc de volatilitate se reduce la jumătate după aproximativ 7 săptămâni.

Problema 2: Prognoză Volatilitate

Enunț

Folosind modelul GARCH(1,1) de la Problema 1:

- ▣ $\omega = 0.000002$, $\alpha = 0.08$, $\beta = 0.90$
- ▣ La momentul T : $\varepsilon_T = -0.03$ (scădere de 3%), $\sigma_T^2 = 0.0004$

Calculați prognoza volatilității pentru:

- ▣ (a) σ_{T+1}^2 (un pas înainte)
- ▣ (b) σ_{T+5}^2 (cinci pași înainte)
- ▣ (c) σ_{T+100}^2 (o sută de pași înainte)

Soluție Problema 2

Răspunsuri

$$\square \text{ (a) } \sigma_{T+1}^2 = \omega + \alpha \varepsilon_T^2 + \beta \sigma_T^2$$

$$= 0.000002 + 0.08 \times (0.03)^2 + 0.90 \times 0.0004 = 0.000434$$

$$\text{Volatilitate: } \sqrt{0.000434} = 2.08\%$$

$$\square \text{ (b) } \mathbb{E}_T[\sigma_{T+5}^2] = \bar{\sigma}^2 + (0.98)^4(\sigma_{T+1}^2 - \bar{\sigma}^2)$$

$$= 0.0001 + 0.922 \times (0.000434 - 0.0001) = 0.000408$$

$$\text{Volatilitate: } \sqrt{0.000408} = 2.02\%$$

$$\square \text{ (c) } \mathbb{E}_T[\sigma_{T+100}^2] = 0.0001 + (0.98)^{99} \times 0.000334 \approx 0.000145$$

$$\text{Volatilitate: } \sqrt{0.000145} = 1.20\% \text{ (aproape de } \bar{\sigma} = 1\%)$$

Problema 3: Value at Risk

Enunț

Un portofoliu de 1.000.000 EUR este investit în acțiuni ale căror randamente sunt modelate prin GARCH(1,1).

Proгноza volatilității pentru mâine: $\sigma_{T+1} = 2\%$ zilnic.

Presupunând randamente normal distribuite cu medie zero, calculați:

- ☐ (a) VaR la 95% (1 zi)
- ☐ (b) VaR la 99% (1 zi)
- ☐ (c) VaR la 99% (10 zile), folosind regula “square root of time”

Cuantile: $z_{0.05} = 1.645$, $z_{0.01} = 2.326$

Soluție Problema 3

Răspunsuri

- ▣ (a) VaR 95%: $1.645 \times 0.02 \times 1,000,000 = \mathbf{32,900}$ EUR
- ▣ (b) VaR 99%: $2.326 \times 0.02 \times 1,000,000 = \mathbf{46,520}$ EUR
- ▣ (c) VaR 99% (10 zile): $46,520 \times \sqrt{10} = \mathbf{147,100}$ EUR

Atenție

Regula $\sqrt{T}$ presupune i.i.d. (contrazice GARCH). Sub Student-t, cuantilele sunt mai mari!

Problema 4: Identificarea Modelului

Enunț

Analizați următoarele rezultate ale estimării și identificați modelul:

Parametru	Estimat	Std. Error
ω	0.0000015	0.0000005
α	0.0550	0.0120
γ	0.0850	0.0180
β	0.9100	0.0150

- ☐ (a) Ce model este acesta?
- ☐ (b) Este prezent leverage effect?
- ☐ (c) Care este impactul unui șoc negativ vs pozitiv?
- ☐ (d) Este modelul stationar?

Soluție Problema 4

Răspunsuri

- ▣ (a) **GJR-GARCH(1,1,1)** — prezența parametrului γ (threshold/asymmetry)
- ▣ (b) **Da, leverage effect prezent:** $\gamma = 0.085 > 0$ și semnificativ
- ▣ (c) **Impact:**
 - ▶ Șoc pozitiv: $\text{impact} = \alpha = 0.055$
 - ▶ Șoc negativ: $\text{impact} = \alpha + \gamma = 0.055 + 0.085 = 0.140$
 - ▶ Șocurile negative au impact de **2.5x mai mare!**
- ▣ (d) **Stationaritate:** $\alpha + \gamma/2 + \beta = 0.055 + 0.0425 + 0.91 = 1.0075$
Valoarea depășește ușor pragul de 1 — tehnic nestăionar (în covarianță), foarte aproape de IGARCH.

Problema 5: EWMA vs GARCH — Persistența și Prognoza

Enunț

Considerați două modele pentru volatilitatea zilnică a EUR/USD:

- ▣ **EWMA** cu $\lambda = 0.94$: $\sigma_t^2 = 0.94 \sigma_{t-1}^2 + 0.06 r_{t-1}^2$
- ▣ **GARCH(1,1)**: $\sigma_t^2 = 0.000001 + 0.05 \varepsilon_{t-1}^2 + 0.93 \sigma_{t-1}^2$

La momentul T : $r_T = -0.025$ (scădere de 2.5%), $\sigma_T^2 = 0.0002$.

Calculați:

- ▣ **(a)** Prognoza σ_{T+1}^2 pentru fiecare model
- ▣ **(b)** Varianța necondiționată $\bar{\sigma}^2$ pentru GARCH(1,1). De ce nu există pentru EWMA?
- ▣ **(c)** Prognoza pe termen lung ($h \rightarrow \infty$) pentru fiecare model

Soluție Problema 5

Răspunsuri

□ (a) Prognoza σ_{T+1}^2 :

▶ **EWMA**: $0.94 \times 0.0002 + 0.06 \times (0.025)^2 = 0.000188 + 0.0000375 = 0.000226$

▶ **GARCH**: $0.000001 + 0.05 \times (0.025)^2 + 0.93 \times 0.0002 = 0.000218$

□ (b) $\bar{\sigma}_{\text{GARCH}}^2 = \frac{0.000001}{1 - 0.05 - 0.93} = \frac{0.000001}{0.02} = 0.00005$

EWMA nu are varianță necondiționată: $\alpha + \beta = 1, \omega = 0 \Rightarrow$ formula $\frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$ este nedefinită.

□ (c) Pe termen lung:

▶ **GARCH**: $\sigma_{T+h}^2 \rightarrow \bar{\sigma}^2 = 0.00005$ (mean-reversion)

▶ **EWMA**: rămâne la ultimul nivel — nu revine la un echilibru

Problema 6: Comparare Modele Avansate

Enunț

Un cercetător estimează următoarele modele pentru randamentele zilnice ale indicelui DAX:

Model	AIC	Persistență	Asimetrie?
GARCH(1,1)	-5,432	$\alpha + \beta = 0.987$	Nu
GJR-GARCH(1,1)	-5,478	$\alpha + \gamma/2 + \beta = 0.985$	Da ($\gamma = 0.08$)
APARCH(1,1)	-5,485	—	Da ($\hat{\delta} = 1.3, \hat{\gamma} = 0.45$)
FIGARCH(1,d,1)	-5,471	$\hat{d} = 0.42$	Nu

- ▣ (a) Care model are cel mai bun AIC? Ce semnifică?
- ▣ (b) Ce ne spune $\hat{\delta} = 1.3$ în APARCH?
- ▣ (c) Ce ne spune $\hat{d} = 0.42$ în FIGARCH?
- ▣ (d) Ce model ați recomanda și de ce?

Soluție Problema 6

Răspunsuri

- ▣ (a) **APARCH** are cel mai mic AIC ($-5,485$) $\Rightarrow$ cel mai bun compromis complexitate/fit.
- ▣ (b) $\hat{\delta} = 1.3$: puterea optimă este între σ_t ($\delta = 1$) și σ_t^2 ($\delta = 2$). Piața nu se comportă exact ca GARCH ($\delta = 2$) sau TGARCH ($\delta = 1$) — datele preferă o transformare intermediară.
- ▣ (c) $\hat{d} = 0.42$: memorie lungă moderată. ACF a r_t^2 decade hiperbolic, nu exponențial. Persistența nu este infinită (ca IGARCH), ci lentă — șocurile vechi contează, dar tot mai puțin.
- ▣ (d) **Recomandare**: APARCH sau GJR-GARCH. APARCH are AIC-ul cel mai bun și captează asimetria + puterea optimă. Dacă simplitatea contează, GJR-GARCH este o alternativă bună (AIC apropiat, mai ușor de interpretat).

 TSA_ch5_aparch_sim

Pasul 1: Încărcare și Pregătire Date

```
import pandas as pd
import numpy as np
import yfinance as yf
from arch import arch_model
from arch.unitroot import ADF

# Descarcare date S&P 500
data = yf.download('^GSPC', start='2010-01-01', end='2024-01-01')
returns = 100 * data['Adj Close'].pct_change().dropna()

# Verificare stationaritate (ADF test)
adf = ADF(returns)
print(f'ADF statistic: {adf.stat:.4f}')
print(f'p-value: {adf.pvalue:.4f}')
```

Pasul 2: Test Efecte ARCH

```
from statsmodels.stats.diagnostic import het_arch

# Test ARCH-LM pe reziduuri
residuals = returns - returns.mean()
lm_stat, lm_pvalue, f_stat, f_pvalue = het_arch(residuals, nlags=10)

print(f'ARCH-LM statistic: {lm_stat:.4f}')
print(f'p-value: {lm_pvalue:.4f}')

if lm_pvalue < 0.05:
    print('=> Efecte ARCH prezente! Se justifica GARCH.')
```

 TSA_ch5_btc_arch

Pasul 3: Estimare Modele

```
# GARCH(1,1) cu distributie Student-t
model_garch = arch_model(returns, vol='Garch', p=1, q=1, dist='t')
res_garch = model_garch.fit(dispatch='off')
print(res_garch.summary())

# GJR-GARCH(1,1,1)
model_gjr = arch_model(returns, vol='Garch', p=1, o=1, q=1, dist='t')
res_gjr = model_gjr.fit(dispatch='off')

# EGARCH(1,1)
model_egarch = arch_model(returns, vol='EGARCH', p=1, q=1, dist='t')
res_egarch = model_egarch.fit(dispatch='off')

# Comparare AIC
print(f'GARCH AIC: {res_garch.aic:.2f}')
print(f'GJR AIC: {res_gjr.aic:.2f}')
print(f'EGARCH AIC: {res_egarch.aic:.2f}')
```

Pasul 4: Diagnostic

```
# Reziduuri standardizate
std_resid = res_gjr.std_resid

# Test Ljung-Box pe reziduuri^2
from statsmodels.stats.diagnostic import acorr_ljungbox
lb_test = acorr_ljungbox(std_resid**2, lags=10, return_df=True)
print(lb_test)

# Verificare efecte ARCH reziduale
lm_stat2, lm_pval2, _, _ = het_arch(std_resid, nlags=5)
print(f'ARCH-LM reziduuri: stat={lm_stat2:.2f}, p={lm_pval2:.4f}')
```



```
if lm_pval2 > 0.05:
    print('=> Nu mai sunt efecte ARCH reziduale. Model OK!')
```

Pasul 5: Prognoză și VaR

```
# Forecast 10 zile
forecasts = res_gjr.forecast(horizon=10)
vol_forecast = np.sqrt(forecasts.variance.values[-1, :])

print('Volatility forecast (%):', vol_forecast)

# Value at Risk 99%
portfolio_value = 1_000_000
VaR_99 = 2.326 * vol_forecast[0] / 100 * portfolio_value
print(f'VaR 99% (1 zi): {VaR_99:,.0f} EUR')

# VaR 10 zile
VaR_99_10d = VaR_99 * np.sqrt(10)
print(f'VaR 99% (10 zile): {VaR_99_10d:,.0f} EUR')
```

Exercițiu AI: Gândire critică

Prompt de testat în ChatGPT / Claude / Copilot

“Folosind yfinance, descarcă prețurile zilnice de închidere NASDAQ Composite (^IXIC) din 2019-01-01 până în 2024-12-31 (aprox. 1.500 observații). Calculează randamentele logaritmice zilnice. Testează efectele ARCH cu testul Engle LM. Estimează un GARCH(1,1) și un GJR-GARCH(1,1) și compară-le cu AIC. Prognozează volatilitatea pe 20 de zile. Calculează VaR la 1% din distribuția condițională. Vreau cod Python complet cu grafice.”

Exercițiu:

1. Rulați prompt-ul într-un LLM la alegere și analizați critic răspunsul.
2. Separă ecuația mediei de ecuația varianței? Specifică distribuția inovațiilor?
3. Detectează efectul de levier (asimetrie)? GJR-GARCH arată $\gamma > 0$?
4. Verifică constrângerea de staționaritate $\alpha + \beta < 1$? Discută persistența?
5. VaR-ul e calculat din distribuția condițională (nu necondiționată)?

Atenție: Codul generat de AI poate rula fără erori și arăta profesional. *Asta nu înseamnă că e corect.*

Rezumat Seminar

Concepte Cheie

- ▣ **ARCH/GARCH**: varianța condiționată depinde de șocuri și lag-uri
- ▣ **EGARCH/GJR/TGARCH**: leverage effect (asimetrie)
- ▣ **IGARCH/EWMA**: persistență infinită; **CGARCH**: permanent + tranzitoriu
- ▣ **FIGARCH**: memorie lungă ($0 < d < 1$); **APARCH**: model unificator

Formule Importante

$$\square \bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}; \quad HL = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\alpha+\beta)}; \quad \text{VaR}_\alpha = z_\alpha \cdot \sigma \cdot V$$

Sfat: Folosiți Student-t. Verificați absența efectelor ARCH în reziduuri!

Exerciții pentru Acasă

Exerciții

1. Descărcați randamentele BET (BVB) și estimați GARCH(1,1). Comparați $\alpha + \beta$ cu S&P 500.
2. Pentru Bitcoin, estimați GARCH, EGARCH și GJR-GARCH. Este leverage effect prezent?
3. Calculați VaR zilnic pentru 100.000 EUR investit în EUR/USD cu volatilitate GARCH.
4. Comparați prognoza GARCH(1,1) cu volatilitatea realizată pe 20 de zile.
5. S&P 500: estimați GARCH, GJR, APARCH; comparați AIC. Ce $\hat{\delta}$ dă APARCH? $E \neq 2$?

Exercițiu de Replicare: Engle (1982)

Obiectiv

Replicați Tabelul 3 din Engle (1982) — testul ARCH pe inflația din Marea Britanie.

1. Descărcați inflația trimestrială din România (IPC, INS, 1997–2024)
2. Estimați un model AR(4) pentru inflație: $\pi_t = c + \phi_1\pi_{t-1} + \dots + \phi_4\pi_{t-4} + \varepsilon_t$
3. Calculați reziduurile $\hat{\varepsilon}_t$ și testați efecte ARCH: regresați $\hat{\varepsilon}_t^2$ pe $\hat{\varepsilon}_{t-1}^2, \dots, \hat{\varepsilon}_{t-4}^2$
4. Raportați statistica $LM = T \cdot R^2$ și comparați cu $\chi^2(4)$
5. Estimați un model ARCH(4) și comparați cu rezultatele originale ale lui Engle
6. **Întrebare:** Inflația românească prezintă efecte ARCH mai puternice decât cea britanică? De ce?

Ref: Engle, R.F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, *Econometrica*, 50(4), 987–1007.

 TSA_ch5_arch_sim

Bibliografie I

Fundamentele Seriilor de Timp

- ▣ Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice*, 3rd ed., OTexts.
- ▣ Shumway, R.H., & Stoffer, D.S. (2017). *Time Series Analysis and Its Applications*, 4th ed., Springer.
- ▣ Brockwell, P.J., & Davis, R.A. (2016). *Introduction to Time Series and Forecasting*, 3rd ed., Springer.

Serii de Timp Financiare

- ▣ Tsay, R.S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*, 3rd ed., Wiley.
- ▣ Franke, J., Härdle, W.K., & Hafner, C.M. (2019). *Statistics of Financial Markets*, 4th ed., Springer.

Bibliografie II

Abordări Moderne și Machine Learning

- ▣ Nielsen, A. (2019). *Practical Time Series Analysis*, O'Reilly Media.
- ▣ Petropoulos, F., et al. (2022). *Forecasting: Theory and Practice*, International Journal of Forecasting.
- ▣ Makridakis, S., Spiliotis, E., & Assimakopoulos, V. (2020). The M4 Competition, International Journal of Forecasting.

Resurse Online și Cod

- ▣ **Quantlet**: <https://quantlet.com> — Depozit de cod pentru statistică
- ▣ **Quantinar**: <https://quantinar.com> — Platformă de învățare metode cantitative
- ▣ **GitHub TSA**: https://github.com/QuantLet/TSA/tree/main/TSA_ch5 — Cod Python pentru acest seminar

Vă mulțumesc!

Întrebări?

Materialele seminarului sunt disponibile la:

<https://danpele.github.io/Time-Series-Analysis/>

 Quantlet

 Quantinar